

PROBLEMA RESOLVIDO

(EsPCEX/98) Um automóvel percorre a primeira metade de um trecho de 400 metros com velocidade de 120km/h. qual deve ser a maior velocidade média do carro na segunda metade do trecho, para que sua velocidade média, em todo o trecho seja de 8km/h?

- a) 20km/h b) 48 km/h c) 56 km/h
d) 60 km/h e) 80 km

Resolução: Alternativa D

Vamos organizar as informações numa tabela. Sabemos que cada um dos dois trechos terá um comprimento de 200m, totalizando 400m. Assim, ficamos com as quantidades expressas abaixo.

	Trecho 01	Trecho 02	Trecho 03	Trecho 04
ΔS	200m	200m	\Rightarrow	400m
Δt	Δt_1	Δt_2	\Rightarrow	Δt_{Total}
	\Downarrow	\Downarrow		\Downarrow
v	120 km/h	v_2		80 km/h

Para encontrar o valor das incógnitas, podemos recorrer definição de velocidade ou às propriedades aditivas das distâncias e dos intervalos de tempo. A primeira nos permite explorar relações nas colunas da tabela; a segunda, nas linhas. Da coluna do primeiro trecho, temos:

$$\Delta t_1 = \frac{0,2\text{km}}{120\text{km/h}}$$

Da coluna relativa ao percurso total, temos:

$$\Delta t_{Total} = \frac{0,4\text{km}}{80\text{km/h}}$$

Como queremos encontrar x_2 , podemos escrever

$$\Delta t_2 = \frac{0,2\text{km}}{v_2}$$

Da relação aditiva do tempo, temos

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t_{Total} \Rightarrow \frac{0,2\text{km}}{120\text{km/h}} + \frac{0,2\text{km}}{v_2} = \frac{0,4\text{km}}{80\text{km/h}}$$

$$\therefore v_2 = 60\text{km/h}$$

Além de organizar os dados de maneira conveniente, esse algoritmo consegue dar um passo-a-passo de todo o processo de resolução. De certa forma, o algoritmo se parece com um jogo de Sudoku, isto é, as linhas ou colunas que devem ser trabalhadas primeiramente são aquelas que têm apenas uma incógnita.

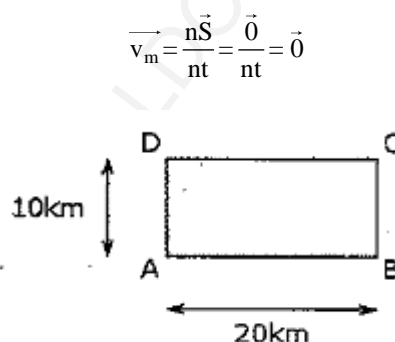
PROBLEMA RESOLVIDO

Uma fazenda tem formato retangular de lados 10km e 20km. Para fazer o patrulhamento desse perímetro, uma pessoa cavalga com velocidade escalar de 25km/h nos trechos menores e de 20km/h nos trechos maiores. Calcule:

- a) a velocidade média do trajeto completo.
b) a velocidade escalar média do trajeto completo.

Resolução

a) Fazendo um esquema do terreno, vamos que ao se fazer uma volta completa (digamos saindo de A e fazendo o percurso no sentido anti-horário), o ponto final é igual ao ponto inicial. Dessa forma não há variação de posição entre o início e o fim do trajeto.



b) Considerando cada trecho, podemos fazer o processo igual ao do exemplo anterior,

	Trecho 01	Trecho 02	Trecho 03	Trecho 04		TOTAL
d	20km	10km	20km	10km	\Rightarrow	60km
Δt	Δt_1	Δt_2	Δt_3	Δt_4	\Rightarrow	Δt_{Total}
	\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow		\Downarrow
v	25km/h	20km/h	25km/h	20km/h		80km/h

Veja que usamos a distância (d) e não deslocamento (ΔS), uma vez que queremos uma relação com a velocidade escalar. Calculando o tempo gasto em cada trajeto, temos:

$$\Delta t_1 = \Delta t_3 = \frac{20\text{km}}{25\text{km/h}} = 0,8\text{h}$$

$$\Delta t_2 = \Delta t_4 = \frac{10\text{km}}{20\text{km/h}} = 0,5\text{h}$$

Usando a aditividade dos intervalos de tempo, temos

$$\Delta t_{total} = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4 = 2,6\text{h}$$

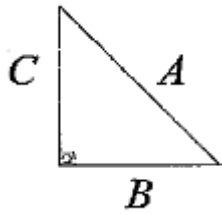
Para velocidade escalar, temos:

$$v = \frac{d_{total}}{\Delta t} = \frac{60\text{km}}{2,6\text{h}} \approx 23\text{km/h}$$

No último exemplo, fica evidente que a velocidade média diz muito pouco a respeito do movimento. Inclusive que, se a velocidade média for zero, não é certo que o móvel permaneceu parado durante o intervalo de tempo decorrido.

PROBLEMA RESOLVIDO

(AFA/2011) Um turista, passeando de bugre pelas areias de uma praia em Natal – RN, percorre uma trajetória triangular, que pode ser dividida em três trechos, conforme a figura abaixo.



Os trechos B e C possuem o mesmo comprimento, mas as velocidades médias desenvolvidas nos trechos A, B e C foram, respectivamente, v , $2v$ e v . A velocidade escalar média desenvolvida pelo turista para percorrer a trajetória triangular vale

- a) $v\sqrt{2}$ b) $2v\sqrt{2}$
 c) $4v$ d) $(4 - 2\sqrt{2})v$

Resolução: Alternativa D

Seja L o comprimento dos trechos C e B, o trecho A tem comprimento $L\sqrt{2}$. Construindo a tabela para o processo temos:

	A	B	C		TOTAL
d	$L\sqrt{2}$	L	L	\Rightarrow	$(2 + \sqrt{2})L$
Δt	Δt_1	Δt_2	Δt_3	\Rightarrow	Δt_{Total}
	\downarrow	\downarrow	\downarrow		\downarrow
v	v	$2v$	v		v_{med}

Note que, através de cada coluna dos trechos, podemos encontrar os tempos dos percursos e então o tempo total:

$$\Delta t_{\text{Total}} = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = \frac{L\sqrt{2}}{v} + \frac{L}{2v} + \frac{L}{v} = \frac{(2\sqrt{2} + 3)L}{2v}$$

A velocidade média será

$$v_{\text{med}} = \frac{d_{\text{Total}}}{\Delta t_{\text{Total}}} = \frac{(2 + \sqrt{2})L}{\frac{(2\sqrt{2} + 3)L}{2v}} = 2(2 - \sqrt{2})v = (4 - 2\sqrt{2})v$$

PROBLEMA RESOLVIDO

De duas cidadezinhas, Arcádia e Bellona, ligadas por uma estrada reta de 20 km de comprimento, partem duas carroças, puxada cada uma por um cavalo e andando a velocidade de 5km/h. No instante da partida, uma mosca, que estava pousada na testa do primeiro cavalo, parte voando em linha reta, com velocidade de 15km/h e vai pousar na testa do segundo cavalo. Após um instante desprezível, parte novamente e volta, com a mesma velocidade de antes, em direção ao primeiro cavalo, até pousar em sua testa. E assim, prossegue nesse vaivém até que os dois cavalos se encontram e a mosca morre

esmagada entre as duas testas. Quantos quilômetros percorreu a mosca?

Resolução

Seja S_A a posição, em um instante qualquer, do cavalo que parte de Arcádia e S_B , do que parte de Bellona. Podemos admitir que Arcádia é o marco zero do nosso problema e que Bellona está a 10km a frente.



Com essa adoção de eixos, o cavalo que parte de Arcádia terá posição inicial $S_{0A} = 0$ e velocidade $v_A = 5\text{km/h}$. Já para o que parte de Bellona, temos $S_{0B} = 20\text{km}$ e velocidade $v_B = -5\text{km/h}$, já que está contrária ao eixo. Note que a informação dada no enunciado é a velocidade escalar e não a velocidade real da carroça.

Assim temos as seguintes equações horárias:

$$S_A(t) = 5t \quad S_B(t) = 20 - 5t$$

Para que haja encontro, os dois cavalos devem estar na mesma posição, então devemos ter

$$S_A(t) = S_B(t) \Rightarrow 5t = 20 - 5t \Rightarrow t = 2\text{h}$$

Na equação acima, t não é uma variável, mas uma incógnita, ou seja, valor definido. Essa condição de encontro é atendida para um valor específico de tempo. Com isso, sabemos que a mosca tem 2h para poder viajar entre essas carroças. Com isso, concluímos que ela viaja $d_m = v_{\text{mosca}} = 30\text{km}$

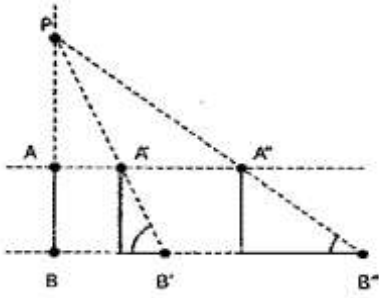
As vezes, só as equações não são suficientes para que resolvamos os problemas. Dessa forma é sempre bom fazermos alguns desenhos ou esquemas das situações envolvidas. Além de forçar um raciocínio sobre o problema, esses esquemas podem evidenciar relações geométricas que podem ser utilizadas na questão.

PROBLEMA RESOLVIDO

Uma pessoa de altura h anda em linha reta com velocidade de módulo v e passa o próximo a um poste de altura H . Calcule a velocidade da sombra projetada na calçada.

Resolução

No esquema abaixo, os pontos A, A' e A'' representam a posição da cabeça do pedestre para três instantes distintos, já os pontos B, B' e B'' representam a posição da sombra projetada para esses mesmos instantes.



Note que, pelas alturas fornecidas, temos $PB = H$ e $PA = H - h$. Vamos chamar de $x_p(t)$ a posição do pedestre, medida a partir do ponto A, em um dado instante, e de $x_s(t)$ a posição da sombra medida a partir de B. Temos

$$x_p(t) = v \cdot t$$

Por semelhança de triângulo, temos

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AA'}{BB'} \Rightarrow \frac{H-h}{H} = \frac{x_p(t)}{x_s(t)} \Rightarrow$$

$$x_s(t) = \frac{Hx_p(t)}{H-h} = \left(\frac{H}{H-h}\right)vt$$

Logo a velocidade pedida é

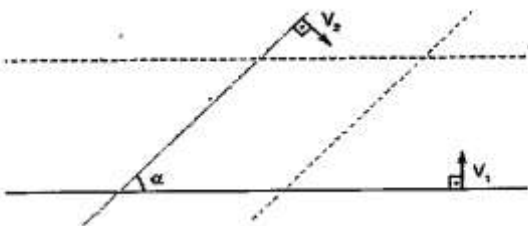
$$v_s = \left(\frac{H}{H-h}\right)v$$

PROBLEMAS RESOLVIDO

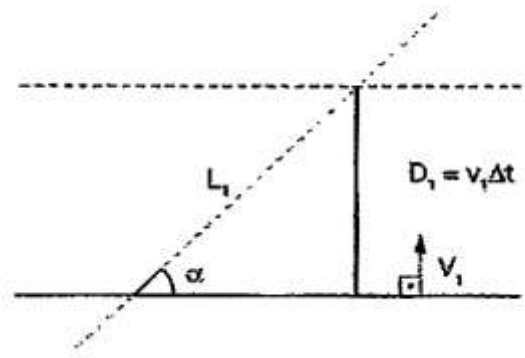
Duas retas infinitas movem-se com velocidades constantes v_1 e v_2 dirigidas perpendicularmente a seus respectivos comprimentos. O ângulo de interseção entre elas é α . Calcule a velocidade do ponto de interseção.

Resolução

Vamos considerar dois instantes da situação descrita.



No desenho, as linhas contínuas são as posições iniciais das retas, e as pontilhadas, as finais. Como as velocidades são perpendiculares a cada reta temos que as retas após a translação são paralelas às retas iniciais, logo nossa figura é um paralelogramo. Vamos chamar de L_1 e L_2 os lados desse paralelogramo. Podemos relacioná-los com as distâncias percorridas como no desenho abaixo:



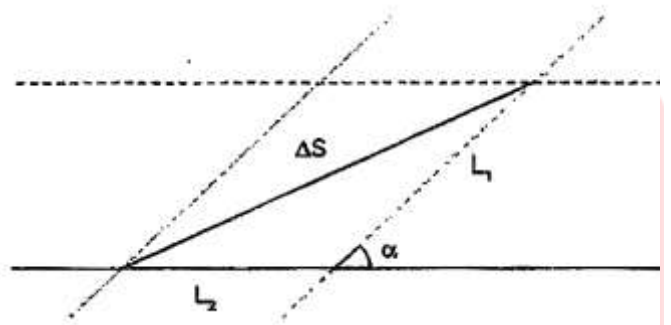
Assim temos:

$$L_1 = \frac{D_1}{\text{sen}\alpha} = \frac{v_1 \Delta t}{\text{sen}\alpha}$$

Analogamente,

$$L_2 = \frac{D_2}{\text{sen}\alpha} = \frac{v_2 \Delta t}{\text{sen}\alpha}$$

Sendo ΔS a diagonal do paralelogramo, vemos que ela corresponde ao deslocamento do ponto de interseção.



Podemos determinar ΔS em função de L_1 e L_2 através da lei dos cossenos

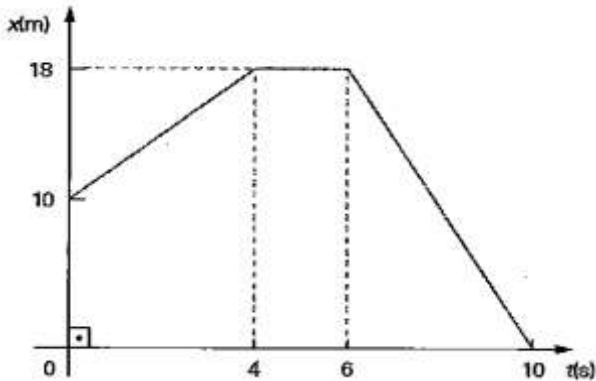
$$\Delta S^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2 \cos(180 - \alpha)$$

$$\Delta S^2 = \frac{[v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(\alpha)](\Delta t)^2}{\text{sen}^2\alpha}$$

$$\therefore v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(\alpha)}}{\text{sen}\alpha}$$

PROBLEMA RESOLVIDO

Dado o gráfico de posição abaixo, analise a variação da velocidade do móvel e esboce seu gráfico.



Resolução:

Podemos ver que o gráfico é composto de três seguimentos de retas. Então, em cada segmento, a velocidade é constante.

Antes de encontrarmos os valores, podemos prever que a velocidade será positiva no primeiro trecho, nula no segundo e negativa no terceiro, já que os segmentos de retas são respectivamente ascendente, horizontal e descendente. Além disso podemos garantir que o módulo da velocidade no terceiro trecho será maior que a do primeiro, já que o segmento do terceiro trecho é mais inclinado.

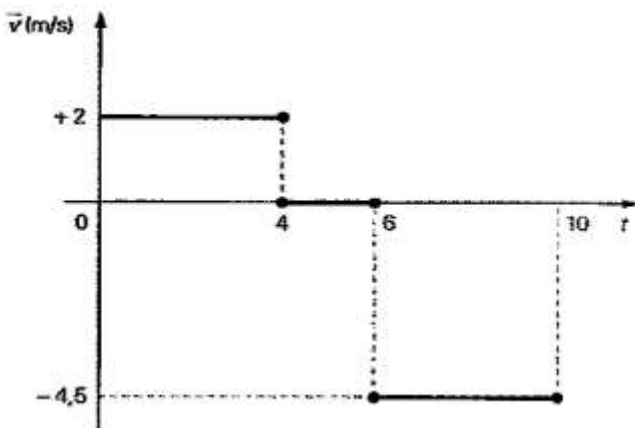
Fazendo os cálculos para cada velocidade temos:

$$v_1 = \frac{18 - 10}{4 - 0} = 2 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{18 - 18}{6 - 4} = 0 \text{ m/s}$$

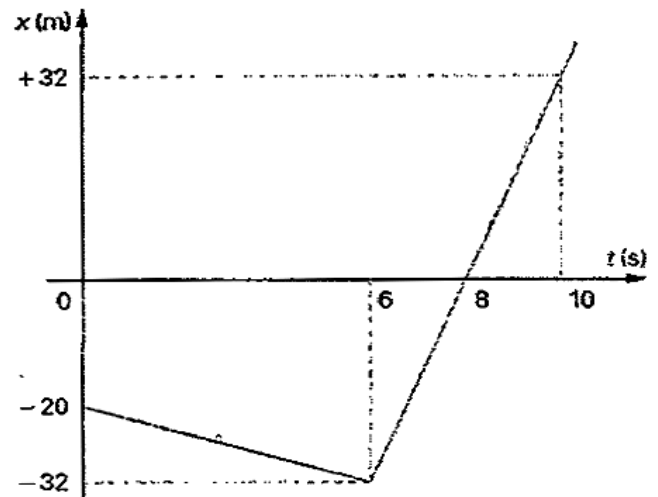
$$v_3 = \frac{0 - 18}{10 - 6} = -4,5 \text{ m/s}$$

Note que todas as previsões foram confirmadas.



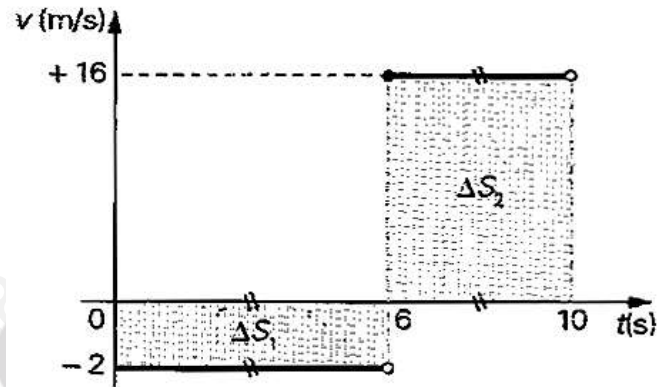
PROBLEMA RESOLVIDO

Dado o gráfico de velocidade abaixo, e sabendo que o móvel estava na posição -20m no início do movimento, encontre o gráfico da posição.



Resolução

Vamos usar a relação entre os deslocamentos e a área entre a curva e o eixo do tempo. Para resolvermos esse problema, vamos calcular as áreas destacadas no gráfico abaixo.



No primeiro intervalo, a velocidade é negativa. Apesar de não existir área negativa, temos que levar o sinal em conta para a determinação da variação da posição. Para o deslocamento ΔS_1 desse trecho, temos

$$\Delta S_1 = v_1 \Delta t_1 = -2 \times (6 - 0) = -12 \text{ m}$$

Como o móvel parte de $S_0 = -20 \text{ m}$, podemos escrever.

$$\Delta S_1 = S(6s) - S_0 \Rightarrow S(6s) = S_0 + \Delta S_1$$

$$S(6s) = -20 + (-12) = -32 \text{ m}$$

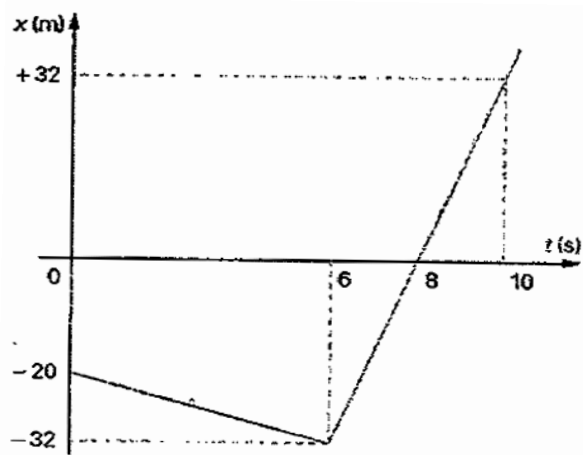
Então, no primeiro trecho, irá da posição $S_0 = -12$ até a posição $S(6s) = -32$ e, como a velocidade não muda para dentro desse intervalo de tempo, o gráfico posição por tempo nesse trecho é um segmento de reta.

Para o segundo trecho temos:

$$\Delta S_2 = v_2 \Delta t_2 = 16 \times (10 - 6) = 64 \text{ m}$$

$$S(10) = S(6) + \Delta S_2 = 32 \text{ m}$$

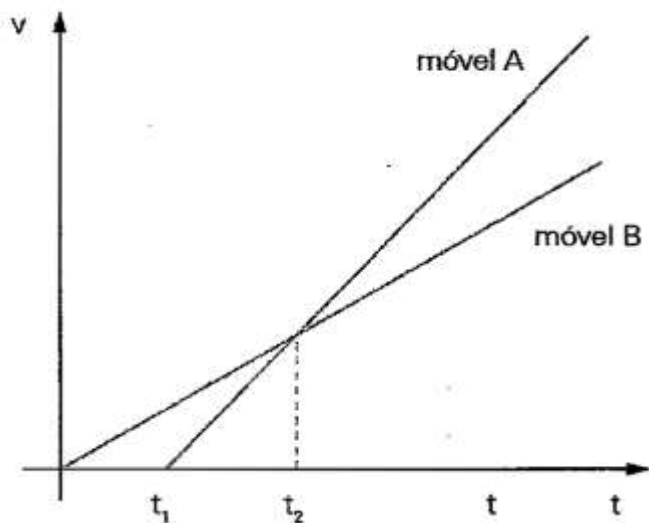
Novamente teremos uma reta.



Note que no instante $t = 6s$ temos um ponto angular no gráfico. Isso representa uma mudança brusca de algum parâmetro de movimento. Como está expresso no gráfico do enunciado, é nesse instante em que há uma alteração na velocidade.

PROBLEMA RESOLVIDO

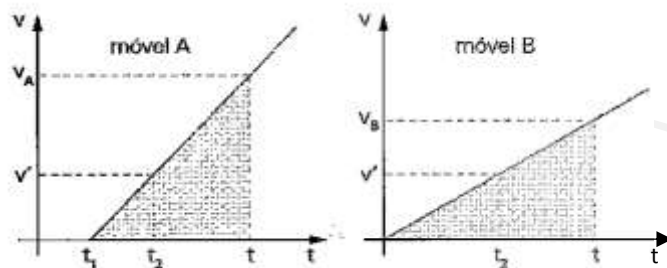
A figura abaixo representa o gráfico velocidade – tempo de dois pontos que se movem sobre a mesma reta e que partem da mesma posição inicial. São conhecidos os tempos t_1 e t_2 . Depois de quanto tempo os pontos se reencontrarão?



Resolução

Vamos analisar o gráfico. Com relação aos tempos dados, vemos que o móvel A teve velocidade nula entre os dois instantes 0 e t_1 ; e que em t_2 ambos têm mesmo valor de velocidade v' (embora esse valor não tenha sido especificado)

Seja t o tempo que marca o encontro dos móveis. Como eles têm a mesma posição inicial, para que eles se encontrem no instante t , basta que os móveis tenham deslocamentos iguais ($\Delta S_1 = \Delta S_2$). Sendo v_A e v_B as velocidades A e B nesse instante, podemos construir os gráficos abaixo:



Comparando os deslocamentos de cada móvel (áreas dos triângulos sombreados) temos

$$\Delta S_A = \frac{v_A(t - t_1)}{2} \quad \Delta S_B = \frac{v_B t}{2}$$

$$\Delta S_A = \Delta S_B \Rightarrow \frac{v_A(t - t_1)}{2} = \frac{v_B t}{2} \therefore \frac{v_A}{v_B} = \frac{t}{t - t_1}$$

Como os valores de v_A e v_B não foram fornecidos, eles não podem fazer parte da resposta. Note que ainda não usamos a informação sobre as velocidades serem iguais no instante t_2 . Por semelhança de triângulos aplicados nos gráficos de A e B respectivamente temos:

$$\frac{v_A}{t - t_1} = \frac{v'}{t_2 - t_1} = \frac{v_B}{t} = \frac{v'}{t_2}$$

Dividindo uma relação pela outra, temos

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{t_2(t - t_1)}{(t_2 - t_1)t}$$

Igualando as duas relações, temos

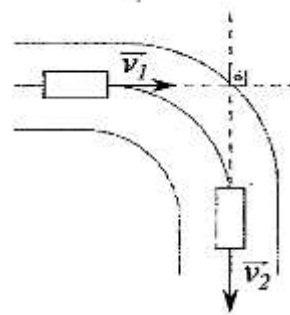
$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{t}{t - t_1} = \frac{t_2(t - t_1)}{(t_2 - t_1)t} \Rightarrow t^2(t_2 - t_1) = t_2(t - t_1)^2$$

Como temos que ser $t > t_2$, a equação tem como solução

$$t = t_2 + \sqrt{t_2(t_2 - t_1)}$$

PROBLEMA RESOLVIDO

(AFA/2010) Um Carro percorre uma curva circular com velocidade linear constante de 15 m/s completando-a em $5\sqrt{2}s$, conforme figura abaixo

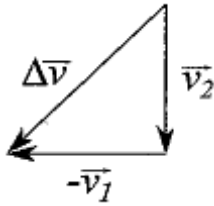


É correto afirmar que o módulo da aceleração média experimentada pelo carro nesse trecho, em m/s^2 , é:

- a) 0 b) 1,8 c) 3,0 d) 5,3

Resolução

Como o módulo da velocidade final (\vec{v}_2) e da velocidade inicial (\vec{v}_1) são iguais, a Regra do Paralelogramo para o cálculo de $\Delta\vec{v}$ nos dá um triângulo isósceles. Com isso temos



Então

$$\Delta v = v\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\sqrt{2}}{\Delta t} = \frac{15\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 3\text{m/s}^2$$

Considerando o caso de um movimento em linha reta, a aceleração será apenas a diferença dos módulos das velocidades pelo tempo em que essa diferença foi causada, mesmo assim é preciso interpretar o sentido da variação da velocidade)

PROBLEMAS RESOLVIDOS

Um corpo com velocidade inicial v_0 começa a se movimentar com aceleração constante de módulo igual a α . São feitas medições de seus deslocamentos entre instantes sucessivos $t_n = n\Delta r$. Mostre que as distâncias percorridas entre cada intervalo $t_{n+1} - t_n = \Delta r$ formando um Progressão Aritmética e encontre sua razão.

Resolução

Considerando a posição inicial do corpo como a origem do sistema de coordenadas, temos $S_0 = 0$. No n -ésimo instante da sua posição será

$$S(n) = n(v_0\Delta r) + n^2 \left(\frac{\alpha\Delta r^2}{2} \right)$$

O termo geral dessa sequência corresponde a uma PA de segunda ordem de segunda ordem. Note que o deslocamento entre o n -ésimo e o $(n-1)$ -ésimo instantes é:

$$\begin{aligned} \Delta S_n &= S(n) - S(n-1) = \\ &= (v_0\Delta t)[n - (n-1)] + \left(\frac{\alpha\Delta t^2}{2} \right) [n^2 - (n-1)^2] = \\ &= \left(v_0\Delta t - \frac{\alpha\Delta t}{2} \right) + n(\alpha\Delta t^2) \end{aligned}$$

Logo temos uma PA de razão $r = \alpha\Delta t^2$.

PROBLEMA RESOLVIDO

(ITA – 01) Uma partícula, partindo do repouso, percorre no intervalo de tempo t , uma distância D . Nos intervalos de tempo seguintes, todos iguais a t , as respectivas distâncias percorridas são iguais a $3D$, $5D$ e $7D$ etc. A respeito desse movimento pode-se afirmar que:

- a) a distância da partícula desde o ponto em que inicia seu movimento cresce exponencialmente com o tempo.
- b) a velocidade da partícula cresce exponencialmente como tempo.
- c) a distância da partícula desde o ponto em que inicia seu movimento é diretamente proporcional ao tempo elevado ao quadrado.
- d) a velocidade da partícula é diretamente proporcional ao tempo elevado ao quadrado.
- e) nenhuma das opções acima é correta.

Resolução

Sabemos que no MUV as distâncias percorridas em períodos de tempo iguais crescem em PA, o que é abordado na questão. Então as equações horárias são

$$S(t) = S_0 + v_0t + \frac{at^2}{2} \text{ e } v(t) = v_0 + at$$

Logo a distância percorrido desde o início do movimento cresce com o quadrado do tempo decorrido.

PROBLEMA RESOLVIDO

Um trem partindo do repouso tem velocidade máximo deve percorrer a distância de $\Delta S = 15\text{km}$ até parar na próxima estação. Se o trem pode desenvolver aceleração máxima de módulo $a_1 = 2\text{m/s}^2$ e uma desaceleração máxima devido à frenagem de módulo $a_2 = 4\text{m/s}^2$ encontre o tempo mínimo em que ele pode fazer esse trajeto.

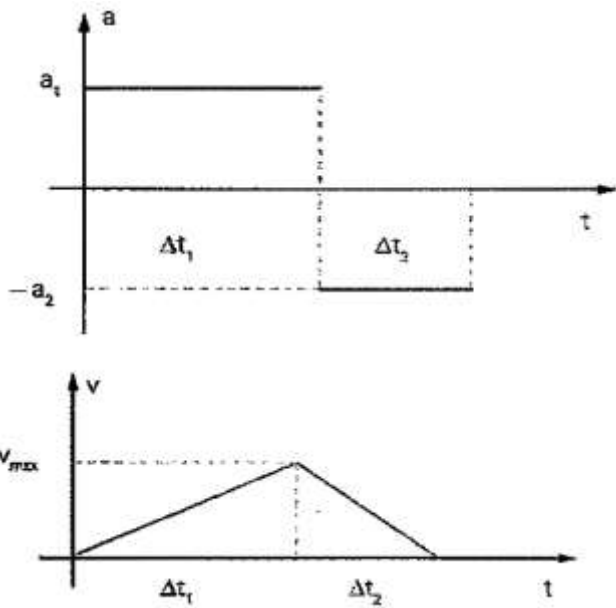
Resolução

Como o trem parte do repouso e tem que parar na segunda estação, sabemos que a velocidade inicial e final desse movimento são ambas nulas. Entretanto nada se pode afirmar sobre a velocidade no período intermediário. Temos duas estratégias para esse movimento:

- Acelerar até certa velocidade, manter a velocidade constante por algum tempo e por fim desacelerar.
- Acelerar com intensidade máxima até e, em seguida, iniciar a desaceleração também com velocidade máxima.

Intuitivamente, como estamos sempre usando a aceleração máxima, o último caso nos dá menor tempo para o trajeto (a prova dessa afirmação é deixada como exercício).

Temos então duas incógnitas: a duração da aceleração (Δt_1) e a duração da desaceleração (Δt_2). Para o gráfico da aceleração e da velocidade, temos:



Pela área do gráfico da aceleração, temos:

$$\Delta v_1 = v_{\max} - 0 = a_1 \Delta t_1 + \Delta v_2 = 0 - v_{\max} = -a_2 \Delta t_2$$

$$\Delta v_1 = -\Delta v_2 \Rightarrow a_1 \Delta t_1 = a_2 \Delta t_2$$

Pela área do gráfico da velocidade, temos:

$$\Delta S = \frac{v_{\max}(\Delta t_1 + \Delta t_2)}{2} = \frac{a_1 \Delta t_1 (\Delta t_1 + \Delta t_2)}{2}$$

Substituindo os valores, temos o sistema

$$\begin{cases} \Delta t_1 = 2\Delta t_2 \\ \Delta t_1(\Delta t_1 + \Delta t_2) = 15000 \end{cases} \Rightarrow \Delta t_2 = 50s; \Delta t_1 = 100s$$

O percurso todo demoraria $\Delta t_1 + \Delta t_2 = 150s$

PROBLEMA RESOLVIDO

(OBF/2013 – 3ª fase – Nível 1) Quando um carro com velocidade de 20m/s entra numa rua, o motorista vê outro carro a sua frente a uma distância D trafegando no mesmo sentido. Para evitar um acidente ele pisa imediatamente nos freios. Se o carro da frente estiver rodando a velocidade de 10m/s e a aceleração do primeiro carro, devido à frenagem é de $5m/s^2$, qual deve ser o menor valor de D para que os carros não colidam?

Resolução

Vamos escolher a posição do carro de trás como origem do sistema. Assim podemos escrever sua equação horária como

$$S_1(t) = 20t - \frac{5t^2}{2}$$

Como o segundo carro está D metros a sua frente, temos

$$S_2(t) = D + 10t$$

A igualdade $S_1(t) = S_2(t)$ não deve acontecer para nenhum instante (isso significa a colisão). Assim temos que a relação.

$$20t = \frac{5t^2}{2} = D + 10t \Leftrightarrow 5t^2 - 20t + 2D = 0$$

Não pode ter nenhuma raiz. Assim

$$\Delta = (-20)^2 - 4,5,2D < 0 \Rightarrow D > 10m$$

PROBLEMA RESOLVIDO

(ITA/2009) Um barco leva 10 horas para subir e 4 horas para descer um mesmo trecho do rio Amazonas, mantendo constante o módulo de sua velocidade em relação à água. Quanto tempo o barco leva para descer esse trecho com os motores desligados?

- 14 horas e 30 minutos.
- 13 horas e 20 minutos.
- 7 horas e 20 minutos.
- 10 horas.
- Não é possível resolver porque não foi dada a distância percorrida pelo carro

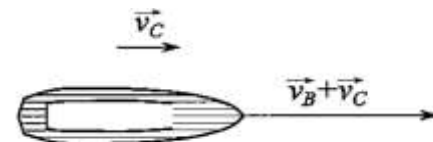
Resolução: Alternativa B

Seja v_c a velocidade da correnteza do rio e v_b a velocidade do barco em relação à água. Precisamos calcular as velocidades do barco em relação à margem, pois os pontos inicial e final do trajeto estão parados nesse referencial.

Vamos supor que a direção da correnteza é da esquerda para a direita. Inicialmente para o barco descendo a correnteza, temos, no referencial da água a seguinte situação:



Nesse referencial, à água está parada. No referencial da margem, a correnteza corre com velocidade v_c , então, para irmos para esse referencial, precisamos adicionar uma velocidade v_c da esquerda para a direita. Com isso, a velocidade do barco passa a estar alinhada com a da correnteza e temos



Sendo D a distância entre os pontos do rio, podemos escrever

$$D = v_1 \Delta t_1 = (v_b + v_c) 4h$$

O caso em que o barco sobe o rio é análogo. A diferença é que as velocidades do barco e do rio estarão em sentidos opostos. Dessa forma, temos

$$D = v_2 \Delta t_2 = (v_b - v_c) 10h$$

Com o motor desligado, o barco será arrastado pela correnteza. Então sua velocidade relativa à água será nula. Dessa forma o tempo pedido é

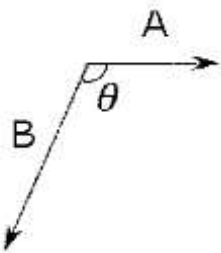
$$\Delta t = \frac{D}{v_C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_B - v_C = \frac{D}{10} \\ v_B + v_C = \frac{D}{4} \end{cases} \Rightarrow v_C = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{4} - \frac{D}{10} \right) = \frac{3}{40} D$$

$$\therefore \Delta t = \frac{D}{v_C} = \frac{40}{3} \text{h} = 13\text{h e } 20\text{min}$$

PROBLEMA RESOLVIDO

(AFA – 2012 – modificada) Os vetores A e B na figura abaixo representam, respectivamente, a velocidade do vento e a velocidade do avião em pleno voo em relação ao vento. Sabendo-se que o movimento resultante do avião acontece em uma direção perpendicular à direção da velocidade do vento, tem-se que o cosseno do ângulo θ entre os vetores velocidades A e B vale:

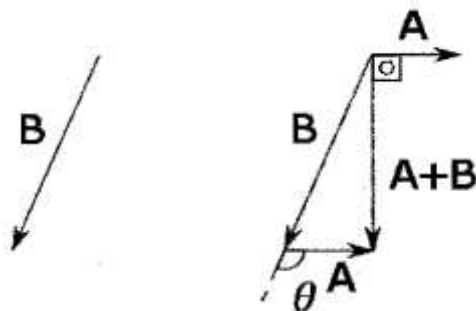


- a) $-\frac{|\vec{B}|}{|\vec{A}|}$ b) $-\frac{|\vec{A}|}{|\vec{B}|}$
 c) $-\vec{A} \cdot \vec{B}$ d) $|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$

Resolução: Alternativa B

Devemos tomar cuidado com a adição de velocidades para esse exemplo, pois foram fornecidos vetores em meios referenciais diferentes.

Vamos partir da velocidade do avião em relação ao vento (B) e então mudar para a velocidade do avião em relação ao solo, referencial no qual a velocidade do vento é A. Para isso temos que somar o vetor A ao vento B.

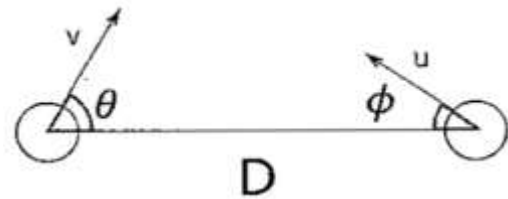


Considerando a regra do paralelogramo e o fato do vetor A + B ser perpendicular ao vetor A, temos

$$\cos(180 - \theta) = \frac{|A|}{|B|} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{|A|}{|B|}$$

PROBLEMA RESOLVIDO

Um torpedo é disparado por um encouraçado com velocidade v contra um alvo. No mesmo instante, um submarino tenta proteger o alvo e lança outro torpedo com velocidade $u > v$. Sendo θ o ângulo de lançamento entre a direção do primeiro torpedo e da linha que liga o encouraçado e o submarino, e D a distância entre os últimos no instante de lançamento, conforme a figura abaixo.

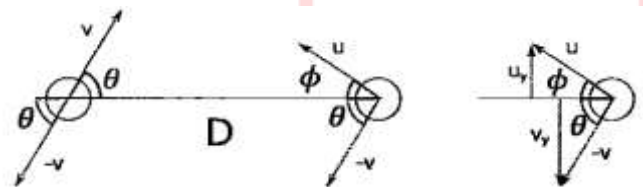


Calcule:

- o ângulo ϕ de lançamento do segundo torpedo para que ele consiga interceptar o primeiro.
- a distância que o segundo torpedo percorre até atingir seu alvo.

Resolução

a) Considerando que o encontro ocorre, no referencial de qualquer um dos torpedos, o outro seguirá em linha reta até ele. Por exemplo passando para o referencial do torpedo lançado pelo encouraçado, temos



Nesse referencial, para que o segundo torpedo siga em direção ao primeiro, as componentes y da velocidade devem se anular, então

$$v \sin\theta = u \sin\phi \Rightarrow \sin\phi = \frac{v}{u} \sin\theta$$

b) A velocidade relativa é

$$v_{\text{rel}} = v \cos\theta + u \cos\phi = v \cos\theta + \sqrt{u^2 - v^2 \sin^2\theta}$$

O tempo de encontro será

$$\Delta t = \frac{D}{v_{\text{rel}}} = \frac{D}{v \cos\theta + \sqrt{u^2 - v^2 \sin^2\theta}}$$

Como assumimos que o tempo é o mesmo em ambos os referenciais, podemos encontrar a distância viajada pelo torpedo no referencial original:

$$d = u\Delta t = \frac{Du}{v\cos\theta\sqrt{u^2 - v^2\sin^2\theta}}$$

PROBLEMA RESOLVIDO

Um barco atravessa um rio de comprimento 20m e cujas águas correm a uma velocidade 0,4m/s em relação à margem. Se a velocidade do barco em relação à margem. Se a velocidade do barco em relação à água é de 0,5m/s, calcule:

- o tempo mínimo que a travessia pode durar.
- o tempo de travessia de forma que o movimento seja sempre perpendicular às margens.

Resolução

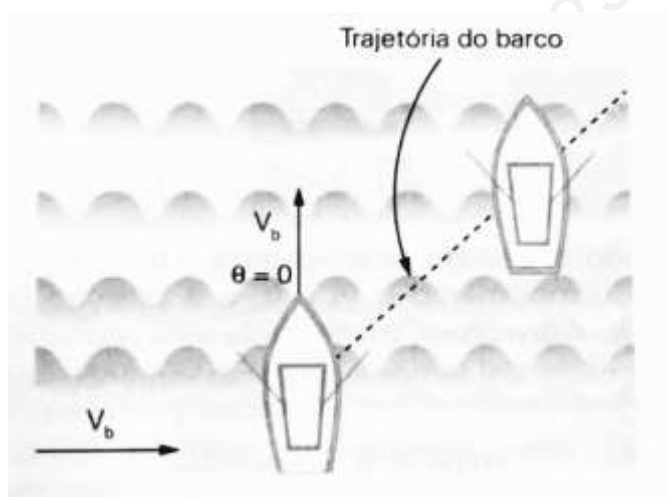
a) Vamos usar as equações já desenvolvidas na seção anterior.

Sabemos que o tempo de travessia é

$$\Delta t = \frac{\Delta y}{V_y} = \frac{L}{V_b \sin\theta}$$

Para minimizarmos o tempo de travessia, temos que maximizar o valor de $\sin\theta$. Dessa forma temos que ter $\sin\theta = 1$ ou seja, a estratégia de menor tempo é ter a velocidade relativa do barco dirigida na direção das margens. Assim, temos

$$\Delta t = \frac{L}{v_b \sin\theta} = \frac{20}{0,5 \cdot 1} = 40s$$



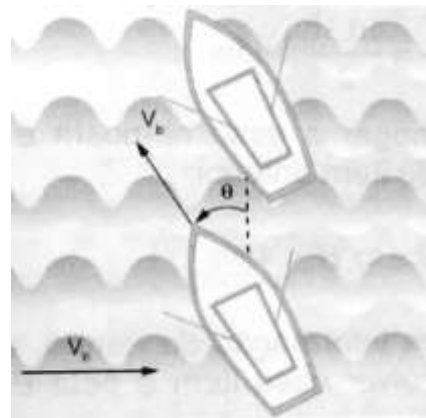
b) Para que a travessia seja perpendicular às margens não podemos ter movimento no direção ao rio, logo temos

$$\Delta x = L \left(\frac{v_r - v_b \cos\theta}{v_b \sin\theta} \right) = 0 \Rightarrow v_r - v_b \cos\theta = 0$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{v_r}{v_b} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8 \Rightarrow \sin\theta = 0,6$$

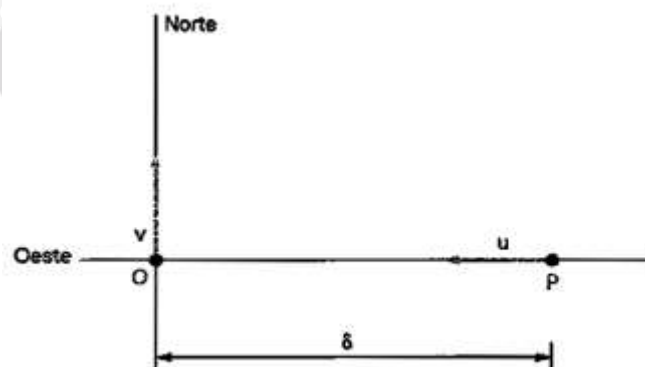
Com isso, temos

$$\Delta t = \frac{L}{v_b \sin\theta} = \frac{20}{0,5 \cdot 0,6} = 66,67s$$



PROBLEMA RESOLVIDO

(ITA – 2013) Ao passar pelo ponto O, um helicóptero segue na direção norte com velocidade v constante. Nesse momento, um avião passa pelo ponto P, a uma distância δ de O, e voa para oeste, em direção a O, com velocidade u também constante, conforme mostra a figura. Considerando t o instante em que a distância d entre o helicóptero e o avião for mínima, assinale a alternativa correta.

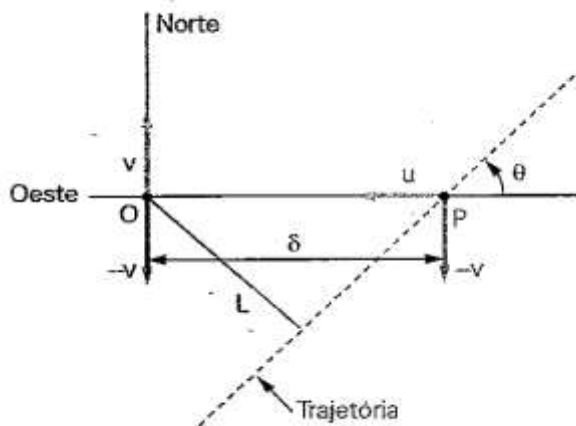


- A distância percorrida pelo helicóptero no instante em que o avião alcança o ponto O é $\frac{\delta u}{v}$.
- A distância do helicóptero ao ponto O no instante t é igual a $\frac{\delta v}{\sqrt{(u^2+v^2)}}$.
- A distância do avião ao ponto O no instante t é igual a $\frac{\delta v^2}{(u^2+v^2)}$.
- O instante t é igual a $\frac{\delta v^2}{(u^2+v^2)}$.
- A distância d é igual a $\frac{\delta u}{\sqrt{(u^2+v^2)}}$.

Resposta D

Resolução

Vamos passar para o referencial do helicóptero.



Nesse referencial a velocidade do avião é

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{v^2 + u^2}$$

E ela faz um ângulo com o eixo x vale

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{v}{u}\right)$$

Seja L a distância mínima entre o Helicóptero o Avião. Note que essa distância não é referida na questão, pois é perdida a distância entre o avião e o ponto O. Mas, pelo triângulo desenhado, temos

$$\frac{L}{\delta} = \text{sen}\theta = \frac{v}{\sqrt{v^2 + u^2}} \Rightarrow L = \frac{\delta v}{\sqrt{v^2 + u^2}}$$

Para o tempo até a condição de distância mínima, temos

$$t = \frac{L}{v_{\text{rel}}} = \frac{\delta v}{v^2 + u^2}$$

Temos então a alternativa D como correta. Podemos calcular a distância d voltando ao referencial inicial:

$$d = \delta - vt = \delta - \frac{\delta v^2}{v^2 + u^2} = \frac{\delta u^2}{v^2 + u^2}$$

Note que nenhuma apresenta esse valor.

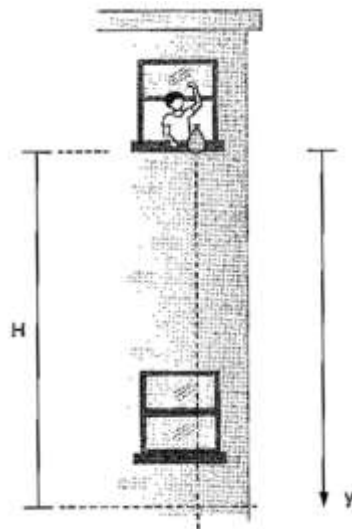
PROBLEMA RESOLVIDO

Do alto de um prédio deixa-se cair uma bola e nota-se que ela demora 3s até atingir o solo. Sendo a gravidade igual a $g = 10\text{m/s}^2$ e desprezando-se a resistência do ar, calcule:

- a velocidade com que a bola atinge o solo;
- a velocidade média da queda;
- a altura do prédio;
- a velocidade quando a bola cai 1/3 da altura do prédio.

Resolução

a) Como temos as expressões “deixa-se cair” e “desprezando-se a resistência do ar”, temos um movimento de queda livre.



Adotando o sentido positivo para baixo, a posição inicial do movimento é $y_0 = 0$, e a posição final é $y_f = +H$. Além disso, a gravidade está alinhada com esse sentido, daí temos a seguinte equação horária

$$v(t) = gt \text{ e } y(t) = +\frac{gt^2}{2}$$

Como a bola toca solo em 3s, temos que a velocidade nesse instante é de

$$v(3) = 10 \cdot 3 = 30\text{m/s}$$

b) Como já foi visto, a velocidade média do MUV é a média aritmética das velocidades, assim, temos

$$v_m = \frac{v(0) + v(3)}{2} = \frac{0 + 30}{2} = 15\text{m/s}$$

c) Podemos usar a equação horária para determinar a altura do prédio. Note que no instante $t = 3\text{s}$ a bola deve ter a posição $y_f = H$:

$$y(3) = y_f = H = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \cdot 3^2}{2} = 45\text{m}$$

Outra forma de chegar a essa resposta é usar a velocidade média do item anterior:

$$v_m = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{H}{3} = 15\text{m/s} \Rightarrow H = 45\text{m}$$

d) Como não temos informação de tempo, a forma mais rápida de resolver esse item é pela Equação de Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S = 2g\frac{H}{3} = 2 \cdot 10 \cdot 15 = 300$$

$$\therefore v = 10\sqrt{3}\text{m/s}$$

PROBLEMA RESOLVIDO

Num processo de queda livre, um corpo percorre uma distância h nos últimos Δt segundos do movimento. Calcule a altura total da queda.

Resolução

Sejam H e T respectivamente a altura total e o tempo total de queda. Sabemos que o corpo atinge a posição H no instante T , e atinge a posição $H - h$ no instante $T - \Delta t$:

$$\begin{cases} H = g \frac{T^2}{2} \\ H - h = g \frac{(T - \Delta t)^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{2H}{g}} = T \\ \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = T - \Delta t \end{cases}$$

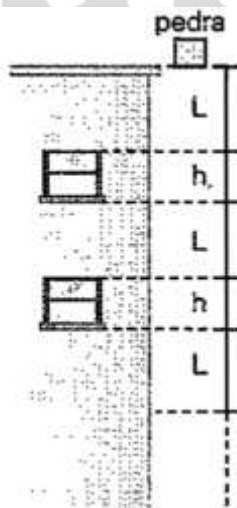
$$\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = \Delta t$$

Resolvendo a equação acima, temos

$$H = \frac{1}{2} \left(h + \frac{g\Delta t^2}{2} \right)$$

PROBLEMA RESOLVIDO

(ITA - 2003) A partir do repouso, uma pedra é deixada cair da borda no alto de um edifício. A figura mostra a disposição das janelas, com as pertinentes alturas h e distâncias L que se repetem igualmente para as demais janelas, até o térreo



Se a pedra percorre a altura h da primeira janela em t segundos, quanto tempo levará para percorrer, em segundos, a mesma altura h da quarta janela? (Despreze a resistência do ar).

- $[(\sqrt{L+h} - \sqrt{L})/(\sqrt{2L+2h} - \sqrt{2L+h})]t$
- $[(\sqrt{2L+2h} - \sqrt{2L+h})/(\sqrt{L+h} - \sqrt{L})]t$
- $[(\sqrt{4(L+h)} - \sqrt{3(L+h)+L})/(\sqrt{L+h} - \sqrt{L})]t$

$$d) \quad [(\sqrt{4(L+h)} - \sqrt{3(L+h)+L})/(\sqrt{2L+2h} - \sqrt{2L+h})]t$$

$$e) \quad [(\sqrt{3(L+h)} - \sqrt{2(L+h)+L})/(\sqrt{L+h} - \sqrt{L})]t$$

Resolução: Alternativa C

Seja T_n o tempo entre a pedra ser largada e chegar ao topo da n -ésima janela, e t_n o tempo para que ela atravesse a n -ésima janela, ou seja, ir do topo ao fim dela.

Entre o ponto de soltura até o topo da primeira janela, a distância percorrida é

$$H_n = nL + (n-1)h$$

Podemos relacionar essas grandezas pelas equações horárias para duas situações:

- Até chegar ao topo da n -ésima janela

$$H_n = nL + (n-1)h = g \frac{T_n^2}{2}$$

$$\Rightarrow T_n = \sqrt{\frac{g}{2}} [nL + (n-1)h]$$

- Até chegar ao fim da n -ésima janela

$$H_n + h = nL + nh = g \frac{(T_n + t_n)^2}{2}$$

$$\Rightarrow t_n + T_n = \sqrt{\frac{g}{2}} n(L+h)$$

Como estamos interessados apenas no tempo de travessia da janela:

$$t_n = \sqrt{\frac{g}{2}} n(L+h) - T_n =$$

$$= \sqrt{\frac{g}{2}} n(L+h) - \sqrt{\frac{g}{2}} [nL + (n-1)h]$$

$$\therefore t_n = \sqrt{\frac{g}{2}} [\sqrt{n(L+h)} - \sqrt{nL + (n-1)h}]$$

Note que não podemos usar o valor da gravidade em nossa resposta. Para desaparecermos com esse parâmetro, podemos considerar o tempo de travessia da quarta e da primeira janela. Temos, respectivamente:

$$t_4 = \sqrt{\frac{g}{2}} [\sqrt{4(L+h)} - \sqrt{4L+3h}]$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{g}{2}} [\sqrt{L+h} - \sqrt{L}]$$

$$\therefore t_4 = \frac{[\sqrt{4(L+h)} - \sqrt{4L+3h}]}{[\sqrt{L+h} - \sqrt{L}]} t_1$$

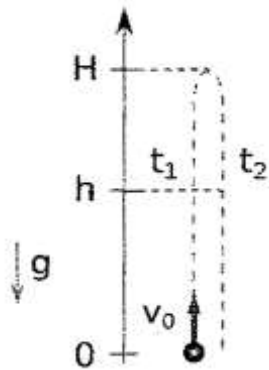
PROBLEMA RESOLVIDO

Uma bolinha é atirada para cima num tubo em que se fez vácuo. A uma distância h do ponto de lançamento é colocado um sensor laser que registra a passagem da bolinha nos instantes t_1 e t_2 a partir do lançamento. Encontre:

- a gravidade do local em que o experimento é feito;
- a altura máxima H atingida pela bola.

Resolução

a) Vamos considerar o ponto lançamento como origem do sistema de coordenadas e adotar o sentido positivo como contrário à gravidade.



Assim temos a equação horária desse movimento dada por

$$y(t) = 0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Considerando a altura h, temos

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow \frac{gt^2}{2} - v_0 t + h = 0$$

A raízes dessa equação são os tempos t_1 e t_2 , então, pelo produto das raízes, temos

$$t_1 t_2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow \frac{2h}{t_1 t_2}$$

b) Pela soma das raízes, também temos

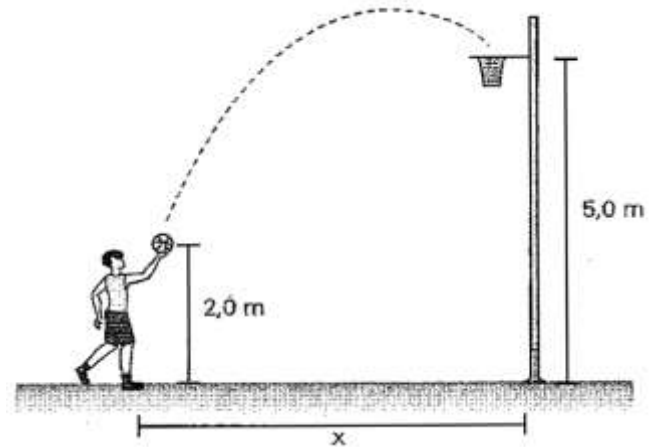
$$t_1 + t_2 = \frac{2v_0}{g} \Rightarrow v_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2} = \frac{h(t_1 + t_2)^2}{4t_1 t_2}$$

A altura máxima é dada por

$$H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1}{2} \left(\frac{h(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} \right)^2 \left(\frac{t_1 t_2}{2h} \right) = \frac{h(t_1 + t_2)^2}{4t_1 t_2}$$

PROBLEMA RESOLVIDO

(AFA – 2009) Uma bola de basquete descreve a trajetória mostrada na figura após ser arremessada por um jovem atleta que tenta bater um recorde de arremesso



A bola é lançada com uma velocidade de 10m/s e, ao cair na cesta, sua componente horizontal vale 6,0 m/s. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10 \text{ m/s}^2$. Pode-se afirmar que a distância horizontal (x) percorrida pela bola desde o lançamento até cair na cesta, em metros, vale

- a) 3,0 b) 3,6
c) 4,8 d) 6,0

Resolução: Alternativa D

Como a velocidade horizontal é constante, ela terá igual valor tanto no ponto de lançamento quanto na cesta. Daí, podemos encontrar a velocidade inicial na direção vertical:

$$v_{0x} = 6\text{m/s} \Rightarrow v_{0y} = \sqrt{v_0^2 - v_{0x}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\text{m/s}$$

Para descobrir o tempo em que a bola cai na cesta, usaremos a equação horária para a direção y:

$$y(t) = 2 + 8t - 5t^2 = 5 \Rightarrow 5t^2 - 8t + 3 = 0$$

$$t' = \frac{3}{5} \text{ s}$$

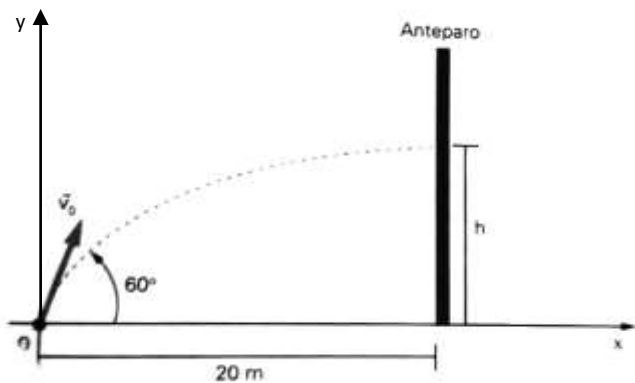
$$t'' = 1 \text{ s}$$

Note que a bola deve passar duas vezes pela altura da cesta, uma na subida e outra na descida. Logo o tempo que nos interessa é o maior deles, ou seja, $t'' = 1\text{s}$. A distância horizontal viajada pela bola será $\Delta x = v_{0x} t'' = 6\text{m}$

PROBLEMA RESOLVIDO

(EM – 2013) Um projétil é lançado contra um anteparo vertical situado a 20m do ponto de lançamento. Despreze a resistência do ar. Se esse lançamento é feito com uma velocidade inicial de 20 m/s numa direção que faz ângulo de 60° com a horizontal, a altura aproximada do ponto onde o projétil de choca com o anteparo em metros, é
Dados: $\text{tg}60^\circ = 1,7$; $g = 10\text{m/s}^2$

- a) 7,0 b) 11 c) 14 d) 19 e) 23



Resolução: Alternativa C

Vamos tratar todos os dados como literais, para não carregarmos muito números. O impacto com a parede é caracterizado por um deslocamento horizontal $\Delta x = 20\text{m}$ e isso ocorre num tempo

$$t = \frac{\Delta x}{v_{x0}} = \frac{\Delta x}{v_0 \cos \theta}$$

Logo a altura h é dada por

$$h = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin \theta \left(\frac{\Delta x}{v_0 \cos \theta} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{\Delta x}{v_0 \cos \theta} \right)^2$$

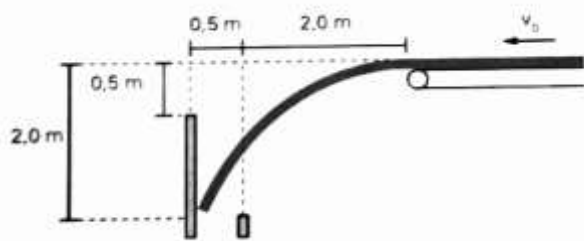
$$h = \Delta x \tan \theta - \frac{g(\Delta x)^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} = 20 \cdot 1,7 - \frac{10 \cdot (20)^2}{2 \cdot 20^2 \cdot 0,5^2}$$

$$h = 14\text{m}$$

Note que acabamos usando a equação da trajetória, mesmo que não de forma explícita.

PROBLEMA RESOLVIDO

(OBF - 2013) Uma esteira horizontal se desloca com velocidade v_0 e descarrega areia dentro de uma caixa, como mostra a figura. Qual é o intervalo e velocidades com que a esteira deve se mover para que a areia caia na caixa? Use $\sqrt{10} = 3,2$ e $g = 10\text{m/s}^2$



Resolução

Note que temos duas situações limites diferentes.

- Caso 1: a esteira é devagar demais, e a areia cai toca a borda inferior da caixa. Nesse caso, a areia percorre uma distância vertical maior que 2,0m antes de percorrer a distância horizontal de 2,0m. Como o movimento não tem velocidade inicial na vertical, a queda de 2,0m na vertical ocorre num tempo t_1 tal que

$$\Delta h_1 = \frac{gt_1^2}{2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2\Delta h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{10}} = \frac{2}{3,2} = 0,65\text{s}$$

Para que a areia não caia fora da caixa, devemos ter nesse instante

$$v > \frac{\Delta x_1}{t_1} = \frac{2}{0,625} = 3,2\text{m/s}$$

- Caso 2: a esteira é rápida demais, e a areia toca a borda superior da caixa. Nesse caso, a distância vertical percorrida é 0,5m. Analogicamente temos o tempo de

$$t_2 = \sqrt{\frac{2\Delta h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5}{10}} = \frac{1}{3,2} = 0,3125\text{s}$$

Para que a areia não caia fora da caixa, ela deve andar menos que 2,5m na horizontal nesse tempo.

Logo,

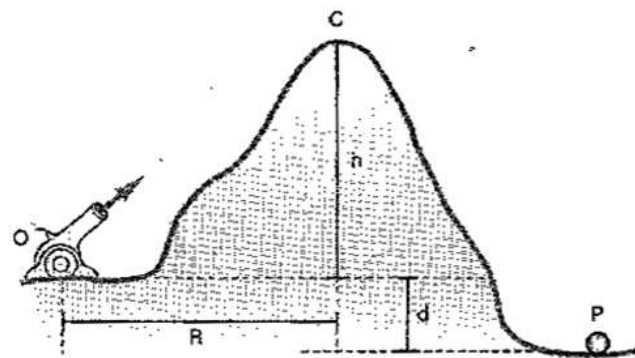
$$v > \frac{\Delta x_2}{t_2} = \frac{2,5}{0,3125} = 8\text{m/s}$$

Logo o intervalo pedido é

$$3,2\text{m/s} < v < 8\text{m/s}$$

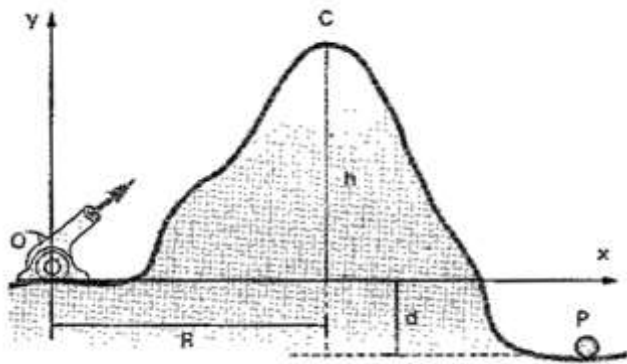
PROBLEMA RESOLVIDO

Uma bola de canhão é arremessada e passa por cima de uma montanha de altura h , de forma a tangenciar o cume no ponto mais alto do trajeto. Se R é a distância horizontal entre o cume e o ponto de lançamento, e d , o desnível entre o terreno nos dois lados da montanha, calcule a distância horizontal entre o canhão e o ponto em que a bola atinge o solo.



Resolução

Vamos adotar a origem do sistema de coordenadas no ponto de lançamento



Sabemos que a equação da trajetória é uma parábola de concavidade voltada para baixo, logo terá a forma

$$y(x) = -k(x - x_1)(x - x_2)$$

em que x_1 e x_2 são as raízes, e k , uma constante.

Vamos que uma das raízes da equação é $x = 0$, e que o vértice dela (ponto de altura máxima) está a uma distância horizontal R da origem. Pela simetria da parábola em relação ao vértice, podemos concluir que a outra raiz será $x_2 = 2R$. Para acharmos k , podemos fazer

$$y(R) = -k(R - x_1)(R - x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = -k(R - 0)(R - 2R) \Rightarrow k = \frac{h}{R^2}$$

Da, temos a equação da trajetória como

$$y(x) = \frac{h}{R^2}x(x - 2R)$$

A distância horizontal que procuramos é o valor D tal que $y(D) = -d$. Logo, temos a equação

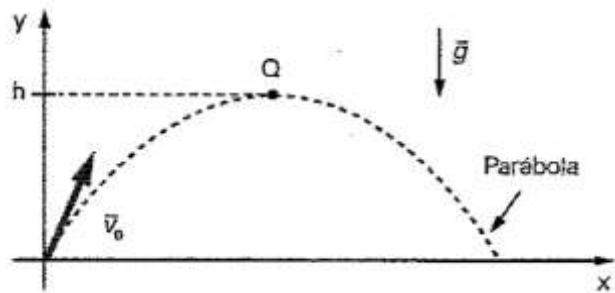
$$-d = \frac{h}{R^2}D(D - 2R) \Rightarrow D^2 - 2RD - \frac{dR^2}{h} = 0$$

Como a solução deve ser positiva, temos

$$D = R \left[1 + \sqrt{1 + \frac{d}{h}} \right]$$

PROBLEMA RESOLVIDO

(AFA - 2006 - modificada) Uma partícula é lançada obliquamente com velocidade v_0 próxima à superfície terrestre, conforme indica a figura abaixo.



A velocidade total da partícula no ponto Q, de altura máxima, é:

- a) v_0 b) $\sqrt{2gh}$ c) $\sqrt{\frac{v_0^2 - gh}{2}}$ d) $\sqrt{v_0^2 - 2gh}$

Resolução: Alternativa D

Aplicando a Equação de Torricelli com a velocidade total entre o ponto de lançamento e o ponto de altura máxima, temos

$$v^2 = v_0^2 - 2gh \therefore \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

Podemos fazer uma segunda solução analisando as componentes das velocidades.

$$h = H_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} \therefore v_{0y}^2 = 2gh$$

Com a componente x da velocidade é constante, ela pode ser encontrada a partir do ponto inicial

$$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \Rightarrow v_x \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

PROBLEMA RESOLVIDO

Durante um treino de futebol, os chutes realizados por cinco jogadores resultam nas trajetórias abaixo.



Baseado nessas trajetórias, compare, quando possível:

- a) o tempo total de bola após o chute.
b) a velocidade inicial de cada chute.

Resolução

Note que a trajetória C está presente em ambos os desenhos. Então podemos comparar as trajetórias D e E com A e B através de C.

Os lançamentos A, B e C tiveram a mesma altura máxima, logo a componente inicial da velocidade no eixo y é igual nos três casos. Como essa componente também define o tempo total de queda (o dobro do tempo de subida) temos:

$$H_A = H_B = H_C \Rightarrow v_{0yA} = v_{0yB} = v_{0yC} \Rightarrow t_A = t_B = t_C$$

Analogamente, para os lançamentos C, D e E sabemos que quem tiver maior altura máxima também terá o maior tempo:

$$H_C < H_D < H_E \Rightarrow v_{0yC} < v_{0yD} < v_{0yE} \Rightarrow t_C < t_D < t_E$$

$$t_A = t_B = t_C < t_D < t_E$$

b) Como, para um mesmo tempo total, o alcance de A é maior que o de B, e este é menor que o de C, podemos concluir que as componentes horizontais de suas velocidades de lançamento também seguem essa relação. Como as componentes verticais dos três são iguais, podemos concluir que

$$\begin{cases} v_{0xA} < v_{0xB} < v_{0xC} \\ v_{0yA} = v_{0yB} = v_{0yC} \end{cases} \Rightarrow v_{0A} < v_{0B} < v_{0C}$$

Como os deslocamentos horizontais de C, D e E são iguais, mas que são realizados em tempos tais que $t_C < t_D < t_E$, as velocidades horizontais seguem a relação

$$v_{0xC} < v_{0xD} < v_{0xE}$$

Logo não podemos concluir sobre suas velocidades de lançamento. Por exemplo, as velocidades de C e E poderiam até ser iguais, caso os ângulos de lançamento fossem complementares.

PROBLEMA RESOLVIDO

Um goleiro de futsal está jogando num espaço improvisado com pé-direito (distância entre teto e piso) de 5m. Se a quadra desse espaço tem 16m, e o jogador faz seu chute rente à linha da do gol e em direção ao gol adversário, qual a maior velocidade que ele pode imprimir à bola de forma a não sofrer desvio por causa do teto?

Resolução

Considerando a altura máxima igual ao pé direito, temos

$$H_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = 5\text{m} \Rightarrow v_{0y} = 10\text{m/s}$$

Isso faz com que o movimento tenha um tempo de total igual a

$$t_T = 2t_s = 2 \frac{v_{0y}}{g} = 2\text{s}$$

Como o alcance da bola deve ser igual ao comprimento do campo, temos

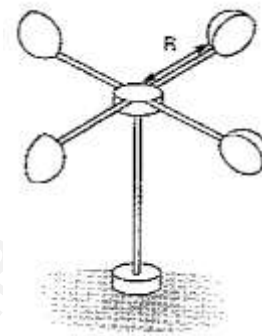
$$A = v_{0x} t_T \Rightarrow v_{0x} = \frac{A}{t_T} = \frac{16}{2} = 8\text{m/s}$$

Finalmente temos

$$v_0^2 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{164} \approx 12,8\text{m/s}$$

PROBLEMA RESOLVIDO

(OBF - 2014) A figura ao lado mostra o anemômetro, instalado num aerogerador, usado para medir a velocidade do vento. Se o anemômetro em $R = 60\text{cm}$ e executada 250 rotações em um minuto, qual é a velocidade do vento? Use $\pi = 3$.



- a) 5,0m/s
- b) 8,0m/s
- c) 10m/s
- d) 12m/s
- e) 15m/s

Resolução: Alternativa E

A velocidade do vento deve ser igual à velocidade da ponta do anemômetro, isto é

$$v_{ar} = \omega R$$

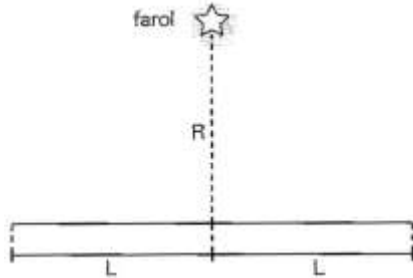
Como queremos a velocidade expressa no SI, temos que converter a velocidade angular:

$$\frac{\omega(\text{rad/s})}{2\pi} = \frac{\omega(\text{rpm})}{60} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi \cdot 250}{60} = 25\text{rad/s}$$

$$\therefore v_{ar} = 25\text{rad/s} \times 0,6\text{m} = 15\text{m/s}$$

PROBLEMA RESOLVIDO

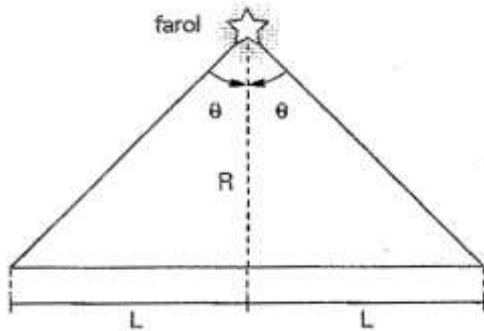
(ITA – 01) Em um farol de sinalização, o feixe de luz está acoplado a um mecanismo rotativo que realiza uma volta completa a cada T segundos. O farol encontra a uma distância R do centro de uma praia de comprimento $2L$, conforme a figura. O tempo necessária para o feixe de luz “varrer” a praia em, cada volta, é



- a) $\arctg\left(\frac{L}{R}\right) \frac{T}{2\pi}$ b) $\arctg\left(\frac{2L}{R}\right) \frac{T}{2\pi}$
 c) $\arctg\left(\frac{L}{R}\right) \frac{T}{\pi}$ d) $\arctg\left(\frac{L}{2R}\right) \frac{T}{2\pi}$
 e) $\arctg\left(\frac{L}{R}\right) \frac{1}{T\pi}$

Resolução: Alternativa C

Apesar de esse problema apenas de grandezas lineares, ele é um problema de rotação. Pela figura abaixo, temos que o farol varre a praia quando consegue variar sua posição angular em 2θ , já que o triângulo da figura é isósceles



Note que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{L}{R} \Rightarrow \theta = \arctg\left(\frac{L}{R}\right)$$

Assumindo que a velocidade angular do farol seja constante, temos que o tempo Δt pedido é tal que

$$\omega = \frac{2\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \Delta t = \frac{\theta}{\pi} T$$

$$\therefore \Delta t = \arctg\left(\frac{L}{R}\right) \frac{T}{\pi}$$

Como a localização do móvel que estamos estudando fica definida pelo ângulo, podemos escrever uma equação horária para essa posição angular, semelhante ao que fazíamos no movimento retilíneo:

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

Praticamente todas as propriedades da equação horária aprendidas até aqui para o movimento retilíneo são também

válidas para o movimento circular. Uma diferença são os problemas perseguição.

PROBLEMA RESOLVIDO

Exatamente à meia noite, todos os três ponteiros de um relógio estão alinhados. A que horas os ponteiros das horas e dos minutos voltarão a se alinhar?

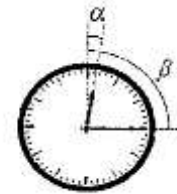
Resolução

Analisando cada ponteiro, temos seguintes períodos velocidades angulares:

$$T_{\min} = 1\text{h} \Rightarrow \omega_{\min} = \frac{2\pi}{1\text{h}} = 2\pi \text{rad/h}$$

$$T_{\text{hora}} = 12\text{h} \Rightarrow \omega_{\text{hora}} = \frac{2\pi}{12\text{h}} = \frac{\pi}{6} \text{rad/h}$$

Tomando a posição 12h do relógio como ângulo de referência, temos as seguintes equações horárias:



$$\alpha = \omega_{\text{hora}} t$$

$$\beta = \omega_{\min} t$$

Perceba que a condição de alinhamento não exige que os ângulos sejam iguais, mas que eles sejam congruentes, isso é, para algum k inteiro, devemos ter:

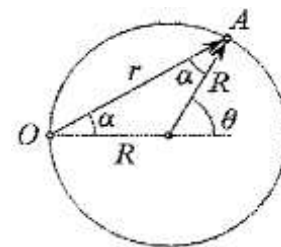
$$\beta - \alpha = 2k\pi \Rightarrow \omega_{\min} t - \omega_{\text{hora}} t = 2k\pi$$

$$\therefore t_k = \frac{2k\pi}{\omega_{\min} - \omega_{\text{hora}}} = k \frac{2\pi}{2\pi - \frac{\pi}{6}} = k \frac{12}{11} \text{h}$$

Ou seja, os ponteiros se alinham a cada 1h 05min 27s.

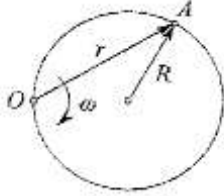
PROBLEMA RESOLVIDO

Uma partícula A move-se ao longo de um círculo de raio $R = 50\text{cm}$ de forma que o vetor posição em relação ao ponto O (\vec{r}) gira com velocidade constante $\omega = 1\text{rad/s}$. Calcule a velocidade e a aceleração total da partícula.



Resolução

Vemos que o movimento é circular. A princípio, podemos imaginar que ele não é uniforme, mas isso não é verdade. O valor da velocidade angular informada não se refere ao vetor diretor da posição em relação ao centro do círculo. Como nossas expressões estão baseadas nessas quantidade, devemos encontra-la de alguma forma.



Note que o triângulo formado entre os vetores \vec{r} , \vec{R} e a horizontal é isósceles. Com isso, podemos relacionar os ângulos diretores dos vetores e suas respectivas taxas de variação:

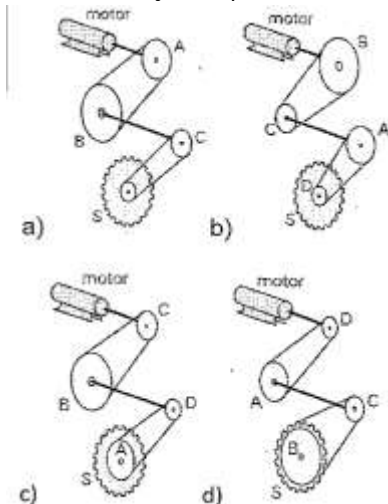
$$\theta = 2\alpha \Rightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = 2 \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \Rightarrow \omega_\theta = 2\omega = 2\text{rad/s}$$

Note que a velocidade angular é constante. Então o movimento é um MCU com distância característica $R = 50\text{cm}$ e velocidade angular $\omega_\theta = 20\text{rad/s}$. Sabemos que a aceleração do MCU é puramente centrípeta, então temos:

$$v_A = R\omega_\theta = 1\text{m/s} \Rightarrow a_{cp} = R\omega_\theta^2 = 2\text{m/s}^2$$

PROBLEMA RESOLVIDO

(AFA – 2009) Dispõe-se de quatro polias ideais de raios $R_A = R$, $R_B = 3R$, $R_D = \frac{R}{10}$ que podem ser combinadas e acopladas a um motor cuja frequência de funcionamento tem valor f . As polias podem ser ligadas por correntes ideais ou unidas por eixos rígidos e, nos acoplamentos, não ocorre escorregamento. Considere que a combinação dessas polias com o motor deve acionar uma serra circular (S) para que ela tenha uma frequência de rotação igual a $\frac{5}{3}$ da frequência do motor. Sendo assim, marque a alternativa que representa essa combinação de polias.



Resolução: Alternativa A

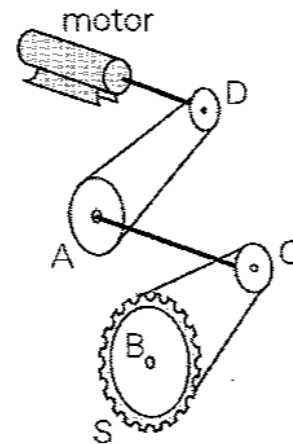
Considerando a relação das frequências com a velocidade angular, queremos a associação com

$$f_s = \frac{5}{3}f_M \Rightarrow \omega_s = 2\pi f_s = 2\pi \left(\frac{5}{3}f_M\right) = \frac{5}{3}\omega_M$$

$$\therefore \omega_s = \frac{5}{3}\omega_M$$

Vamos checar cada uma das opções. Observe que sempre iremos relacionar os elementos na ordem em que eles aparecem quando caminhamos no sentido $S \rightarrow M$. Adotar um sentido único para o estudo das relações entre as velocidades dos componentes organiza a solução e evita erros. Com isso, também conseguimos encadear as relações para obtermos a relação final que procuramos.

- Opção A



Nota que os elementos estão unidos na ordem $S \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow M$.

Vamos, então ver quais relação eles mantêm.

$S \rightarrow D$: mesmo eixo $\Rightarrow \omega_s = \omega_D$

$D \rightarrow C$: unidas por correia $\Rightarrow \omega_D = \frac{\omega_C R_C}{R_D}$

$C \rightarrow B$: mesmo eixo $\Rightarrow \omega_C = \omega_B$

$B \rightarrow A$: unidade por correia $\Rightarrow \omega_B = \frac{\omega_A R_A}{R_B}$

$A \rightarrow M$: mesmo eixo $\Rightarrow \omega_A = \omega_M$

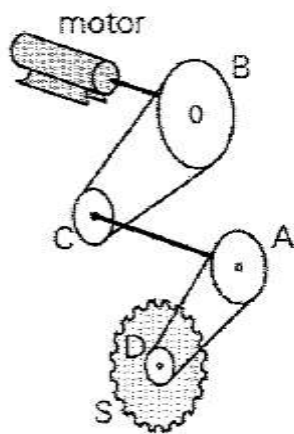
Assim, temos:

$$\omega_s = \omega_D = \omega_C \frac{R_C}{R_D} = \omega_B \frac{R_C}{R_D} = \left(\omega_A \frac{R_A}{R_B}\right) \frac{R_C}{R_D}$$

$$\therefore \omega_s = \omega_M \frac{R_A R_C}{R_B R_D} = \omega_M \frac{R \cdot \frac{R}{2}}{3R \cdot \frac{R}{10}} = \frac{5}{3}\omega_M$$

Logo já chegamos à opção correta.

- Opção B



Agora temos a ordem

S → D → A → C → B → M

S → D: mesmo eixo ⇒ $\omega_S = \omega_D$

D → A: unidas por correia ⇒ $\omega_D = \frac{\omega_A R_A}{R_D}$

A → C: mesmo eixo ⇒ $\omega_A = \omega_C$

C → B: unidas por correia ⇒ $\omega_C = \frac{\omega_B R_B}{R_C}$

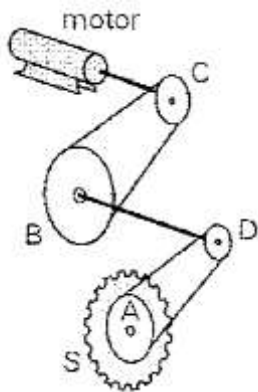
B → M: mesmo eixo ⇒ $\omega_B = \omega_M$

Isso nos leva

$$\omega_S = \omega_D = \omega_A \frac{R_A}{R_D} = \omega_C \frac{R_A}{R_D} = \left(\omega_B \frac{R_B}{R_C} \right) \frac{R_A}{R_D}$$

$$\therefore \omega_S = \omega_M \frac{R_B R_A}{R_C R_D} = \omega_M \frac{3R \cdot R}{2 \cdot 10} = 60 \omega_M$$

- Opção C



Note que os elementos estão unidos na ordem

S → A → D → B → C → M

S → A: mesmo eixo ⇒ $\omega_S = \omega_A$

A → D: unidas por correia ⇒ $\omega_A = \frac{\omega_D R_D}{R_A}$

D → B: mesmo eixo ⇒ $\omega_D = \omega_B$

B → C: unidas por correia ⇒ $\omega_B = \frac{\omega_C R_C}{R_B}$

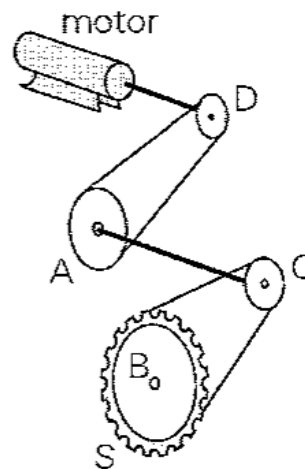
C → M: mesmo eixo ⇒ $\omega_C = \omega_M$

Isso nos leva a

$$\omega_S = \omega_A = \omega_D \frac{R_D}{R_A} = \omega_B \frac{R_D}{R_A} = \left(\omega_C \frac{R_C}{R_B} \right) \frac{R_D}{R_A}$$

$$\therefore \omega_S = \omega_M \frac{R_C R_D}{R_B R_A} = \omega_M \frac{\frac{R}{2} \cdot \frac{R}{10}}{R \cdot 3R} = \frac{1}{60} \omega_M$$

- Opção D



Note que os elementos estão unidos na ordem

S → B → C → A → D → M

S → B: mesmo eixo ⇒ $\omega_S = \omega_B$

B → C: unidas por correia ⇒ $\omega_B = \frac{\omega_C R_C}{R_B}$

C → A: mesmo eixo ⇒ $\omega_C = \omega_M$

A → D: unidas por correia ⇒ $\omega_A = \frac{\omega_D R_D}{R_A}$

D → M: mesmo eixo ⇒ $\omega_D = \omega_M$

Temos finalmente

$$\omega_S = \omega_B = \omega_C \frac{R_C}{R_B} = \omega_C \frac{R_C}{R_B} = \left(\omega_D \frac{R_D}{R_A} \right) \frac{R_C}{R_B}$$

$$\therefore \omega_S = \omega_M \frac{R_D R_C}{R_A R_B} = \omega_M \frac{\frac{R}{10} \cdot \frac{R}{2}}{R \cdot 3R} = \frac{1}{60} \omega_M$$

PROBLEMA RESOLVIDO

(OBF – 2013) Uma vitrola era usada para tocar discos de vinil (então chamados LP, “long-play”). Seu prato consiste de um disco giratório, onde se posiciona o LP, que gira a 33 RPM (rotações por minuto). Quando se desliga o aparelho o disco para após executar três rotações. Determine a aceleração angular do disco e o tempo que o disco leva até parar. Use $\pi = 3$.

Resolução

Primeiramente vamos fazer a conversão de unidades

$$\frac{\omega_0 (\text{rad/s})}{2\pi} = \frac{\omega_0 (\text{rpm})}{60} \therefore \omega_0 = 2\pi \cdot \frac{33}{60} = 1,1\pi \text{ rad}$$

$$\Delta\theta = 3 \text{ rotações} = 6\pi \text{ rad}$$

Como o disco gira até parar temos para a velocidade angular final $\omega = 0$. Aplicando a Equação de Torricelli, temos:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2a\Delta\theta \therefore \alpha = -\frac{\omega_0^2}{2\Delta\theta}$$

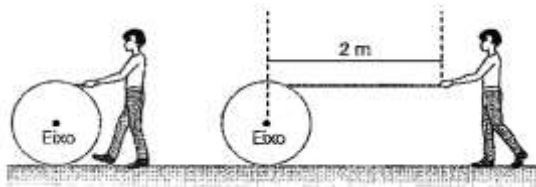
$$\alpha = -\frac{(1,1\pi)^2}{2 \cdot 6\pi} = \frac{1,21\pi}{12} \approx -0,3 \text{ rad/s}^2$$

Para o tempo de parada, temos:

$$\omega = \omega_0 + at \Rightarrow t_{\text{parada}} = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{6\pi}{0,3} \approx 60\text{s}$$

PROBLEMA RESOLVIDO

(AFA – 2006) Um operário puxa a extremidade de um cabo que está enrolado num cilindro. À medida que o operário puxa o cabo o cilindro vai rolando sem escorregar.



Quando a distância entre o operário e o cilindro for igual a 2m (ver a figura acima), o deslocamento do operário em relação ao solo será de:

- a) 4m b) 2m c) 6m d) 1m

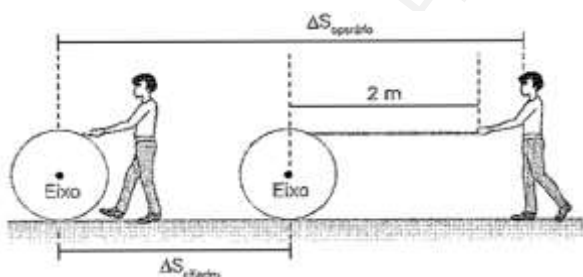
Resolução: Alternativa A

Pelo raciocínio dos pontos das correias em sistemas girantes, podemos afirmar que todos os pontos da corda terão a mesma velocidade após perderem o contato com o cilindro. Então, o ponto que está sendo puxado pelo operário e o ponto que está na iminência de perder o contato com o topo do cilindro terão a mesma velocidade.

Seja $2v$ a velocidade desses pontos o centro do cilindro tem velocidade v , logo os deslocamentos do operário e do cilindro são

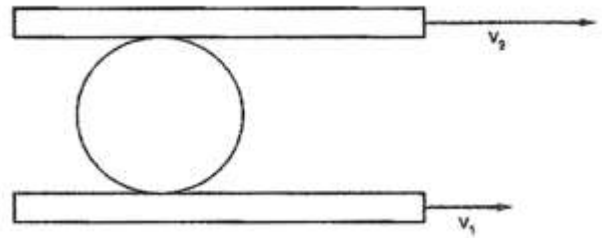
$$\frac{\Delta S_{\text{operario}}}{\Delta S_{\text{cilindro}}} = \frac{2v\Delta t}{v\Delta t} = 2$$

Como a diferença dos deslocamentos é a distância de corda desenrolada, conclui-se que o operário teve um deslocamento de 4m.



PROBLEMA RESOLVIDO

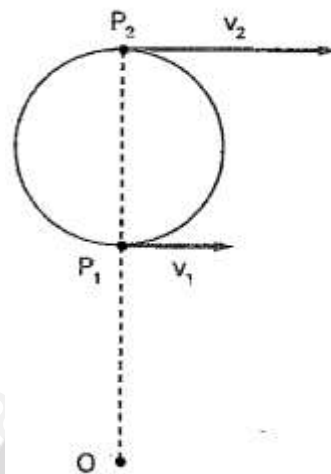
Uma esfera de raio R está apoiada entre duas taboas que se movem horizontalmente com velocidade v_1 e $v_2 > v_1$. Calcule a velocidade do centro da esfera sabendo que não há deslizamento entre ela e as taboas.



Resolução

Como não há deslizamento entre a esfera e as taboas, os pontos de contato devem mover-se com as mesmas velocidades tanto na respectiva taboia quanto na esfera.

Seja O o centro instantâneo de rotação. Para localizarmos, temos que traçar as perpendiculares às velocidades conhecidas.



Seja d a distância entre O e P_1 . Assim pela relação $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ temos

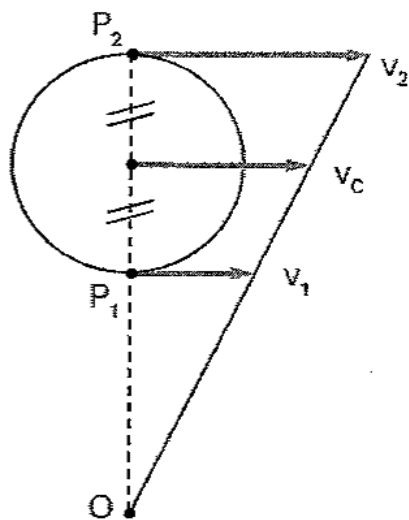
$$\begin{cases} v_1 = d\omega \\ v_2 = (d + 2R)\omega \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{(v_2 - v_1)}{2R}; d = \frac{2Rv_1}{(v_2 - v_1)}$$

Com isso a velocidade do centro é

$$v_C = (d + R)\omega = \left(\frac{2Rv_1}{(v_2 - v_1)} + R \right) \left(\frac{v_2 - v_1}{2R} \right)$$

$$v_C = \frac{R(v_1 + v_2)}{(v_2 - v_1)} \left(\frac{v_2 - v_1}{2R} \right) = \frac{(v_1 + v_2)}{2}$$

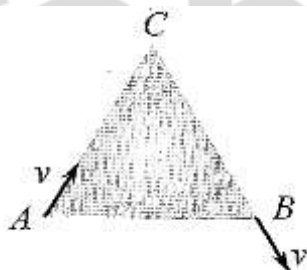
A resposta ser a média aritmética das velocidades não é grande surpresa



Dada uma mesma direção num sistema em rolamento, a velocidade variará linearmente com a distância entre o ponto em que ela é calculada e o centro instantâneo de rotação.

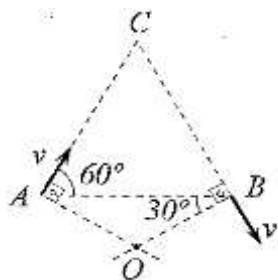
PROBLEMA RESOLVIDO

Uma placa triangular equilátera está representada abaixo. Os vértices A e B deslocam-se com velocidades de módulo v e cujas direções estão alinhadas com os lados AC e CB conforme a figura. Encontre a velocidade de deslocamento do vértice C para o instante retratado.



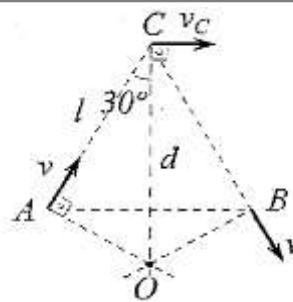
Resolução

Ao traçarmos as perpendiculares às direções das velocidades, temos a figura a seguir:



Chamaremos de l o comprimento dos lados do triângulo e a distância entre o ponto C e o centro instantâneo de rotação O.

Como a figura é simétrica, podemos determinar o esquema abaixo para a determinação dessas grandezas.



Daí, temos:

$$\begin{cases} v_A = \omega l \\ v_C = \omega d \end{cases} \Rightarrow \frac{v_A}{v_C} = \frac{l}{d} = \sec 30^\circ$$

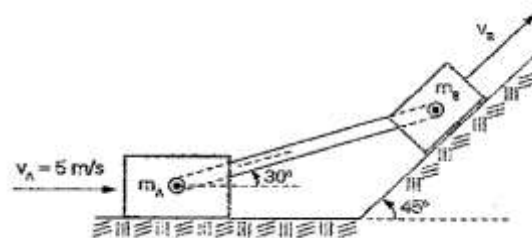
$$\therefore v_C = v_A \sec 30^\circ = 2v$$

Note que o módulo da velocidade do vértice B é um dado redundante. Já que a peça não permite distanciamento entre os vértices, a localização do centro instantâneo de rotação por meio da direção da velocidade de dois pontos e o módulo de um desses pontos já define a velocidade de todas as outras partes da peça.

Outra forma de resolver o mesmo problema é usando uma mudança de referencial. Podemos, por exemplo, passar para o referencial do vértice A e notar que, como estará parado no próprio referencial e sua distância em relação aos demais vértices não muda, esses executarão um movimento circular uniforme tendo A como centro. Daí deveremos encontrar a velocidade do vértice C nesse referencial e fazer a volta para o referencial antigo. Esse processo alternativo é interessante, mas acaba por ser muito algebrismo. Sua utilização para a resolução desse mesmo exemplo é deixada como sugestão para o aluno.

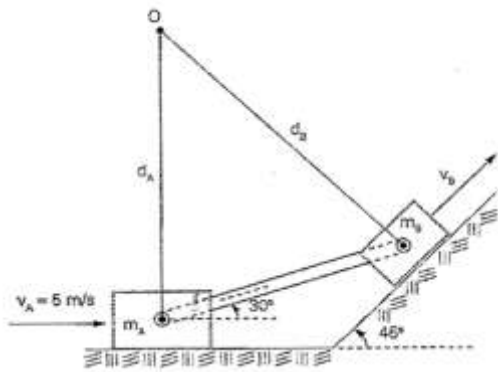
PROBLEMA RESOLVIDO

(IME – CG) Os blocos abaixo estão unidos por uma barra inextensível. Calcule a velocidade do bloco B para o momento retratado.



Resolução

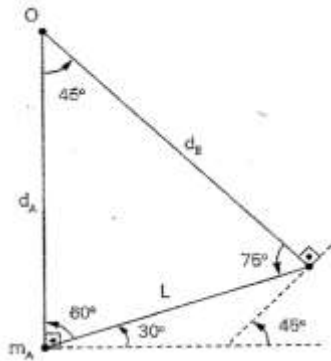
Observe que a barra se comporta como um corpo rígido. Tomando os dois pontos que estão em contato com os blocos, sabemos que eles têm velocidade paralelas aos planos em que estão apoiados. Daí, podemos encontrar o centro de rotação pelo encontro das perpendiculares às essas velocidades



A partir daí, podemos relacionar as velocidades dos blocos:

$$\begin{cases} v_A = \omega d_A \\ v_B = \omega d_B \end{cases} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{d_A}{d_B}$$

Considerando os ângulos das direções das velocidades, podemos construir o triângulo da figura a seguir, em que L representa o comprimento da barra.



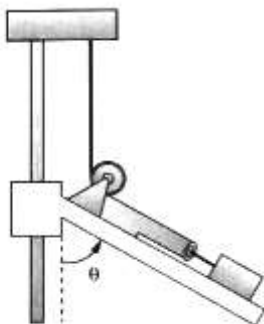
Pela lei dos senos, temos

$$\frac{d_A}{\sin 75^\circ} = \frac{d_B}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{d_A}{d_B} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{d_A}{d_B} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} \therefore v_B = v_A \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 5.576 \text{ m/s}$$

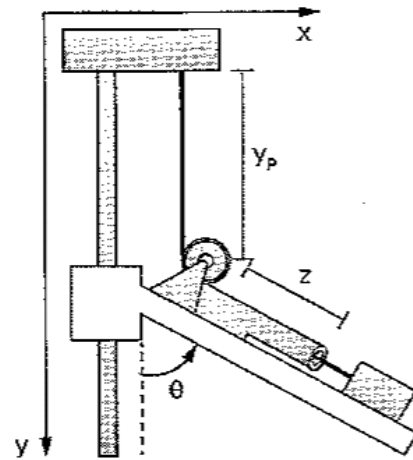
PROBLEMA RESOLVIDO

Na figura abaixo, a plataforma pode deslizar pela guia vertical sem atrito. Sobre ela está apoiado um bloco que está preso a uma roldana, que por sua vez está ligada tanto ao teto quanto à plataforma por um fio inextensível e totalmente esticão. Calcule a velocidade do bloco sabendo que nesse instante a plataforma desce com velocidade instantânea $v_P = 4 \text{ m/s}$. Dado $\theta = 60^\circ$



Resolução

Para não complicarmos muito as equações vamos introduzir uma variável auxiliar z.



Para a equação de vínculo, temos

$$y_P + 2z = L \Rightarrow \frac{\Delta y_P}{\Delta t} + 2 \frac{\Delta z}{\Delta t} = 0$$

$$\therefore \frac{\Delta z}{\Delta t} = -\frac{v_P}{2} = -2 \text{ m/s}$$

Para as coordenadas do bloco em função de y_P e z temos

$$\begin{cases} y_B = y_P + z \cos \theta \\ x_B = z \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{yB} = v_P + \frac{\Delta z}{\Delta t} \cos \theta \\ v_{xB} = \frac{\Delta z}{\Delta t} \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{yB} = v_P + \frac{\Delta z}{\Delta t} \cos \theta = 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ m/s} \\ v_{xB} = \frac{\Delta z}{\Delta t} \sin \theta = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \text{ m/s} \end{cases}$$

A velocidade total do bloco é

$$v_B = \sqrt{v_{xB}^2 + v_{yB}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$