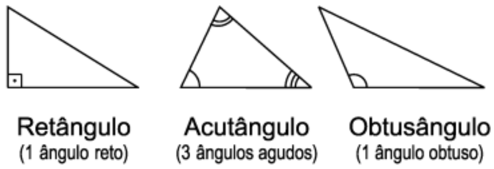
AULA 01 - TRIÂNGULOS

Dados os pontos A, B e C não alinhados, chama-se triângulo A, B, C (indicado por: ABC) à reunião dos segmentos AB, AC e BC. Os triângulos podem ser classificados quanto a lados e ângulos como veremos a seguir.

CLASSIFICAÇÃO QUANTO A LADO

CLASSIFICAÇÃO QUANTO A ÂNGULO



$a^2 < b^2 + c^2$ triângulo acutângulo
$a^2 = b^2 + c^2$ triângulo retângulo
$a^2 > b^2 + c^2$ triângulo obtusângulo

OBS:
Será que com 3 palitos quaisquer de dimensões diferente podemos formar uma triângulo? A resposta é não! Tente imaginar a seguinte situação; 1cm, 3cm e 7cm. Jamais será possível formar um triangulo com palitos nessas dimensões. E justamente essa situação vem a condição de existência de um triângulo.

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO

Um triângulo só é formado se $a < b + c$, para a, b e c lados do triângulo.

ÁREA DE UM TRIÂNGULO

A área de um triângulo pode ser encontrada pelo produto entre a sua base e a altura do triangulo que neste caso será a distancia do vértice até a base oposto a ele.
Porém temos outras situações. Veja as formulas a seguir.

$$i.A = \frac{1}{2}.altura.base \qquad ii.A = \frac{1}{2}.a.b.sen\theta$$

$$iii.A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$iv.A = p.r$$

$$v.A = \frac{abc}{4R}$$

$$vi.A = \frac{(lado)^2\sqrt{3}}{4}$$

Onde em *ii* temos θ ângulo formado entre os lados a e b, em *iii* temos *p* como semi perímetro, em *iv* temos r raio do círculo inscrito ao triângulo, em *v* temos R como raio do círculo circunscrito ao triângulo e em *vi* triângulo equilátero.

CEVIANAS

- Bissetriz – Parte do vértice e divide o ângulo ao meio.
- Mediana – Parte do vértice e divide o lado oposto ao meio.
- Altura – Parte do vértice e forma um ângulo reto com lado ou projeção dele.
- Mediatriz – Parte do ponto médio de um dos lados e passa pelo vértice oposto a esse lado.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são semelhantes se e somente se os ângulos internos forem congruentes e os lados proporcionais. Assim temos:

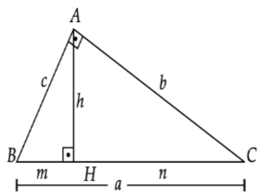
$$Se: \begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E}\ então \\ \hat{C} = \hat{F} \end{cases} \quad \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$$

k é a constante de proporção ou constante de semelhança. As medidas dos perímetros de dois triângulos semelhantes são proporcionais às medidas de dois lados homólogos quaisquer.

RELAÇÕES MÉTRICAS TRIÂNGULO RETÂNGULO

Seus elementos são:

- **a:** hipotenusa
- **b** e **c**: catetos
- **h**: altura relativa à hipotenusa
- **n** e **m**: projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.



Através da semelhança de triângulos podemos estabelecer as seguintes relações:

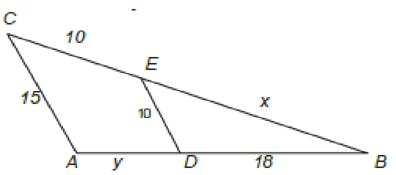
- $a^2 = b^2 + c^2$ (teorema de Pitágoras)
- $a.h = b.c$
- $b^2 = a.n$
- $c^2 = a.m$
- $h^2 = m.n$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 **UFSC**

Na figura ao lado, AC é paralelo a DE. Nessas condições, determine o valor de x + y.

a)30
b)29
c)28
d)27



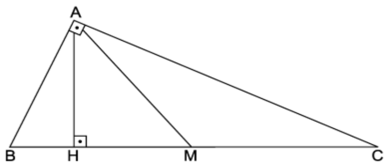
QUESTÃO 02 **ACAFE**

Os lados de um triângulo medem 3cm, 7cm e 9cm. Calcule os lados de um segundo triângulo semelhante ao primeiro, cujo perímetro mede 38cm.
a) 8cm, 14cm e 16cm
b) 6cm, 14cm e 18cm
c) 3cm, 7cm e 9cm
d) 10cm, 13cm e 15cm
e) 5cm, 14cm e 19cm

QUESTÃO 03

Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em A, e o ângulo ACB mede 20°. Determine a medida do ângulo agudo formado pela mediana AM e a altura AH do triângulo.

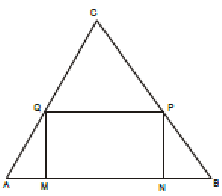
a) 60º
b) 55º
c) 50º
d) 45º



QUESTÃO 04 **FUVEST**

No triângulo acutângulo ABC a base AB mede 4cm, e a altura relativa a essa base mede 4cm. MNPQ é um retângulo cujos vértices M e N pertencem ao lado AB, P pertence ao lado BC e Q ao lado AC. O perímetro desse retângulo, em cm, é:

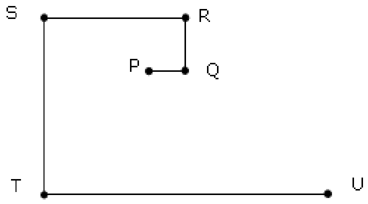
a) 4
b) 8
c) 12
d) 14
e) 16



QUESTÃO 05 **UECE**

Na linha poligonal PQRSTU, plana e aberta como mostra a figura, dois segmentos consecutivos são sempre perpendiculares, a medida de PQ é 1m e, a partir de QR, inclusive, os demais comprimentos dos segmentos são obtidos, dobrando o valor do segmento anterior. A distância do ponto P ao ponto U, em metros, é:

a) $\sqrt{205}$
b) $\sqrt{215}$
c) 15
d) $\sqrt{235}$



QUESTÃO 06 **UECE**

Uma escada de 25m está encostada na parede vertical de um edifício de modo que o pé da escada está a 7m da base do prédio. Se o topo da escada escorrega 4m, quantos metros irá escorregar o pé da escada?
a) 10m
b) 9m
c) 8m
d) 6m

QUESTÃO 07 **UECE**

Se o triângulo equilátero CDE é exterior ao quadrado ABCD, a medida do ângulo ACE é igual a:
a) 60 graus
b) 105 graus
c) 135 graus
d) 150 graus

QUESTÃO 08 **UECE**

Se 5, 12 e 13 são as medidas em metros dos lados de um triângulo, então o triângulo é:
a) Isósceles
b) Equilátero
c) Retângulo
d) Obtusângulo

QUESTÃO 09 **UECE**

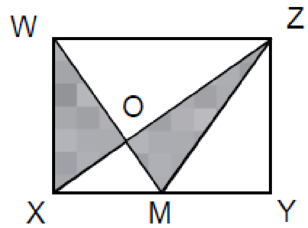
A medida do raio da circunferência inscrita no triângulo retângulo cujos catetos medem, respectivamente, 3m e 4m é:
a) 2,0m
b) 1,8m
c) 1,2m
d) 1,0m

curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

QUESTÃO 10	UECE

No retângulo XYZW, os lados XY e YZ medem, respectivamente, 8m e 6m. Se M é o ponto médio do lado XY, então a medida, em m^2, da área da região sombreada é:

a) 22
b) 20
c) 18
d) 16



QUESTÃO 11	UECE

O perímetro do triângulo PQR é 24 cm e a medida de seu menor lado é 5,5 cm. Se as medidas dos lados deste triângulo, em centímetros, formam uma progressão aritmética de razão r, podemos afirmar, corretamente, que
a) $1,4 < r < 1,8$
b) $1,8 < r < 2,2$
c) $2,2 < r < 2,6$
d) $2,6 < r < 3,0$

QUESTÃO 12	UECE

No triângulo MNO, as medidas dos lados MO e NO são, respectivamente, 1m e $\sqrt{2}$ m. Se a medida do ângulo oposto ao lado NO é o dobro da medida do ângulo oposto ao lado MO, então a medida da área do triângulo MNO é igual a, em m^2:
a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{2}/2$
c) 1
d) 1 / 2

AULA 02 - QUADRILÁTEROS

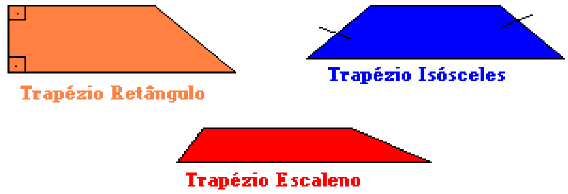
Um **quadrilátero** é um polígono de quatro lados, cuja soma dos ângulos internos é 360°, e a soma dos ângulos externos, assim como qualquer outro polígono, é 360°. Seus elementos são vértices (quatro), lados (quatro) e diagonais (duas).

TRAPÉZIO

Um quadrilátero é considerado um trapézio se pelo menos dois dos seus lados forem paralelos. No caso de serem exatamente dois os seus lados paralelos, trata-se de um Trapézio propriamente dito.

Tipos de trapézios

- **Trapézio Isósceles**: Os lados opostos não paralelos são congruentes (de mesmo comprimento), os lados opostos paralelos não são congruentes e apresenta um eixo de simetria;
- **Trapézio Retângulo**: Contem dois ângulos de 90°,e não tem um eixo de simetria;
- **Trapézio Escaleno**: Todos os lados são diferentes.

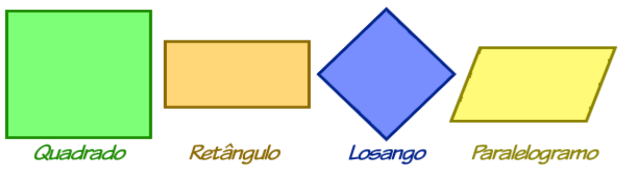


PARALELOGRAMO

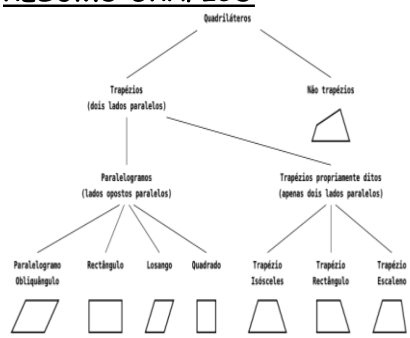
Paralelogramo é o quadrilátero que tem os lados opostos paralelos. Se todos os lados opostos forem iguais e paralelos, trata-se de um Paralelogramo. Um paralelogramo apresenta as seguintes características:
- A soma de dois ângulos consecutivos é de 180°;
- As diagonais cortam-se no ponto médio;
- Os lados opostos são congruentes;
- Os ângulos opostos são congruentes.

Tipos de paralelogramos

- Paralelogramo obliquângulo: Os lados opostos são iguais entre si;
- Retângulo: Possui quatro ângulos de 90°, e os lados opostos são iguais entre si; As diagonais são congruentes.
- Losango: Todos os lados são iguais entre si; As diagonais são perpendiculares e são bissetrizes dos ângulos internos.
- Quadrado: Possui quatro ângulos de 90°, e todos os lados são iguais entre si. Por ser um losango e um quadrado simultaneamente, as diagonais são congruentes e perpendiculares cujo comprimento é $lado\sqrt{2}$.

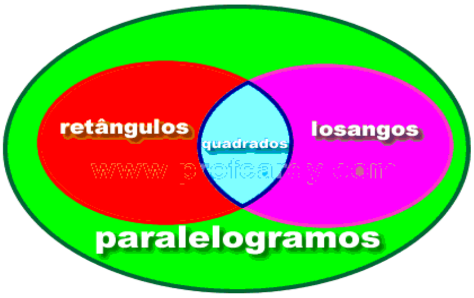


RESUMO GRÁFICO



TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

OBS
Devemos atentar para
Todo quadrado é retângulo mas nem todo retângulo é quadrado
Todo quadrado é losango mas nem todo losango é quadrado



ÁREAS

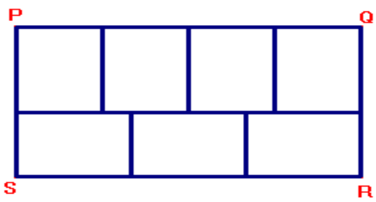
- $Trapézio: \dfrac{(B+b).h}{2}$
- $Parelog\,ramo: base.altura$
- $Retângulo: base.altura$
- $Losango: \dfrac{D.d}{2}$
- $Quadrado: (lado)^2$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 UECE

Se o retângulo PQRS abaixo tem área igual a 756 m^2 e é formado por 7 retângulos congruentes então o perímetro de PQRS, em m, é:

a) 114
b) 112
c) 110
d) 105



QUESTÃO 02 UECE

O paralelogramo PQRS é tal que a bissetriz do ângulo Q intercepta o lado PS no ponto M com MS = 5m e MQ = MR = 6m. Nestas condições a medida do lado PQ é:

a) 3,0m
b) 3,5m
c) 4,0m
d) 4,5m

QUESTÃO 03 UECE

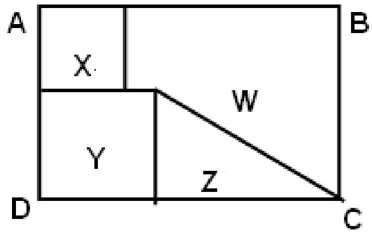
O menor lado de um paralelogramo, cujas diagonais medem respectivamente $8\sqrt{2}$ m e 10m e formam entre si um ângulo de 45^0, mede:

a) $\sqrt{13}$ m
b) $\sqrt{17}$ m
c) $\dfrac{13\sqrt{2}}{4}$ m
d) $\dfrac{17\sqrt{2}}{5}$ m

QUESTÃO 04 UECE

Na figura, o retângulo ABCD foi dividido nas 4 partes X, Y, Z e W. Se X e Y são quadrados de áreas 81m^2 e 144m^2, respectivamente, e Z é um triângulo com 102m^2 de área, então a área da região W é:

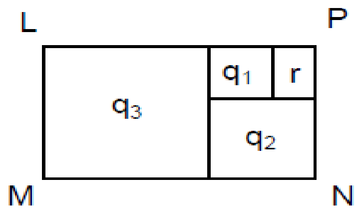
a) 327m^2
b) 316m^2
c) 309m^2
d) 282m^2



QUESTÃO 05 UECE

O retângulo LMNP está dividido em três quadrados (q_1, q_2 e q_3) e um retângulo (r). A razão entre as medidas do lado menor e do lado maior de r é 1/2. A razão entre as áreas de r e de LMNP é

a) 1/2
b) 1/16
c) 1/20
d) 1/24



QUESTÃO 06 UECE

Em um retângulo XYWZ, seja M, o ponto médio do lado XY, e seja N, o ponto de interseção da diagonal XW com o segmento ZM. Se a medida da área do triângulo XMN é 1m^2, então a medida da área do retângulo XYWZ é igual a:

a) 16m^2
b) 14m^2
c) 12m^2
d) 10m^2

QUESTÃO 07 UECE

As diagonais de um losango medem 12m e 16m. A medida da área do quadrilátero, cujos vértices são os pontos médios dos lados do losango, é igual a:

a) 32 m^2
b) 36 m^2

curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

c) 42 m^2
d) 48 m^2

QUESTÃO 08 **UECE**

Gilberto é agricultor e deseja aumentar a área de sua roça, que tem a forma de um quadrado, em 69%. Se a roça, depois de ampliada, continua tendo a forma de um quadrado, então a medida do lado do quadrado da roça inicial deve ser aumentada em:
a) 18%
b) 22%
c) 26%
d) 30%

QUESTÃO 09 **UECE**

Desejamos construir uma calçada em volta de dois lados consecutivos de um terreno retangular. A calçada é exterior ao terreno e tem largura constante. Se duas das dimensões do terreno são 20 m e 30 m, respectivamente, e a área da calçada mede 77,25 m^2, então sua largura mede:
a) 2,00 m.
b) 1,75 m.
c) 1,50 m.
d) 1,25 m.

QUESTÃO 10 **UECE**

Se aumentarmos, na mesma proporção, o comprimento dos lados de um quadrado, sua área terá um aumento de 69%. Nestas condições, a porcentagem de aumento de cada lado foi:
a) 20%.
b) 30%.
c) 34,5%.
d) 69%.

QUESTÃO 11 **UECE**

O perímetro de um quadrado é P metros e sua área é Q metros quadrados. Se 3P = Q, então a medida do lado do quadrado é:
a) 6 m.
b) 8 m.
c) 10 m.
d) 12 m.

QUESTÃO 12 **UECE**

Um retângulo X, cuja área é 60,80 m^2, é semelhante a um outro retângulo Y, cujo perímetro é 1/4 do perímetro de X. Nestas condições, a área do retângulo Y é
a) 30,40 m^2.
b) 15,20 m^2.
c) 7,60 m^2.
d) 3,80 m^2.

QUESTÃO 13 **UECE**

Em um losango cujas diagonais medem 6 m e 8 m, a distância, em metros, entre dois lados paralelos é:
a) 4,2.
b) 4,4.
c) 4,6.
d) 4,8.

QUESTÃO 14 **UFC**

Um paralelogramo tem dois lados consecutivos medindo 3 cm e 4 cm. Sabendo-se que esses lados formam um ângulo de 120°, então, o produto dos valores numéricos das medidas das diagonais do paralelogramo é igual a:
a) $\sqrt{407}$
b) $\sqrt{444}$
c) $\sqrt{481}$
d) $\sqrt{518}$
e) $\sqrt{581}$

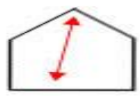
AULA 03 - POLÍGONOS

Polígonos são figuras fechadas formadas por segmentos de reta, sendo caracterizados pelos seguintes elementos: ângulos, vértices, diagonais e lados. De acordo com o número de lados a figura é nomeada.

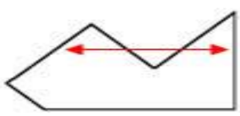
Um polígono é regular quando tem lados e ângulos congruentes. Todo polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência.

TIPOS DE POLÍGONOS

Se os ângulos do polígono forem menores que 180º ele será classificado de convexo



Caso tenha um ângulo com medida maior que 180º ele será classificado como não convexo ou côncavo



CLASSIFICAÇÃO DOS POLÍGONOS

Aqui relacionamos lados e nomenclatura
3: Triângulo
4: Quadrilátero
5: Pentágono
6: Hexágono
7: Heptágono

8: Octógono
9: Eneágono
10: Decágono
11: Hendecágono ou Undecágono
12: Dodecágono
15. Pentadecágono.
20. Icoságono.

DIAGONAIS

Diagonal de um polígono é o segmento de reta que liga um vértice (não consecutivo) ao outro, passando pelo interior da figura. O total de diagonais d de um polígono com n lados é:

$$\boxed{d(n) = \frac{n(n-3)}{2}}$$

OBS:
Nem todas as diagonais passam pelo centro. Alias só teremos diagonais passando pelo centro se o polígono tiver um numero n par de lados e as diagonais que passam pelo centro equivalem a metade do número de lados do polígono

SOMA DOS ÂNGULOS

- A soma de todos os ângulos internos de um polígono é:

$$\boxed{Si = (n-2)180^o}$$

- A soma dos ângulos externos de um polígono é:

$$\boxed{Se = 360^o}$$

- Logo podemos falar que o ângulo interno e externo são *suplementares.*

APÓTEMA

Chamamos de apótema a distância do centro do polígono ao ponto médio de um dos lados.

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01

O polígono que tem o número de lados igual ao número de diagonais é o:
a) hexágono
b) pentágono
c) triângulo
d) heptágono

QUESTÃO 02

Cada ângulo interno de um decágono regular mede:
a) 230°
b) 130°
c) 144°
d) 28°
e) 150°

QUESTÃO 03

Qual o polígono regular cujo ângulo interno é o triplo do externo?
a) Dodecágono
b) Pentágono
c) Octógono
d) Heptágono
e) Hexágono

QUESTÃO 04 ITA

Se o número de diagonais do polígono excede em 12 unidades o número de lados quantas dessas diagonias passam pelo centro?
a) 5
b) 4
c) 3
d) 2

QUESTÃO 05 **UNICAMP**

O polígono convexo cuja soma dos ângulos internos mede 1.440° tem exatamente:
a) 15 diagonais
b) 20 diagonais
c) 25 diagonais
d) 30 diagonais
e) 35 diagonais

QUESTÃO 06 **UNIFEI**

Se em dois polígonos regulares cuja razão entre os ângulos internos é 3/5 e a razão entre o número de lados é 1/3, tiverem mesmo perímetro, 32cm, então uma das área é:
a) 1 cm^2
b) 4 cm^2
c) 9 cm^2
d) 16 cm^2

QUESTÃO 07 **MACK**

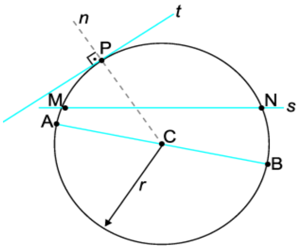
Os ângulos externos de um polígono regular medem 20°. Então o número de diagonais desse polígono é:
a) 90
b) 104
c) 119
d) 135
e) 152

AULA 04 - CÍRCULO

Na Matemática e na Geometria, um **círculo** ou **disco** é o conjunto dos pontos internos de uma circunferência. Por vezes, também se chama círculo ao conjunto de pontos cuja distância ao centro é menor ou igual a um dado valor (ao qual chamamos raio).

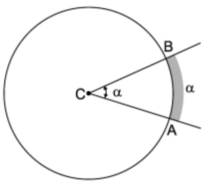
ELEMENTOS

Raio: segmento CB.
Corda: segmento MN
Diâmetro: segmento AB.

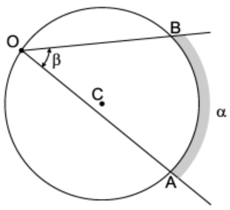


ÂNGULOS DA CIRCUNFERÊNCIA

Ângulo Central: ângulo que tem vértice no centro da circunferência.

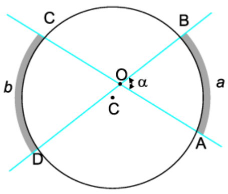


Ângulo Inscrito: ângulo que tem vértice na circunferência



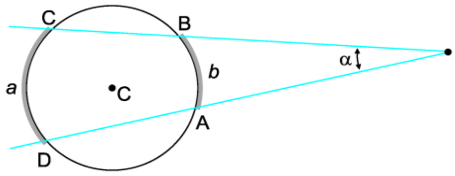
$$\boxed{\beta = \frac{\alpha}{2}}$$

Ângulo excêntrico (fora do centro) interior



$$\boxed{\alpha = \frac{a+b}{2}}$$

Ângulo excêntrico (fora do centro) exterior

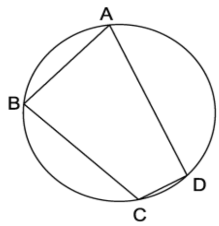


$$\boxed{\alpha = \frac{a-b}{2}}$$

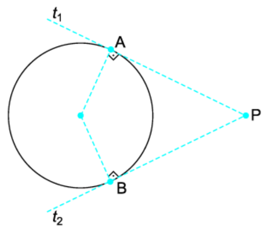
Quadrilátero Inscrito na circunferência

$$\boxed{\hat{A}+\hat{C}=180^\circ}$$

$$\boxed{\hat{B}+\hat{D}=180^\circ}$$



SEGMENTO TANGENTE



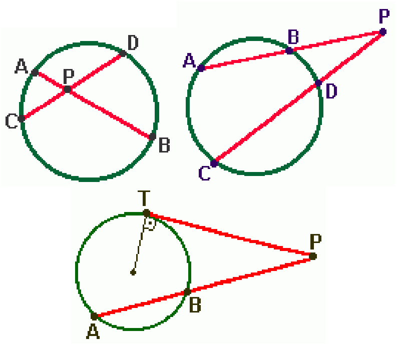
$$\boxed{PA = PB}$$

POTÊNCIA DE UM PONTO

Na ordem que aparecem as figuras abaixo temos as seguintes propriedades:

- AP.PB = CP.PD
- PA.PB = PC.PD
- PT^2 = PA.PB

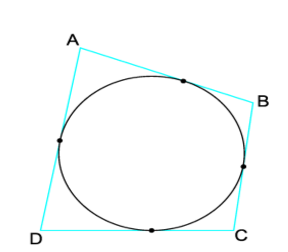
curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br



TEOREMA DE PITOT

Em todo quadrilátero convexo circunscrito a uma circunferência a soma de dois lados opostos é igual a soma dos outros dois:

$$\boxed{AB + DC = AD + BC}$$



ÁREA E COMPRIMENTO

A área de um círculo é o que o difere de uma circunferência. A circunferência não tem área, só perímetro. Já o circulo possui área e perímetro (comprimento).

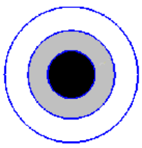
$\boxed{Área = \pi.(raio)^2}$ e $\boxed{C = 2.\pi.raio}$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 UECE

A figura ao lado representa três círculos concêntricos de raios 3m, 4m e 5m, respectivamente. Que porcentagem da área do círculo maior representa a área cinza?

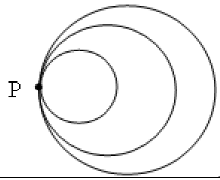
a) 25
b) 28
c) 30
d) 32



QUESTÃO 02 UECE

Na figura as três circunferências são tangentes no ponto P e seus raios são expressos, em cm, por números naturais consecutivos. Se a medida da área limitada pela circunferência menor for igual à medida da área compreendida entre a circunferência intermediária e a maior então a soma dos diâmetros das três circunferências é igual a:

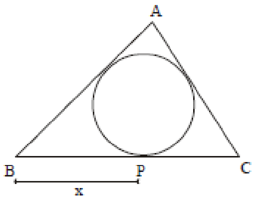
a) 36 cm
b) 30 cm
c) 24 cm
d) 18 cm



QUESTÃO 03

A circunferência está inscrita no triângulo ABC. AB=8, AC = 9 e BC = 7. Então, x vale:

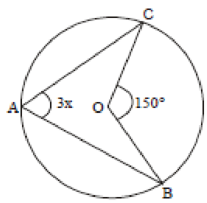
1,5
b) 2,8
c) 3,0
d) 4,6
e) 5,0



QUESTÃO 04 ACAFE

Na figura a seguir, o valor de x é:

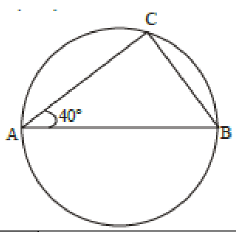
a) 25°
b) 30°
c) 50°
d) 75°
e) 100°



QUESTÃO 05 PUC

Na figura, AB é diâmetro. O menor dos arcos (AC) mede:

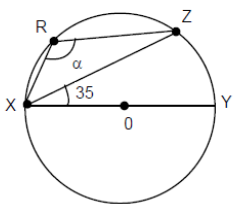
a) 100
b) 120
c) 140
d) 160
e) 180



QUESTÃO 06 FUVEST

A medida do ângulo XRZ inscrito na circunferência de centro O é:

a) 100º
b) 110º
c) 120º
d) 125º
e) 135º

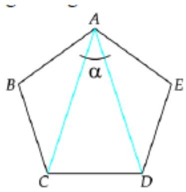


curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

QUESTÃO 07 **FUVEST**

Na figura abaixo, ABCDE é um pentágono regular. A medida em graus do ângulo α é:

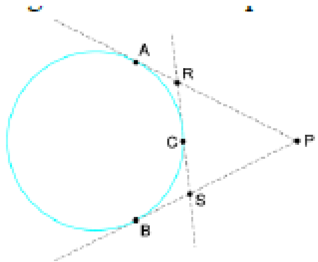
a) 32º
b) 34º
c) 36º
d) 38º
e) 40º



QUESTÃO 08

Na figura, PA = 16 cm e A, B e C são pontos de tangência. Calcule o perímetro do triângulo PRS.

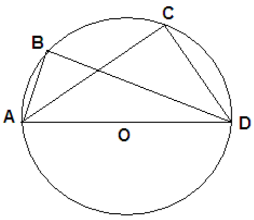
a) 30cm
b) 31cm
c) 32cm
d) 33cm
e) 34cm



QUESTÃO 09 **UFC**

Considere a circunferência abaixo, onde AD é um diâmetro, AB, CD, BD e AC são cordas. Se o raio desta circunferência mede 6,5 cm, AB = 3 *cm* e CD = 5 *cm*, então as cordas BD e AC medem, em cm, respectivamente:

a) $4\sqrt{10}$ e 12
b) 16 e 8
c) 5 e 3
d) 6 e 4
e) 7 e 5



QUESTÃO 10 **UFC**

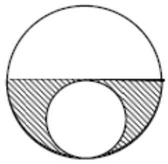
Seja C uma circunferência de raio 2 cm, *AB* um diâmetro de C e *r* e *s* retas tangentes a C, respectivamente por *A* e *B*. Os pontos *P* e *Q* estão respectivamente situados sobre *r* e *s* e são tais que *PQ* também tangencia C. Se *AP* = 1 cm, pode-se afirmar corretamente que *BQ* mede:

a) 3 cm
b) 4 cm
c) 4,5 cm
d) 8 cm
e) 8,5 cm

QUESTÃO 11 **UECE**

Na figura, as duas circunferências são tangentes, o centro da circunferência maior é um ponto da circunferência menor e o diâmetro da circunferência maior mede 4cm. A área da região hachurada é igual a:

a) π^2 cm^2
b) $2\pi^2$ cm^2
c) 2π cm^2
d) π cm^2



QUESTÃO 12 **UECE**

O ponto P é externo a uma circunferência e sua distância ao centro da circunferência é 13 m. A secante traçada de P intercepta a circunferência nos pontos Q e R, de modo que PQ mede 9 m e PR mede 16 m. A medida do raio da circunferência é:

a) 4 m.
b) 5 m.
c) 6 m.
d) 7 m.

QUESTÃO 13 **UECE**

A razão entre as áreas do círculo circunscrito e do círculo inscrito ao triângulo cujas medidas dos lados são respectivamente 6 m, 8 m e 10 m é:

a) 6,00.
b) 6,75.
c) 6,25.
d) 6,50

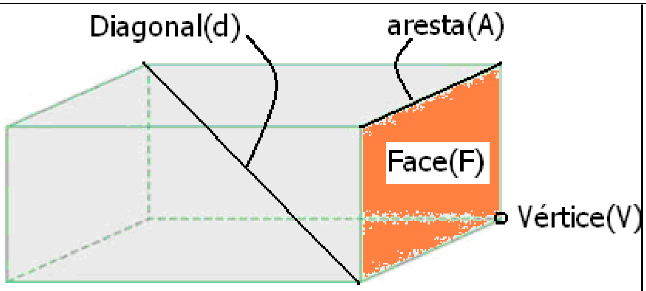
AULA 05 - POLIEDROS

As figuras geométricas espaciais também recebem o nome de sólidos geométricos, que são divididos em: poliedros e corpos redondos. Vamos abordar as definições e propriedades dos poliedros.

Poliedros são figuras geométricas formadas por três elementos básicos: vértices, arestas e faces. Um poliedro é considerado regular quando suas faces são polígonos regulares e congruentes.

ELEMENTOS

- Faces são os polígonos que limitam o poliedro.
- Arestas são os segmentos de reta que limitam suas faces.
- Vértices são os pontos de interseção de três ou mais arestas.
- Diagonal: Distancia entre os vértices que estão em faces distintas.



FÓRMULA DE EULER

A fórmula de Euler está atribuída à relação de dependência entre os elementos de um poliedro. A expressão matemática desenvolvida por Leonhard Euler, matemático suíço, é a seguinte: V – A + F = 2. Onde:

- V = vértice
- A = arestas
- F = Faces

Essa expressão determina o número de faces, arestas e vértices de qualquer poliedro.

SOMA DOS ÂNGULOS DE UM POLIEDRO

A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro com *v* vértices é dada por:

$$Si = (v-2)360^o$$

POLIEDROS DE PLATÃO

Chamamos de poliedros de Platão, quando todas as faces têm o mesmo número de lados, quando em todos os vértices coincidem o número de arestas e quando segue a relação de Euler (V – A + F =2).

Poliedros de Platão:

- **T**etraedro
- **H**exaedro
- **O**ctaedro
- **D**odecaedro
- **I**cosaedro

NOMECLATURA

Os poliedros recebem nomes de acordo com o número de faces.

- 4 faces → tetraedro
- 5 faces → pentaedro
- 6 faces → hexaedro
- 7 faces → heptaedro
- 8 faces → octaedro
- 10 faces → decaedro
- 12 faces → dodecaedro
- 20 faces → icosaedro

OBS
Atentar quando for trabalhar questões onde os números de arestas são informados aleatoriamente. Lembre que a aresta surge do encontro entre duas faces então num caso errôneo tendemos a contar as arestas em dobro

Ex: Um poliedro convexo de 15 arestas tem somente faces quadrangulares e pentagonais. Quantas faces têm de cada tipo se a soma dos ângulos das faces é 32 ângulos retos?
Solução. Encontramos o número de vértices pela fórmula da soma dos ângulos das faces: S = (V – 2).360º

$$\begin{cases} S = (V-2).360^o \\ S = 32(90^o) = 2880^o \end{cases} \Rightarrow$$

$$V - 2 = \frac{2880^o}{360^o} \Rightarrow V = 2 + 8 = 10$$

Utilizando a relação de Euler A + 2 = F + V e, substituindo pelos valores, calculamos o número de vértices.

$$\boxed{\begin{cases} A = 15 \\ V = 10 \end{cases} \Rightarrow F = 15 + 2 - 10 = 7}$$

Considerando "x" o número de faces quadrangulares e "y" o de faces pentagonais forma-se um sistema onde uma das equações envolve o número de arestas em função do número de faces.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \dfrac{4x}{2} + \dfrac{5y}{2} = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \rightarrow \times(-4) \\ 4x + 5y = 30 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4x + -4y = -28 \\ 4x + 5y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 7 - 2 = 5 \end{cases}$$

Logo possui 5 faces quadrangulares e 2 pentagonais.

Ex: Determine o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo formado por 5 ângulos triedros, sete ângulos tetraédricos, nove ângulos pentaédricos e oito ângulos hexaédricos.
Solução. Um ângulo triédrico contém um vértice onde concorrem 3 arestas. Da mesma forma o tetraédrico contém um vértice onde concorrem 4 arestas, o mesmo ocorrendo com os pentaédricos (5 arestas) e hexaédricos (6 arestas). De acordo com a expressão para o total de arestas em função do número de arestas que concorrem a um vértice, temos:

$$\begin{cases} V = 5 + 7 + 9 + 8 = 29 \\ A = \dfrac{nV}{2} = \dfrac{5(3) + 7(4) + 9(5) + 8(6)}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{136}{2} = 68$$

$$\Rightarrow F = A + 2 - V \Rightarrow F = 68 + 2 - 29 = 41$$

Logo *há 29 vértices, 68 arestas e 41 faces.*

TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 **FISS**

Um poliedro convexo é formado por 20 faces triangulares. O número de vértices desse poliedro é:
a) 12
b) 15
c) 18
d) 20
e) 24

QUESTÃO 02 **CEFET**

Um poliedro convexo possui duas faces triangulares, duas quadrangulares e quatro pentagonais. Logo, a soma dos ângulos internos de todas as faces será:
a) 3240º
b) 3640º
c) 3840º
d) 4000º
e) 4060º

QUESTÃO 03 **PUC**

Um poliedro convexo tem 3 faces pentagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse polígono, sabendo-se que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares?
a) 6
b) 4
c) 5
d) 3
e) 8

QUESTÃO 04 **PUC**

Um poliedro convexo de 10 vértices possui 8 faces triangulares e x faces quadrangulares. Qual o número total de faces desse poliedro?
a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

QUESTÃO 05 **PUC**

Sobre as sentenças:
I - Um octaedro regular tem 8 faces quadradas.
II - Um dodecaedro regular tem 12 faces pentagonais.
III - Um icosaedro regular tem 20 faces triangulares.
É **correto** afirmar que apenas:
a) I é verdadeira
b) II é verdadeira
c) III é verdadeira
d) I e II são verdadeiras
e) II e III são verdadeiras.

QUESTÃO 06

Some as alternativas **corretas**:
01. Um poliedro convexo que tem 7 faces e 15 arestas possui 10 vértices.
02. Um poliedro convexo que tem 6 faces triangulares e somente faces triangulares possui 9 arestas.
04. Um poliedro que possui 10 vértices triédricos possui 15 arestas.
08. Um poliedro que possui 6 vértices triédricos e quatro vértices pentaédricos possui 12 faces.
16. Todo poliedro convexo que tem o número de vértices igual ao número de faces possui um número par de arestas.

QUESTÃO 07 **UFPR**

Um poliedro convexo de 29 vértices possui somente faces triangulares e faces hexagonais. Quantas faces tem o poliedro se o número de faces triangulares é a metade do número de faces hexagonais?
a) 16 faces
b) 17 faces
c) 18 faces
d) 19 faces
e) 20 faces

QUESTÃO 08

CESGRANRIO Considere o poliedro regular, de faces triangulares, que não possui diagonais. A soma dos ângulos das faces desse poliedro vale, em graus:
a) 180
b) 360
c) 540
d) 720
e) 900

QUESTÃO 09 **UFRGS**

Um octaedro regular possui:
a) mais diagonais do que vértices;
b) mais faces que arestas;
c) mais vértices do que faces;
d) menos diagonais que faces;
e) igual número de vértices e de arestas.

QUESTÃO 10 **PUC**

Se a soma dos ângulos das faces de um poliedro regular é 1440º, então o número de arestas desse poliedro é:
a) 12
b) 8
c) 6
d) 20
e) 4

QUESTÃO 11

Se um poliedro convexo e fechado tem 8 ângulos tetraédricos e 1 ângulo hexaédrico, então esse poliedro tem :
a) 15 faces.
b) 12 faces.
c) 18 faces.
d) 10 faces.
e) 9 faces.

QUESTÃO 12

Se um poliedro convexo e fechado tem 7 vértices e 15 arestas, então esse poliedro tem :
a) 7 faces.
b) 8 faces.
c) 9 faces.
d) 10 faces.
e) 12 faces.

QUESTÃO 13

Um poliedro convexo possui apenas faces triangulares e quadrangulares. Sabendo que o número de faces triangulares e quadrangulares são diretamente proporcionais aos números 2 e 3 e que o número de arestas é o dobro do número de vértices, calcule o número total de faces desse poliedro.
a) 15
b) 20
c) 25
d) 30

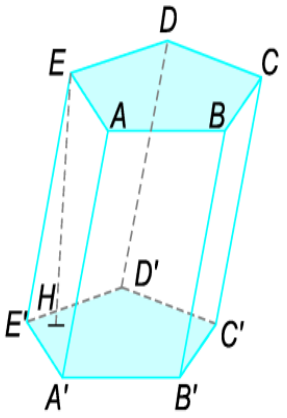
AULA 06 - PRISMAS

Um **prisma** é todo poliedro formado por uma face superior e uma face inferior paralelas e congruentes (também chamadas de bases) ligadas por arestas. As laterais de um prisma são paralelogramos. A nomenclatura dos prismas é dada de acordo com a forma das bases. Assim, se temos hexágonos nas bases, teremos um prisma hexagonal.

O prisma pode ser classificado em reto quando suas arestas laterais são perpendiculares às bases, e oblíquo quando não são.

ELEMENTOS

Bases: são os polígonos A´B´C´D´E´ e ABCDE
Faces laterais: São os paralelogramos ABA´B´; BCB´C; CDC´D´; ……
Arestas Laterais: são os segmentos AA´; BB´; CC´; DD´ e EE´
Altura: A distância EH entre as duas bases é denominada altura do Prisma.
Arestas das bases: são os segmentos A´B´; B´C´; C´D´ ; D´E´ e E´A´



NOMENCLATURA

O nome do prisma se dá através da figura da base.

- Prisma Triangular: As bases são triangulares.
- Prima Quadrangular: As bases são quadriláteros.
- Prisma Hexagonal: As bases são hexágonos

ÁREAS E VOLUME

- A_{LAT} = Soma das áreas das faces exceto a base e sua face oposta.
- A_{BASE} = Área da superfície em contato com o solo desde que esta tenha uma face oposta
- $A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2.\ A_{BASE}$
- Volume = A_{BASE}.altura

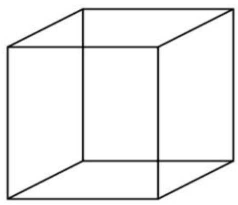
CUBO

O apresenta certa particularidade em suas propriedades por ter todas arestas iguais. Desta forma considerando aresta a podemso afirma que para o cubo vale:

$$A_{TOTAL} = 6a^2$$

$$Volume = a^3$$

$$Diagonal = a\sqrt{3}$$



EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 **PUC**

Se a área da base de um prisma diminui 10% e a altura aumenta 20%, o seu volume:

a) aumenta 8%
b) aumenta 15%
c) aumenta 108%
d) diminui 8%
e) não se altera

QUESTÃO 02 **UFSC**

O volume de um paralelepípedo retângulo é 24 m^3. Sabendo-se que suas dimensões são proporcionais aos números 2, 1,5 e 1, calcule, em metros quadrados, a área total desse paralelepípedo

a) 22
b) 32
c) 42
d) 52
e) 62

QUESTÃO 03 **Fatec-SP**

As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo formam uma P.G. Se a menor das arestas mede 1/2 cm e o volume de tal paralelepípedo é 64cm^3, então a soma das áreas de suas faces é:

a) 292cm^2
b) 298cm^2
c) 296cm^2
d) 294cm^2
e) 290cm^2

QUESTÃO 04 **ESPCEX**

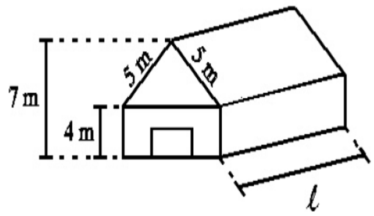
Uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo tem largura de 6 metros, diagonal do fundo com 10 metros e diagonal da face que contém o comprimento igual a $4\sqrt{5}$ metros. Para enchê-la com água será utilizado um caminhão tanque com capacidade de 6000 litros. O número de cargas completas, desse mesmo caminhão, necessárias para que a piscina fique completamente cheia é:

a) 24
b) 28
c) 32
d) 54
e) 80

QUESTÃO 05 **ESPCEX**

Um galpão com as dimensões do desenho abaixo deverá ser construído para armazenar produtos que necessitam de controle de temperatura. Cada um dos condicionadores de ar disponíveis, que atendem às suas especificações, é capaz de climatizar um volume de até 200m^3. Nessas condições, pode-se afirmar que o maior comprimento que o galpão pode ter, em metros, para ser equipado com 3 (três) aparelhos de ar condicionado é:
(desprezar a espessura das paredes e considerar que o galpão é um prisma reto e não tem forro nem laje)

a) 13 m
b) 20 m
c) 5 m
d) 25 m
e) 15 m



QUESTÃO 06 **ESPCEX**

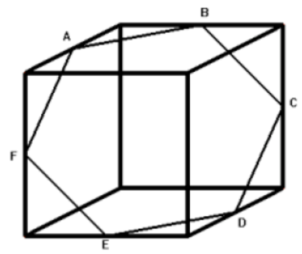
Pedro construiu um aquário em forma cúbica. Enquanto o enchia, notou que, colocando 64 litros de água, o nível subia 10 cm. O volume máximo, em litros, que comporta esse aquário é de:

a) 216
b) 343
c) 512
d) 729
e) 1024

QUESTÃO 07 **ESPCEX**

O hexágono regular ABCDEF é uma secção plana de um cubo de aresta $2a\sqrt{3}$. Cada vértice do polígono divide ao meio a aresta na qual está apoiado.
A área do hexágono é:

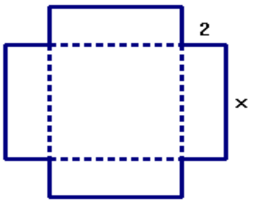
a) $9a^2\sqrt{3}$
b) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{2}$
d) $4a^2\sqrt{3}$
e) $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$



QUESTÃO 08 UECE

A figura, construída em papelão plano, com área igual a $33m^2$, é formada por um quadrado cujo lado mede x metros e por quatro retângulos com lados medindo 2 e x metros. A caixa paralelepípedica, obtida dobrando os retângulos nas linhas pontilhadas, limita no seu interior um volume igual a:

a) $18m^3$
b) $21m^3$
c) $24m^3$
d) $27m^3$



QUESTÃO 09 UECE

Com 42 cubos de 1cm de aresta formamos um paralelepípedo cujo perímetro da base é 18cm. A altura deste paralelepípedo, em cm, é

a) 4
b) 3
c) 2
d) 1

QUESTÃO 10 UECE

A área da superfície total de um prisma reto com 10 m de altura, cujas bases paralelas são triângulos equiláteros, cada um deles com 30 m de perímetro, é:

a) $(300+\sqrt{3})m^2$
b) $(300+10\sqrt{3})m^2$
c) $(300+25\sqrt{3})m^2$
d) $(300+50\sqrt{3})m^2$

QUESTÃO 11 UECE

Se um prisma triangular reto é tal que cada uma de suas arestas mede 2m, então a medida do seu volume é, em m^3:

a) $3\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{3}$
c) 6
d) 8

QUESTÃO 12 UECE

O volume de um prisma regular reto hexagonal, com 2 m de altura, é $\sqrt{3}\,m^3$ A medida da área lateral deste prisma é, em m^2:

a) $\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $3\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{3}$

QUESTÃO 13 UECE

A diagonal de um paralelepípedo retângulo, cuja base é um quadrado, mede 6cm e faz com o plano da base do paralelepípedo um ângulo de 45°. A medida, em cm^3, do volume do paralelepípedo é

a) $8\sqrt{2}$
b) $8\sqrt{3}$
c) $27\sqrt{2}$
d) $27\sqrt{3}$

QUESTÃO 14 UFC

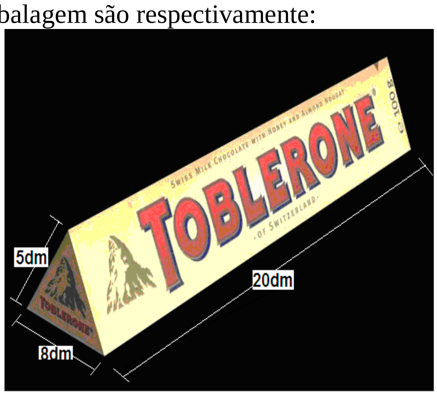
Uma piscina na forma de um paralelepípedo retângulo de 9 m de comprimento, 4m de largura e 2m de altura está sendo abastecida de água à razão constante de 50 litros por minuto. O tempo necessário, em horas, para encher esta piscina, sem desperdício de água, é:

a) 26
b) 24
c) 22
d) 20
e) 18

QUESTÃO 15

Abaixo temos a embalagem de um chocolate popular chamado ***Toblerone*** em formato prismático. De acordo com a figura podemos afirmar que a área da base e o volume da embalagem são respectivamente:

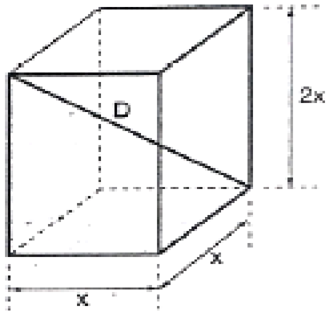
a) 12 e 240
b) 160 e 480
c) 12 e 480
d) 160 e 240
e) nda



curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

QUESTÃO 16	UEMA

Na figura tem-se um prisma reto cuja diagonal principal mede $3a\sqrt{2}$. A área total desse prisma é:
a) $30a^2$
b) $24a^2$
c) $18a^2$
d) $12a^2$



AULA 07 - PIRÂMIDES

Pirâmides são poliedros cuja base é uma região poligonal ABCDEF e as faces são regiões triangulares.
Uma pirâmide se diz regular quando for reta (projeção ortogonal do vértice coincide com o centro da base) e a figura da base for regular.

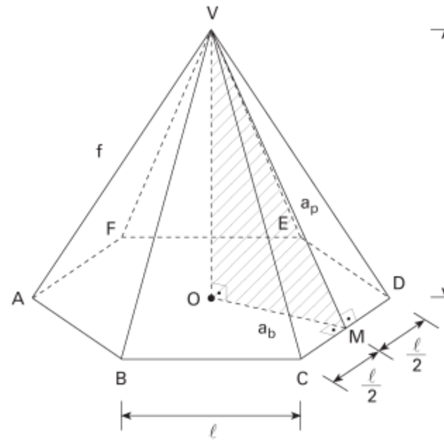
NOMENCLATURA

Dá-se o nome da pirâmide através do polígono da base. Observe alguns exemplos.

- Pirâmide Triangular a base é um triângulo
- Pirâmide quadrangular a base é um quadrado
- Pirâmide Pentagonal a base é um pentágono

ELEMENTOS

- aresta da base - ℓ
- aresta lateral -aℓ
- altura – h
- apótema da base – ab
- apótema da pirâmide – ap
- Raio da circunferência circunscrita – R



RELAÇÕES AUXILIARES NA PIRÂMIDE

- $a_p{}^2 = h^2 + a_b{}^2$
- $al^2 = a_p{}^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2$
- $al^2 = h^2 + R^2$

ÁREAS E VOLUME

A_{LAT} = Soma das áreas das faces laterais
A_{BASE} = Área do polígono oposto ao vértice.
Volume = (1/3).A_{BASE}.Altura

TETRAEDRO

O tetraedro é uma pirâmide com 4 faces todas idênticas. Ou seja, as faces são triângulos equiláteros. Para o tetraedro teremos:

$$A_{TOTAL} = (lado)^2\sqrt{3}$$

$$h = \frac{(lado)\sqrt{6}}{3}$$

$$Volume = \frac{(lado)^3\sqrt{6}}{12}$$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01	Cescem-SP

Em uma pirâmide com 12cm de altura, tendo como base um quadrado de lado igual a 10 cm, a área lateral é:
a) $240cm^2$
b) $260cm^2$
c) $340cm^2$
d) $400cm^2$
e) n.d.a.

curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

QUESTÃO 02 **Osec-SP**

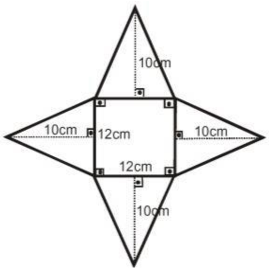
Uma pirâmide quadrada tem todas as arestas medindo 2. Então, a sua altura mede:
a) 1
b) $\sqrt{2}$
c) 3
d) 4
e) n.d.a.

QUESTÃO 03 **UECE**

Se o volume de um cubo de 6cm de aresta é igual ao volume de uma pirâmide regular que tem para base de um quadrado de 6cm de lado, então a altura da pirâmide, em cm, é:
a) 3
b) 9
c) 12
d) 18

QUESTÃO 04 **ACAFE**

A figura abaixo mostra a planificação de um sólido. O volume desse sólido é de:
a) $1152cm^3$
b) $1440cm^3$
c) $384cm^3$
d) $1200cm^3$
e) $240cm^3$



QUESTÃO 05 **UEPG**

Calcule a área total de um tetraedro regular de aresta igual a 4 cm.
a) $4\sqrt{3}$
b) $8\sqrt{3}$
c) $12\sqrt{3}$
d) $16\sqrt{3}$
e) $24\sqrt{3}$

QUESTÃO 06 **PUC**

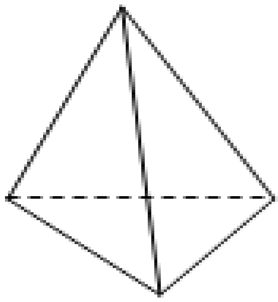
A aresta da base de uma pirâmide hexagonal regular mede 3cm, e o apótema dessa pirâmide, 4cm. A área de uma das faces laterais desta pirâmide mede, em m^2.
a) 6.10^{-4}
b) 6.10^{-2}
c) 12.10^{-4}
d) 12.10^{-2}
e) 15.10^{-4}

QUESTÃO 07 **EE Volta Redonda**

A base de uma pirâmide tem 225 cm^2 de área. Uma secção paralela à base, feita a 3cm do vértice, tem $36cm^2$ de área. A altura da pirâmide é:
a) 4,5 cm
b) 7,5 cm
c) 1,5 cm
d) 9,5cm
e) 3,5cm

QUESTÃO 08 **UECE**

Um triângulo equilátero, cuja medida do lado é 6m, é a base de uma pirâmide regular cuja medida de uma aresta lateral é $\sqrt{15}$ m. O volume desta pirâmide, em m^3, é:
a) 9
b) 10
c) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$
d) $\frac{9}{2}\sqrt{5}$



QUESTÃO 09 **UFC**

Um tetraedro regular tem arestas medindo $\sqrt{6}$ cm. Então a medida de suas alturas é igual a:
a) 1/2 cm
b) 1 cm
c) 3/2 cm
d) 2 cm
e) 5/2 cm

QUESTÃO 10 **UFC**

Num tetraedro ABCD vale a igualdade DA = DB = BC = a e o triângulo ABC é equilátero com AB = b. O comprimento da altura do tetraedro baixada do vértice A é igual a:
a) $\frac{a+b}{2}$
b) $\sqrt{ab}$
c) $\frac{b\sqrt{3a^2-b^2}}{a}$
d) $\frac{b\sqrt{3a^2-b^2}}{\sqrt{4a^2-b^2}}$
e) $\frac{a\sqrt{4a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

QUESTÃO 11 **ESPCEX**

A área da base de uma pirâmide quadrangular regular é 36 m^2. Se a altura da pirâmide mede 4 m, sua área total, em m^2, é igual a:
a) 48
b) 54
c) 96
d) 120
e) 144

curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

QUESTÃO 12 **ESPCEX**

Uma pirâmide quadrangular regular tem ***a*** por aresta da base e **2*a*** por aresta lateral. A altura e o volume dessa pirâmide medem, respectivamente:

a) $\frac{a\sqrt{15}}{2}$ e $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{a\sqrt{14}}{2}$ e $\frac{a^3\sqrt{14}}{6}$

d) $\frac{a\sqrt{12}}{2}$ e $\frac{a^3\sqrt{12}}{3}$

e) $\frac{a\sqrt{10}}{2}$ e $\frac{a^3\sqrt{10}}{3}$

QUESTÃO 13 **ESPCEX**

Uma pirâmide hexagonal regular tem área da base igual a $18\sqrt{3}$ m^2. Sabendo-se que sua altura é igual ao triplo do apótema da base, então seu volume é:

a) 36 m^3

b) $27\sqrt{3}$ m^3

c) $36\sqrt{3}$ m^3

d) $54\sqrt{3}$ m^3

e) $81\sqrt{6}$ m^3

QUESTÃO 14 **FEI**

Um hexágono regular está inscrito numa circunferência cujo raio mede 4 cm. Se esse hexágono é base de uma pirâmide reta, cuja altura mede 2 cm, então a área lateral dessa pirâmide, em cm^2, é:

a) 20
b) 36
c) 40
d) 48
e) 60

QUESTÃO 15 **UFPA**

O volume de uma pirâmide regular quadrangular cujas faces laterais são triângulos equiláteros de a cm de lado vale:

a) $\frac{16\sqrt{2}}{3}cm^3$

b) $\frac{32\sqrt{2}}{3}cm^3$

c) $16\sqrt{2}$ cm^3

d) $\frac{20\sqrt{2}}{3}cm^3$

e) $32\sqrt{2}$ cm^3

QUESTÃO 16 **MACK**

Duas pirâmides têm a mesma altura, 1,5 m. A primeira tem por base quadrado de 9 m de lado e a segunda um hexágono regular de mesma área. A área da secção paralela à base, traçada a 10 m de distância do vértice, na segunda pirâmide, vale:

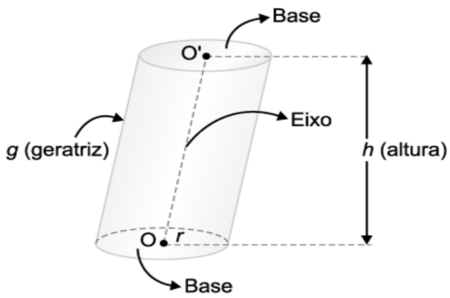
a) 36 m^2
b) 27 m^2
c) 54 m^2
d) 45 m^2
e) $10\sqrt{2}$ m^2

AULA 08 - CILINDROS

O cilindro segue os mesmos conceitos do prisma. Podemos até considerar o cilindro um prisma especial. Especial porque ele tem mesma formula para as áreas e volume, com a diferença do cilindro ter sempre na base um círculo.

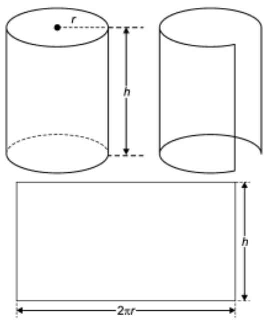
ELEMENTOS

Se as geratrizes forem perpendiculares ao plano da base dizemos que o cilindro é reto, caso contrário, é dito cilindro oblíquo. No caso do cilindro reto, temos que g = h



FÓRMULAS

$$A_{LAT} = 2.\pi.R.h$$
$$A_{BASE} = 2.\pi.(raio)$$
$$A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2A_{BASE}$$
$$Volume = A_{BASE}.h$$



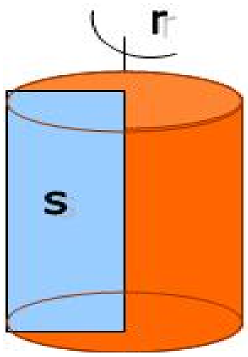
SECÇÃO MERIDIANA

A secção feita no cilindro reto por um plano que contém o seu eixo denomina-se secção meridiana do cilindro. A secção meridiana é um retângulo de área: **2r.h**. Quando a secção é um quadrado temos um cilindro equilátero.
(g = h = 2r)

CILINDRO DE REVOLUÇÃO

Cilindro de revolução é o sólido obtido quando giramos em torno de uma reta uma região retangular. Também é chamado de cilindro circular.

Devemos atentar para as dimensões do cilindro formado. Este terá como altura e raio as mesmas dimensões do retângulo que está sendo rotacionado.



EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01	UFPA

Um cilindro circular reto tem raio igual a 2 cm e altura 3 cm. Sua superfície lateral mede:
a) 6π cm^2
b) 9π cm^2
c) 12π cm^2
d) 15π cm^2
e) 16π cm^2

QUESTÃO 02	UFMG

A área total de um cilindro vale 48π m^2 e a soma das medidas do raio da base e da altura é igual a 8 m. Então, em m^3, o volume do sólido é:
a) 75π
b) 50π
c) 45π
d) 25π
e) 15π

QUESTÃO 03	UELO

Um cilindro de revolução tem 16π m^2 de área total. Sabendo que o raio é a terça parte da altura, a área lateral mede:
a) $2\pi\sqrt{5}$ m^2
b) $10\pi\sqrt{2}$ m^2
c) $3\pi\sqrt{10}$ m^2
d) 12π m^2
e) $5\pi\sqrt{3}$ m^2

QUESTÃO 04	UFBA

Um cilindro reto tem volume igual a 64 dm^3 e área lateral igual a 400 cm^2. O raio da base mede:
a) 16 dm
b) 24 dm
c) 32 dm
d) 48 dm
e) 64 dm

QUESTÃO 05	MACK

Se um cilindro equilátero mede 12 m de altura, então seu volume em m^3 vale:
a) 144π
b) 200π
c) 432π
d) 480π
e) 600π

QUESTÃO 06	ESPCEX

O volume de um cilindro equilátero de 1 metro de raio é, aproximadamente, igual a:
a) 3,1 m^3
b) 6,3 m^3
c) 9,4 m^3
d) 12,6 m^3
e) 15,7 m^3

QUESTÃO 07	AFA

Determinar o raio da base de um cilindro equilátero sabendo-se que a área lateral excede de 4 π cm^2 a área da secção meridiana.

a) $\sqrt{\dfrac{1}{\pi}}$

b) $\sqrt{\dfrac{1}{\pi+1}}$

c) $\sqrt{\dfrac{\pi}{\pi+1}}$

d) $\sqrt{\dfrac{\pi}{\pi-1}}$

QUESTÃO 08	ESPCEX

Um tonel em forma de cilindro circular reto, tem 60 cm de altura. Uma miniatura desse tonel tem 20cm de altura e raio diretamente proporcional a altura. Se a miniatura tem 100 ml de volume, então o volume do tonel original é de:
a) 30L
b) 27L
c) 2,7L
d) 3L
e) 300 ml

TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

QUESTÃO 09 — UFGO

O desenvolvimento da superfície lateral de um cilindro circular reto é um quadrado com área de 4 dm^2. O volume desse cilindro, em dm^3, é:

a) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

b) $\frac{2}{\pi}$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) 2π

e) $4\sqrt{2\pi}$

QUESTÃO 10 — UECE

O raio de um cilindro circular reto é aumentado de 20% e sua altura é diminuída de 25%. O volume deste cilindro sofrerá um aumento de:

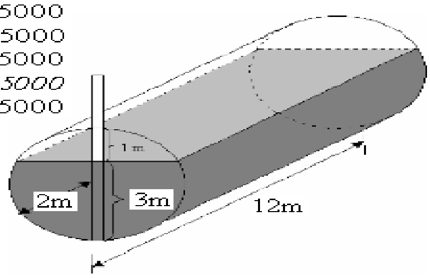
a) 2%
b) 4%
c) 6%
d) 8%

QUESTÃO 11 — ESPCEX

Deseja-se estimar a quantidade de combustível existente em um tanque cilíndrico disposto horizontalmente, medindo-se a parte molhada de uma régua, conforme a figura abaixo. Sabendo que o tanque tem 2m de raio e 12m de comprimento, e que a parte molhada da régua tem 3m de comprimento, pode-se concluir que o volume de combustível, em litros, existente no tanque está compreendido entre:

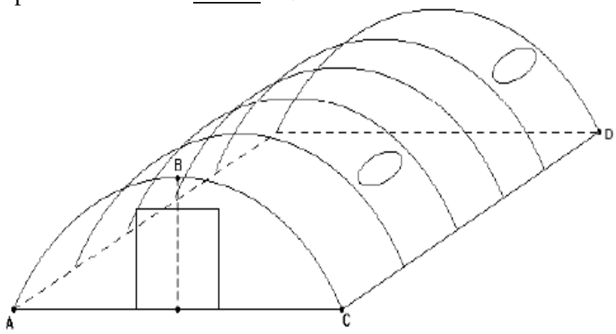
Dados: utilizar π = 3,1 e $\sqrt{3}$ =1,7

a) 145000 e 155000
b) 135000 e 145000
c) 125000 e 135000
d) 115000 e 125000
e) 105000 e 115000



QUESTÃO 12 — ESPCEX

Uma barraca de campanha militar possui o formato apresentado no desenho abaixo. A curva ABC é um arco de 90º de uma circunferência com 10 metros de raio. O segmento mede 20 metros. Admitindo π = 3,14, podemos concluir que o volume do interior da barraca é de aproximadamente_____m^3:



a) 480 b) 570 c) 618 d) 1140 e) 2880

QUESTÃO 13 — UFPB

Um pedaço de cano de 30 cm de comprimento e 10 cm de diâmetro interno encontra-se na posição vertical e possui a parte inferior vedada. Colocando-se 2 ℓ de água em seu interior, a água:

a) Ultrapassa o meio do cano;
b) Transborda;
c) Não chega ao meio do cano;
d) Enche o cano até a borda;
e) Atinge exatamente o meio do cano.

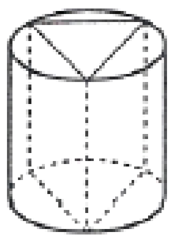
QUESTÃO 14 — UERJ

O líquido contido em uma lata cilíndrica deve ser distribuído em potes também cilíndricos cuja altura é 1/4 da altura da lata e cujo diâmetro da base é 1/3 do diâmetro da base da lata. O número de postes necessários é:

a) 6
b) 12
c) 18
d) 24
e) 36

QUESTÃO 15 — UEAL

A área total do prisma triangular regular inscrito num cilindro circular reto de 10 cm de altura e de 25 π cm^2 de base é:



a) $\frac{375}{2}\,cm^2$

b) $\frac{375\sqrt{3}}{2}\,cm^2$

c) $300\sqrt{3}\,cm^2$

d) $375\sqrt{3}\,cm^2$

e) $675\sqrt{3}\,cm^2$

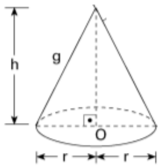
curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

AULA 09 - CONES

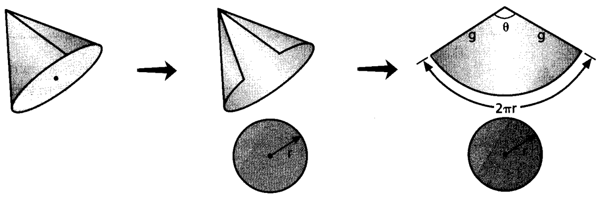
O cone tem um estudo muito parecido com a pirâmide, tanto que a fórmula de seu volume é a mesma. O que vem a diferir a pirâmide do cone é que na pirâmide podemos ter qualquer polígono como base, já no cone temos apenas o círculo.

ELEMENTOS

- g – geratriz
- h – altura
- r – raio
- $g^2 = r^2 + h^2$



FÓRMULAS



$$A_{LAT} = \pi.r.g$$

$$A_{BASE} = \pi.r^2$$

$$A_{TOTAL} = A_{LAT} + A_{BASE}$$

$$Volume = \frac{1}{3} A_{BASE}.(altura)$$

SECÇÃO MERIDIANA

A intersecção de um cone reto com um plano de corte que contém o seu eixo é um **triângulo isósceles** chamado **secção meridiana do cone**. No cone dito equilátero a secção será um triângulo equilátero. Daí teremos g = 2r

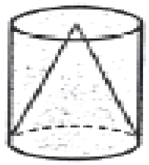
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 ACAFE

O volume de um cone circular reto é de 27π dm^3 e a altura é de 9 dm. O raio da base é:
a) 4dm
b) 9dm
c) 2dm
d) 5dm
e) 3dm

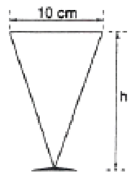
QUESTÃO 02 FUVEST

O volume do cilindro é 7,086 cm^3. O volume do cone é, portanto, em mm^3:
a) 23,62
b) 35,43
c) Impossível calcular por falta de dados
d) 3 543
e) 2 362



QUESTÃO 03 UNIRIO

Uma tulipa de chope tem a forma cônica, como mostra a figura seguir. Sabendo-se que sua capacidade é de 100π mℓ, a altura *h* é igual a:
a) 20 cm
b) 16 cm
c) 12 cm
d) 8 cm
e) 4 cm



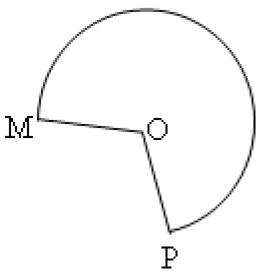
QUESTÃO 04 UFPI

Num cone de revolução, a área da base é 36π m^2 e a área total é 96π m^2. A altura do cone, em m, é igual a:
a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

QUESTÃO 05 UECE

De uma chapa circular de raio 10cm e de centro em O foi retirado o setor circular MOP de 108°, disto resultando a chapa vista na figura. O volume do cone obtido da junção de $\overline{OM}$ com $\overline{OP}$, em cm^3, é:

a) $49\pi\frac{\sqrt{51}}{3}$
b) $48\pi\frac{\sqrt{51}}{3}$
c) $47\pi\frac{\sqrt{51}}{3}$
d) $46\pi\frac{\sqrt{51}}{3}$



Curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

QUESTÃO 06 UECE

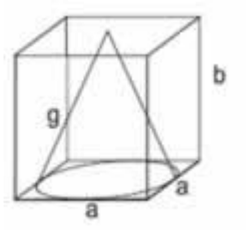
O volume de um cone circular reto cuja medida da altura é 3m e a área de sua superfície lateral é 20π m^2, será em m^3

a) 60π
b) 48π
c) 30π
d) 16π

QUESTÃO 07 AFA

Um cone circular reto está inscrito em um paralelepípedo reto retângulo, de base quadrada, como mostra a figura. A razão entre as dimensões do paralelepípedo é 3/2 (b > a) e o volume do cone é π. Determine o comprimento g da geratriz do cone.

a) $\sqrt{10}$
b) $\sqrt{11}$
c) $\sqrt{12}$
d) $\sqrt{13}$



QUESTÃO 08 AFA

O volume de um cone reto é 1024 π cm³. Se a altura, o raio da base e a geratriz desse cone formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então calcule a medida da geratriz, em centímetros, e assinale o valor obtido no cartão-resposta.

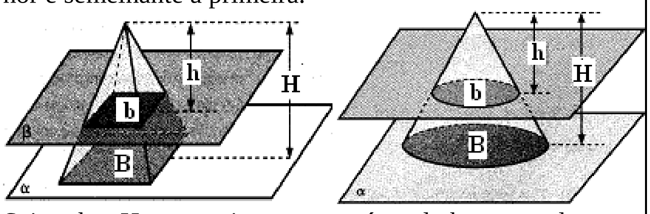
a) 18
b) 19
c) 20
d) 21

AULA 10 - TRONCOS

Antes mesmo de iniciarmos o estudo de troncos de sólidos vamos ver um pouco de sólidos semelhantes. As relações abaixo tanto vale para pirâmide como para cone. Veja:

SÓLIDOS SEMELHANTES

Ao seccionar uma pirâmide por um plano paralelo ao plano da sua base determina-se outra pirâmide, menor e semelhante à primeira.



Sejam h e H, respectivamente, a área da base e a altura do cone; b e B, respectivamente, a área da secção e a distância do corte ao vértice do cone e ainda v e V, respectivamente, volume do solido menor e volume do solido maior. Desta forma, temos:

$$\boxed{\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{b}{B} \quad e \quad \left(\frac{h}{H}\right)^3 = \frac{v}{V}}$$

TRONCOS

Com as relações adquiridas no tópico anterior podemos chegar a conclusão fácil de que

$$\boxed{V_{TRONCO} = V_{MAIOR} - V_{MENOR}}$$

E assim expressão essa equação trabalhada como:

- $$V_{TRONCO} = \frac{h}{3}\left(b + \sqrt{bB} + B\right) \rightarrow \quad Pirâmide$$

- $$V_{TRONCO} = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + rR + R^2\right) \rightarrow \quad Cone$$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 ESPCEX

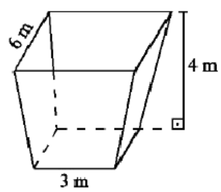
Um trapézio isósceles, cujas bases medem 2 cm e 4 cm e cuja altura é 1 cm, sofre uma rotação de 180° em torno do eixo que passa pelos pontos médios das bases. O volume, em cm^3, do sólido gerado pela rotação é __________ π:

a) 4/3
b) 5/3
c) 2
d) 7/3
e) 8/3

QUESTÃO 02 ESPCEX

Um reservatório com forma de tronco de pirâmide regular, representado pela figura abaixo, com bases quadradas e paralelas, está repleto de água. Deseja-se esvaziá-lo com o auxílio de uma bomba de sucção que retira água com uma vazão constante. A vazão, em litros/segundo, que esta bomba deve ter para que o reservatório seja esvaziado exatamente em 1 hora e 40 minutos é:

a) 20 litros/s
b) 18 litros/s
c) 16 litros/s
d) 14 litros/s
e) 12 litros/s



curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

QUESTÃO 03 **EsSA**

Um cone reto, de altura H e área da base B, é seccionado por um plano paralelo à base. Consequentemente, um novo cone com altura H/3 é formado. Qual a razão entre os volumes do maior e o do menor cone, o de altura H e o de altura H/3?

a) 3
b) 6
c) 9
d) 18
e) 27

QUESTÃO 04 **EsSA**

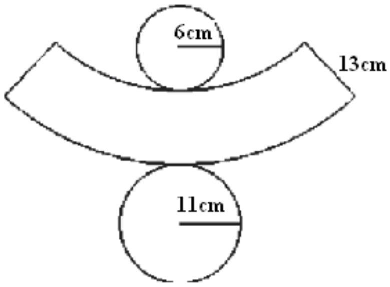
Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone invertido. Esse tanque está completamente cheio com 8dm³ de água e 56dm³ de petróleo. Petróleo e água não se misturam, ficando o petróleo na parte superior do tanque e a água na parte inferior. Sabendo que o tanque tem 12m de profundidade, a altura da camada de petróleo é

a) 10m.
b) 9m.
c) 8m.
d) 7m.
e) 6m.

QUESTÃO 05 **ESPCEX**

A figura abaixo representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz. A medida da altura desse tronco de cone é:

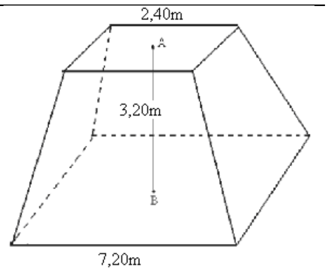
a) 13cm
b) 12cm
c) 11cm
d) 10cm
e) 9cm



QUESTÃO 06 **ESPCEX**

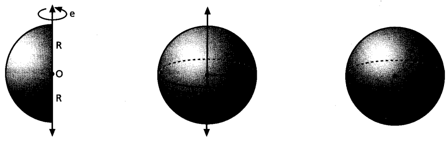
Um reservatório em forma de tronco de pirâmide regular de base quadrada e dimensões indicadas na figura deverá ter suas paredes laterais externas cobertas por uma tinta impermeável, cujo rendimento é de 11m² por galão. O número mínimo de galões que devem ser adquiridos para tal operação é: (Dados: bases: 2,40m e 7,20m / AB = 3,20 m)

a) 6
b) 7
c) 9
d) 10
e) 11



AULA 11 - ESFERA

A esfera é um corpo sólido e maciço. Chama-se esfera ao conjunto de pontos do espaço gerado pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém o seu diâmetro.



Note que o centro e o raio do semicírculo são, também, o centro e o raio da esfera.

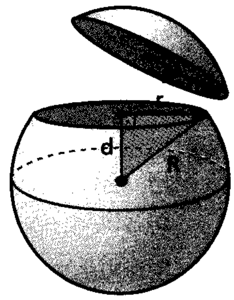
ÁREA E VOLUME

$$Área = 4.\pi.R^2 \qquad Volume = \frac{4}{3}.\pi.R^3$$

SECÇÃO NA ESFERA

A secção plana de uma esfera de raio R é um círculo de raio r (r < R). A secção cujo centro coincide com o centro da esfera chama-se **círculo máximo** ou **secção máxima**. Sendo d a distância da secção ao centro da esfera, segundo Pitágoras, temos:

$$\boxed{d^2 = R^2 + r^2}$$

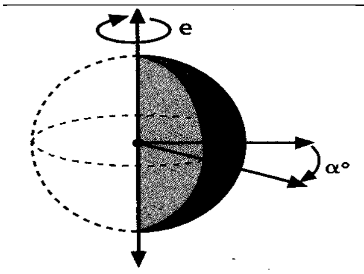


PARTES DA ESFERA

Consideremos um semicírculo de raio R e um eixo de rotação que contém o seu diâmetro. Se esse eixo efetuar um giro de α^0, a reunião dos pontos atingidos pelo semicírculo constitui uma **cunha esférica** de raio **R** e ângulo central α^0. À parte da superfície esférica determinada por uma cunha dá-se o nome de **fuso esférico**.

Note que a **cunha esférica** é uma **parte do volume** da esfera; por outro lado, o **fuso esférico** é uma **parte da superfície esférica**.

Nesse sentido, tanto o volume da cunha como a área do fuso esférico são proporcionais ao ângulo central correspondente. Assim sendo, segue que:



- $A_{FUSO} = \dfrac{\alpha}{360} 4\pi R^2$
- $V_{CUNHA} = \dfrac{\alpha}{360} \dfrac{4}{3} \pi R^3$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 — **UFPI**

Um esfera com área de superfície igual a 36 π m^2 tem volume de:

a) 36 π m^3
b) 52 π m^3
c) 108 m^3
d) 216 π m^3

QUESTÃO 02 — **UECE**

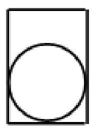
Se uma esfera, cuja medida do volume é $\dfrac{256\pi}{3} m^3$, está circunscrita a um paralelepípedo retângulo, então a medida, em metro, de uma diagonal deste paralelepípedo é

a) 10.
b) 8.
c) 6.
d) 4.

QUESTÃO 03 — **UECE**

Na figura, vista em corte, a esfera de raio r está colocada no interior do cilindro circular reto de altura h e cujo raio da base é também igual a r. O volume interior ao cilindro e exterior à esfera é igual ao volume da esfera quando:

a) h = 2r
b) h = 7r/3
c) h = 3r
d) h = 8r/3



QUESTÃO 04 — **UECE**

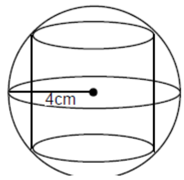
Se a interseção de um plano com uma esfera cujo raio mede 8m é uma circunferência com raio medindo 6m, então a distância entre o centro da circunferência e o centro da esfera é:

a) $2\sqrt{7}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $3\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{3}$

QUESTÃO 05 — **UECE**

Como mostra a figura, o cilindro reto está inscrito na esfera de raio 4cm. Sabe-se que o diâmetro da base e a altura do cilindro possuem a mesma medida. O volume do cilindro é:

a) $18\pi\sqrt{2}cm^3$
b) $24\pi\sqrt{2}cm^3$
c) $32\pi\sqrt{2}cm^3$
d) $36\pi\sqrt{2}cm^3$



QUESTÃO 06 — **UECE**

Uma esfera, com raio medindo 5 cm, está circunscrita a um cilindro circular reto cuja altura mede 8 cm. Chamou-se de X a razão entre o volume da esfera e o volume do cilindro. Dentre as opções abaixo, assinale a que apresenta o valor mais próximo de X.

a) 1,71
b) 1,91
c) 2,31
d) 3,14

QUESTÃO 07

VUNESP Um copinho de sorvete, em forma de cone, tem 10 cm de profundidade, 4 cm de diâmetro no topo e tem aí colocadas duas conchas semi-esféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro. Se o sorvete derreter para dentro do copinho, podemos afirmar que:

a) Não transbordará
b) Transbordará
c) Os dados são insuficientes;
d) Os dados são incompatíveis;

QUESTÃO 08

EFOMM Em um mesmo cubo são inscritas e circunscrita as esferas A e B respectivamente. O raio de A equivale a _____% do raio de B. Adote $\sqrt{3} = 1{,}74$ e assinale alternativa correta.

a) 60
b) 59
c) 58
d) 57
e) 56

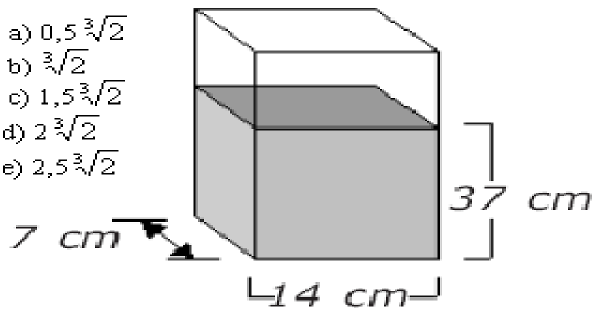
QUESTÃO 09 — **ESPCEX**

Dispondo de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo, com as dimensões da figura, preenchido com água até o nível indicado, um aluno fez o seguinte experimento: (Adote $\pi \cong 3$)

- Mergulhou na água uma esfera, com 1 cm^3.
- Mergulhou sucessivamente, novas esferas cada vez maiores, cujos volumes formam, a partir da esfera de 1 cm^3, uma PA de razão 2 cm^3.

Após mergulhar certo número de esferas, que ficaram completamente submersos, verificou que a altura do nível da água passou para 39 cm. Com base nisso o raio da última esfera colocada é (em cm):

a) $0,5\sqrt[3]{2}$
b) $\sqrt[3]{2}$
c) $1,5\sqrt[3]{2}$
d) $2\sqrt[3]{2}$
e) $2,5\sqrt[3]{2}$



QUESTÃO 10 **FUVEST**

Uma superfície esférica de raio 13cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência, em cm, é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

QUESTÃO 11 **UFRGS**

Se um cone e uma esfera têm o mesmo volume, e o raio da base do cone é o triplo do raio da esfera, então a razão entre o raio da esfera e a altura do cone é:
a) 9/4
b) 9/2
c) 3/4
d) 2/3
e) 1

QUESTÃO 12 **SANTA CASA - SP**

O raio da base de um cone equilátero mede $6\sqrt{3}$ cm. O volume da esfera inscrita nesse cone, em cm^3, é___π:
a) 144
b) 152
c) 192
d) 288
e) 302

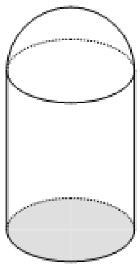
QUESTÃO 13 **UFRGS**

Uma panela cilíndrica de 20 cm de diâmetro está completamente cheia de massa para doce, sem exceder a sua altura, que é de 16cm. O número de doces em formato de bolinhas de 2cm de raio que se podem obter com toda a massa é:
a) 300
b) 250
c) 200
d) 150
e) 100

QUESTÃO 14 **UFC**

Um silo tem a forma de um cilindro circular reto (com fundo) encimado por uma semi-esfera, como na figura abaixo. Determine o volume e a área da superfície deste silo, sabendo-se que o raio do cilindro mede 2m e que a altura do silo mede 8m.

a) $24\pi m^2$
b) $28\pi m^2$
c) $32\pi m^2$
d) $36\pi m^2$
e) $40\pi m^2$

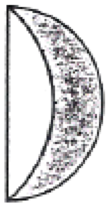


QUESTÃO 15 **UFC**

A soma de todas as arestas de um cubo mede 24 m. O volume da esfera inscrita no cubo é:
a) 2/3 π m^3
b) 3/4 π m^3
c) 1/2 π m^3
d) 3/2 π m^3
e) 4/3 π m^3

QUESTÃO 16 **MACK**

Um laranja pode ser considerada uma esfera de raio R, composta de 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede:
a) $2\pi R^2$
b) $4\pi R^2$
c) (3/4) πR^2
d) $3\pi R^2$
e) (4/3) πR^2



QUESTÃO 17 **UFPA**

Em uma esfera cuja área de sua superfície mede 108m^2, temos um fuso de área 27 m^2. Qual o ângulo do fuso em radianos?
a) $\pi/6$
b) $\pi/3$
c) $2\pi/3$
d) $\pi/2$

QUESTÃO 18 **UERN**

A área de um fuso esférico cujo ângulo mede $\pi/3$ rad, em uma esfera de 12 cm de raio, é:
a) 96π cm^2
b) 69π cm^2
c) 72π cm^2
d) 64π cm^2
e) n.r.a

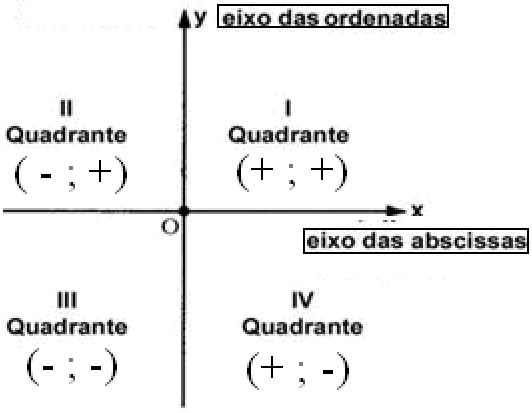
curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

AULA 12 – ESTUDO DO PONTO

O curso de Geometria Analítica é dividido em 4 aulas: estudo do ponto, estudo da reta, estudo da circunferência e estudo das cônicas. Para nosso propósito os tudo das cônicas será abolido, portanto vamos ao que interessa.

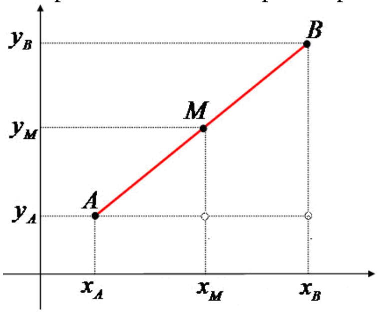
PLANO CARTESIANO

Instrumento de trabalho de Renê Descartes, o plano cartesiano é também conhecido como R^2. São dois eixos ortogonais (perpendiculares) representado por xOy. O Eixo Ox é o eixo das abscissas e o eixo Ou eixo das ordenadas. Existe ainda uma distribuição de quadrantes. Observe a ilustração.



PONTO MÉDIO

O ponto médio é a média aritmética das coordenadas de dois pontos. Pode ser expresso por:

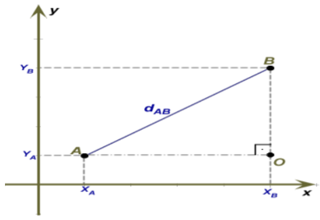


$$\boxed{M = \left(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

<u>Ex</u>: Dadas as coordenadas dos pontos A(4,6) e B(8,10) pertencentes ao segmento AB, determine as coordenadas do ponto médio desse segmento.
Solução.
$x_M = (x_A + x_B) / 2 \rightarrow x_M = (4 + 8) / 2 \rightarrow \underline{x_M = 6}$
$y_M = (yA + yB) / 2 \rightarrow y_M = (6 + 10) / 2 \rightarrow \underline{y_M = 8}$

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Note que o segmento AB é a hipotenusa do triângulo AOB, e a medida de AB corresponde à distância entre esses dois pontos. Por se tratar de um triângulo retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras, no qual teremos:



$$d^2{}_{AB} = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$
com
$$\Delta x = x_A - x_B$$
$$\Delta y = y_A - y_B$$

PONTOS COLINEARES

Chamamos de pontos colineares a condição de alinhamento entre os pontos. Se eles são colineares é por que pertencem a uma mesma reta. Para que 3 pontos sejam colineares deve ser feita a seguinte condição.
Sejam $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$ os três pontos, então o seguinte determinante deve ter valor nulo.

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Apesar de já termos vistos diversos tipos de área de triângulo, nesse capitulo vamos ver o cálculo da área conhecendo as coordenadas de seus vértices. Sejam $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$ os vértices, então:

$$Área = \frac{1}{2}.\left\|\begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix}\right\|$$

MEDIANA

Já estudada em geometria plana, a mediana é uma das cevianas do triângulo. Ela tem a característica de sair de um vértice atingindo o lado oposto a este vértice em seu ponto médio, ou seja seu comprimento é a distancia entre dois pontos sendo um deles o vértice e o outro ponto o ponto médio dos outros dois vértices.

OBS
O encontro das medianas de um triângulo é um ponto chamado baricentro (G). Ele divide a mediana em uma razão de 2:1, sendo então sua distância ao vértice o dobro da distância dele ao lado. Sejam $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$ os vértices, então:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3};\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 **UFMT**

O ponto médio de A = (-4, -π) e B = (-2, 3) pertencem ao:

a) Mesmo quadrante de A
b) Mesmo quadrante de B
c) Semi eixo Ox negativo.
d) Origem do Plano Cartesiano

QUESTÃO 02 **UESE**

O ponto A = (m + 3, n - 1) pertence ao 3º quadrante, para os possíveis valores de m e n:

a) m > 3 e n < 1
b) m < 3 e n > 1
c) m < -3 e n > 1
d) m < -3 e n < -1
e) m < -3 e n < 1

QUESTÃO 03 **MACK**

Num triângulo ABC, sendo A = (4,3), B = (0,3) e C um ponto pertencente ao eixo Ox com AC = BC. O ponto C tem como coordenadas:

a) (2,0)
b) (-2,0)
c) (0,2)
d) (0,-2)
e) (2,-2)

QUESTÃO 04 **UFMG**

Se os pontos P = (1,0) e Q = (2, $\sqrt{5}$) são lados de um quadrado, então a área desse quadrado vale:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8

QUESTÃO 05 **UEAM**

O valor de x para que os pontos A = (x, 5), B = (-2,3) e C = (4,1) sejam alinhados é:

a) 8
b) 6
c) -5
d) -8
e) 7

QUESTÃO 06 **UFRGS**

Os pontos A = (0,0), B = (3,7) e C = (5, -1) são vértices de um triângulo. O comprimento da mediana AM é:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

QUESTÃO 07 **UECE**

O ponto (2,1) é o centro de um quadrado no qual um dos vértices é o ponto (5,5). A soma das coordenadas dos outros 3 vértices deste quadrado é:

a) 12
b) 8
c) 4
d) 2

QUESTÃO 08 **UECE**

Os pontos X, Y, Z, W, distintos e colineares, são tais que Y é o ponto médio do segmento XW e Z é o ponto médio do segmento YW. A razão entre as medidas dos segmentos XY e XZ é:

a) 1/3
b) 2/3
c) 3/4
d) 1/2

QUESTÃO 09 **UECE**

Num sistema ortogonal de eixos, se os pontos (0,0), (1,c) e (x,1) são vértices de um triângulo com área igual a 18,50 u.a., sendo c > 0 e x < 0, então x é igual a:

a) -36/c
b) -18/c
c) -37/c
d) -18,5/c

QUESTÃO 10 **UFC**

Considere o triângulo cujos vértices são os pontos A(2, 0); B(0, 4) e $C(2\sqrt{5},\ 4+\sqrt{5})$. Determine o valor numérico da altura relativa ao lado AB, deste triângulo.

a) 8
b) 7,5
c) 7
d) 6,5
e) 6

QUESTÃO 11 **AFA**

Um quadrado tem um dos seus vértices na origem e o vértice diagonalmente oposto a este é o ponto (cosx; senx). A área desse quadrado vale:

a) 1,0
b) 0,8
c) 0,5
d) 0,2

curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

QUESTÃO 12 **EFOMM**

Um hexágono regular de centro $O\left(\frac{-\sqrt{2}}{3}, \frac{5}{3}\right)$ tem um de seus vértices o ponto $P_4\left(0; \frac{7}{3}\right)$. Assinale a alternativa que corresponde a área e o perímetro, respectivamente deste polígono.

a) $2\sqrt{3}, \quad \sqrt{6}$

b) $\sqrt{6}, \quad 2\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{6}, \quad \sqrt{3}$

d) $\sqrt{3}, \quad 2\sqrt{6}$

QUESTÃO 13 **UFC**

Sejam os pontos P(1, 0) e R(–1, –2) onde Q é seu ponto médio. Então, a distância entre R e R', é:
(admita R' como simétrico de R em relação ao eixo das abscissas)
a) 1,0
b) 1,4
c) 1,6
d) 1,8
e) 2,0

AULA 13 – ESTUDO DA RETA I

Para construção de uma reta são necessários apenas dois pontos distintos. Nessa aula vamos ver como construir uma reta conhecendo:

- Dois pontos
- Um ponto e o coeficiente angular.

EQUAÇÂO DA RETA CONHECIDOS 2 PONTOS

Obtemos a equação da reta através do calculo de um determine da matriz 3x3 que aparece logo abaixo. Atente para condição forçada de alinhamento entre os pontos A(x_A; y_A), B(x_B; y_B) e um ponto genérico (x, y).

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Ax + By + C = 0$$

O resultado Ax + By + C = 0 é o que chamamos de *Equação Geral da Reta*.

ELEMENTOS DA RETA

A reta possui dois elementos fundamentais para sua melhor visualização, porém a reta deve ter em sua equação a incógnita y isolada. Assim sendo sua forma fica:

$$\boxed{y = ax + b}$$

Esta acima é *Equação Reduzida da Reta*.
Onde:
Coeficiente Angular (a): Tangente do ângulo formada entre o a reta e o eixo x no sentido anti-horário.

$$\boxed{a = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Coeficiente Linear (b): Local onde a reta corta o eixo y.

OBS
Se o ângulo formado entre a reta e o eixo x for obtuso, devemos considerar seu suplemento e colocar o sinal de negativo ao calcular a tangente para assim obter Coeficiente Angular

INTERSEÇÃO DE RETAS

O encontro de duas retas gera um ponto e para encontrar esse ponto devemos usar as retas em sua forma reduzida como parcelas de um sistema linear. Ou ainda igualar os "y" de cada uma obtendo assim o par "(x ; y)".

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01

retas 2x – 3y + 6 = 0 e 3x – 2y – 1 = 0 se interceptam no ponto P. A distância de P à origem (0,0), considerando o cm como unidade adotada no sistema cartesiano, é:
a) 3 cm
b) 4 cm
c) 5 cm
d) 6 cm

QUESTÃO 02 **UFC**

A reta 2x + 3y = 5, ao interceptar os dois eixos coordenados, forma com estes um triângulo retângulo. Calcule o valor da hipotenusa deste triângulo.

a) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

b) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

e) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

QUESTÃO 03 UFC

A distância entre o ponto de encontro (interseção) das retas x + y – 2 = 0 e x – y – 4 = 0 e a origem do sistema de coordenadas, (0; 0), é:

a) 3
b)
c) 4
d)
e)

QUESTÃO 04 AFA

A reta 3/5.x - 4/7.y + 1 = 0 admite “a” como coeficiente angular, desta forma o ângulo α de inclinação da reta...

a) $0 < \alpha < 30º$
b) $30º < \alpha < 45º$
c) $45º < \alpha < 60º$
d) $60º < \alpha < 90º$

QUESTÃO 05 MACK

O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A = (-1,2) e B = (3,6) é:

a) -1
b) 1/2
c) 2/3
d) 3
e) 1

QUESTÃO 06 UELO

equação da reta que passa pelos pontos (2, -3) e (8, 1) é:

a) 2x – 3y – 13 = 0
b) -2x – 3y + 13 = 0
c) 3x – 2y + 13 = 0
d) 2x – 3y + 13 = 0
e) 2x + 3y – 13 = 0

QUESTÃO 07 UFMG

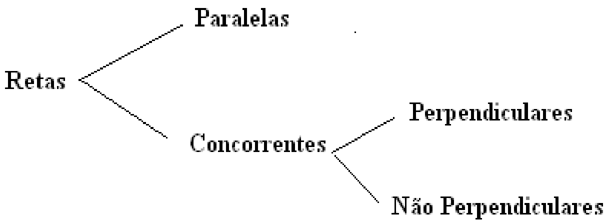
O ponto de interseção das retas x + 2y = 3 e 2x + 3y – 5 = 0 é:

a) (1,-1)
b) (1,1)
c) (1,2)
d) (-1,1)
e) (2,1)

AULA 14 - ESTUDO DA RETA II

Vamos ver as possíveis posições que duas retas podem ter em relação a outra. Para esse estudo, o ideal é que as retas tenham sua equação na forma reduzida, ou seja: y = ax + b.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS



Paralelas – Não possui ponto em comum e seus coeficientes angulares são iguais. $(a_r = a_s)$

Concorrente – Possui um único ponto em comum e o produto de seus coeficientes angulares vale -1. $(a_r.a_s = -1)$

OBS

Existe o caso em que as retas não são paralelas nem concorrentes, são as chamadas ***retas reversas***. Elas devem estar obrigatoriamente em planos distintos

Quando concorrentes e não perpendiculares, o ângulo θ formado entre estas retas pode ser encontrado por:

$$tg\theta = \left| \frac{a_s - a_r}{1 + a_s.a_r} \right|$$

EQUAÇÃO DA RETA

A equação da reta pode ser obtida conhecido o coeficiente angular e um ponto. Usamos a fóirmula conhecida como “yô – yô – m – x – xô”. A equação da reta então fica:

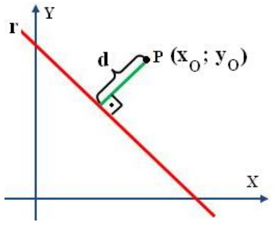
$$\boxed{y - y_o = m(x - x_o)}$$

Onde (x_O; y_O) é o ponto conhecido e *m* é o coeficiente angular. Ficando assim apenas x e y como variáveis na equação.

DISTÂNCIA DE PONTO A RETA

A distância de ponto conhecido (x_O; y_O) a reta fica mais fácil de calcular se a reta estiver na sua forma geral (r: Ax + bY + C = 0). O calculo é dado por:

$$d_{p,r} = \frac{|A.x_O + B.y_O + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 — **UECE**

A equação da reta que contém o ponto (1,2) e é perpendicular à reta 2x – y + 1 = 0 é:
a) x + 2y – 5 = 0
b) x + y – 3 = 0
c) 2x + y – 4 = 0
d) x + 3y – 7 = 0

QUESTÃO 02 — **UECE**

Se r é a reta cuja equação é 2x – y + 1 = 0 e s é uma reta perpendicular a r e que contém o ponto (1,2), então a equação de s é:
a) x + 2y – 5 = 0
b) x + y – 3 = 0
c) 2x + y – 4 = 0
d) x + 3y – 7 = 0

QUESTÃO 03 — **UECE**

As coordenadas do ponto P(x,y), no referencial cartesiano usual, satisfazem as equações $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}-1=0$ e $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=0$. A distância de P a reta x + y + 1 = 0 é, em u.c:
a) $\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{2}$
c) $\sqrt{2}/3$
d) $\sqrt{2}/4$

QUESTÃO 04 — **UFSM**

Sejam r: x + qy - 1 = 0 e s: px + 5y + 2 = 0 duas retas perpendiculares entre si. Então, é correto afirmar que:
a) p/q = -5
b) p/q = 5
c) p/q = 1
d) p . q = -1
e) p . q = 5

QUESTÃO 05 — **UFPI**

A medida do ângulo agudo formado pelas retas 3x + y - 10 = 0 e -2x + y -15 = 0 é:
a) 15°
b) 30°
c) 45°
d) 60°
e) 75°

QUESTÃO 06 — **UPF**

A equação geral da reta que passa por P(1, 2), e tem inclinação 135o é:
a) x + y + 3 = 0.
b) x – y = 0.
c) x + y = 0.
d) x + y – 3 = 0.
e) x – y + 3 = 0.

QUESTÃO 07 — **UFPA**

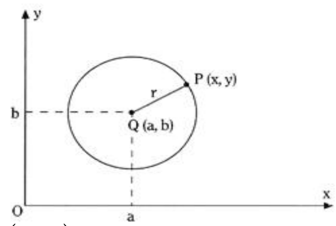
A soma dos possíveis valores de k, para que a distância do ponto P(3, 4) à reta (r): 4x – 3y + k = 0 seja igual a 1, é:
a) – 5.
b) – 1.
c) 2.
d) 0.
e) 5

AULA 15 - ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

É o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto C é igual a r. O ponto C é chamado centro da circunferência e o segmento de reta que liga um ponto qualquer dela ao centro é chamado raio da circunferência. Assim, r é a medida desse segmento.

EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Seja uma circunferência com centro no ponto Q (a, b) e raio r; temos o ponto P (x, y) pertencente à circunferência se, e somente se:



$$(d_{QP})^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$d_{QP} = r \quad \Delta x = (x-a) \quad \Delta y = (y-b)$$

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

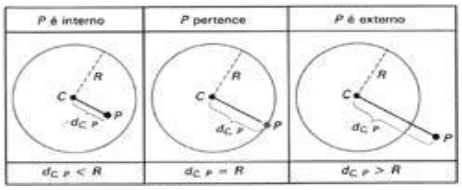
Se trabalharmos essa equação chegamos a equação geral:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + (a^2 + b^2 - r^2) = 0}$$

curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

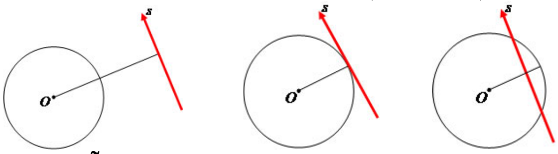
POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

Quando temos um ponto P (x,y) e uma circunferência C de centro (a,b) e raio r, as possíveis posições relativas de P e C são:



POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

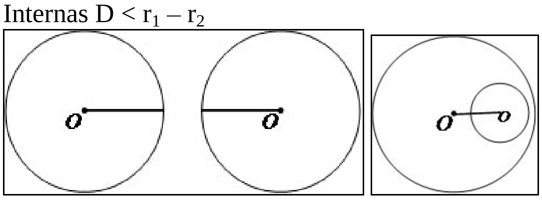
- Reta externa à circunferência (d_{PO} > raio)
- Tangente à circunferência (d_{PO} = raio)
- Secante à circunferência (d_{PO} < raio)



POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE CIRCUNFERÊNCIAS

Não possuem pontos em comum

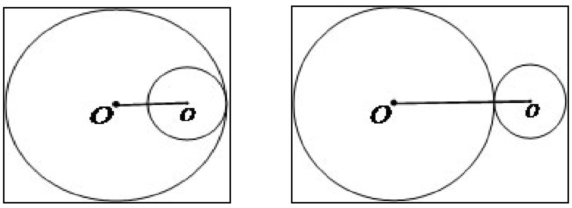
Externas $D > r_1 + r_2$
Internas $D < r_1 - r_2$



Possuem um ponto em comum

Tangentes: as circunferências possuem um ponto em comum.

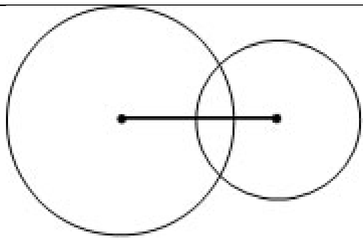
Tangentes internas: $D = r_1 - r_2$
Tangentes externas: $D = r_1 + r_2$



Possuem dois pontos em comum

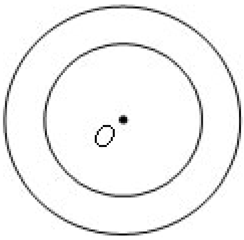
Secante: possuem dois pontos em comum.

$r_1 - r_2 < D < r_1 + r_2$



Circunferências concêntricas

São circunferências que possuem o mesmo centro, não existindo distância entre eles. D = 0



EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 — **UFV MG**

Considere a circunferência C dada pela equação $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$. O raio desta circunferência é:
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6

QUESTÃO 02 — **UNIMONTES MG**

A equação $2x^2 + 2y^2 -12x + 8y - 6 = 0$ é de uma circunferência
a) de centro (−3, 2) e raio 4.
b) de centro (−3, −2) e raio 16.
c) de centro (3, −2) e raio 4.
d) de centro (3, 2) e raio 2.

QUESTÃO 03 — **UNESP**

A distância do centro da circunferência $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 2 = 0$
à origem é:
a) 3
b) $\sqrt{5}$
c) $\sqrt{3}$
d) $\sqrt{2}$
e) 1

QUESTÃO 04 **UECE**

Num sistema cartesiano utilizado no plano, o ponto P é a interseção das retas $2x – y – 7 = 0$ e $x – 2y + 7 = 0$, o ponto Q é o centro da circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ e r é o raio dessa circunferência. A distância entre os pontos P e Q é igual a:

a) 2r
b) 3r
c) 4r
d) 5r

QUESTÃO 05 **UECE**

O ponto P, que é o centro da circunferência $x^2 + y^2 – 6x – 8y = 0$, pertence à reta cuja equação é $x – 2y + c = 0$. O valor de c é:

a) 3
b) 5
c) 7
d) 9

QUESTÃO 06 **UECEA**

equação da circunferência cujo centro é o ponto (5,1) e que é tangente à reta $4x - 3y – 2 = 0$, é

a) $x^2 + y^2 + 10x + 2y + 26 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 2x + 10y - 26 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 17 = 0$

QUESTÃO 07 **UECE**

As circunferências C_1 e C_2 são as duas circunferências no primeiro quadrante que são tangentes aos eixos coordenados e à reta $x + y - 3 = 0$. A distância entre os centros de C_1 e C_2, em unidades de comprimento (u.c.), é:

a) 3 u.c.
b) 6 u.c.
c) 9 u.c.
d) 12 u.c.

QUESTÃO 08 **UECE**

O comprimento da corda determinada pela reta $x + 7y – 50 = 0$ na circunferência $x^2 + y^2 – 100 = 0$ é, em u.c:

a) $2\sqrt{5}$
b) $5\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{10}$
d) $10\sqrt{2}$

QUESTÃO 09 **UECE**

O centro da circunferência $x^2 + 2x + y^2 = 1$ pertence à reta r e esta reta é perpendicular à reta $x + y = 8$. Um ponto pertencente à reta r é o ponto

a) (3, 5).
b) (2, 4).
c) (3, 4).
d) (5, -5).

QUESTÃO 10 **EsSA**

A reta $y = mx+2$ é tangente à circunferência de equação $(x-4)^2 + y^2 = 4$. A soma dos possíveis valores de m é

a) 0.
b) 4/3 .
c) - 4/3 .
d) - 3/4 .
e) 2.

QUESTÃO 11 **. EsSA**

As equações $(x + 1)^2 + (y – 4)^2 = 64$ e $(x – 4)^2 + (y + 8)^2 = 25$ representam duas circunferências cuja posição relativa no plano permite afirmar que são:

a) interiores (sem ponto de intersecção).
b) tangentes interiores.
c) secantes.
d) tangentes exteriores.
e) exteriores (sem ponto de intersecção).

QUESTÃO 12 **UECE**

O ponto P = (x,y), cujas coordenadas x e y são números inteiros positivos, está sobre a circunferência cujo centro é a origem do sistema de coordenadas e o raio mede 10 m. O valor de x/y + y/x é:

a) 25/12
b) 16/15
c) 49/25
d) 15/12

QUESTÃO 13 **PUC RS**

A equação da reta que passa pelos centros das circunferências $x^2 + y^2 – 4x = 0$ e $x^2 + y^2 – 6y = 0$ é:

a) $2x – 3y + 6 = 0$.
b) $3x + 2y – 6 = 0$.
c) $3x + y – 6 = 0$.
d) $2x – y + 6 = 0$
e) $x – 3y + 6 = 0$

QUESTÃO 14 **UFV MG**

O valor de k que transforma a equação $x^2 + y^2 – 8x + 10y + k = 0$ na equação de uma circunferência de raio 7 é:

a) – 4.
b) – 8.
c) 5.
d) 7.
e) – 5

AGORA, ALUNO, VÁ À LUTA!!!

curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br