Círculo trigonométrico

Também é conhecido por ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica.

Uma volta completa:

Em graus = 360° Em radianos = 2π rad

Se um ângulo passar de 360°, devemos ver o quanto ele passou para saber qual ângulo será congruente a ele.

Ex_1: ângulo de 510°

510° - 360° = 150°

Ex_2: ângulo de 900°

900 – 360 = 540°
540 – 360 = 180°

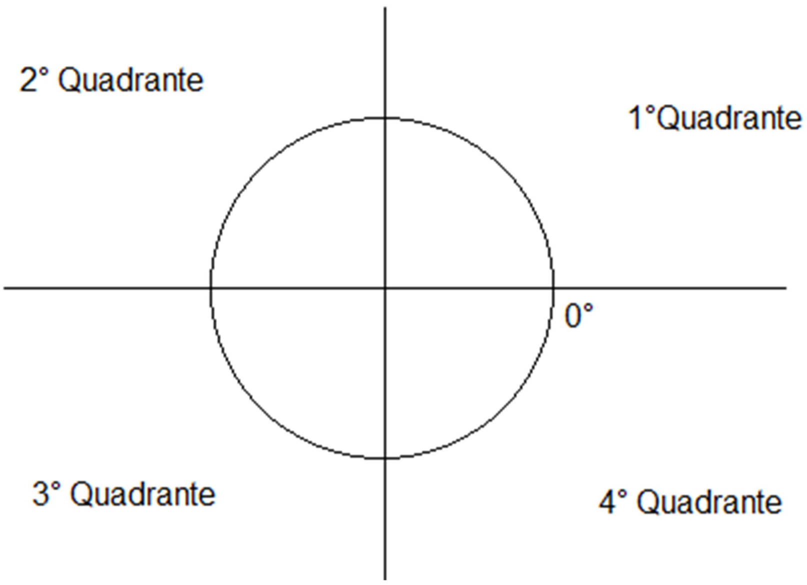
Para converter de graus para radianos ou vice-versa: devemos montar uma regra de três.

Exemplo: Quantos graus correspondem $\frac{\pi}{4}$ rad?

$360 = 2\pi$
$X \quad \frac{\pi}{4}$

$2\pi x = \frac{360\pi}{4}$

2x = 90
x = 45°

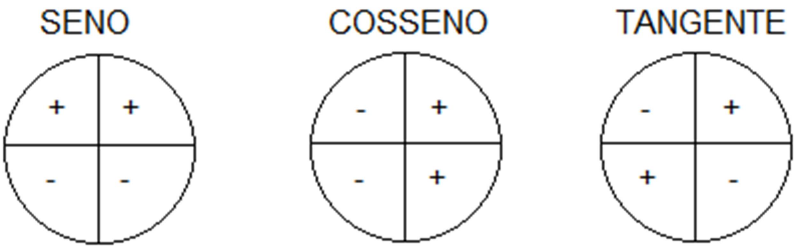


1° Q: 0° até 90°
2° Q: 90° até 180°
3° Q: 180° até 270°
4° Q: 270° até 360°

Redução ao primeiro quadrante:

2° quadrante: 180° - ângulo dado
3° quadrante: 180° + ângulo dado
4° quadrante: 360° - ângulo dado

Sinais:



Exercícios:

1. Reduzindo-se ao primeiro quadrante um arco de medida 2240°, obtém-se um arco, cuja medida, em radianos, é:

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{4\pi}{9}$

d) $\frac{3\pi}{4}$

e) $\frac{6\pi}{2}$

Resolução:

Nosso primeiro passo será descobrir qual o côngruo de 2240°, ou seja, o arco que corresponde a mesma medida em graus após todas as voltas completas que um arco pode ter (Por exemplo 10° é côngruo de 370° pois ele passa em exatamente 10° após dar sua volta completa, assim como 50° é côngruo de 770 pois ele tem exatamente 50° a mais depois de dar duas voltas completas)

2240 = 360 . 6 + 80, ou seja, dá 6 voltas completas e sobram 80°, então podemos assumir que 80° é côngruo de 2240°.

Agora é só passar para radianos, para isto, podemos multiplicar por $\frac{2\pi}{360}$ ou simplificando a fração $\frac{\pi}{180}$

Logo teremos: 80 . $\frac{\pi}{180}$ = $\frac{80\pi}{180}$

$\frac{80\pi}{180}$ = $\frac{4\pi}{9}$

(Alternativa C)

2. se cosα = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ e α é um arco cujo a extremidade pertence ao 2° quadrante, então α pode ser _______ $\frac{\pi}{6}$ rad.

a) 7
b) 17
c) 27
d) 37

Resolução:

A questão nos mostra que o arco está presente no segundo quadrante, porém $\frac{\pi}{6}$ está presente no primeiro. Sendo assim, precisamos encontrar seu simétrico no segundo quadrante.

Para um ângulo qualquer α presente no primeiro quadrante, seu simétrico no segundo quadrante será π - α, sendo assim teremos:

$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$

$\frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Então temos que $\frac{5\pi}{6}$ = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ então α poderá ser $\frac{5\pi}{6}$ e todos os seus côngruos (côngruos são ângulos cujos arcos representam as mesmas medidas, ou seja, a diferença entre eles devem ser de exatamente 360° ou 2π quando a unidade de medida usado for em radianos)

Um dos côngruos de $\frac{5\pi}{6}$ será:

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{5\pi}{6} + \frac{12\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$

(Alternativa B)

3. No ciclo trigonométrico 440º pertence a qual quadrante?

a) 1° quadrante
b) 2° quadrante
c) 3° quadrante
d) 4° quadrante

Resolução:

Nosso primeiro passo será descobrir qual o côngruo de 440°, ou seja, o arco que corresponde a mesma medida em graus após todas as voltas completas que um arco pode ter (Por exemplo 10° é côngruo de 370° pois ele passa em exatamente 10° após dar sua volta completa, assim como 50° é côngruo de 770 pois ele tem exatamente 50° a mais depois de dar duas voltas completas)

440 = 360 + 80°, ou seja, o arco dá uma volta completa e sobram 80° então podemos assumir que 80° é côngruo de 440°

Como bem sabemos um círculo possui 360° e é dividido entre 4 quadrantes iguais, logo teremos que:

$\frac{360}{4}$ = 90, então cada quadrante possui 90°.

1° quadrante - de 0° a 90°
2° quadrante - de 90 a 180°
3° quadrante - de 180 a 270°
4° quadrante - de 270 a 360°

Como sobraram 80°, significa que ele estará presente no 1° quadrante

(Alternativa A)

4. se 0º $\leq$ x $\leq$ 90° e se sen4x = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, um dos possíveis valores de x é:

a) 30°
b) 45°
c) 75°
d) 85°

Resolução:

Como bem sabemos, no círculo trigonométrico o seno é positivo no primeiro e no segundo quadrante, como o valor do sen4x é um número negativo, sabemos que o mesmo tem de estar entre o terceiro e o quarto quadrante.

Temos que sen60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, então devemos encontrar seus côngruos. Para isto, devemos manter em mente que um número qualquer possui seus côngruos nos quatro quadrantes, e podemos identificá-los da seguinte forma:

1 quadrante = α
2 quadrante = 180° – α
3 quadrante = 180°+ α
4 quadrante = 360° – α

Como já sabemos que no primeiro quadrante será sen60°, teremos:

1 quadrante = 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2 quadrante = 180 – 60 = 120º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3 quadrante = 180 + 60 = 240º = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4 quadrante = 360 – 60 = 300º = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

para chegarmos ao nosso resultado de 4x = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ temos duas possibilidades, são estas 240º e 300º

para 240º

4x = 240

X = $\frac{240}{4}$

X = 60º

Ou

Para 300º

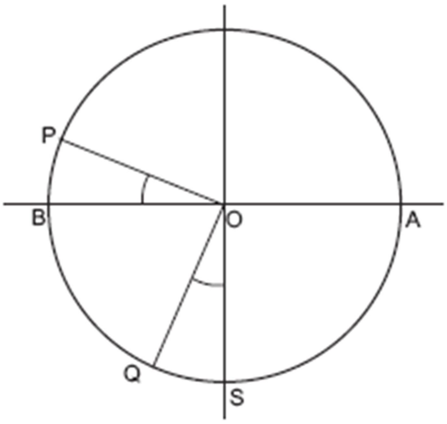
4x = 300

X = $\frac{300}{4}$

X = 75º

(Alternativa C)

5.



No ciclo trigonométrico de centro O, representado na figura, os ângulos PÔB e QÔS são congruentes, e o arco AP, tomado no sentido anti-horário, mede 164°. Reduzindo-se o arco AQ ao primeiro quadrante, o valor encontrado será igual a

a) 16°
b) 24°
c) 64°
d) 74°
e) 86°

Resolução:

A questão nos diz que o arco AP mede 164°, e podemos ver que AP + PB = 180°, pois é a metade de uma volta completa na circunferência.

Logo, 164 + PB = 180
PB = 180 – 164
PB = 16°, como a questão nos diz que PÔB e QÔS são congruentes, seus arcos também serão
PB = QS
QS = 16°

Como devemos reduzir ao primeiro quadrante, devemos considerar que:

AQ = 90° - 16º, que é a quantidade de graus total de um quadrante menos o valor do ângulo QÔS

AQ = 74°

(Alternativa D)

6. O valor do sen de 1270 é igual a:

a) – cos 10
b) – sen 30
c) – sen 10
d) – cos 30

Resolução:

Para que possamos encontrar o valor do sen de 1270, devemos descobrir seu côngruo, e para isto devemos ter em mente que 1270 = 360 . 3 + 190, ou seja, 1270 da três voltas completas no circulo trigonométrico e sobram 190º

Agora que encontramos o côngruo, devemos descobrir quais são seus simétricos, tendo em vista que 190 está no terceiro quadrante, para isso teremos:

1 quadrante = α
2 quadrante = 180 – α
3 quadrante = 180 + α
4quadrante = 360 – α

Como anteriormente dito, sabemos que 190° está presente no 3° quadrante, então:

180 + α = 190
α = 190 – 180
α = 10°

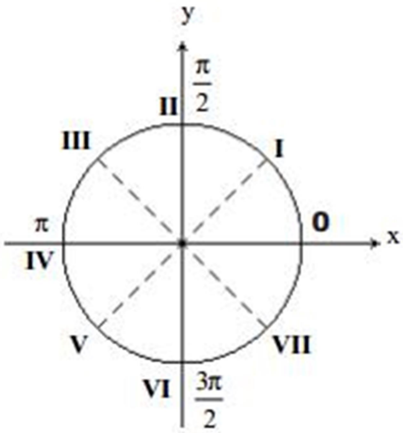
Porem os senos são positivos no 1º e 2º quadrante e negativos quando estão no 3º e 4° quadrante, sendo assim

Sen de 1270 = - sen 10

(Alternativa C)

7. Os termos da sequência de números em progressão aritmética $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{6}$... correspondem as medidas em radianos de arcos, que podem ser representados na circunferência trigonométrica abaixo.

Os pontos identificados por **0** a **VII** representam as medidas de arcos que dividem a circunferência trigonométrica em 8 partes iguais, medidas no sentido anti−horário, a partir de 0.



Nessas condições, o arco correspondente ao **13º termo** da sequência, igualmente medido no sentido anti−horário e a partir de **0**, tem sua extremidade situada entre os pontos

a) I e II
b) II e III
c) IV e V
d) V e VI
e) VII e 0

Resolução:

Como bem sabemos, Progressão aritmética é um termo usado para uma sequência de números que possuem a mesma diferença de valor entre eles (ex: 2, 4, 6... Tem uma diferença exata de 2 unidades entre cada um de seus valores, ou então $\frac{6}{10}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{14}{10}$, possuem uma diferença de exatamente $\frac{4}{10}$ em cada um de seus valores)

Sendo assim, o primeiro passo será identificar qual a progressão utilizada

Temos 3 valores diferentes, são eles:

$\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{6}$ agora deixaremos tudo sobre o mesmo denominador para descobrir a progressão aritmética existente

$\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{12}$

$\frac{5\pi}{6} = \frac{10\pi}{12}$

Então

$\frac{4\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$ e $\frac{10\pi}{12}$, logo podemos facilmente entender que a progressão utilizada é de $\frac{3\pi}{12}$

Como já possuímos 3 termos, precisamos descobrir 10 termos a frente para chegarmos ao 13°, para isto multiplicaremos a progressão aritmética por 10, que é a quantidade de vezes que ela seria aplicada até encontrarmos nosso resultado e somaremos o resultado ao 3° termo

$\frac{10\pi}{12}$ + 10 . $\frac{3\pi}{12}$

$\frac{10\pi}{12}$ + $\frac{30\pi}{12}$ = $\frac{40\pi}{12}$

$\frac{40\pi}{12}$ = $\frac{20\pi}{6}$ = $\frac{10\pi}{3}$ $\cong$ 3,33π

Como uma volta completa é igual a 2 π radianos, 1,33π é côngruo de 3,33π

A circunferência está dividida em 8 partes exatamente iguais, e como sabemos, uma volta completa em radianos é igual a 2π radianos, dividindo este valor por 8, saberemos quanto corresponde em Radianos cada ponto

$\frac{2\,\pi}{8}$ = $\frac{\pi}{4}$ = 0,25π, então temos 8 pontos igualmente espaçados por 0,25π ao redor da circunferência. Dividindo 1,33π por 0,25π, teremos entre quais pontos está o 13° termo

$\frac{1,33\,\pi}{0,25\,\pi}$ = 5,32, ou seja, o 13° termo está presente entre os pontos V e VI

(Alternativa D)

8. No ciclo trigonométrico os valores de x, tais que cosx $\leq \frac{1}{2}$, são:

a) {x ∈ R | $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$}

b) {x ∈ R | $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$}

c) {x ∈ R | $\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{11}{6}$}

d) {x ∈ R | 0 $\leq x \leq \frac{\pi}{6}; ou\ \frac{7\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$

Resolução:

Sabemos que cos60° = $\frac{1}{2}$, nosso primeiro passo então será descobrir quanto vale o cos60° em radianos, para isso devemos ter em mente que o circulo trigonométrico vai de 0 a 2π, sendo assim teremos:

2π = 360
X = 60

120π = 360x

X = $\frac{120\pi}{360}$ = $\frac{\pi}{3}$

Então X pode estar entre $\frac{\pi}{3}$ até seu simétrico no quarto quadrante que será:

2π - $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{6\pi}{3}$ - $\frac{\pi}{3}$

$\frac{6\pi}{3}$ - $\frac{\pi}{3}$ = $\frac{5\pi}{3}$

Logo temos que X ∈ R | $\frac{\pi}{3} \leq$ x $\leq \frac{5\pi}{3}$}
(Alternativa B)

9. Considere as afirmações a seguir:

I. tan 92° = –tan 88°
II. tan 178° = tan 88°
III. tan 268° = tan 88°
IV. tan 272° = –tan 88°

Quais estão corretas?

a) I, III
b) III, IV
c) I, II, IV
d) I, III, IV
e) II, III, IV

Resolução:

Para resolver esta questão devemos ter em mente primeiro que a tangente sempre será positiva quando pertencer ao 1° ou ao 3° quadrante, e a mesma será sempre negativa quando pertencer ao 2° ou 4° quadrante

Sendo assim, para saber se são igual, basta reduzir os valores para o primeiro quadrante
tan 92° = –tan 88°
Sabemos que 92° está no segundo quadrante, logo será negativo
Para reduzir ao primeiro quadrante, devemos subtrair 92 de 180 pois só pertence ao primeiro quadrante quando possui até no máximo 90°
180 – 92 = tan 88°, como estava no segundo quadrante, (- tan 88°), logo a primeira afirmativa está correta

tan 178° = tan 88°
Sabemos que 178° está no segundo quadrante, logo será negativo
Para reduzir ao primeiro quadrante, devemos subtrair 178 de 180 pois só pertence ao primeiro quadrante quando possui até no máximo 90°
180 – 178 = tang 2°, como estava no segundo quadrante, (- tang 2), logo a segunda afirmativa está incorreta

tan 268° = tan 88°
Sabemos que 268° está no terceiro quadrante, logo será positivo
Para reduzir ao primeiro quadrante, devemos subtrair 180 de 268 pois só pertence ao primeiro quadrante quando possui até no máximo 90°

268 – 180 = tan 88° Como estava no terceiro quadrante, (+ tan 88), logo a terceira afirmativa está correta

tan 272° = –tan 88°
Sabemos que 272° está no quarto quadrante, logo será negativo
Para reduzir ao primeiro quadrante, devemos subtrair 272 de 360, pois só pertence ao primeiro quadrante quando possui até no máximo 90°
360 – 272 = tan 88° Como estava no quarto quadrante, (- tan 88°), logo a quarta afirmativa está correta

(Alternativa D)

10. Se A = tg 120º e B = tg 240°, então:

a) B = A
b) B = - A
c) B = 2A
d) B = - 2A

Resolução:

Para que possamos chegar ao nosso resultado devemos descobrir de qual número tg120º e tg240º são simétricos, para isso devemos manter em mente que um número possui simétricos nos quatro quadrantes e podemos identificá-los da seguinte forma:

1 quadrante = α
2 quadrante = 180 – α
3 quadrante = 180 + α
4 quadrante = 360 – α

Começando por 120º que está no segundo quadrante, teremos:

180 – α = 120º
– α = 120 – 180
– α = - 60
α = 60

Para descobrirmos os simétrico de B, teremos:

180 + α = 240
α = 240 – 180
α = 60

Como podemos observar a cima, 120 e 240 são simétricos e para que possamos estabelecer a relação entre os dois devemos lembrar que a tangente é positiva no 1º e no 3º quadrante e negativa no 2º e 4º quadrante

Como 120º pertence ao segundo quadrante e 240º pertence ao terceiro quadrante, seus sinais serão contrários, logo:

B = - A
(Alternativa B)