Sistemas de Equações do Primeiro Grau

1. Sistemas de Equações do Primeiro Grau

1.1. Definição

Em problemas envolvendo equações do primeiro grau, podemos precisar encontrar o valor de mais de uma incógnita. Neste caso, devemos ter também mais de uma equação. Um conjunto de equações do primeiro grau determina um **sistema de equações** do primeiro grau.

1.2. Métodos de resolução

- **Método da substituição**

Este método consiste em obter, a partir de uma das equações, uma incógnita em função das demais. Em seguida, substitui-se esse resultado nas outras equações.

Veja o exemplo:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \ (I) \\ 5x - 2y = 16 \ (II) \end{cases}$$

1º passo: Escolhemos uma das equações e isolamos uma das incógnitas em função da outra.

$$(I): 2x - y = 1 \rightarrow y = 2x - 1$$

2º passo: Substituímos a incógnita isolada, em outra equação do sistema, pela expressão obtida no passo anterior, a fim de encontrar o valor da outra incógnita.

$$(II): 5x - 2y = 16 \rightarrow 5x - 2(2x - 1) = 16 \rightarrow x + 2 = 16 \rightarrow \boxed{x = 14}$$

3º passo: Ao encontrarmos o valor da incógnita, devemos substituí-lo em qualquer uma das equações para encontrarmos o valor da outra.

$$(I): 2x - y = 1 \rightarrow 2(14) - y = 1 \rightarrow \boxed{y = 27}$$

4º pass: Escrevemos o conjunto solução do sistema como:

$$S = \{(14, 27)\}$$

- **Método da combinação linear ou adição**

Este método consiste em multiplicar uma das equações por um número real não nulo a fim de igualar os coeficientes de uma das incógnitas em ambas as equações. Em seguida, efetuando a soma (ou subtração) entre as equações, esses coeficientes irão se anular, diminuindo, assim, a quantidade de incógnitas.

Veja o exemplo:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \ (I) \\ 5x - 2y = 16 \ (II) \end{cases}$$

Ao multiplicar toda a equação (I) por 2, teremos:

$$2x - y = 1 \rightarrow (\cdot\ 2) \rightarrow 4x - 2y = 2$$

Reescrevendo o sistema, teremos:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \ (I') \\ 5x - 2y = 16 \ (II) \end{cases}$$

Efetuando a subtração (I') – (II):

$$-x = -14 \rightarrow \boxed{x = 14}$$

Substituindo o valor encontrado da incógnita em qualquer uma das equações, encontraremos o valor da outra.

$$(I): 2x - y = 1 \rightarrow 2(14) - y = 1 \rightarrow \boxed{y = 27}$$

Assim, o conjunto solução é:

$$S = \{(14, 27)\}$$

Exercícios de sala

1. **(Fmc 2022)** Um recipiente cheio de açúcar pesa 750g e com 1/3 de sua capacidade de açúcar seu novo peso é de 400g.
O mesmo recipiente com 2/3 de sua capacidade de açúcar pesa
a) 500g
b) 575g
c) 600g
d) 625g
e) 650g

2. **(Upf 2022)** O professor Ademir tem um recipiente contendo n mililitros de solução para distribuir aos alunos em sua aula de química. Se ele der a cada aluno 3 mililitros de solução, sobrarão 7 mililitros. Para dar a cada aluno 4 mililitros de solução, ele precisará de 19 mililitros adicionais. Nessas condições, o número de estudantes na aula é:
a) 23
b) 22
c) 26
d) 19
e) 52

3. **(Unisinos 2022)** Num plano de saúde, a mensalidade é de R$ 300,00 para pessoas de até 50 anos e de R$ 500,00 para pessoas com 51 anos ou mais. Há 1800 pessoas associadas ao plano, que pagam mensalmente um total de R$ 680.000,00. Com base nessas informações, podemos afirmar que a quantidade de pessoas com até 50 anos associadas ao plano é igual a
a) 700
b) 800
c) 900
d) 1000
e) 1100

4. **(Unicamp indígenas 2021)** Numa lanchonete, 2 refrigerantes e 2 coxinhas custam R$18,00. O preço de 3 refrigerantes e 5 coxinhas é R$ 37,00. Podemos dizer que o valor a ser pago por 1 refrigerante e 2 coxinhas é:
a) R$ 14,00.
b) R$ 13,00.
c) R$ 11,00.
d) R$ 12,00.

5. **(Uema 2020)** Uma consultora de produtos de beleza precisa repor o seu estoque junto à distribuidora. Para tanto, gastou nas suas compras R$ 345,00 para a reposição do estoque cujos preços, por unidade, são: R$ 12,00, o batom e R$ 7,00, o esmalte.
Sabendo que foram adquiridas 35 unidades de produtos no total, calcule a quantidade de batons e de esmaltes comprados.

Estudo Individualizado (E.I.)

1. Verifique se o par ordenado (3,2) é solução dos sistemas de equações a seguir.

a) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x - y = -11 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 3y = 10 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 4y = 12 \\ 7x - y = 19 \end{cases}$

2. Resolva os sistemas pelo método da substituição

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ x + y = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

3. Resolva os sistemas pelo método da adição

a) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 3y = 15 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x - 5y = 15 \\ -7x + 16y = 13 \end{cases}$

4. Uma pessoa participa de um jogo em que uma moeda honesta é lançada 100 vezes. Cada vez que ocorre cara, ela ganha R$ 10,00 e cada vez que ocorre coroa, perde R$ 5,00. Se após os 100 lançamentos a pessoa teve um ganho líquido de R$ 25,00, quantas vezes deve ter ocorrido cara na moeda?

5. Para assistir a um show em um clube, compareceram 4000 pessoas. Nesse show, o número de sócios presentes foi 1100 a menos que o dobro do número de não-sócios presentes. Qual o número de sócios compareceu ao show?

6. Em um jogo de basquete, algumas cestas valem 2 pontos enquanto outras valem 3 pontos. Um time totalizou 86 pontos. Sabendo que a quantidade de cestas feitas pelo time foi 37, calcule o número de cestas de 3 pontos.

7. Em uma fazenda, existem cavalos e galinhas, totalizando 50 cabeças e 100 pés. Encontre o número de cavalos e galinhas dessa fazenda.

8. Em um estacionamento, há triciclos e quadriciclos, totalizando 17 veículos e 61 rodas. Quantos triciclos há nesse estacionamento?

9. Carlos possui uma gráfica e frequentemente transporta caixas de madeira contendo resmas de papel. As caixas vazias têm sempre a mesma massa e as resmas de papel também. Quando ele transporta 10 caixas, cada uma com 30 resmas, a carga total tem massa igual a 650 kg. Por outro lado, quando ele transporta 20 caixas, cada uma com 20 resmas, a carga total tem massa de 900 kg. Determine a massa de uma caixa vazia, em quilogramas.

10. Certo dia, numa mesma casa de câmbio, Paulo trocou 40 dólares e 20 euros por R$ 225,00 e Pedro trocou 50 dólares e 40 euros por R$ 336,00. Nesse dia, 1 euro estava cotado em quanto? E um dólar?

Gabarito (E.I.)

1.

a) É solução, pois: $\begin{cases} 2\cdot(3)+(2) = 6+2 = 8 \\ (3)-2\cdot(2) = 3-4-1 \end{cases}$

b) É solução, pois: $\begin{cases} -3\cdot(3)-(2) = -9-2 = -11 \\ -(3)+(2) = -3+2 = -1 \end{cases}$

c) É solução, pois: $\begin{cases} 5\cdot(3)-3\cdot(2) = 15-5 = 10 \\ (3)+3\cdot(2) = 3+6 = 9 \end{cases}$

d) Não é solução, pois: $\begin{cases} (3)+4\cdot(2) = 3+8 = 11 \neq 12 \\ 7\cdot(3)-(2) = 21-2 = 19 \end{cases}$

2.

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$

(L1): $x = 7 - y$
(L2): $7 - y - y = 1 \leftrightarrow 7 - 2y = 1 \leftrightarrow y = 3$
(L1): $x = 7 - 3 \leftrightarrow x = 4$
$S = \{(4, 3)\}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$

(L1): $x = 5 - y$
(L2): $2 \cdot (5 - y) - y = 9 \leftrightarrow 10 - 2y - y = 9 \leftrightarrow -3y = -1 \leftrightarrow y = \frac{1}{3}$
(L1): $x = 5 - (\frac{1}{3}) \leftrightarrow x = \frac{14}{3}$
$S = \{(\frac{14}{3}, \frac{1}{3})\}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ x + y = 18 \end{cases}$

(L1): $y=3x-10$
(L2): $x + 3x - 10 = 18 \leftrightarrow 4x = 28 \leftrightarrow x = 7$
(L1): $y = 3 \cdot (7) - 10 \leftrightarrow y = 21 - 10 \leftrightarrow y =11$
$S = \{(7, 11)\}$

d) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

(L1): $x = 10 - y$
(L2): $10 - y - 3y = -2 \leftrightarrow -4y = -12 \leftrightarrow y = 3$
(L1): $x = 10 - 3 \leftrightarrow x = 7$
$S = \{(7, 3)\}$

3.

a) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}$

(L1) – (L2):
$(3x + y) - (3x + 4y) = 3 - 30$
$3x + y - 3x - 4y = -27$
$-3y = -27$
$y = 9$
(L1): $3x + 9 = 3 \leftrightarrow 3x = -6 \leftrightarrow x = -2$
$S = \{(-2, 9)\}$

b) $\begin{cases} 5x - 3y = 15 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

(L1) + (L2):
$5x - 3y + 2x + 3y = 15 + 6$
$7x = 21$
$x = 3$
(L1): $5 \cdot (3) - 3y = 15 \leftrightarrow 15 - 3y = 15 \leftrightarrow -3y = 0 \leftrightarrow y = 0$
$S = \{(3, 0)\}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

3(L1) – 2(L2):
$3(2x + 5y) - 2(3x + 2y) = 3 \cdot 16 - 2 \cdot 2$
$6x + 15y - 6x - 4y = 48 - 4$
$11y = 44$
$y = 4$
(L1): $2x + 5 \cdot (4) = 16 \leftrightarrow 2x + 20 = 16 \leftrightarrow x = -2$
$S = \{(-2, 4)\}$

d) $\begin{cases} 6x - 5y = 15 \\ -7x + 16y = 13 \end{cases}$

7(L1) + 6(L2):
$7(6x - 5y) + 6(-7x + 16y) = 7 \cdot 15 + 6 \cdot 13$
$42x - 35y - 42x + 96y = 105 + 78$
$61y = 183$
$y = 3$
(L1): $6x - 5 \cdot (3) = 15 \leftrightarrow 6x = 30 \leftrightarrow x = 5$
$S = \{(5, 3)\}$

4.

Quantidade de caras: x
Quantidade de coroas: y
Valores obtidos com a face cara: 10x
Valores obtidos com a face coroa: -5y
Total de lançamentos: $x + y = 100$
Total de valores: $10x - 5y = 25$

Montando o sistema, temos:
$\begin{cases} x + y = 100 \\ 10x - 5y = 25 \end{cases}$

Resolvendo pelo método da adição:
5(L1) + L2:
$5(x + y) + 10x - 5y = 5 \cdot 100 + 25$
$5x + 5y + 10x - 5y = 525$
$15x = 525$
$x = 35$

Portanto, ocorreu a face cara 35 vezes.

5.

Número de não-sócios: x
Número de sócios: y
Total de pessoas: $x + y = 4000$
Relação entre sócios e não-sócios: $y = 2x - 1100$

Por substituição: $x + y = 4000 \leftrightarrow x + 2x - 1100 = 4000 \leftrightarrow 3x = 5100 \leftrightarrow x = 1700$

Assim, $y = 2 \cdot (1700) - 1100 = 2300$

Portanto, compareceram 2300 sócios ao show.

6.

Quantidade de cestas de 2 pontos: x
Quantidade de cestas de 3 pontos: y
Pontos obtidos com as cestas de 2 pontos: 2x
Pontos obtidos com as cestas de 3 pontos: 3x
Total de cestas: x + y = 37
Total de pontos: 2x + 3x = 86

Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y = 37 \\ 2x + 3y = 86 \end{cases}$$

Resolvendo pelo método da adição:
2(L1) – L2:
2(x + y) - (2x + 3y) = 2 · 37 - 86
2x + 2y - 2x - 3y = -12
-y = -12
y = 12

Portanto, foram feitas 12 cestas de 3 pontos.

7.

Quantidade de cavalos (logo, de cabeças de cavalos): x
Quantidade de galinhas (logo, de cabeças de galinhas): y
Quantidade de pés de cavalos: 4x
Quantidade de pés de galinhas: 2y
Total de cabeças: x + y = 50
Total de pés: 4x + 2y = 100

Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 4x + 2y = 100 \end{cases}$$

Resolvendo pelo método da adição:
2(L1) - L2:
2(x + y) - (4x + 2y) = 2 · 50 - 100
2x + 2y - 4x - 2y = 0
-2x = 0
x = 0

(L1): x + y = 50 ↔ 0 + y = 50 ↔ y = 50

Portanto, existem 0 cavalos e 50 galinhas.

8.

Quantidade de triciclos: x
Quantidade de quadriciclos: y
Quantidade de rodas dos triciclos: 3x
Quantidade de rodas dos quadriciclos: 4y
Total de veículos: x + y = 17
Total de rodas: 3x + 4y = 61

Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 3x + 4y = 61 \end{cases}$$

Resolvendo pelo método da adição:
3(L1) – (L2):
3(x + y) - (3x + 4y) = 3 · 17 - 61
3x + 3y - 3x - 4y = -10
-y = -10
y = 10

(L1): x + y = 17 ↔ x + 10 = 17 ↔ x = 7

Portanto, há 7 triciclos no estacionamento.

9.

Sabendo que 10 caixas (c) com 300 resmas (r) pesam 650 kg, temos: 10c + 300r = 650

Sabendo que 20 caixas, com 400 resmas pesam 900 kg, temos: 20c + 400r = 900

Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 10c + 300r = 650 \\ 20c + 400r = 900 \end{cases}$$

Resolvendo pelo método da adição:
2(L1) – (L2):
2(10c + 300r) - (20c + 400r) = 2 · 650 - 900
20c + 600r - 20c - 400r = 400
200r = 400
r = 2

(L1): 10c + 300r = 650 ↔ 10c + 600 = 650 ↔ 10c = 50 ↔ c = 5

Portanto, uma caixa vazia tem massa 5 kg.

10.

Cotação do dólar: x
Cotação do euro: y
Operação de Paulo: 40x + 20y = 225
Operação de Pedro: 50x + 40y = 336

Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 40x + 20y = 225 \\ 50x + 40y = 336 \end{cases}$$

Resolvendo pelo método da adição:
2(L1) – (L2):
2 · (40x + 20y) - (50x + 40y) = 2 · 225 - 336
80x + 40y - 50x + 40y = 114
30x = 114
x = 3,8

(L1): $40x + 20y = 225 \leftrightarrow 40 \cdot 3{,}8 + 20y = 225 \leftrightarrow 152 + 20y = 225 \leftrightarrow 20y = 73 \leftrightarrow y = 3{,}65$

Portanto, 1 euro estava cotado em R$ 3,65 e 1 dólar estava cotado em R$ 3,80.