FÍSICA

FRENTE: FÍSICA I

PROFESSOR(A): TADEU CARVALHO

EAD – ITA/IME

AULAS 40 A 42

ASSUNTO: ENERGIA E SISTEMAS CONSERVATIVOS I

Resumo Teórico

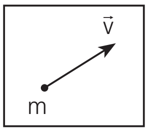
Energia

Energia cinética (Ec)

A energia cinética está obviamente relacionada ao movimento de um corpo podendo esse movimento ser de translação ou rotação.

Para partículas, só teremos energia cinética associada ao movimento de translação.

Seja uma partícula de massa **m** que se move com velocidade $\vec{v}$:



A energia cinética associada ao movimento dessa partícula será dado por $\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\cdot|\vec{v}|^2}$.

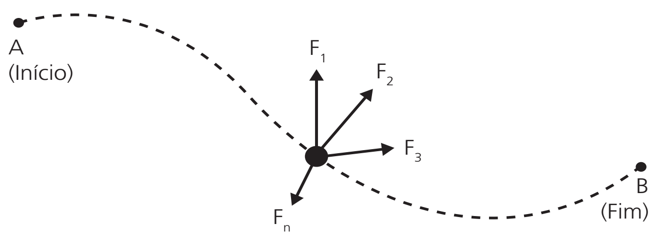
Para demostrarmos esse resultado, vamos deduzir algumas relações conhecidas como teoremas Trabalho-Energia. Esses teoremas apenas explicitam a definição de trabalho que foi dada no início desse tópico: "Trabalho é uma forma de fornecer ou retirar energia de um corpo...", sendo assim, podemos associar o trabalho de uma força ou de um conjunto deles a variação de uma certa quantidade de energia.

Em outras palavras: $\boxed{\tau \leftrightarrow \Delta E}$.

Partindo desse princípio, demonstraremos os teoremas **trabalho-energia**.

1) $\tau_R = \Delta Ec$

Imagine uma partícula sob a ação de várias forças: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$, se deslocando de A até B:



$$\sum \tau_F = \sum_{i=1}^{N}\int_A^B \vec{F}_i\cdot d\vec{r} = \int_A^B \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{R}\cdot d\vec{r}$$

Logo $\boxed{\tau_R = \sum_{i=1}^{N}\tau F_i}$

Onde: $\vec{R} = m\cdot\vec{a} = m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\text{Assim: } \tau_R = \int_A^B m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}$$

$$\tau_R = m\int_A^B d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = m\int_A^B \vec{v}\cdot d\vec{v}$$

Veja: $\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|$, diferenciando os dois lados:

$$d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = d|\vec{v}|^2$$

$$d\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot d\vec{v} = d|\vec{v}|^2$$

$$2\vec{v}\cdot d\vec{v} = d|\vec{v}|^2$$

$$\vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}d|\vec{v}|^2$$

$$\text{Logo: } \tau_R = m\int_A^B \frac{1}{2}d|\vec{v}|^2 = \frac{m}{2}\int_A^B d|\vec{v}|^2$$

$$\tau_R = \frac{m}{2}|\vec{v}|^2\Big|_A^B = \frac{m}{2}\left[|\vec{v}_B|^2 - |\vec{v}_A|^2\right]$$

$$\tau_R = \underbrace{\frac{m|\vec{v}_B|^2}{2}}_{E_{c_B}\text{(final)}} - \underbrace{\frac{m|\vec{v}_A|^2}{2}}_{E_{c_A}\text{(inicial)}}$$

Finalmente: $\boxed{\tau_R = \Delta E_c}$

Para demostrarmos os outros dois teoremas trabalho-energia é necessário classificarmos as forças em dois grupos: forças conservativas e forças não conservativas.

As forças ditas conservativas são aquelas que podem ser escritas como oposto do gradiente de uma função escalar (da posição) denotando essa função escalar por $V = V(\vec{r})$, a força conservativa assocada a essa função será dada por $\vec{F} = -\vec{D}V(\vec{r})$, em 3D.

onde $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$ em coordenadas cartesianas.

O caso unidimensional (1D) temos:

$$\vec{F} = -\frac{dV(x)}{dx}\hat{\imath}$$

A partir dessa informação, vamos calcular o trabalho realizado por uma força conservativa.
Observação: para simplificar, fazemos o caso 1D:

$$\tau_F = \int_i^f F(x)\cdot dx, \text{ mas } f(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

Logo $F(x)dx = -dV(x)$, assim:

$$\tau_F = \int_i^f -dV(x) = -\int_i^f dV(x) = -V(x)\Big|_i^f$$

$$\tau_F = -[V(x_f) - V(x_i)] = V(x_i) - V(x_f)$$

Donde concluímos que V(x) representa uma energia, que é função da posição e será conhecida como energia potencial, assim:

$$\tau_{F\text{-cons}} = E_{P_i} - E_{P_f} = -\left(E_{P_f} - E_{P_i}\right)$$

ou

$$\boxed{\tau_{F\text{-cons}} = -\Delta E_P}$$

Algumas propriedades relacionadas às forças conservativas são consequências de sua definição.

1) O trabalho de uma força conservativa não depende dos pontos intermediários (do trajeto), ou seja, depende apenas dos pontos inicial e final.
2) O trabalho de uma força conservativa em um percurso fechado $\left(\vec{r}_i = \vec{r}_f\right)$ é sempre nulo.
   As forças conservativas são:
   1) Força gravitacional
   2) Força elástica
   3) Força elétrica (caso estático)

A tabela abaixo relaciona as forças conservativas com suas respectivas energias potenciais.

Força conservativa: $F(\vec{r})$	Energia potencial: $V(\vec{r})$
Gravitacional: $-mg\,\hat{\jmath}$	mgy
Elástica: $-Kx\,\hat{\imath}$	$\frac{Kx^2}{2}$
Elétrica: $\frac{KQ_1\cdot Q_2}{r^2}\hat{r}$	$\frac{K\cdot Q_1\cdot Q_2}{r}$

Veja que esses resultados confirmam as expressões demonstradas anteriormente para o trabalho da força peso e da força elástica:

$$\tau_P = mgy_i - mgy_f, \text{ onde } E_{P_g} = mgy$$

$$\tau_{Fel} = \frac{kx_i^2}{2} - \frac{kx_f^2}{2}, \text{ onde } E_{P_{el}} = \frac{kx^2}{2}$$

Agora, falta demonstrar o terceiro teorema trabalho-energia, que diz respeito exatamente ao trabalho das forças não conservativas:
Como sabemos:

$$\tau_R = \sum \tau_F \text{ (todas as forças)}$$

$$\tau_R = \Delta E_C$$

$$\tau_{F-cons} = -\Delta E_P$$

$$\text{Como: } \tau_R = \sum \tau_F \text{ (todas)}$$

$$\text{Logo: } \underbrace{\tau_R}_{\Delta E_C} = \sum \tau_{F-Cons} + \sum \tau_{F-N\,cons}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\Delta E_C \qquad \sum(-\Delta E_P)$$

$$\text{Assim: } \sum \tau_{F-N\,cons} = \Delta E_C + \sum \Delta E_P$$

$$\tau_{F-N\,cons} = \left(E_{C_f} - E_{C_i}\right) + \sum\left(E_{P_f} - E_{P_i}\right)$$

$$\tau_{F-N\,cons} = \left(E_{C_f} + \sum E_{P_f}\right) - \left(E_{C_i} + \sum E_{P_i}\right)$$

$$\text{ou ainda: } \tau_{F-N\,cons} = \left(E_C + \sum E_P\right)_f - \left(E_C + \sum E_P\right)_i$$

Neste momento é conveniente chamar de energia mecânica (E_M) a soma da energia cinética com as energias potenciais de uma partícula, fazendo com que a expressão acima se torne:

$$\tau_{F-N\,cons} = E_{M_f} - E_{M_i}$$

$$\boxed{\tau_{F-N\,cons} = \Delta E_m}$$

Assim, relembramos os três teoremas trabalho × energia.

1) $\tau_R = \Delta E_C$
2) $\tau_{F-cons} = -\Delta E_P$
3) $\tau_{F-N\,cons} = \Delta E_M$

Neste momento, estamos aptos a classificar os sistemas físicos de acordo com o "comportamento" da sua energia mecânica:

Sistemas físicos

Conservativos
$\Downarrow$
se $\tau_{F\text{-ÑCONS}} = 0$
$\Downarrow$
$\boxed{\Delta E_M = 0}$ ou $\boxed{E_M = cte}$

Não conservativos
$\Downarrow$
se $\tau_{F\text{-ÑCONS}} \neq 0$
$\Downarrow$
$E_M \neq cte$

$\Delta E_M > 0$ ou $\Delta E_M < 0$

$\Delta E_M > 0$ $\downarrow$ Sist. Motores

$\Delta E_M < 0$ $\downarrow$ Sist. Dissipativos

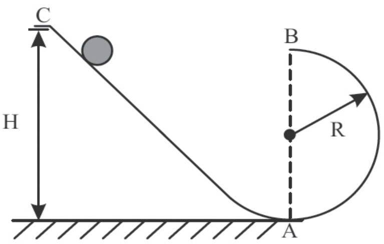
Esse diagrama mostra que para um sistema físico ser conservativo (E_m = cte) é preciso que as forças não conservativas não realizem trabalho.
Isso será possível em 3 casos:

- $\vec{F}_{\text{Ñcons}} = 0$
- $\sum \vec{F}_{\text{Ñcons}} = 0$
- $\vec{F}_{\text{Ñcons}} \perp \vec{v}$

Quando qualquer uma dessas situações acontecer, o sistema será dito conservativo e poderemos usar o fato da energia mecânica permanecer constante.

Exercícios

01. (ITA/87) A figura representa uma pista sem atrito cuja secção vertical forma a partir do ponto mais baixo A uma semicircunferência de raio R. Um objeto de massa M é abandonado a partir de uma altura H que é a mínima que ainda lhe permite atingir o ponto B situado na vertical de A.



Sendo T_1 o trabalho da força peso e T_2 o trabalho da reação da pista ao longo dessa trajetória CAB, podemos afirmar, a respeito de H, T_1 e T_2 que:

A) $H = \frac{5R}{2}$; T_1 e T_2 só podem ser calculados conhecendo-se a forma detalhada da pista.

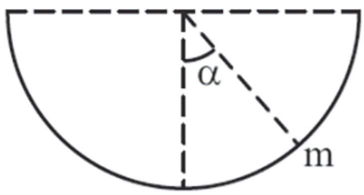
B) $H = \frac{5R}{2}$; $T_1 = mg\frac{R}{2}$; T_2 só pode ser calculado conhecendo-se a forma detalhada da pista.

C) $H = \frac{3R}{2}$; $T_1 = -Mg\frac{R}{2}$; $T_2 = 0$.

D) $H = \frac{5R}{2}$; $T_1 = Mg\frac{R}{2}$; $T_2 = 0$.

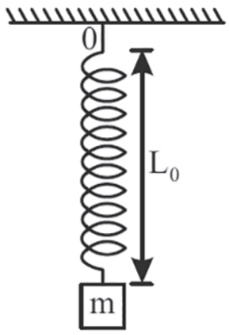
E) $H = \frac{3R}{2}$; $T_1 = Mg\frac{R}{2}$; $T_2 = -Mg\frac{R}{2}$.

02. (ITA/76) Abandona-se com velocidade inicial nula uma partícula de massa m_2, no interior de uma casca hemisférica, na posição definida pelo ângulo α (ver figura). Supondo que não haja atrito, a força $\vec{F}$ que a casca exerce sobre a partícula quando esta se encontra no ponto mais baixo de sua trajetória, é dada por:



A) $F = mg(2\cos\alpha - 1)$
B) $F = mg(3 - 2\cos\alpha)$
C) $F = mg(1 - 2\cos\alpha)$
D) $F = 2mg(1 - \cos\alpha)$
E) $F = mg$

03. (ITA/84) Uma mola de massa desprezível tem constante elástica K e comprimento L_0 quando não esticada. A mola é suspensa verticalmente por uma das extremidades e na outra extremidade é preso um corpo de massa **m**. Inicialmente o corpo é mantido em repouso numa posição tal que a força exercida pela mola seja nula. Em seguida a massa **n** é abandonada com velocidade inicial nula. Desprezando o atrito, o comprimento máximo (L) da mola será dado por:



A) $L = L_0 + \frac{mg}{K}$

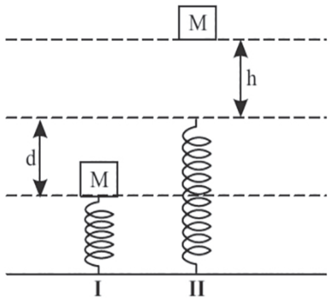
B) $L = \frac{mg}{K}$

C) $L = L_0 + \frac{2mg}{K}$

D) $L = \frac{2mg}{K}$

E) $L = \frac{1}{2}\left(L_0 + \frac{mg}{K}\right)$

04. (ITA/78) Na figura abaixo, a mola é ideal, a situação **I** é a de equilíbrio estável do sistema massa-mola e a situação **II** é a da mola em repouso. Abandona-se o bloco M como indica a situação **II**, pode-se afirmar que a máxima velocidade que o bloco M atingirá será dada por:



A) $V_{máx} = \sqrt{2gd}$

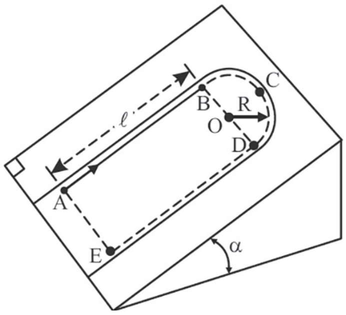
B) $v_{máx} = \sqrt{g(h + d)}$

C) $v_{máx} = \sqrt{2g(h + d)}$

D) $v_{máx} = \sqrt{2gh}$

E) $v_{máx} = \sqrt{g(2h + d)}$

05. (ITA/82) Sobre um plano inclinado de um ângulo α sobre o horizonte, fixa-se um trilho ABCDE composto das porções: AB = DE = ℓ (na direção do declive do plano inclinado e da semicircunferência BDC de raio R, à qual AB e ED são tangentes. A partir de A lança-se uma bolinha ao longo de AB, por dentro do trilho. Desprezando todos os atritos e resistências, podemos afirmar que a mínima velocidade inicial que permite que a bolinha descreva toda a semicircunferência BCD é:



A) $\sqrt{(3R + 2\ell)g\ \text{sen}\ \alpha}$.

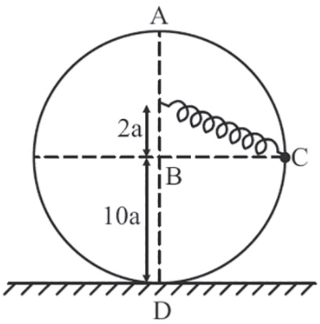
B) Qualquer velocidade inicial é suficiente.

C) $\sqrt{2g\ell\text{sen}\ \alpha}$

D) $\sqrt{3gR + 2g\ell}$

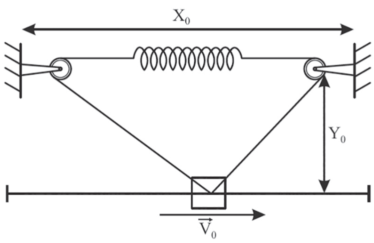
E) Nenhuma. É possível que a bolinha faça esse percurso.

06. Um anel de peso 36 N está ligado a uma mola e desliza sem atrito num fio circular situado num plano vertical. Calcular a constante elástica da mola para que a velocidade do anel seja a mesma nos pontos B e D. A mola não está deformada quando o anel estiver em B. Admitir que o anel parte de C.



07. O colar de 2,5 kg desliga sem atrito ao longo da barra horizontal. Sabendo-se que a mola tem constante K = 10 N/m e está sem deformação na posição ilustrada, determine a velocidade V_0 necessária para ele alcançar o ponto C.

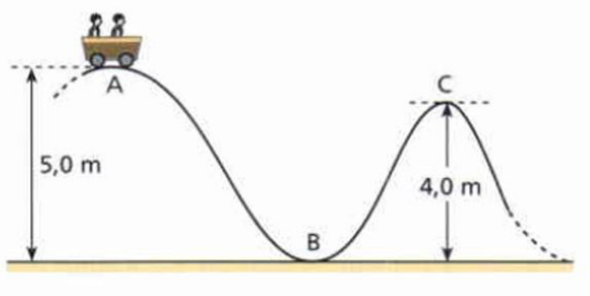
Dados: $X_0 = \sqrt{5y_0}$; $Y_0 = (\sqrt{6} + 2)$m



08. Em um fio ideal encontra-se uma esfera. O fio é colocado em uma posição horizontal e depois solto. Seja α o ângulo formado entre o fio e a vertical nos instantes em que a direção da aceleração do sistema é horizontal. Determine o valor de $\sec^2 \alpha$.

09. Encontrar a energia cinética de um aro de massa M e raio R, sendo que o aro movimenta-se, retilineamente, com velocidade V e gira com velocidade angular ω em redor do eixo que passa através do centro. Suponha que o aro rola sem escorregamento.

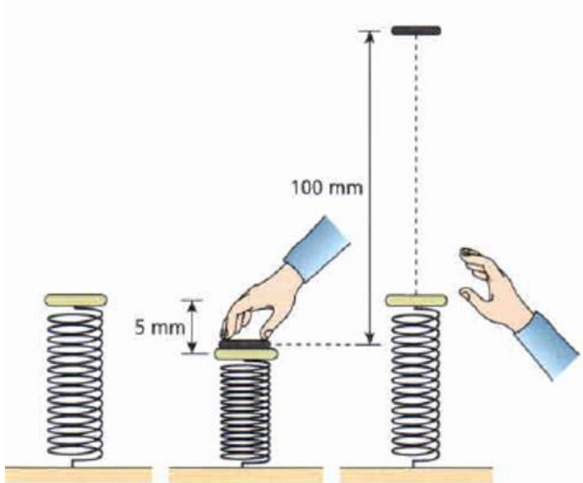
10. (Fuvest-SP) Numa montanha-russa um carrinho com 300 kg de massa é abandonado do repouso de um ponto A, que está 5,0 m de altura. Supondo que os atritos sejam desprezíveis e que $g = 10\ m/s^2$, calcule:



A) o valor da velocidade do carrinho no ponto B.

B) a energia cinética do carrinho no ponto C, que está a 4,0 m de altura.

11. (UFJF-MG) Um garoto brinca com uma mola helicoidal. Ele coloca a mola em pé em uma mesa e apoia sobre ela um pequeno disco plástico. Segurando a borda do disco, ele comprime a mola, contraindo-a de 5mm. Após o garoto soltar os dedos, a mola projeta o disco 100 mm para cima (contados do ponto do lançamento, veja a figura).



Considerando-se a mola ideal e desprezando-se a resistência do ar, quanto subiria o disco se o garoto contraísse a mola de 10 mm?

A) 400 mm

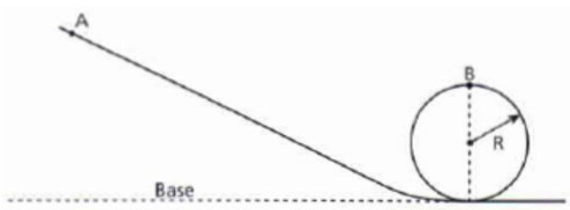
B) 200 mm

C) 100 mm

D) 80 mm

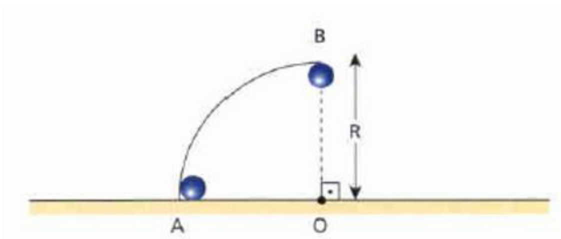
E) 90 mm

12. (Fatec-SP) A figura representa uma pista no plano vertical, por onde uma partícula desliza sem atrito. Abandonada do repouso no ponto A, a partícula passa por B, tendo nesse ponto aceleração 2 g (igual ao dobro da aceleração gravitacional). Sendo R o raio da circunferência descrita, a altura de A em relação à base é:

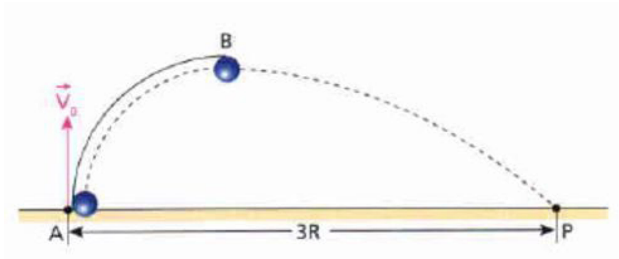


A) 1R
B) 2R
C) 3R
D) 4R
E) 5R

13. (UFRJ) Um trilho em forma de arco circular, contido em um plano vertical, está fixado em um ponto A de um plano horizontal. O centro do arco está em um ponto O desse mesmo plano. O arco é de 90° e tem raio R, como ilustra a figura.

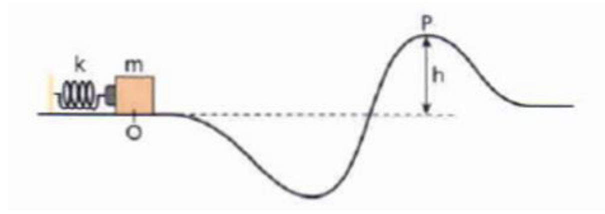


Um pequeno objeto é lançado para cima, verticalmente, a partir da base A do trilho e desliza apoiado internamente a ele, sem atrito, até o ponto B, onde escapa horizontal, caindo no ponto P do plano horizontal onde está fixado o trilho. A distância do ponto P ao ponto A é igual a 3R.



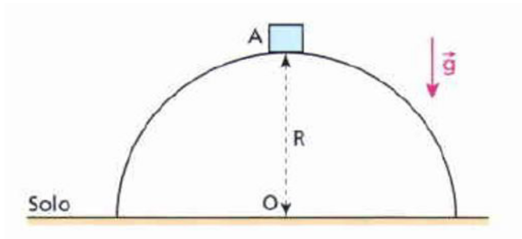
Calcule o módulo da velocidade inicial $\vec{v}_0$ com que o corpo foi lançado, em função do raio R e do módulo da aceleração da gravidade g.

14. (Olimpíada Brasileira de Física) Um bloco de massa m = 0,60 kg, sobre um trilho de atrito desprezível, comprime uma mola de constante elástica $k = 2,0 \cdot 10^3$ N/m, conforme a figura abaixo.



Considere que a energia potencial gravitacional seja zero na linha tracejada. O bloco, ao ser liberado, passa pelo ponto P(h = 0,60 m), onde 75% de sua energia mecânica é cinética. Adote $g = 10,0$ m/s^2 e despreze o efeito do ar.
A compressão **x** da mola foi de:
A) 9,0 cm
B) 12,0 cm
C) 15,0 cm
D) 18,0 cm
E) 21,0 cm

15. Um pequeno bloco de gelo parte do repouso do ponto A da superfície hemisférica representada na figura e desce sem sofrer ação de atritos ou da resistência do ar:



Sendo R o raio do hemisfério, calcule a que altura h do solo o bloco perde o contato com a superfície, passando a se mover sob ação exclusiva da gravidade $\vec{g}$.

Gabarito

01	02	03	04	05
D	B	A	E	A
06	**07**	**08**	**09**	**10**
–	*	*	*	–
11	**12**	**13**	**14**	**15**
–	–	–	–	–

***07:** $V_0 = 4$ m/s

08: $\sec^2 \alpha = \frac{3}{2}$

09: $E_C = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{MR^2\omega^2}{2} = \frac{M(R\omega)^2}{2}$

– Demonstração.