CÔNICAS

1. (EPCAR (AFA) 2019) No plano cartesiano, os focos F_1 e F_2 da elipse $\alpha: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ são pontos diametralmente opostos da circunferência λ e coincidem com as extremidades do eixo real de uma hipérbole equilátera β.

É INCORRETO afirmar que

a. $\alpha \cap \beta \cap \lambda = \emptyset$

b. $\lambda \cap \beta = \{F_1, F_2\}$

c. $\alpha \cap \beta = \{A, B, C, D\}$, sendo A, B, C, D pontos distintos

d. $\alpha \cap \lambda \neq \emptyset$

2. (ESPCEX (AMAN) 2019) Uma hipérbole tem focos $F_1\ (-5, 0)$ e $F_2\ (5, 0)$ e passa pelos pontos $P(3, 0)$ e $Q(4, y)$, com $y>0$. O triângulo com vértices em F_1, P e Q tem área igual a

a. $\frac{16\sqrt{7}}{3}$.

b. $\frac{16\sqrt{7}}{5}$.

c. $\frac{32\sqrt{7}}{3}$.

d. $\frac{8\sqrt{7}}{3}$.

e. $\frac{8\sqrt{7}}{5}$.

3. (IME 2019) Uma hipérbole equilátera de eixo igual a 4, com centro na origem, eixos paralelos aos eixos coordenados e focos no eixo das abscissas sofre uma rotação de 45° no sentido anti-horário em torno da origem. A equação dessa hipérbole após a rotação é:

a. $xy = 2$

b. $x^2 + xy - y^2 = 4$

c. $x^2 - y^2 = 2$

d. $xy = -2$

e. $x^2 - y^2 = -2$

4. (ESPM 2018) Seja A o vértice da parábola de equação $y=x^2-4x+6$. A reta que passa pela origem O do plano cartesiano e pelo ponto A intercepta a parábola também num ponto B. Pode-se afirmar que:

a. $OA = AB$

b. $OA = 2 \cdot AB$

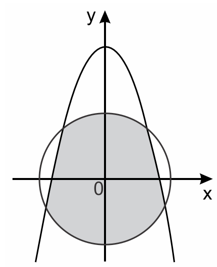
c. $AB = 2 \cdot OA$

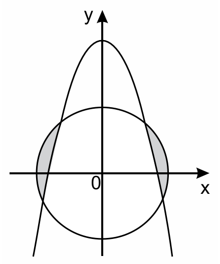
d. $AB = 3 \cdot OA$

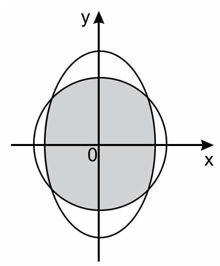
e. $OA = 3 \cdot AB$

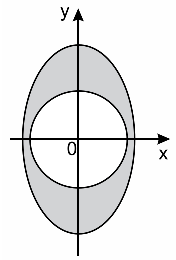
5. (FGV 2018) A solução gráfica do sistema de inequações $\begin{cases} 3x^2 + y^2 \leq 2 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ é a região sombreada em

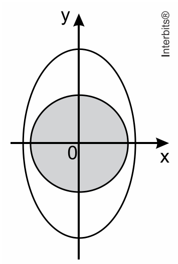
a.



b. 

c. 

d. 

e. 

6. (IME 2018) Seja uma elipse com focos no eixo OX e centrada na origem. Seus eixos medem 10 e 20/3. Considere uma hipérbole tal que os focos da elipse são os vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são os vértices da elipse. As parábolas que passam pelas interseções entre a elipse e a hipérbole e que são tangentes ao eixo OY, na origem, têm as seguintes equações:

a. $y^2 = \pm 2\frac{\sqrt{35}}{7}x$

b. $y^2 = \pm 4\frac{\sqrt{5}}{7}x$

c. $y^2 = \pm 6\frac{\sqrt{5}}{7}x$

d. $y^2 = \pm 6\frac{\sqrt{35}}{7}x$

e. $y^2 = \pm 8\frac{\sqrt{35}}{63}x$

7. (ESPCEX (AMAN) 2018) Uma elipse tem centro na origem e vértices em $(2a,\ 0)$ e $(0,\ a)$, com $a>0$. A área do quadrado inscrito nessa elipse é

a. $\frac{16a^2}{5}$.

b. $\frac{4a^2}{5}$.

c. $\frac{12a^2}{5}$.

d. $\frac{8a^2}{5}$.

e. $\frac{20a^2}{5}$.

8. (FGV 2017) Na representação gráfica do sistema de equações $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 4x^2-y=2 \end{cases}$ no plano cartesiano, uma das soluções é $(0,-2)$. A distância entre os pontos que representam as duas outras soluções desse sistema é igual a

a. $\sqrt{14}$.

b. $\frac{7}{2}$.

c. $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

d. $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

e. $\frac{3}{2}$.

9. (ESPCEX (AMAN) 2017) Os valores reais de n para os quais a reta $(t)\ y=x+n$ seja tangente à elipse de equação $2x^2+3y^2=6$ são iguais a

a. $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$

b. $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$

c. -3 e 3

d. -2 e 2

e. -5 e 5

10. (Esc. Naval 2017) Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, de focos F_1 e F_2 e excentricidade e. Calcule $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ e assinale a opção correta.

a. $ex^2+a(1+2e^2)$

b. $e^2x-a^2(1+e)$

c. $e^2x^2+a^2(1-2e)$

d. $e^2x-a(1+e^2)$

e. $e^2x^2+a^2(1-2e^2)$

11. (EPCAR (AFA) 2016) Analise as proporções abaixo e escreva V para a(s) verdadeira(s) e F para a(s) falsa(s).

I. ( ) A distância entre o vértice e o foco da parábola $y^2+4x-4=0$ é igual a 1 unidade de comprimento.

II. ( ) Numa hipérbole equilátera, as assíntotas são perpendiculares entre si.

III. ( ) A equação $2x^2+y^2-4x-4y+4=0$ representa uma elipse que tem um dos focos no ponto $P(1, 4)$

A sequência correta é

a. F - F - V

b. V - F - V

c. F - V - F

d. V - V - F

12. (UEM 2015) No plano cartesiano xy considere C_A a circunferência com centro em $O_A=(-4, 5)$ e raio $r_A=3$, C_B a circunferência definida pela equação $(x-2)^2+(y-4)^2=4$ e centro O_B. Sobre o exposto, assinale o que for **correto**.

01. A distância entre O_A e O_B é $\sqrt{37}$.

02. A equação da reta que passa pelos centros de C_B e C_B é dada por $y=-\frac{1}{6}x+\frac{13}{3}$.

04. O raio da circunferência C_B é maior que o raio da circunferência C_B.

08. A distância entre C_B e o eixo O_y é maior que zero.

16. O ponto $(-4, 8)\notin C_A$.

13. (ESPCEX (AMAN) 2015) Uma reta t passa pelo ponto $A(-3,0)$ e é tangente à parábola de equação $x=3y^2$ no ponto P.

Assinale a alternativa que apresenta uma solução correta de acordo com essas informações.

a. $t: x-10y+3=0$ e $P(27,3)$

b. $t: 2x-15y+6=0$ e $P(12,2)$

c. $t: 2x-15y+6=0$ e $P(12,-2)$

d. $t: y=0$ e $P(0,0)$

e. $t: x+6y+3=0$ e $P(3,-1)$

14. (IME 2015) Determine o produto dos valores máximo e mínimo de y que satisfazem às inequações dadas para algum valor de x.

$$2x^2-12x+10\le 5y\le 10-2x$$

a. $-3{,}2$

b. $-1{,}6$

c. 0

d. $1{,}6$

e. $3{,}2$

15. (UNIFOR 2014) Uma bola é jogada dentro de uma cesta cuja superfície é obtida girando a parábola $y=x^2$ em torno do eixo y. O centro da bola ocupa um ponto de altura $y=3$. O raio da bola é:

a. $\sqrt{11}$

b. $\frac{\sqrt{11}}{2}$

c. $\frac{\sqrt{11}}{3}$

d. $\frac{\sqrt{11}}{4}$

e. $\frac{\sqrt{11}}{5}$

16. (FGV 2014) No plano cartesiano, há dois pontos R e S pertencentes à parábola de equação $y = x^2$ e que estão alinhados com os pontos A(0,3) e B(4,0).

A soma das abscissas dos pontos R e S é:

a. -0,45

b. -0,55

c. -0,65

d. -0,75

e. -0,85

17. (IME 2014) Uma elipse cujo centro encontra-se na origem e cujos eixos são paralelos ao sistema de eixos cartesianos possui comprimento da semi-distância focal igual a $\sqrt{3}$ e excentricidade igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Considere que os pontos A, B, C e D representam as interseções da elipse com as retas de equações $y = x$ e $y = -x$. A área do quadrilátero $ABCD$ é

a. 8

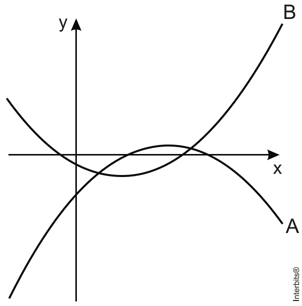
b. 16

c. $\frac{16}{3}$

d. $\frac{16}{5}$

e. $\frac{16}{7}$

18. (UFPE 2013) A seguir, estão ilustradas partes dos gráficos das parábolas A e B, com equações respectivas $y = -x^2 + 8x - 13$ e $y = x^2 - 4x - 3$.



Analise as proposições abaixo, acerca dessa configuração.

( ) Um dos pontos de interseção das parábolas A e B tem coordenadas (1,–6).

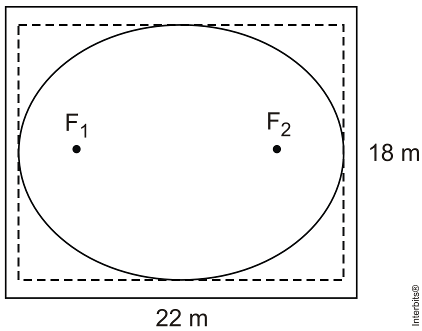
( ) O vértice da parábola A é o ponto (4,2).

( ) A reta que passa pelos pontos de interseção das parábolas A e B tem equação $y = 2x - 6$.

( ) A distância entre os vértices das parábolas A e B é $\sqrt{102}$.

( ) A parábola B intercepta o eixo das ordenadas no ponto com coordenadas (0,–3).

19. (UFRN 2013) Um arquiteto projetou, para um salão de dimensões 22 m por 18 m, um teto de gesso em formato de elipse com o eixo maior medindo 20 m e o eixo menor, 16 m, conforme ilustra a figura abaixo.



O aplicador do gesso afirmou que saberia desenhar a elipse, desde que o arquiteto informasse as posições dos focos.

Para orientar o aplicador do gesso, o arquiteto informou que, na direção do eixo maior, a distância entre cada foco e a parede mais próxima é de

a. 3 m.

b. 4 m.

c. 5 m.

d. 6 m.

20. (IME 2013) Considere uma haste AB de comprimento 10 m. Seja um ponto P localizado nesta haste a 7 m da extremidade A. A posição inicial desta haste é horizontal sobre o semieixo x positivo, com a extremidade A localizada na origem do plano cartesiano. A haste se desloca de forma que a extremidade A percorra o eixo y, no sentido positivo, e a extremidade B percorra o eixo x, no sentido negativo, até que a extremidade B esteja sobre a origem do plano cartesiano. A equação do lugar geométrico, no primeiro quadrante, traçado pelo ponto P ao ocorrer o deslocamento descrito é

a. $49x^2 + 9y^2 - 280x + 120y - 441 = 0$

b. $49x^2 - 406x - 49y^2 + 441 = 0$

c. $9x^2 + 49y^2 - 441 = 0$

d. $9x^2 + 9y^2 + 120y - 441 = 0$

e. $9x^2 - 49y^2 - 441 = 0$

ANOTAÇÕES

GABARITO

1. d. Da equação $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1,$

$a=6, b=4\sqrt{2}, a^2=b^2+c^2$ e $c>0,$

$$6^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2+c^2$$
$$36=32+c^2$$
$$c^2=4$$
$$c=2$$

Logo, $F_1=(-2,0)$ e $F_2=(2,0)$.

Sendo $C=(x_C,y_C)$ o centro da circunferência λ,

$$x_C=\frac{-2+2}{2}$$
$$x_C=0$$

$$y_C=\frac{0+0}{2}$$
$$y_C=0$$
$$C=(0,0)$$

Sendo r a medida do raio da circunferência λ,

$$r^2=(2-0)^2+(0-0)^2$$
$$r^2=4$$

Portanto, λ: $x^2+y^2=4$

Como F_1 e F_2 coincidem com as extremidades do eixo real de uma hipérbole equilátera, $a=b=2$

Logo, β: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

Vamos examinar $\alpha\cap\lambda$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1 & \text{(i)}\\ x^2+y^2=4 & \text{(ii)}\end{cases}$$

Das equações (i) e (ii),

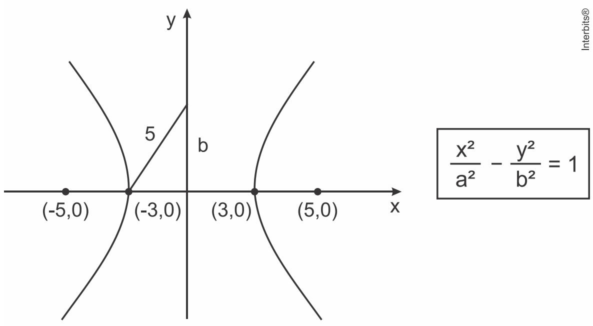
$$\frac{x^2}{36}+\frac{4-x^2}{32}=1$$
$$\frac{8x^2+9\cdot\left(4-x^2\right)}{288}=1$$
$$8x^2+36-9x^2=288$$
$$x^2=-252$$

Como $x^2=-252$,

$\alpha\cap\lambda=\emptyset$

Assim, é INCORRETO dizer que $\alpha\cap\lambda\neq\emptyset$.

2. a. De acordo com as informações do problema, concluímos que a representação da hipérbole no plano cartesiano será dada pelo seguinte gráfico.



$b^2+3=5^2 \Rightarrow b=4$

Portanto a equação da hipérbole será dada por;

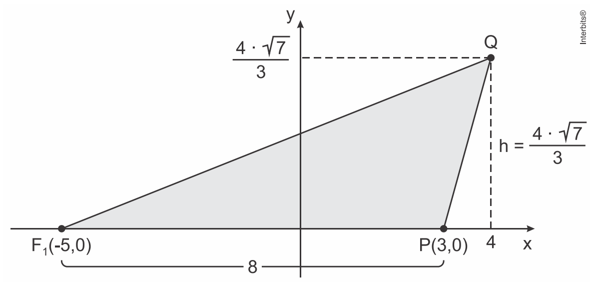
$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$$

Logo, o ponto Q de abscissa 4 será dada por:

$$\frac{4^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1\Rightarrow\frac{y^2}{16}=\frac{16}{9}-1\Rightarrow\frac{y^2}{16}=\frac{7}{9}\Rightarrow y=\pm\frac{4\cdot\sqrt{7}}{3}.$$

Como $y>0$ o ponto Q será dado por: $Q\left(4,\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)$

Portanto, a área do triângulo pedida será dada por:



$$S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{4\cdot\sqrt{7}}{3}$$
$$S=\frac{16\sqrt{7}}{3}.$$

3. a. Do enunciado, a equação da hipérbole antes da rotação é:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$$

Após a rotação, a equação é dada por:

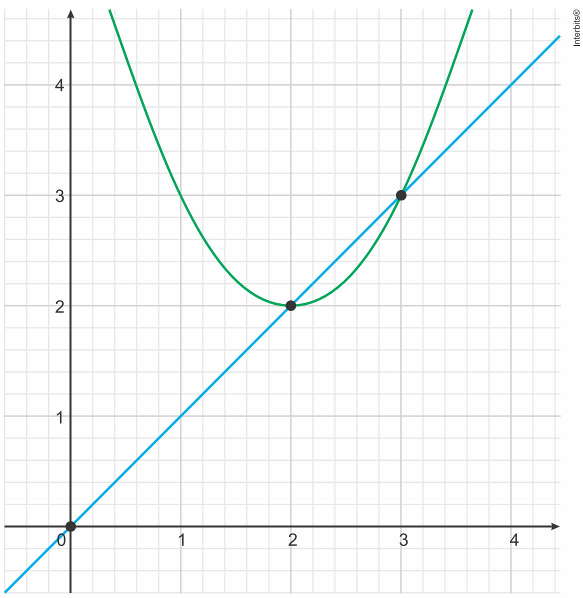
$$\frac{(x\cdot\cos 45°+y\cdot\text{sen}\,45°)^2}{4}-\frac{(y\cdot\cos 45°-x\cdot\text{sen}\,45°)^2}{4}=1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(x+y)\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(y-x)\right)^2=4$$
$$\frac{1}{2}\cdot(x+y)^2-\frac{1}{2}\cdot(y-x)^2=4$$
$$(x+y)^2-(y-x)^2=8$$
$$(x+y+y-x)\cdot(x+y-y+x)=8$$
$$2y\cdot 2x=8$$
$$xy=2$$

4. b. Calculando:

$$y=x^2-4x+6$$
$$\left.\begin{array}{l} x_v=-\dfrac{-4}{2\cdot 1}=\dfrac{4}{2}=2 \\ y_v=-\dfrac{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 6}{4\cdot 1}=\dfrac{8}{4}=2 \end{array}\right\}\Rightarrow A(2,2)$$
$$\text{reta } r: y-2=m\cdot(x-2)$$
$$\text{Na origem}\Rightarrow 0-2=m\cdot(0-2)\Rightarrow -2m=-2\Rightarrow m=1$$
$$\text{reta } r: y=x$$
$$x^2-4x+6=x\Rightarrow x^2-5x+6=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases} x=3\Rightarrow y=3\Rightarrow B(3,3) \\ \text{ou} \\ x=2\ \ (\text{ponto A}) \end{cases}$$

Graficamente:



Assim, pode-se concluir que $OA=2\cdot AB$.

5. c. As equações apresentadas representam uma elipse e uma circunferência de raio 1. A solução gráfica de ser a intersecção de duas áreas. Calculando:

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2+y^2\le 2\Rightarrow\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}\le 1\Rightarrow \text{raio menor}=\dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ x^2+y^2\le 1\Rightarrow \text{raio}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\sqrt{6}}{3}<1$$

Assim, a solução gráfica é a região sombreada representada em c. (eixo menor da elipse é menor que o diâmetro da circunferência).

6. e. Do enunciado, temos:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \text{(equação da elipse)}$$
$$a=5\ \text{ e }\ b=\frac{10}{3}$$

Então, a equação da elipse é dada por: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{9y^2}{100}=1$

De $a^2=b^2+c^2$, $a=5$ e $b=\dfrac{10}{3}$,

$$5^2=\left(\frac{10}{3}\right)^2+c^2$$
$$c^2=\frac{125}{9}$$
$$c=\pm\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

Dessa forma, os focos da elipse são $F_1\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{3},0\right)$ e $F_2\left(-\dfrac{5\sqrt{5}}{3},0\right)$.

Os vértices da elipse são $V_1(5,0)$ e $V_2(-5,0)$.

Assim, pelo enunciado, a equação da hipérbole é dada por $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$, de tal forma que:

$$2\alpha=\frac{10\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\alpha=\frac{5\sqrt{5}}{3}\ \text{ e }\ \beta=\sqrt{5^2-\left(\frac{5\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{10}{3}.$$

Portanto, a equação da hipérbole é dada por:

$$\frac{9x^2}{125}-\frac{9y^2}{100}=1$$

As intersecções entre a elipse e a hipérbole são dadas pelas soluções do sistema abaixo:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{9y^2}{100}=1 \\ \dfrac{9x^2}{125}-\dfrac{9y^2}{100}=1\end{cases}$$

Somando membro a membro as equações do sistema,

$$\frac{14x^2}{125}=2$$
$$x^2=\frac{125}{7}\Rightarrow x=\pm\frac{5\sqrt{35}}{7}$$

Substituindo $x=\dfrac{5\sqrt{35}}{7}$ na equação $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{9y^2}{100}=1$,

$$\frac{5}{7}+\frac{9y^2}{100}=1$$

$$\frac{9y^2}{100}=\frac{2}{7}$$

$$y^2=\frac{200}{63}\Rightarrow y=\pm\frac{10\sqrt{14}}{21}$$

Portanto, os pontos de intersecção são $\left(\frac{5\sqrt{35}}{7},\frac{10\sqrt{14}}{21}\right),\left(-\frac{5\sqrt{35}}{7},-\frac{10\sqrt{14}}{21}\right),\left(\frac{5\sqrt{35}}{7},-\frac{10\sqrt{14}}{21}\right)$ e $\left(-\frac{5\sqrt{35}}{7},\frac{10\sqrt{14}}{21}\right)$.

Assim, as equações das parábolas são dadas por:

$$y^2=\pm px$$

Como $\left(\frac{5\sqrt{35}}{7},\frac{10\sqrt{14}}{21}\right)$ é um ponto da parábola,

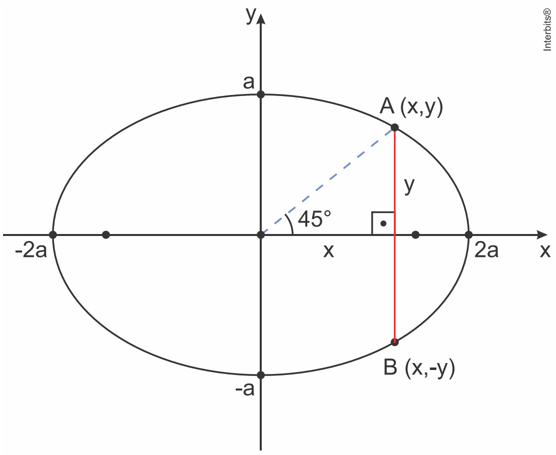
$$\left(\frac{10\sqrt{14}}{21}\right)^2=p\cdot\frac{5\sqrt{35}}{7}$$

$$p=\frac{8\sqrt{35}}{63}$$

Então, as equações das parábolas são:

$$y^2=\pm\frac{8\sqrt{35}}{63}x$$

7. a. Do enunciado, temos:



A equação da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{(2a)^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

A e B são vértices do quadrado $ABCD$ inscrito na elipse.

Assim, pela figura, o lado AB do quadrado tem medida $2y$, ou seja, sua área S é tal que $S=4y^2$.

Note, na figura, que $x=y$, logo,

$$\frac{y^2}{4a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$y^2+4y^2=4a^2$$

$$5y^2=4a^2$$

$$\frac{4}{5}\cdot 5y^2=\frac{4}{5}\cdot 4a^2$$

$$4y^2=\frac{16}{5}a^2$$

$$S=\frac{16a^2}{5}$$

8. c. Tem-se que

$$\begin{cases}x^2+y^2=4\\ x^2=\dfrac{y+2}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(y^2-4)+y+2=0\\ x^2=\dfrac{y+2}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(y+2)(4y-7)=0\\ x^2=\dfrac{y+2}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2 \text{ ou } y=\dfrac{7}{4}\\ x^2=\dfrac{y+2}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0 \text{ e } y=-2\\ \text{ou}\\ x=-\dfrac{\sqrt{15}}{4} \text{ e } y=\dfrac{7}{4}.\\ \text{ou}\\ x=\dfrac{\sqrt{15}}{4} \text{ e } y=\dfrac{7}{4}\end{cases}$$

Portanto, a resposta é $\frac{\sqrt{15}}{4}-\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

9. a. Resolvendo, inicialmente, um sistema com as equações da reta e da elipse:

$$\begin{cases}2x^2+3y^2=6\\ y=x+n\end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, temos:

$$2x^2+3\cdot(x+n)^2=6$$

$$5x^2+6nx+3n^2-6=0$$

Para a equação tenha duas raízes reais e iguais, ou seja a reta deve ser tangente a elipse, deveremos ter o valor do discriminante (delta) igual a zero.

$$(6n)^2-4\cdot 5\cdot\left(3n^2-6\right)=0$$

$$-24n^2+120=0$$

$$24n^2=120$$

$$n^2=5$$

$$n=\pm\sqrt{5}$$

10. e. $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ e $P(x,y)$.

Então,

$\overrightarrow{PF_1} = (x+c, y)$ e $\overrightarrow{PF_2} = (x-c, y)$

O produto escalar $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ é dado por:

$$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (x+c)\cdot(x-c) + y\cdot y$$
$$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = x^2 - c^2 + y^2$$

Da equação da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

$$\frac{x^2b^2 + y^2a^2}{a^2b^2} = 1$$
$$y^2a^2 = a^2b^2 - x^2b^2$$
$$y^2 = \frac{b^2\left(a^2 - x^2\right)}{a^2} \quad \text{(i)}$$

Da elipse,

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{(ii)}$$
$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = e\cdot a \quad \text{(iii)}$$

Das equações (ii) e (iii),

$$a^2 = b^2 + e^2a^2$$
$$b^2 = a^2\cdot\left(1 - e^2\right)$$
$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \quad \text{(iv)}$$

Das equações (i) e (iv),

$$y^2 = \left(1 - e^2\right)\cdot\left(a^2 - x^2\right)$$
$$y^2 = a^2 - x^2 - e^2a^2 + e^2x^2 \quad \text{(v)}$$

Substituindo as equações (iii) e (v) em $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = x^2 - c^2 + y^2$,

$$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = x^2 - e^2a^2 + a^2 - x^2 - e^2a^2 + e^2x^2$$
$$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = e^2x^2 + a^2 - 2e^2a^2$$
$$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = e^2x^2 + a^2\left(1 - 2e^2\right)$$

11. d. Analisando as proposições:

[I] VERDADEIRA. Podemos reescrever a equação da parábola dada:

$$y^2 + 4x - 4 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{4}y^2 + 1$$

Assim, temos que quando $x=0$, $y=\pm 2$, e quando $y=0$, $x=1$. Com isso pode-se construir um gráfico e identificar que trata-se de uma parábola com concavidade voltada para a esquerda, que corta o eixo y nos pontos $+2$ e -2, cujo vértice tem coordenadas $(0, 1)$. Conclui-se também que eixo de simetria da parábola é o próprio eixo x $(x=0)$.

O foco de uma parábola fica sempre sobre o eixo de simetria (portanto, nesse caso, $x=0$), com $y=k+p$ onde k será a coordenada y do vértice e $p=\frac{1}{4a}$.

Assim, a coordenada y do foco será:

$$k = 1$$
$$p = \frac{1}{4\cdot -1/4} = -1$$
$$y = k + 1 \rightarrow y = 1 - 1 \rightarrow y = 0$$

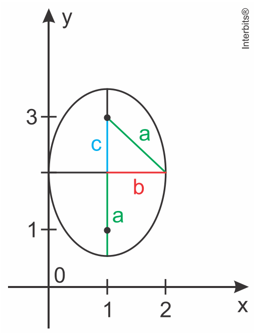
Logo, as coordenadas do foco serão $(0, 0)$ e sua distância até o vértice é igual a 1. A alternativa é verdadeira.

[II] VERDADEIRA. A proposição é verdadeira pois esta é justamente a definição de hipérbole equilátera: ter as assíntotas perpendiculares entre si.

[III] FALSA. Podemos reescrever a equação dada de modo a facilitar as conclusões:

$$(2x^2 - 4x) + (y^2 - 4y + 4) = 0 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$

Comparando esta equação com a equação geral de uma elipse, pode-se concluir que a equação dada trata-se de uma elipse de centro $(1, 2)$, semi-eixo menor $b = 1$ e semi-eixo maior $a = \sqrt{2}$. A elipse pode ser representada graficamente como na figura a seguir:



Sabendo que $a^2 = b^2 + c^2$, então $c = 1$. Daí pode-se deduzir que os focos da elipse serão $(1, 3)$ e $(1, 1)$. A proposição é falsa.

12. 01 + 02 = 03.

[01] CORRETA. Se a equação de C_B é $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$, então seu centro é $O_B = (2, 4)$ e seu raio $r_B = 2$. A distância entre O_A e O_B é dada por:

$$d_{O_A,O_B} = \sqrt{(2+4)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{36+1} \rightarrow d_{O_A,O_B} = \sqrt{37}$$

[02] CORRETA. Toda reta tem sua equação geral na forma $y = ax + b$. Calculando a, tem-se:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-5}{2+4} \rightarrow a = -\frac{1}{6}$$

Utilizando as coordenadas do ponto O_B, pode-se calcular b:

$$b = y - ax \to b = 4 + \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{26}{6} \to b = \frac{13}{3}$$

Substituindo ambos na forma geral, tem que a reta que passa pelos centros de C_A e C_B tem equação igual a $y = -\frac{1}{6}x + \frac{13}{3}$.

[04] INCORRETA. O raio da circunferência C_B é igual a 2 e o raio da circunferência C_A é igual a 3. Portanto $r_A > r_B$.

[08] INCORRETA. Como a coordenada x do centro da circunferência C_B é igual a 2 e seu raio também é igual a 2, então esta circunferência tangencia o eixo y (ou seja, a distância entre eles é igual a zero).

[16] INCORRETA. A equação de C_A é $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 9$. Substituindo ponto $(-4, 8)$ na equação, tem-se:

$(-4+4)^2+(8-5)^2=9 \to 3^2=9$ portanto, o ponto pertence à circunferência C_A.

13. e. Seja (t) a reta tangente à parábola de equação $x = 3y^2$.

(t) $y = mx + n$, como o ponto A(-3,0) pertence a (t) concluímos que $n = 3m$ e a equação da reta t passa a ser escrita por $y = mx + 3m$.

Substituindo $y = mx + 3m$ na equação da parábola, temos:

$$x = 3 \cdot (mx + 3m)^2$$
$$x = 3 \cdot (m^2x^2 + 6m^2x + 9m^2)$$
$$x = 3m^2x^2 + 18m^2x + 27m^2$$
$$3m^2x^2 + (18m^2 - 1)x + 27m^2 = 0$$

Para que a reta seja tangente à parábola o discriminante deverá ser igual à zero.

$$\Delta = 0$$
$$(18m^2 - 1)^2 - 324m^4 = 0$$
$$-36m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = 1/6 \text{ ou } m = -1/6$$

Se $m = 1/6$, temos $x - 6y + 3 = 0$.

Se $m = -1/6$, temos $x + 6y + 3 = 0$.

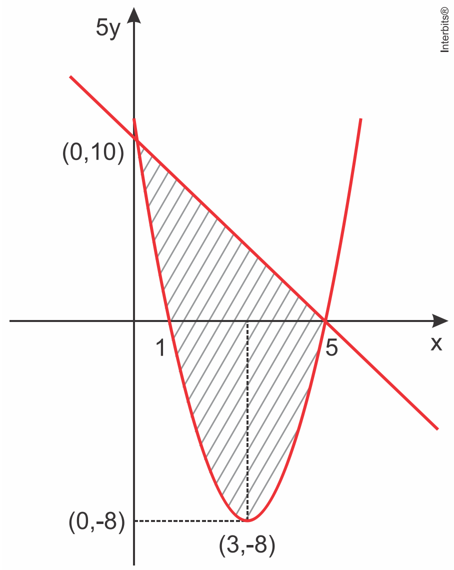
Fazendo $m = -1/6$, temos:

$$x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } y = -1.$$

14. a. Temos duas regiões a serem considerada.

$$5y \geq 2x^2 - 12x + 10$$
$$5y \leq 10 - 2x$$

A região que satisfaz as duas inequações simultaneamente está representada no gráfico a seguir.



Portanto, $-8 \leq 5x \leq 10 \Rightarrow -1{,}6 \leq y \leq 2$.

O produto dos valores máximo e mínimo de y é $-1{,}6 \cdot 2 = -3{,}2$.

15. b. Seja r o raio da bola.

A equação da circunferência de centro $(0, 3)$, tangente à parábola $y = x^2$, é dada por

$$x^2 + (y-3)^2 = r^2.$$

Daí, segue que

$$x^2 + (x^2-3)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 9 - r^2 = 0.$$

Tomando $x^2 = t$, obtemos $t^2 - 5t + 9 - r^2 = 0$. Assim, como o discriminante dessa equação deve ser igual a zero, vem

$$(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9 - r^2) = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{11}{4}$$
$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

16. d. Seja t a reta que passa por $A(0, 3)$ e $B(4, 0)$. Tem-se que a equação de t é

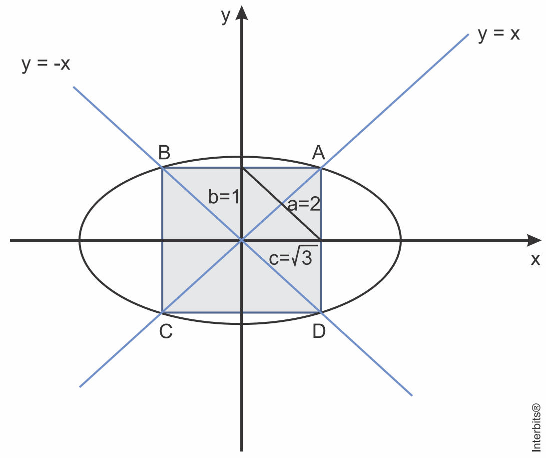
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3.$$

As abscissas de R e S correspondem às abscissas dos pontos de interseção de t com a parábola $y = x^2$. Logo,

$$x^2 = -\frac{3}{4}x + 3 \Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x - 3 = 0.$$

Portanto, pelas Relações de Girard, a soma pedida é $-\frac{3}{4} = -0{,}75$.

17. d.



Excentricidade: $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=2$

$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 2^2+\sqrt{3}^2\Rightarrow b=1$

Equação da Elipse: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$

Determinando os pontos de encontro através do sistema, temos:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ \\ y=\pm x\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ B\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

$$C\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\text{ e }D\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

O lado do quadrado será dado por:

$$AD=\frac{2}{\sqrt{5}}-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Logo, sua área será $A=\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{16}{5}.$

18. V – F – F – F – V.

Resolvendo o sistema formado pelas equações das parábolas, encontramos:

$$\begin{cases}y=-x^2+8x-13\\ y=x^2-4x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\text{ e }y=-6\\ x=5\text{ e }y=2\end{cases}.$$

Logo, os pontos de interseção das parábolas são $(1,-6)$ e $(5,2)$.

A reta que passa pelos pontos de interseção das parábolas tem por equação

$$y-2=\frac{-6-2}{1-5}\cdot(x-5)\Leftrightarrow y=2x-8\neq 2x-6.$$

Completando o quadrado, obtemos:

$$y_A=-x^2+8x-13=-(x-4)^2+3,$$

donde concluímos que o vértice da parábola A é o ponto $(4,3)\neq(4,2)$.

Completando o quadrado, vem

$$y_B=x^2-4x-3=(x-2)^2-7.$$

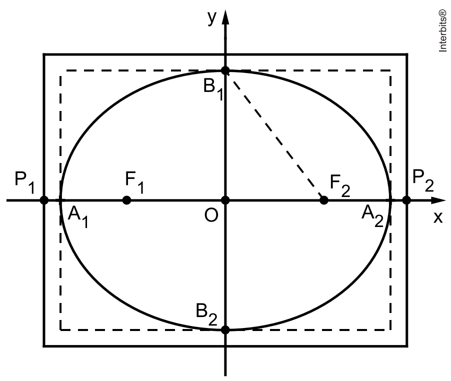
Daí, segue que o vértice da parábola B é o ponto $(2,-7)$.

A distância entre os vértices das parábolas A e B é dada por

$$\sqrt{(4-2)^2+[3-(-7)]^2}=\sqrt{104}\neq\sqrt{102}.$$

A parábola B intersecta o eixo das ordenadas no ponto em que $x=0$, ou seja, $(0,-3)$.

19. c. Adotando convenientemente um sistema de coordenadas cartesianas, com origem no ponto médio do segmento F_1F_2, considere a figura.



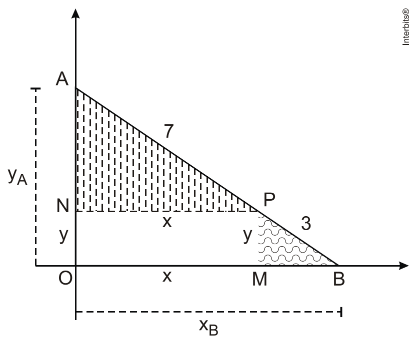
Temos $A_1=(-10,0)$, $A_2=(10,0)$, $B_1=(0,8)$, $B_2=(0,-8)$, $F_1=(-c,0)$ e $F_2=(0,c)$, com $c>0$. Logo, da relação fundamental da elipse, vem

$$\overline{B_1F_2}^2=\overline{OF_2}^2+\overline{OB_1}^2\Leftrightarrow 10^2=c^2+8^2$$
$$\Rightarrow c=6.$$

Portanto, a distância pedida é dada por

$$\overline{OP_2}-\overline{OF_2}=11-6=5\text{ m}.$$

20. c.



$$\Delta ANP \sim \Delta AOB \Rightarrow \frac{X}{X_B} = \frac{7}{10} \Rightarrow X_B = \frac{10X}{7}$$

$$\Delta ANP \sim \Delta AOB \Rightarrow \frac{y}{y_A} = \frac{3}{10} \Rightarrow y_A = \frac{10X}{3}$$

Logo, $(x_B)^2 + (y_A)^2 = 10^2$

$$\left(\frac{10x}{7}\right)^2 + \left(\frac{10y}{3}\right)^2 = 10^2$$

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow 9x^2 + 49y^2 - 441 = 0$$

ANOTAÇÕES