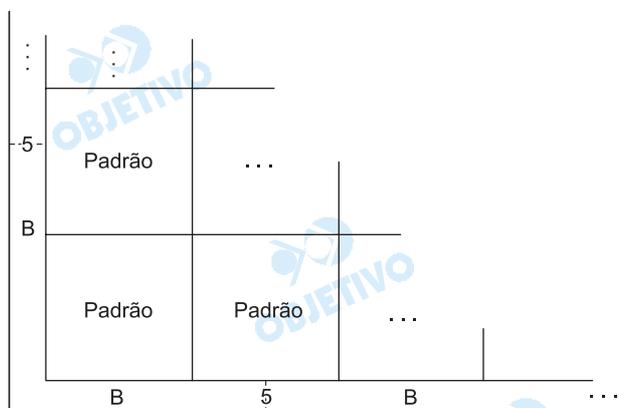
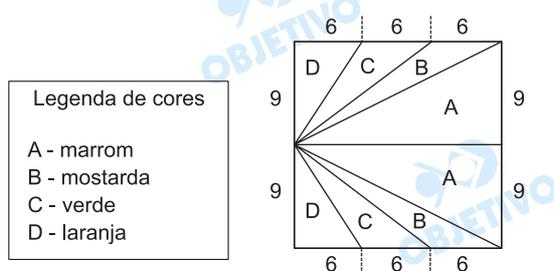


MATEMÁTICA

1

Um tapete deve ser bordado sobre uma tela de 2 m por 2 m, com as cores marrom, mostarda, verde e laranja, da seguinte forma: o padrão quadrado de 18 cm por 18 cm, mostrado abaixo, será repetido tanto na horizontal quanto na vertical; e uma faixa mostarda, de 5 cm de largura, será bordada em toda a volta do tapete, como na figura.



- Qual o tamanho do maior tapete quadrado, como descrito acima, que pode ser bordado na tela? Quantas vezes o padrão será repetido?
- Se com um novelo de lã pode-se bordar 400 cm^2 , qual é o número mínimo de novelos de lã mostarda necessário para confeccionar esse tapete?

Resolução

a) O maior tapete quadrado que pode ser bordado na tela contém 100 vezes o padrão $18 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}$ (10 linhas com 10 padrões em cada linha), além da faixa de 5 cm de largura no contorno.

O tamanho do maior tapete é portanto de **1,9 m por 1,9 m**.

b) 1) A área da faixa mostarda do contorno é $(1,9^2 - 1,8^2) \text{ m}^2 = 0,37 \text{ m}^2 = 3700 \text{ cm}^2$

2) A área da parte mostarda dos 100 padrões é

$$100 \cdot \left(\frac{6 \cdot 9}{2} \cdot 2 \right) = 5400 \text{ cm}^2$$

3) A área total bordada com a cor mostarda é $(5400 + 3700) \text{ cm}^2 = 9100 \text{ cm}^2$

4) O número de novelos de lã mostarda é

$$\frac{9100}{400} = 22,75$$

5) O número mínimo de novelos necessários (e suficientes) é **23**.

Respostas: a) 1,9 m x 1,9 m ; 100 vezes

b) 23 novelos

Um comerciante compra calças, camisas e saias e as revende com lucro de 20%, 40% e 30% respectivamente. O preço x que o comerciante paga por uma calça é três vezes o que ele paga por uma camisa e duas vezes o que ele paga por uma saia. Um certo dia, um cliente comprou duas calças, duas camisas e duas saias e obteve um desconto de 10% sobre o preço total.

- a) Quanto esse cliente pagou por sua compra, em função de x ?
- b) Qual o lucro aproximado, em porcentagem, obtido pelo comerciante nessa venda?

Resolução

a)

	Preço de custo	Lucro	Preço de venda
Calça	x	20%	$1,20 \cdot x$
Camisa	$\frac{x}{3}$	40%	$1,40 \cdot \frac{x}{3}$
Saia	$\frac{x}{2}$	30%	$1,30 \cdot \frac{x}{2}$

Pela compra de 2 produtos de cada tipo, sem desconto, um cliente pagaria

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot 1,20x + 2 \cdot 1,40 \cdot \frac{x}{3} + 2 \cdot 1,30 \cdot \frac{x}{2} = \\
 & = 2,40x + \frac{2,80x}{3} + 1,30x = \\
 & = \frac{7,20x + 2,80x + 3,90x}{3} = \frac{13,90x}{3}
 \end{aligned}$$

Com 10% de desconto, o cliente paga

$$90\% \cdot \frac{13,90x}{3} = 0,90 \cdot \frac{13,90x}{3} = 4,17x$$

b) O preço de custo dos produtos vendidos foi

$$2 \cdot x + 2 \cdot \frac{x}{3} + 2 \cdot \frac{x}{2} = \frac{6x + 2x + 3x}{3} = \frac{11x}{3}$$

O lucro obtido nessa venda foi

$$4,17x - \frac{11x}{3} = \frac{1,51x}{3}, \text{ correspondendo a}$$

$$\frac{\frac{1,51x}{3}}{\frac{11x}{3}} = \frac{1,51}{11} \approx 0,1372 = 13,72\%$$

Respostas: a) $4,17 \cdot x$ b) 13,72%

Uma função f satisfaz a identidade $f(ax) = af(x)$ para todos os números reais a e x . Além disso, sabe-se que $f(4) = 2$. Considere ainda a função $g(x) = f(x - 1) + 1$ para todo o número real x .

- Calcule $g(3)$.
- Determine $f(x)$, para todo x real.
- Resolva a equação $g(x) = 8$.

Resolução

(I) $f(ax) = a f(x), \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$

(II) $f(4) = 2$

(III) $g(x) = f(x - 1) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

a) 1) De (I) e (II), temos

$$a = 2 \text{ e } x = 2 \Rightarrow f(2 \cdot 2) = 2 \cdot f(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(4) = 2 f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 1$$

2) Em (III), $x = 3 \Rightarrow g(3) = f(2) + 1 \Rightarrow g(3) = 2$

b) Em (I), se $x = 4 \Rightarrow f(4 \cdot a) = a \cdot f(4) \Rightarrow f(4a) = 2a$

Então: $f(x) = \frac{x}{2}$

c) Em (III), $g(x) = \frac{x-1}{2} + 1 = 8 \Rightarrow x = 15$

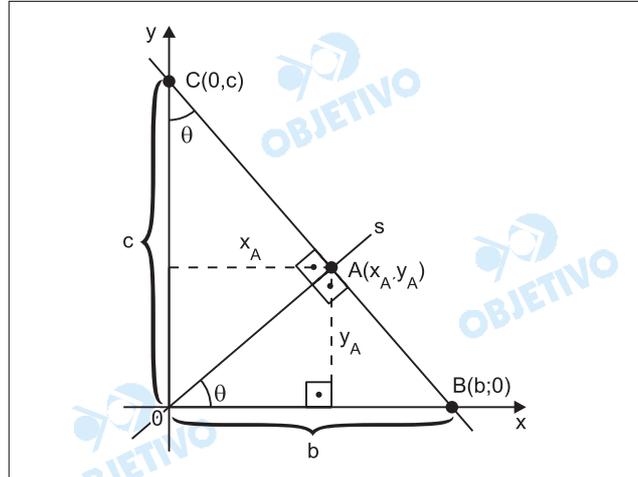
Respostas: a) $g(3) = 2$ b) $f(x) = \frac{x}{2}$ c) $x = 15$

A reta s passa pela origem O e pelo ponto A do primeiro quadrante. A reta r é perpendicular à reta s , no ponto A , e intercepta o eixo x no ponto B e o eixo y no ponto C . Determine o coeficiente angular de s se a área do triângulo OBC for o triplo da área do triângulo OAB .

Resolução

Sejam os pontos $A(x_A; y_A)$, $B(b; 0)$ e $C(0; c)$

A partir do enunciado, temos a figura a seguir:



$$\text{onde: } m_s = \operatorname{tg} \theta = \frac{y_A}{x_A} = \frac{b}{c} \quad (I)$$

Sendo $A_{\Delta OBC} = 3 \cdot A_{\Delta OAB}$, resulta $A_{\Delta OAC} = 2 \cdot A_{\Delta OAB}$ e,

$$\text{portanto, } \frac{c \cdot x_A}{2} = 2 \cdot \frac{b \cdot y_A}{2} \Leftrightarrow \frac{b \cdot y_A}{c \cdot x_A} = \frac{1}{2} \quad (II)$$

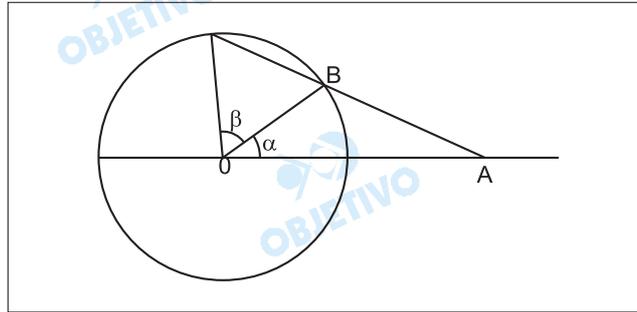
De (I) e (II), resulta

$$m_s \cdot m_s = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m_s^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m_s = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{pois } m_s > 0)$$

$$\text{Resposta: } m_s = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Na figura abaixo, O é o centro da circunferência de raio 1, a reta \overleftrightarrow{AB} é secante a ela, o ângulo β mede 60° e

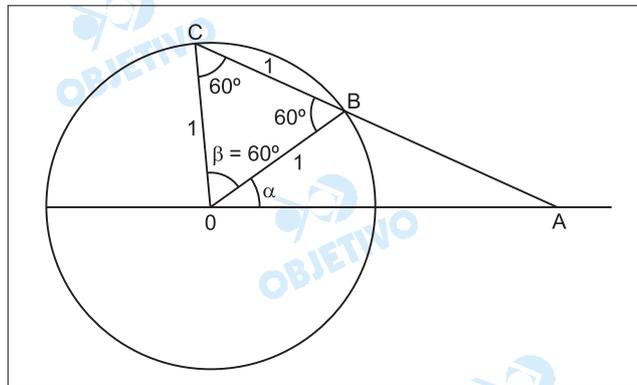
$$\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$



a) Determine $\text{sen } \hat{OAB}$ em função de AB .

b) Calcule AB .

Resolução



Admitindo $\alpha < 60^\circ$ vem:

a) Aplicando a lei dos senos no triângulo AOB , temos

$$\frac{AB}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\text{sen } \hat{OAB}} \Leftrightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{\text{sen } \hat{OAB}} \Leftrightarrow \text{sen } \hat{OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot AB}$$

b) No triângulo AOB , temos

$$\alpha + \hat{OAB} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{OAB} = 60^\circ - \alpha$$

$$\text{Como } \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ temos}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}, \text{ pois } \alpha$$

é agudo.

$$\text{Assim, } \text{sen } \hat{OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot AB} \Leftrightarrow \text{sen } (60^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot AB} \Leftrightarrow$$

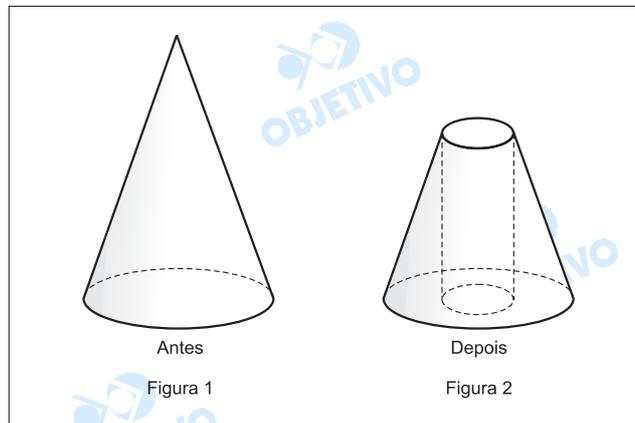
$$\Leftrightarrow \text{sen } 60^\circ \cdot \cos \alpha - \text{sen } \alpha \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot AB} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{13}-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AB = \frac{\sqrt{13}+1}{6}$$

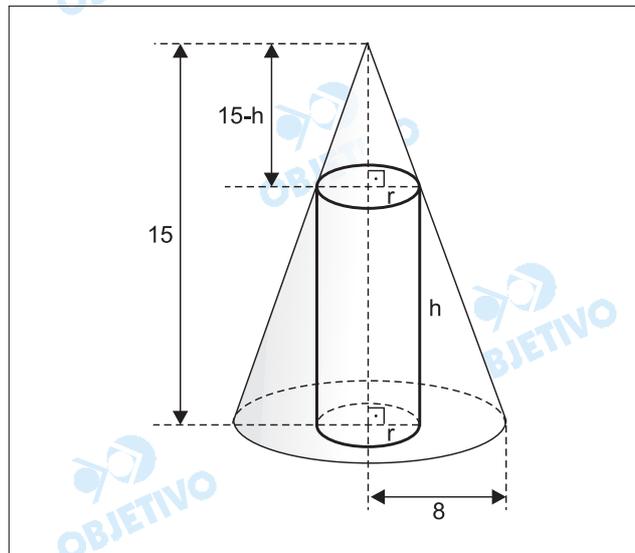
Respostas: a) $\widehat{\text{sen}} O\hat{A}B = \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot AB}$

b) $AB = \frac{\sqrt{13}+1}{6}$

Um torneiro mecânico dispõe de uma peça de metal maciça na forma de um cone circular reto de 15 cm de altura e cuja base B tem raio 8 cm (Figura 1). Ele deverá furar o cone, a partir de sua base, usando uma broca, cujo eixo central coincide com o eixo do cone. A broca perfurará a peça até atravessá-la completamente, abrindo uma cavidade cilíndrica, de modo a obter-se o sólido da Figura 2. Se a área da base deste novo sólido é $\frac{2}{3}$ da área de B, determine seu volume.



Resolução



Seja r o raio, em centímetros, da cavidade cilíndrica e h a altura, em centímetros, dessa cavidade, tem-se:

$$1) \pi (8^2 - r^2) = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \Leftrightarrow 3(64 - r^2) = 128 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{64}{3} \Leftrightarrow r = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$2) \frac{r}{8} = \frac{15 - h}{15}$$

$$\text{Assim, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{15 - h}{15} \Leftrightarrow h = 5(3 - \sqrt{3}) \text{ cm}$$

3) O volume V da peça da figura 2, em centímetros cúbicos, é dado por

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 (15 - h) - \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Assim,

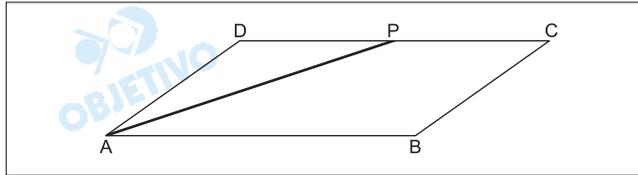
$$V = 320\pi - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{8^2}{3} \cdot 5\sqrt{3} - \pi \cdot \frac{8^2}{3} \cdot 5(3 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \cancel{320\pi} - \frac{320\sqrt{3}\pi}{9} - \cancel{320\pi} + \frac{320\sqrt{3}\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{640\sqrt{3}\pi}{9}$$

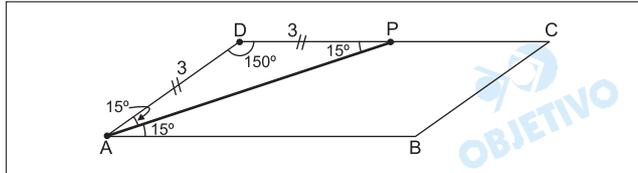
Resposta: O volume do novo sólido é $\frac{640\sqrt{3}\pi}{9} \text{ cm}^3$

No paralelogramo ABCD abaixo, tem-se que $AD = 3$ e $\hat{DAB} = 30^\circ$. Além disso, sabe-se que o ponto P pertence ao lado \overline{DC} e à bissetriz do ângulo DAB.



- a) Calcule AP.
b) Determine AB sabendo que a área do quadrilátero ABCP é 21.

Resolução



- a) No triângulo isósceles DAP, de acordo com a lei dos cossenos, tem:

$$(AP)^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (AP)^2 = 18 + 9\sqrt{3} \Leftrightarrow AP = \sqrt{18 + 9\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AP = 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

- b) A área do paralelogramo ABCD é igual à soma da área do quadrilátero ABCP com a área do triângulo APD.

Assim:

$$2 \cdot \frac{AB \cdot AD \cdot \sin 30^\circ}{2} = \frac{AD \cdot DP \cdot \sin 150^\circ}{2} + 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \cdot AB}{2} = \frac{9}{4} + 21 \Leftrightarrow 6 \cdot AB = 93 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{93}{6} \Leftrightarrow AB = \frac{31}{2}$$

Respostas: a) $AP = 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ b) $AB = \frac{31}{2}$

Determine os números complexos z que satisfazem, simultaneamente, $|z| = 2$ e $\operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{1+i}\right) = \frac{1}{2}$. Lem-

bretes: $i^2 = -1$, se $w = a + bi$, com a e b reais, então $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\operatorname{Im}(w) = b$.

Resolução

Se $z = a + bi$, com a e b reais, então:

$$1) |z| = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4$$

$$2) \frac{z-i}{1+i} = \frac{(a+bi-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$$

$$= \frac{a-ai+bi+b-i-1}{2} = \frac{a+b-1}{2} + \frac{(-a+b-1)}{2}i$$

$$3) \operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{1+i}\right) = \frac{-a+b-1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -a+b-1 = 1$$

$$\Leftrightarrow -a+b = 2 \Leftrightarrow b = a+2$$

$$4) \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ b = a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + (a+2)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = -2$$

$$5) a = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow z = 2i$$

$$a = -2 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z = -2$$

Resposta: $z = 2i$ ou $z = -2$

Considere o sistema linear nas variáveis x , y e z :

$$\begin{cases} x + (\cos^2 a) y + (\sin^2 a) z = 0 \\ x + (\cos^2 b) y + (\sin^2 b) z = 0 \\ (\cos^2 c) y + (\sin^2 c) z = 0 \end{cases}$$

- a) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear.
- b) Para que valores de a , b e c o sistema linear admite soluções não triviais?
- c) Calcule as soluções do sistema quando $\sin^2 a = 1$ e $\cos^2 c = 1/5$.

Resolução

a) O determinante da matriz dos coeficientes é

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos^2 a & \sin^2 a \\ 1 & \cos^2 b & \sin^2 b \\ 0 & \cos^2 c & \sin^2 c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \sin^2 a \\ 1 & 1 & \sin^2 b \\ 0 & 1 & \sin^2 c \end{vmatrix} =$$

$$= \sin^2 c + \sin^2 a - \sin^2 c - \sin^2 b = \sin^2 a - \sin^2 b$$

b) O sistema admite solução não-trivial se, e somente se, $\sin^2 a - \sin^2 b = 0 \Leftrightarrow \sin a = \pm \sin b \Leftrightarrow b = a + n\pi$ ou $b = -a + n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, e c qualquer.

c) Quando $\sin^2 a = 1$ e $\cos^2 c = \frac{1}{5}$ tem-se $\cos^2 a = 0$

e $\sin^2 c = \frac{4}{5}$. O sistema passa a ser

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + (\cos^2 b) y + (\sin^2 b) z = 0 \\ \frac{1}{5} y + \frac{4}{5} z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \text{ (I)} \\ x + (\cos^2 b) y + (\sin^2 b) z = 0 \text{ (II)} \\ y = -4z \text{ (III)} \end{cases}$$

Da equação (II), tem-se

$$-z + (\cos^2 b)(-4z) + (\sin^2 b)z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-1 - 4\cos^2 b + \sin^2 b)z = 0 \Leftrightarrow -5\cos^2 b \cdot z = 0$$

Se $\cos^2 b \neq 0$, então $z = 0$, $x = 0$ e $y = 0$

Se $\cos^2 b = 0$, então z é qualquer e a solução é do tipo $(-\alpha; -4\alpha; \alpha)$, $\forall \alpha$.

Respostas: a) $\sin^2 a - \sin^2 b$

b) Qualquer a , b e c , tais que $b = \pm a + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

c) $V = \{(0; 0; 0)\}$, se $\cos b \neq 0$

$V = \{(-\alpha; -4\alpha; \alpha)\}$, $\forall \alpha$, se $\cos b = 0$

a) Determine os pontos A e B do plano cartesiano nos quais os gráficos de $y = \frac{12}{x} - 1$ e $x + y - 6 = 0$ se interceptam.

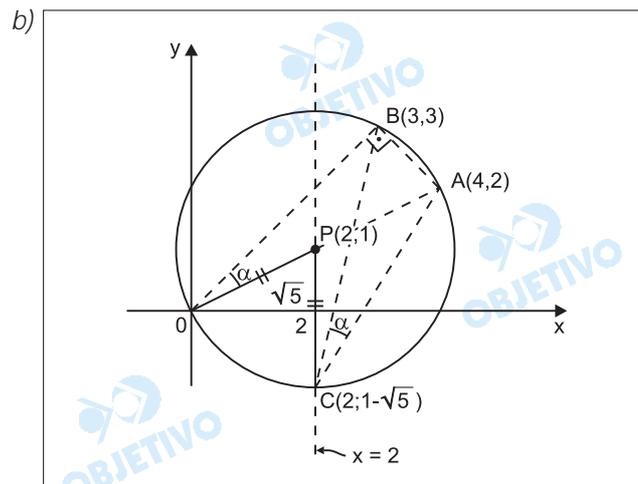
b) Sendo O a origem, determine o ponto C no quarto quadrante que satisfaz $\hat{A}OB = \hat{A}CB$ e que pertence à reta $x = 2$.

Resolução

$$a) \begin{cases} y = \frac{12}{x} - 1 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{12}{x} - 1 \\ x + \frac{12}{x} - 1 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{12}{x} - 1 \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Assim, os gráficos se interceptam nos pontos A(4;2) e B(3;3).



1º) Sendo $m_{OB} = 1$ e $m_{AB} = -1$, observa-se que o triângulo OAB é retângulo em B e, portanto, o centro P da circunferência que passa pelos pontos O, A e B é o ponto médio de OA, isto é, P(2;1).

2º) Sabendo que $\hat{A}OB = \hat{A}CB$ e que o ponto C pertence à reta $x = 2$, conclui-se que esse ponto pertence à circunferência que passa pelos pontos O, A e B, e que o ponto C é o ponto de menor ordenada dessa circunferência, resultando C(2; $1 - \sqrt{5}$).

Respostas: a) A(4;2) e B(3;2)
b) C(2; $1 - \sqrt{5}$)