“A coisa mais importante de sua vida é o objetivo que você persegue no presente momento. Toda a vida de um homem se apresenta como uma sucessão de momentos. Se você conseguir entender isso, não existirá mais nada a ser feito, nada mais a almejar. Viva sendo fiel ao objetivo do momento.”

Yamamoto Tsunetomo

SUMÁRIO

POLINÔMIOS

1. TEOREMA DE D'ALEMBERT

O resto da divisão de um polinômio P(x) por x–a é igual a P(a).

Seja, com efeito, $P(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0$, um polinômio de x, ordenado segundo as potencias decrescentes de x. Designemos o quociente dessa divisão por Q(x) e o resto por R.

O resto tendo grau inferior ao divisor, que é do primeiro grau, será de grau zero, isto é, independente de x.

Podemos, pois , estabelecer a seguinte identidade:

$$P(x)=(x-a).Q(x)+R$$

Substituindo nesta identidade x por a, teremos:

$P(a)\equiv(a-a).Q(a)+R$

$P(a)\equiv 0.Q(a)+R$

$P(a)=R$

Este resultado nos mostra que R é uma constante, isto é, equivale ao valor numérico P(a) de Polinômio P(x), para x = a.

OBSERVAÇÃO

Quando o polinômio divisor é da forma x + a, devemos substituir no polinômio P(x), x por –a, visto que: x + a = x – (– a).

CONSEQUÊNCIA 1: Para que um polinômio em x seja divisível por x – a, é condição necessária e suficiente que ele se anule para x = a.

CONSEQUÊNCIA 2: Para que um polinômio em x seja divisível por x + a, é condição necessária e suficiente que ele se anule para x = - a.

EXEMPLO I

Calcular o resto da divisão $\left(5x^4-8x^3+3x^2-10x+7\right):\left(x-2\right)$

RESOLUÇÃO:

$R=5.2^4-8.2^3+3.2^2-10.2+7$

$R=80-64+12-20+7$
$R=15$

EXEMPLO II

Calcular o resto da divisão $\left(x^3+12x^2+15x+10\right):\left(x+5\right)$

RESOLUÇÃO:

$R=\left(-5\right)^3+12.\left(-5\right)^2+15.\left(-5\right)+10$

$R=-125+300-75+10=110$

2. REGRA DE RUFFINI

O quociente da divisão de um polinômio completo e ordenado em relação a x do grau m por um binômio da forma x – a, é um polinômio e, ordenado em relação a x, é do grau m – 1, no qual:

1° O coeficiente do primeiro termo é o mesmo do primeiro termo do polinômio dividendo;

2° O coeficiente de cada termo é igual à soma do coeficiente de mesma ordem do dividendo com o coeficiente do termo anterior multiplicado por a;

3° O resto da divisão é igual à soma do coeficiente do último termo do dividendo com o coeficiente do último termo do quociente multiplicado por a.

EXEMPLO I

Calcular o quociente e o resto da divisão $\left(x^3+5x^2+x-1\right):\left(x+5\right)$

RESOLUÇÃO:

$b_2=1$
$b_1=1\left(-5\right)+5=0$
$b_0=0\left(-5\right)+1=1$
$R=1(-5)-1$
$Q\left(x\right)=x^2+1$ e $R=$-6.

EXEMPLO II

Calcular o quociente e o resto da divisão $\left(2x^4-3x^3+2x^2-x+6\right):\left(x-3\right)$

RESOLUÇÃO:

$b_3=2$
$b_0=2.3-3=3$
$b_1=3.3+2=11$
$b_0=11.3-1=32$
$R=32.3+6=102$
$Q\left(x\right)=2x^3+3x^2+11x+32$

EXEMPLO III:

Usando o dispositivo prático

Dividir $2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ por $x - 2$

Inicialmente alocar no dispositivo os coeficientes do dividendo e o segundo termo do binômio com o sinal trocado e então proceder como acima:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & 3 & -4 \\ \hline 2 & 2 & -1 & 1 & \boxed{-2} \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & \boxed{2\cdot 2+(-5)} & \boxed{2\cdot(-1)+3} & \boxed{2\cdot 1+(-4)} \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 - x + 1$ e $R = -2$

Vamos detalhar abaixo o dispositivo

DISPOSITIVO PRÁTICO DE BRIOTT-RUFFINI

Para dividir um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ por $x - a$, devemos seguir o seguinte algoritmo:

1º) na primeira linha do diagrama, dispomos a raiz $\underline{a}$ do divisor na coluna à esquerda e a seguir os coeficientes de $P(x)$, inclusive os nulos;

$$\begin{array}{c|ccccccc} a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & & & & & & & \end{array}$$

2º) na segunda linha do diagrama, dispomos o coeficiente do primeiro termo do dividendo que será o coeficiente do primeiro termo do quociente;

$$\begin{array}{c|ccccccc} a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & \begin{matrix} a_n \\ \downarrow \\ q_{n-1} \end{matrix} & & & & & & \end{array}$$

3º) à direita do termo anterior colocamos $a \cdot q_{n-1} + a_{n-1} = q_{n-2}$, coeficiente do segundo termo do quociente;

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
	$\underset{q_{n-1}}{\underset{\downarrow}{a_n}}$	$\underset{q_{n-2}}{\underset{\downarrow}{a \cdot q_{n-1} + a_{n-1}}}$					

4º) repete-se a operação descrita no item anterior até atingirmos q_0 $P(x) = x^3 + kx^2 + px - 9$

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
	$\underset{q_{n-1}}{\underset{\downarrow}{a_n}}$	$\underset{q_{n-2}}{\underset{\downarrow}{a \cdot q_{n-1} + a_{n-1}}}$	$\underset{q_{n-3}}{\underset{\downarrow}{a \cdot q_{n-2} + a_{n-2}}}$	$\dots$	$\underset{q_1}{\underset{\downarrow}{a \cdot q_2 + a_2}}$	$\underset{q_0}{\underset{\downarrow}{a \cdot q_1 + a_1}}$	

5º) repetindo o procedimento mais uma vez obtemos o resto $r = a \cdot q_0 + a_0$ da divisão.

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
	$\underset{q_{n-1}}{\underset{\downarrow}{a_n}}$	$\underset{q_{n-2}}{\underset{\downarrow}{a \cdot q_{n-1} + a_{n-1}}}$	$\underset{q_{n-3}}{\underset{\downarrow}{a \cdot q_{n-2} + a_{n-2}}}$	$\dots$	$\underset{q_1}{\underset{\downarrow}{a \cdot q_2 + a_2}}$	$\underset{q_0}{\underset{\downarrow}{a \cdot q_1 + a_1}}$	$\underset{r}{\underset{\downarrow}{a \cdot q_0 + a_0}}$

3. TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Todo polinômio de grau maior ou igual a 1 admite pelo menos uma raiz real ou complexa.

4. TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Se o número complexo α é raiz de um polinômio P, então P(x) é divisível por $(x - \alpha)$

Todo polinômio $P(x)$ de grau $n \geq 1$ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau de maneira única, a menos da ordem, como segue:

$$P(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são as raízes (complexas) do polinômio.

TEOREMA: Um polinômio de grau n possui exatamente n raízes complexas. Desta forma, a quantidade de raízes reais é no máximo igual a n.

1. O resto da divisão de $16^{101}+8^{101}+4^{101}+2^{101}+1$ por $2^{100}+1$ é:
a) 0
b) 2
c) 4
d) 11
e) 10

2. (CMRJ 2003) Dividindo o trinômio x^2-x+2 por $x+3a$, obtém-se quociente $x-b$ e resto $2a+3b$, com a e b inteiros. A soma desses valores inteiros de a e b é:
a) 5
b) 3
c) 1
d) –2
e) –3

3. Quando o polinômio $x^4+ax^3-7x^2+bx-49$ é dividido por $(x-3)$ o resto é 53, e quando é dividido por $(x+2)$ o resto é –87. Calcule $a \cdot b$.
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 9

4. (CN 2005) Sabendo-se que a equação $x^2(x^2+13)-6x(x^2+2)+4=0$ pode ser escrita como um produto de binômios do primeiro grau, a soma de duas das suas raízes reais distintas é igual a
a) –3
b) –2
c) –1
d) 2
e) 3

5. (ITA 2007) Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos $(x+a)^3 - (x+b)^3$. Neste caso, $|a + |b| - c|$ é igual a:

a) 104
b) 114
c) 124
d) 134
e) 144

6. (ITA 1987) Considere $Q(x)$ e $R(x)$, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de um polinômio $A(x)$ pelo trinômio $B(x) = -x^2 + 5x - 6$. Admita que o grau de $A(x)$ é quatro e que os restos da divisão de $A(x)$ por $x+1$ e $x-2$ são, respectivamente, 3 e –1. Supondo também que $Q(x)$ é divisível por $x+1$, podemos afirmar que $R(x)$ é igual a:

a) $-4x+5$
b) $4x-5$
c) $-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$
d) $\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$
e) $\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}$

7. (EsPCEx 2012) Os polinômios $A(x)$ e $B(x)$ são tais que $A(x) = B(x) + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$. Sabendo-se que -1 é raiz de $A(x)$ e 3 é raiz de $B(x)$, então $A(3) - B(-1)$ é igual a

a) 98
b) 100
c) 102
d) 103
e) 105

8. Determinar a e b para que o polinômio $x^3 - ax^2 + bx - 10$ seja divisível por $(x+2)(x-1)$.

9. (Escola Naval-91/92) O resto da divisão de $1 + x + x^2 + \ldots + x^{100}$ por $x^2 - 1$ é:

a) 0
b) $x + 1$
c) $50x + 50$
d) $50x + 51$
e) $51x + 50$

10. (ITA) Se $P(x)$ é um polinômio do $5°$ grau que satisfaz as condições $1=P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)$ e $P(6)=0$, então temos:

a) $P(0)=4$
b) $P(0)=3$
c) $P(0)=9$
d) $P(0)=2$
e) $P(0)=0$

11. (ITA 2011) Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4+x^2+ax+b=0$, com $a,b\in\mathbb{R}$, então a^2-b^3 é igual a:

a) -64
b) -36
c) -28
d) 18
e) 27

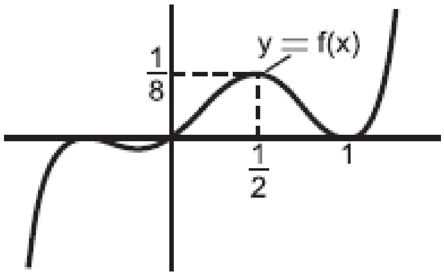
12. (CN 1984) Se a divisão $\dfrac{\left(x^3-6x^2+12x-8\right)^{16}+2x^2-8x+1+K}{x^2-4x+4}$ é exata, o valor de K é:

a) 3
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

13. (IME 2012) Considere o polinômio $5x^3-3x^2-60x+36=0$. Sabendo que ele admite uma solução da forma $\sqrt{n}$, onde n é um número natural, pode-se afirmar que:

a) $1\le n<5$
b) $6\le n<10$
c) $10\le n<15$
d) $15\le n<20$
e) $20\le n<30$

14. (ITA 2002) Com base no gráfico da função polinomial $y=f(x)$ esboçado abaixo, calcule o resto da divisão de $f(x)$ por $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-1)$.



a) $x+1$

b) $-x+\frac{1}{2}$

c) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

d) $-\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$

e) $-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$

15. (EFOMM 2012) Sabendo que o polinômio $P(x)=x^3+kx^2+px-9$ é divisível por $D(x)=x^2-3$, podemos afirmar que:

a) $p+k=-3$

b) $\frac{p}{k}=-1$

c) $p+k=-9$

d) $p\in\mathbb{N}$ e $\sqrt{k}\in\mathbb{R}$

e) $p^k=\sqrt[4]{3}$

16. Dado um polinômio P com coeficientes inteiros, 2 divide P(5), 5 divide P(2) e P(0) = 1. Mostre que 10 divide P(7).

17. O produto $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{25})$ é um polinômio na variável x. O coeficiente de x^{50} é:

18. Encontre A, B e C que tornam verdadeira a identidade $\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$ e utilize esse resultado para calcular o valor da soma $\frac{3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{5}{2\cdot3\cdot4}+\frac{7}{3\cdot4\cdot5}+\frac{9}{4\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{2009}{1004\cdot1005\cdot1006}$. O valor encontrado será aproximadamente igual a:

a) 1
b) 1,25
c) 1,5
d) 1,75
e) 2

19. Um polinômio $P(x)$ de grau 9 tem a propriedade $P(k)=\frac{1}{k(k+1)}$ para $k=1,2,3,\cdots,10$. Calcule $P(11)$.

1.

$2^{100} = x \Rightarrow 2^{100} + 1 = x + 1$

$\Rightarrow 16^{101} + 8^{101} + 4^{101} + 2^{101} + 1 =$

$= 2^{404} + 2^{303} + 2^{202} + 2^{101} + 1 =$

$= 16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1$

O resto de $P(x) = 16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ por $x + 1$ é

$P(-1) = 16(-1)^4 + 8(-1)^3 + 4(-1)^2 + 2(-1) + 1 = 11$.

RESPOSTA: D

2.

$x^2 - x + 2 = (x + 3a)(x - b) + (2a + 3b) =$

$= x^2 + (3a - b)x + (-3ab + 2a + 3b)$

$3a - b = -1 \Leftrightarrow b = 3a + 1$

$-3ab + 2a + 3b = 2 \Leftrightarrow -3a(3a + 1) + 2a + 3(3a + 1) = 2$

$\Leftrightarrow 9a^2 - 8a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{9}(\text{não convém}) \vee a = 1$

$a = 1 \Rightarrow b = 3 \cdot 1 + 1 = 4 \Rightarrow a + b = 1 + 4 = 5$

RESPOSTA: A

3.

$p(x) = x^4 + ax^3 - 7x^2 + bx - 49$

$\Rightarrow p(3) = 3^4 + a \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 49 = 53 \Leftrightarrow 9a + b = 28$

$p(-2) = (-2)^4 + a \cdot (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) - 49 = -87$

$\Leftrightarrow 4a + b = 13$

$$\begin{cases} 9a + b = 28 \\ 4a + b = 13 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \wedge b = 1 \Rightarrow a \cdot b = 3$$

RESPOSTA: A

4.

$x^2(x^2+13)-6x(x^2+2)+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0$

Por inspeção, vemos que 1 é raiz (pois a soma dos coeficientes é zero). Aplicando o algoritmo de Briott-Ruffini, temos:

	1	-6	13	-12	4
1	1	-5	8	-4	0

Daí, concluímos que a equação pode ser escrita como $(x-1)(x^3-5x^2+8x-4)=0$.

Inspecionando o fator do terceiro grau, vemos que 2 é raiz. Aplicando novamente o algoritmo de Briott-Ruffini, temos:

	1	-5	8	-4
2	1	-3	2	0

Assim, concluímos que a equação inicial pode ser escrita como $(x-1)(x-2)(x^2-3x+2)=0$.

É fácil ver que o fator do segundo grau possui raízes 1 e 2. Assim, a equação resultante é

$(x-1)^2(x-2)^2=0$.

As suas raízes são 1 (dupla) e 2 (dupla), e a soma de duas raízes distintas é 3.

Outra solução pode ser obtida fatorando-se diretamente (se você vir o caminho...).

$x^2(x^2+13)-6x(x^2+2)+4=0$

$\Leftrightarrow x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0$

$\Leftrightarrow x^4+9x^2+4-6x^3+4x^2-12x=0$

$\Leftrightarrow (x^2)^2+(-3x)^2+2^2+2\cdot(-3x)\cdot x^2+$

$+2\cdot x^2\cdot 2+2\cdot(-3x)\cdot 2=0$

$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)^2=0$

RESPOSTA: E

5.

$9x^2-63x+c\equiv$

$\equiv x^3+3ax^2+3a^2x+a^3-(x^3+3bx^2+3b^2x+b^3)$

$\Leftrightarrow 9x^2-63x+c\equiv 3(a-b)x^2+3(a^2-b^2)x+a^3-b^3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ a^2-b^2=-21 \\ a^3-b^3=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ (a-b)(a+b)=-21 \\ a^3-b^3=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=-7 \\ a^3-b^3=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-5 \\ c=(-2)^3-(-5)^3=117 \end{cases}$$

Logo $|a+|b|-c|=|-2+5-117|=114$.

RESPOSTA: B

6.

Como $B(x)$ é do segundo grau, $R(x)$ é no máximo do primeiro grau e pode ser representado como $R(x) = ax + b$.

Como $x+1$ divide $Q(x)$, pelo teorema de D'Alembert, $Q(-1) = 0$.

Pelo algoritmo de Euclides, $A(x) = -(x-2)(x-3)\cdot Q(x) + (ax+b)$.

$A(-1) = -(-1-2)(-1-3)Q(-1) + R(-1) =$

$= R(-1) = -a + b = 3$

$A(2) = -(2-2)(2-3)Q(2) + R(2) =$

$= R(2) = 2a + b = -1$

$\Rightarrow a = -\frac{4}{3} \text{ e } b = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow R(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

RESPOSTA: C

7.

Como -1 é raiz de $A(x)$ e 3 é raiz de $B(x)$, temos $A(-1) = 0$ e $B(3) = 0$.

$A(x) = B(x) + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

$\Rightarrow A(-1) = B(-1) + 3\cdot(-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 + (-1) + 1$

$\Leftrightarrow 0 = B(-1) - 1 \Leftrightarrow B(-1) = 1$

$\Rightarrow A(3) = B(3) + 3\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 3 + 1$

$\Leftrightarrow A(3) = 0 + 103 = 103$

$\Rightarrow A(3) - B(-1) = 103 - 1 = 102$

RESPOSTA: C

8.

	1	–a	b	–10
–2	1	–2–a	4+a+b	–18–2a–2b=0
1	1	–1–a	3+b=0	

2a+2b = –18 e b+3 = 0 ⇔ b = –3 e a = –6

9.

Seja $p(x)=1 + x + x^2 + \dots + x^{100}$

$p(x)=q(x)\cdot(x^2-1)+r(x)$ com $r(x)=ax+b$

$x^2-1=(x-1)(x+1)$ faremos o cálculo de p(1) e p(-1)

$p(1)=101$ e $p(-1)=1$

Substituindo em $p(x)=q(x)\cdot(x^2-1)+r(x)$

temos

$$\begin{cases} a+b=101 \\ -a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=50, b=51.$$

$r(x)=50x+51.$

RESPOSTA: D

10.

$P(x)-1=a\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)$

$P(6)-1=a\cdot(6-1)\cdot(6-2)\cdot(6-3)\cdot(6-4)\cdot(6-5)$

$=0-1 \Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{120}$

$P(x)=-\dfrac{1}{120}\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)+1$

$P(0)=-\dfrac{1}{120}\cdot(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)(0-5)+1=2$

RESPOSTA: D

11.

Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini:

1	1	0	1	a	b
1	1	1	2	a+2	a+b+2
	1	2	4	a+6	

Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4+x^2+ax+b=0$, então:

$$\begin{cases} a+b+2=0 \\ a+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a=-6 \quad \wedge \quad b=4$$

$\Rightarrow a^2-b^3=(-6)^2-4^3=36-64=-28$

RESPOSTA: C

12.

$$\frac{(x^3-6x^2+12x-8)^{16}+2x^2-8x+1+K}{x^2-4x+4}=$$

$$=\frac{\left[(x-2)^3\right]^{16}+2(x^2-4x+4)-7+K}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{(x-2)^{48}+2\cdot(x-2)^2-7+K}{(x-2)^2}=$$

$$=(x-2)^{46}+2+\frac{K-7}{(x-2)^2}$$

Se a divisão é exata, então $K-7=0 \Leftrightarrow K=7$.

RESPOSTA: D

13.

$$5x^3-3x^2-60x+36=0 \Leftrightarrow 5x(x^2-12)-3(x^2-12)=0 \Leftrightarrow (5x-3)(x^2-12)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5} \vee x=\pm\sqrt{12}$$

$$n\in\mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n}=\sqrt{12} \Leftrightarrow n=12\in[10,15[$$

RESPOSTA: C

14.

A partir do gráfico conclui-se que $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$ e $f(1)=0$.

Seja $r(x)=ax+b$, o resto da divisão de $y=f(x)$ por $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$.

$$\Rightarrow f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\cdot Q(x)+(ax+b)$$

$$\Rightarrow f(1)=\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-1)\cdot Q(1)+(a\cdot 1+b)=0 \Leftrightarrow a+b=0$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot Q\left(\frac{1}{2}\right)+\left(a\cdot\frac{1}{2}+b\right)=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{a}{2}+b=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{4} \wedge b=\frac{1}{4} \Rightarrow r(x)=-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$$

RESPOSTA: E

15.

$$D(x)=x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

Pelo teorema de D'Alembert, $D(x)$ divide $P(x)$ se, e somente se, $P(\sqrt{3})=P(-\sqrt{3})=0$. Assim,

$$\begin{cases} P(\sqrt{3})=3\sqrt{3}+3k+\sqrt{3}p-9=0 \Leftrightarrow 3k+\sqrt{3}p=9-3\sqrt{3} \\ P(-\sqrt{3})=-3\sqrt{3}+3k-\sqrt{3}p-9=0 \Leftrightarrow 3k-\sqrt{3}p=9+3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6k = 18 \ \wedge \ 2\sqrt{3}p = -6\sqrt{3} \Leftrightarrow k = 3 \ \wedge \ p = -3 \Rightarrow \frac{p}{k} = -1$$

16.
Seja $P(x) = A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\ldots(x - x_n)$, então:

$P(5) = A(5 - x_1)(5 - x_2)(5 - x_3)(5 - x_4)\ldots(5 - x_n)$ e $P(2) = A(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3)(2 - x_4)\ldots(2 - x_n)$

Então: $P(7) = A(7 - x_1)(7 - x_2)(7 - x_3)(7 - x_4)\ldots(7 - x_n)$

Se 2 divide P(5) e 5 divide P(2) então 10 divide P(5)P(2)

$P(2)P(5) = A^2[(5 - x_1)(2 - x_1)][(5 - x_2)(2 - x_2)][(5 - x_3)(2 - x_3)]\ldots[(5 - x_n)(2 - x_n)]$ =>

$P(2)P(5) = A^2[10 - 7x_1 + x_1^2][10 - 7x_2 + x_2^2][10 - 7x_3 + x_3^2]\ldots[10 - 7x_n + x_n^2]$

$P(2)P(5) = A^2[10 - x_1(7 - x_1)][10 - x_2(7 - x_2)][10 - x_3(7 - x_3)]\ldots[10 - x_n(7 - x_n)]$ =>

$P(2)P(5) = A^2[10n - 10^{n-1}(x_1(7 - x_1) + x_2(7 - x_2) + \ldots + x_n(7 - x_n)) + 10^{n-2}(x_1x_2(7 - x_1)(7 - x_2) + x_1x_3(7 - x_1)(7 - x_3) + \ldots + x_{n-1}x_n(7 - x_{n-1})(7 - x_n)) \ldots \pm x_1x_2\ldots x_n(7 - x_1)(7 - x_2)\ldots(7 - x_n)]$ (*)

Podemos tirar as seguintes conclusões:

i) Se A é divisível por 2 e por 5, então A é divisível por 10. Como $P(7) = A(7 - x_1)(7 - x_2)\ldots(7 - x_n)$ e todos os coeficientes de P(x) são inteiros => P(7) é divisível por 10;

ii) Se A não é divisível por 10 temos que analisar (*). Como A não é divisível por 10 temos que analisar a expressão $10n - 10^{n-1}(x_1(7 - x_1) + x_2(7 - x_2) + \ldots + x_n(7 - x_n)) + \ldots \pm x_1x_2\ldots x_n(7 - x_1)(7 - x_2)\ldots(7 - x_n)$

Notemos que todos os termos (com excessão do último) são produtos de potências de 10 com termos em $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Então para que este expressão seja divisível por 10, temos que impor que o último termo seja divisível por 10. Ou seja, $x_1x_2\ldots x_n(7 - x_1)(7 - x_2)\ldots(7 - x_n)$ é divisível por 10. Como P(0) = 1 e |P(0)| = $|x_1x_2\ldots x_n|$ => $|x_1x_2\ldots x_n| = 1$ => $(7 - x_1)(7 - x_2)\ldots(7 - x_n)$ é divisível por 10 => P(7) é divisível por 10

17.
$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{25})$ pode ser escrito como a multiplicação de duas PG's

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{25}) = \frac{x^{101} - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^{26} - 1}{x - 1} = \frac{x^{127} - x^{101} - x^{26} + 1}{(x - 1)^2}$$

Dividindo duas vezes por 1 através do dispositivo de Briot-Ruffini

x^{127} a x^{102} x^{101} x^{100} a x^{27} x^{26} x^{25} a x

	1	0	0	0	0	...	0	-1	0	0	...	0	-1	0	0	...	0	1
1	1	1	1	1	1	...	1	0	0	0	...	0	-1	-1	-1	...	-1	0

x^{126} a x^{101} x^{100} a x^{26} x^{25} a x^0

$$
\begin{array}{c|cccccccccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & -1 \ldots & -1 & -1 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots & 26 & 26 & 26 & \ldots & 26 & 25 & 24 \ldots & 1 & 0
\end{array}
$$

Então o coeficiente de x^{50} é 26.

18.

$$\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow 2n+1=A\cdot(n+1)(n+2)+B\cdot n(n+2)+C\cdot n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2n+1=(A+B+C)n^2+(3A+2B+C)n+2A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=2 \\ 2A=1 \Leftrightarrow A=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=-\frac{1}{2} \\ 2B+C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow B=1 \wedge C=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{n+2}$$

$$S_n=\left(\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}+\frac{-\frac{3}{2}}{3}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{3}+\frac{-\frac{3}{2}}{4}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{1}{4}+\frac{-\frac{3}{2}}{5}\right)+$$
$$+\cdots+\left(\frac{\frac{1}{2}}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{n+2}\right)$$

$$S_n=\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{-\frac{3}{2}}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{-\frac{3}{2}}{n+2}=\frac{5}{4}-\frac{\frac{1}{2}}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}$$

$$S_{1004}=\frac{3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{5}{2\cdot3\cdot4}+\frac{7}{3\cdot4\cdot5}+\frac{9}{4\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{2009}{1004\cdot1005\cdot1006}$$

$$S_{1004}=\frac{5}{4}-\frac{\frac{1}{2}}{1004+1}-\frac{\frac{3}{2}}{1004+2}=\frac{5}{4}-\frac{1}{4010}-\frac{3}{4012}\approx 1{,}25$$

RESPOSTA: B

19.

Seja um polinômio $Q(x)$ de grau 11 definido por $Q(x)=x(x+1)\cdot P(x)-1$.

Como $k(k+1)P(k)-1=0$ para $k=1,2,3,\ldots,10$, então esses valores de k são raízes de $Q(x)$, que pode ser escrito como:

$$Q(x)=x(x+1)P(x)-1=$$
$$=(ax+b)(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-10)$$

Fazendo $x=0$ e $x=-1$, temos:

$$Q(0)=-1=b\cdot(-1)(-2)\cdot\ldots\cdot(-10)=b\cdot(10!)$$
$$\Leftrightarrow b=-\frac{1}{10!}$$
$$Q(-1)=-1=(-a+b)(-2)(-3)\cdot\ldots\cdot(-11)=$$
$$=(-a+b)\cdot(11!)$$
$$\Leftrightarrow -a+\left(-\frac{1}{10!}\right)=-\frac{1}{11!}\Leftrightarrow a=-\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}=-\frac{10}{11!}$$
$$\Rightarrow Q(x)=x(x+1)P(x)-1=$$
$$=\left(-\frac{10}{11!}x-\frac{1}{10!}\right)(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-10)$$
$$\Rightarrow Q(11)=11\cdot 12\cdot P(11)-1=$$
$$=\left(-\frac{10}{11!}\cdot 11-\frac{1}{10!}\right)(10)(9)\cdot\ldots\cdot(1)$$
$$\Leftrightarrow 132P(11)-1=\left(-\frac{11}{10!}\right)\cdot 10!$$
$$\Leftrightarrow P(11)=-\frac{10}{132}=-\frac{5}{66}$$

RESPOSTA: $P(11)=-\frac{5}{66}$