XL Olimpíada Internacional e XIV Olimpíada Ibero-americana
Primeiro Teste de Seleção
10 de Abril de 1999

Instruções

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro ou compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.

▶ Problema 1

Determine todos os inteiros positivos $n > 1$ para os quais existem um inteiro positivo k e inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dois a dois distintos tais que o conjunto

$$\{x_i + x_j; 1 \leq i < j \leq n\}$$

seja um conjunto de potências distintas de k.

Observação: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ não são necessariamente positivos.

▶ Problema 2

Sejam a, b, c, d números reais tais que $a = \sqrt{4 - \sqrt{5 - a}}$, $b = \sqrt{4 + \sqrt{5 - b}}$, $c = \sqrt{4 - \sqrt{5 + c}}$ e $d = \sqrt{4 + \sqrt{5 + d}}$. Calcule $abcd$.

▶ Problema 3

Considere um triângulo ABC e BD e CE as bissetrizes dos ângulos B e C, respectivamente ($D \in AC$ e $E \in AB$). A circunferência circunscrita a ABC tem centro O e a circunferência ex-inscrita tangente ao lado BC tem centro I_a. Estas duas circunferências intersectam-se nos pontos P e Q.

(i) Mostre que PQ é paralelo a DE.

(ii) Prove que I_aO é perpendicular a DE.

▶ Problema 5

(i) Se m, n são inteiros positivos tais que $2^n - 1$ divide $m^2 + 9$, prove que que n é uma potência de 2.

(ii) Se n é uma potência de 2, prove que existe um inteiro positivo m tal que $2^n - 1$ divide $m^2 + 9$.

▶ Problema 4

Sejam $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{Z}$ o conjunto dos racionais estritamente positivos e o conjunto dos inteiros. Determine todas as funções $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Z}$ satisfazendo as seguintes condições:

(1) $f(1999) = 1$

(2) $f(ab) = f(a) + f(b)$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}^+$.

(3) $f(a + b) \geq \min\{f(a), f(b)\}$,para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}^+$.

A notação $\min\{x, y\}$ denota o menor dentre os inteiros x e y. Por exemplo, $\min\{3, 4\} = 4$ e $\min\{3, 3\} = 3$.