

1. Referencial

Para descrevermos o estado de repouso e movimento de um ponto material, sua trajetória ou seu deslocamento, precisamos de um corpo, ou conjunto de corpos, que tomaremos como referência para determinar as posições do ponto material. Este corpo é denominado referencial.

Os conceitos de movimento e repouso não são absolutos, mas sim relativos, já que dependem do referencial adotado. Um corpo estará em repouso quando sua posição não se alterar em relação a um referencial com o decorrer do tempo. Caso ocorra alteração, dizemos que o corpo está em movimento.

Importante: A escolha de um referencial é uma tarefa muito importante na resolução de um problema, principalmente quando se faz conta. Deve-se ter em mente que, a partir da escolha do referencial, a descrição do movimento dos corpos que participam do fenômeno passa a ser feita em relação a este referencial e só em relação a ele. Isso é muito importante, pois, se não obedecido, pode levar seus cálculos a conclusões erradas.

1.1. Classificação do referencial

1.1.1 Referencial inercial

Um referencial inercial é todo aquele que torna válida a lei da inércia, ou seja, é qualquer sistema de referência que permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

1.1.2 Referencial não inercial

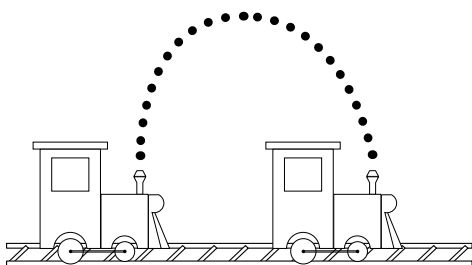
Um referencial não inercial é todo aquele que apresenta aceleração em relação a um referencial inercial. Por esse motivo, os referenciais não inerciais são também conhecidos como referenciais acelerados.

Quando a situação não especificar o referencial a ser utilizado, considere sempre a Terra ou o solo. Por exemplo: se em uma situação genérica for feita uma afirmação do tipo “um corpo se movimenta com velocidade de 80 km/h”, assumamos que essa velocidade é medida em relação à Terra ou ao solo.

2. Trajetória

A trajetória de um móvel corresponde à linha imaginária obtida ao serem ligadas as posições ocupadas pelo móvel em instantes sucessivos durante seu movimento.

Por exemplo: quando uma bola é lançada verticalmente para cima, de um tremzinho que se move com velocidade horizontal constante, a trajetória para um referencial parado fora do tremzinho é uma curva (vamos estudar nos próximos módulos que se trata de uma parábola).



Entretanto, se considerarmos o tremzinho como referencial, a trajetória é uma reta orientada pra cima na subida e uma reta orientada pra baixo na descida.

Conclusão: a forma dessa linha imaginária (trajetória) depende do referencial adotado para sua observação. Portanto, referenciais diferentes podem observar trajetórias diferentes.

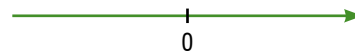
3. Posição, deslocamento e distância percorrida

Unidade no SI: metro; abreviação: m

Outras unidades comuns: centímetro (cm), milímetro (mm), quilômetro (km)

3.1 Posição escalar (s)

Por definição, posição é o número associado ao ponto da trajetória ocupado por um móvel em determinado instante, de acordo com algum referencial. No caso da cinemática escalar, utilizaremos como referencial uma reta orientada e como origem das posições um ponto qualquer dessa mesma reta (em geral, associa-se a letra “O” para a origem).



Assim, para determinarmos o módulo da posição de um móvel, mediremos a distância desse ponto à origem adotada. Atenção para o sinal! Se o móvel estiver a favor do referencial, usaremos o sinal positivo. Se estiver contra, negativo.

3.2 Deslocamento escalar (Δs)

Considerando um móvel qualquer em movimento em relação a um referencial inercial, por definição, seu deslocamento escalar (Δs), num intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, é dado pela diferença entre as posições nesses respectivos intervalos de tempo.

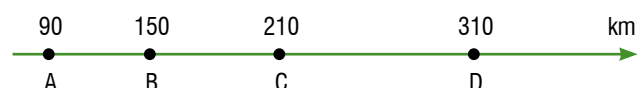
Chamando a posição inicial e final, respectivamente, de s_0 e s , teremos:

$$\Delta s = s - s_0$$

3.3 Distância percorrida (d)

Não podemos confundir o conceito de deslocamento escalar (Δs) com o conceito de distância percorrida (em geral, representada pela letra “d”). Distância percorrida é uma grandeza de utilidade prática que informa quanto a partícula efetivamente percorreu entre dois instantes, devendo ser calculada sempre em módulo, portanto.

Para entender a diferença, considere a figura a seguir:



Note que, por exemplo, a posição de um móvel que passa pelo ponto A é $s = +90$ km. Isso acontece porque o ponto A dista 90 km da origem adotada e está no sentido positivo do referencial adotado (para a direita).

Um móvel (que anda sempre sobre o segmento orientado representado na figura), situado inicialmente em B, se desloca para o ponto A e, a seguir, para o ponto D. O deslocamento escalar no primeiro trajeto é de $\Delta s = s - s_0 = +90 - (+150) = -60$ km (negativo, pois está contra o referencial). No segundo

trajecto, o deslocamento escalar é $\Delta s = s - s_0 = + 310 - (+ 90) = + 220$ km (positivo, pois está a favor do referencial).

Note que, embora o deslocamento escalar do referido móvel de B até D seja $\Delta s_{\text{total}} = \Delta s_1 - \Delta s_2 = - 60 + 220 = + 160$ km, a distância percorrida entre o começo e o fim do deslocamento é de 280 km (60 km de B até A e 220 km de A até D).

Matematicamente, podemos dizer que a distância percorrida pode ser obtida através das somas dos deslocamentos escalares parciais.

$$d = \sum |\Delta S|$$

No exemplo, tem-se $d = |\Delta s_1| + |\Delta s_2| = |- 60| + |220| = 280$ km.

Dica: se um problema perguntar qual a distância percorrida por um móvel, deve-se seguir o seguinte passo a passo:

- I. Encontrar os instantes em que o móvel troca o sentido do movimento. Para isso, basta descobrir os pontos em que a velocidade é igual a zero.
- II. Calcular os deslocamentos parciais em cada um dos intervalos de tempo limitados pelos instantes encontrados (assim, você garante que está olhando para um deslocamento em um único sentido).
- III. Somar os módulos dos deslocamentos encontrados.

4. Velocidade escalar média

Unidade no SI: metro/segundo; abreviação: m/s

Outras unidades comuns: cm/s, mm/s, quilômetro por hora (km/h)

Conceitualmente, a velocidade escalar de um corpo mede a rapidez com que esse corpo muda de posição.

Embora a velocidade seja uma grandeza vetorial (precisa de módulo, direção e sentido para ser compreendida), por enquanto, iremos abordar seu comportamento escalar, ou seja, vamos nos preocupar somente com o seu módulo. Por este motivo, na cinemática escalar, estudaremos basicamente trajetórias retilíneas.

Por definição, a velocidade escalar média de um corpo em um trecho de um percurso é a razão entre seu deslocamento escalar nesse intervalo de tempo e o respectivo intervalo de tempo.

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

Importante: a velocidade média não é a média das velocidades! Os exemplos abaixo mostrarão a importância de usar o conceito correto de velocidade média para não cair em armadilhas.

Exemplo 1: Um móvel se desloca em uma trajetória retilínea AB. Na primeira metade do percurso, sua velocidade possui módulo v_1 e na, segunda metade, módulo v_2 . Determine a velocidade média em todo o trajecto AB.

Solução:

Por conveniência chamaremos a distância entre os pontos A e B de “2d”, o tempo na primeira metade do percurso de t_1 e na segunda metade de t_2 .

Usaremos também que $V = \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta S}{V}$. Em problemas como este, a ideia é escrever a expressão da velocidade média para o percurso todo e, só depois, substituir as variáveis que não foram dadas usando alguma informação da questão.

Dessa forma, a velocidade média em todo o trajecto AB é:

$$V_m = \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2d}{d \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)} = \frac{2v_1 \cdot v_2}{(v_1 + v_2)} = \frac{1}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

Note que, quando o trajecto é dividido em partes iguais, a velocidade média total é a média harmônica das velocidades em cada trecho (e não a média aritmética!). Para quem não se lembra, média harmônica é o inverso da média aritmética dos inversos.

Exemplo 2:

Um móvel se desloca em uma trajetória retilínea ABC de modo que, na primeira parte do parte do percurso (AB), sua velocidade é v_1 e, na segunda parte (BC), sua velocidade é v_2 . Sabendo que o intervalo de tempo nas duas partes do percurso é o mesmo, determine a velocidade média em todo o percurso.

Solução:

Por conveniência, chamaremos o tempo em cada parte do percurso de t .

Usaremos também que $V = \frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow \Delta S = v \cdot \Delta t$. Dessa forma, a velocidade média em todo o trajecto AC é:

$$V_m = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 \cdot t + v_2 \cdot t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

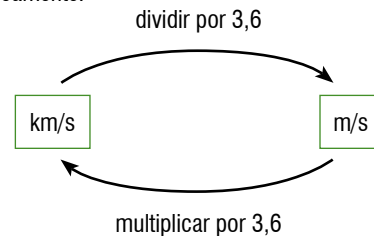
Note que, quando o trajecto é dividido em tempos iguais, a velocidade média em todo o percurso é a média aritmética das velocidades em cada trecho.

4.1 Conversão de unidades

No S.I. a unidade de velocidade é o m/s, muito embora a unidade mais utilizada seja o km/h.

Para convertermos os valores dados de um sistema de unidades para outro, deve-se partir da unidade original e substituir as unidades originais pelas unidades a que se quer chegar: $1 \frac{km}{h} = \frac{1000 m}{3600 s} = \frac{1}{3,6} \frac{m}{s}$. Portanto, para passarmos de m/s para km/h, basta multiplicar por 3,6 o valor da velocidade em m/s. De maneira análoga, para passarmos de km/h para m/s, dividimos o valor em km/h por 3,6.

Esquematicamente:



Repare que o método utilizado acima pode ser utilizado para transformar quaisquer unidades de velocidade. Por exemplo: se quisermos converter 3 dam/min em m/s (repare que dam/min é uma unidade extremamente incomum), devemos proceder da seguinte forma:

$$3 \frac{dam}{min} = \frac{3 dam}{1 min} = \frac{30 m}{60 s} = 0,5 \frac{m}{s}$$

5. Velocidade escalar instantânea

Unidade no SI: metro/segundo; abreviação: m/s

Outras unidades comuns: cm/s, mm/s, quilômetro por hora (km/h)

Conceitualmente, velocidade instantânea é a velocidade em um instante específico do movimento. Como a velocidade é a razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo, temos que, se calcularmos a velocidade média para intervalos de tempo cada vez menores, (intervalos muito próximos de zero), tenderemos a chegar à velocidade naquele exato momento.

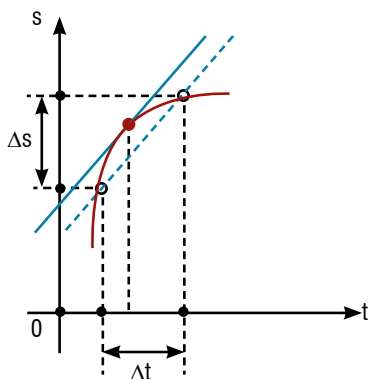
Para entender melhor esse conceito, vamos a um exemplo numérico: considere um móvel que se move em trajetória retilínea segundo a equação $s(t) = t^2 - 4t + 2$, em que s está em metros e t , em segundos. Esta é uma equação do tipo equação horária da posição, já que informa a posição do móvel em função do tempo.

Para calcular a velocidade instantânea desse móvel no instante $t = 3$ s, vamos calcular velocidades médias fazendo o intervalo de tempo tender a um valor cada vez mais próximo zero.

- I. tempo de $t = 0$ s a $t = 7$ s. Nesses instantes, temos que as posições são respectivamente iguais a $s(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2$ m e $s(7) = 7^2 - 4 \cdot 7 + 2 = 23$ m. Logo, a velocidade média é dada por $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{23 - 2}{7 - 0} = 3$ m/s.
- II. tempo de $t = 1,5$ s a $t = 5$ s. Analogamente, teremos que a velocidade média é 2,5 m/s.
- III. tempo de $t = 2,8$ s a $t = 3,1$ s. Analogamente, teremos que a velocidade média é 1,9 m/s.

Note que, quanto menor o intervalo de tempo considerado e quanto mais próximo do instante $t = 3$ s, a velocidade média calculada se aproximará da velocidade instantânea em $t = 3$ s.

É extremamente importante também entender o argumento gráfico. Vamos a ele. A curva vermelha representa também a posição de um móvel qualquer em relação ao tempo.



Se quisermos calcular a velocidade média entre os instantes representados pelos pontos brancos, basta dividir o Δs representando no eixo das ordenadas pelo Δt representado no eixo das abscissas.

Repare que, se o intervalo de tempo tender a zero, os dois pontos tendem a um só (ponto vermelho). Nesse caso, a velocidade média calculada vai se aproximar da velocidade instantânea naquele ponto.

Gráficamente, ao dividirmos Δs por Δt quando Δt tende a zero, acabamos descobrindo a tangente do ângulo formado entre o eixo das abscissas e a reta que tangencia a curva vermelha, passando pelo ponto vermelho.

Conclusão: a velocidade instantânea de um móvel pode ser obtida calculando o coeficiente angular da reta tangente ao ponto considerado em um gráfico $s \times t$. Portanto:

- I. Quanto mais inclinado for o gráfico, maior o módulo da velocidade instantânea naquele ponto. Quanto menos inclinado, menor o módulo da velocidade.
- II. Se a reta tangente for horizontal (vértices), a inclinação é zero e, portanto, a velocidade é zero. O móvel troca de sentido.

Matematicamente, a velocidade instantânea é o limite da velocidade média quando o intervalo de tempo tende a zero (o conceito explicado acima é exatamente o conceito de derivada). Ou, em outras palavras, é a derivada de primeira ordem da posição em relação ao tempo ou a taxa de variação da posição em relação ao tempo.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

6. Aceleração escalar média

Unidade no SI: metro/(segundo)²; abreviação: m/s²

Outras unidades comuns: km/h²

Conceitualmente, a aceleração escalar de um corpo mede a rapidez com que o valor da velocidade muda, independentemente dessa velocidade aumentar ou diminuir.

Atenção para a diferença entre os conceitos!!! Velocidade mede a taxa da variação da posição em relação ao tempo. Aceleração mede a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo.

Um carro de fórmula 1, por exemplo, atinge altas velocidades em trajetórias retilíneas. Entretanto, se ele mantiver a velocidade constante, não vai haver variação da velocidade. Por esse motivo, a aceleração seria igual a zero.

Um elevador parado, por exemplo, tem velocidade igual a zero (já que sua posição não está mudando). Entretanto, imediatamente antes de começar a subir, ele possui aceleração maior que zero, já que sua velocidade vai variar logo depois.

Por definição, a aceleração escalar média de um corpo em um dado trecho de um percurso é a razão entre a variação de velocidade escalar nesse intervalo e o respectivo intervalo de tempo.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

A unidade no SI da aceleração escalar média é m/s². Assim sendo, dizer que um corpo possui uma aceleração de 3 m/s², por exemplo, significa dizer que sua velocidade aumenta 3 m/s a cada segundo. Vale destacar que, embora seja a unidade mais usada o m/s², ela não é a única. Qualquer unidade de variação de velocidade sobre qualquer unidade de tempo nos dará uma unidade de aceleração.

7. Aceleração escalar instantânea

Unidade no SI: metro/(segundo)²; abreviação: m/s²

Outras unidades comuns: km/h²

Para obtermos a aceleração de um móvel em um instante específico, devemos calcular a aceleração instantânea. Seguindo a mesma ideia de velocidade instantânea, podemos dizer que a aceleração instantânea é a aceleração de um móvel em um ponto específico da trajetória.

Matematicamente, a aceleração instantânea é o limite da aceleração média quando o intervalo de tempo tende a zero. Em outras palavras, é a derivada de primeira ordem da velocidade em relação ao tempo (ou a derivada de segunda ordem da posição em relação ao tempo) ou a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

8. Classificação dos movimentos

8.1 Quanto ao sentido do deslocamento

8.1.1 Progressivo

(condição necessária e suficiente: $v > 0$)

O móvel desloca-se no sentido definido como positivo da trajetória. (A posição escalar do móvel é crescente com o tempo). Nesse caso, o deslocamento escalar é positivo e, portanto, a velocidade também é positiva.

8.1.2 Retrógrado

(condição necessária e suficiente: $v < 0$)

O móvel desloca-se no sentido definido como negativo da trajetória. (A posição escalar do móvel é decrescente com o tempo). Nesse caso, o deslocamento escalar é negativo e, portanto, a velocidade também é negativa.

8.1.3 Repouso

(condição necessária e suficiente: $v = 0$)

Um móvel está em repouso quando sua posição não se altera com o passar do tempo para um determinado referencial. Nesse caso, a sua velocidade é nula.

8.2 Quanto à variação de velocidade

8.2.1 Uniforme

(condição necessária e suficiente: $a = 0$)

O módulo da velocidade do móvel não varia ao longo do tempo.

8.2.2 Acelerado

(condição necessária e suficiente: $a \cdot v > 0$)

O módulo da velocidade aumenta ao longo do tempo. Isso só ocorre quando a aceleração e a velocidade possuem o mesmo sinal para um dado referencial.

8.2.3 Retardado

(condição necessária e suficiente: $a \cdot v < 0$)

O módulo da velocidade diminui ao longo do tempo. Isso só ocorre quando a aceleração e a velocidade possuem os sinais contrários para um dado referencial.

	repouso	progressivo	retrógrado
uniforme	$v = 0$ $a = 0$	$v: +$ $a = 0$	$v: -$ $a = 0$
acelerado	–	$v: +$ $a: +$	$v: -$ $a: -$
retardado	–	$v: +$ $a: -$	$v: -$ $a: +$

9. Derivadas de polinômios

Podemos encontrar velocidade e aceleração instantâneas se soubermos a equação horária da posição de um móvel. Para isso, usaremos as ideias de derivada abordadas neste módulo.

A seguir, encontra-se a regra prática para derivadas de polinômios, tipo de equação mais encontrada em nosso curso para a descrição de movimentos.

Basicamente, a regra a ser usada para derivar qualquer parcela de um polinômio é $\frac{d}{dt}(at^n) = a \cdot n \cdot t^{n-1}$. Importante saber que a derivada de um polinômio é a soma das derivadas de cada termo.

Daí, se a equação da posição é dada por: $S = a_1 t^n + a_2 t^{n-1} + \dots + a_n t + a_{n+1}$, então as funções horárias da velocidade e da aceleração serão dadas por:

$$v = \frac{ds}{dt} = a_1 n t^{n-1} + a_2 (n-1) t^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot 2t + a_n + 0$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = a_1 \cdot n \cdot (n-1) t^{n-2} + a_2 (n-1) \cdot (n-2) t^{n-3} + \dots + 2a_{n-1} + 0$$

Exemplo: Um corpo se move segundo a equação $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t + 1$, com s em metros e t em segundos. Para esse corpo calcule:

- (A) a velocidade em um instante genérico t
- (B) a aceleração em um instante genérico t
- (C) a velocidade em $t = 4$ s
- (D) a aceleração em $t = 6$ s
- (E) os instantes para os quais o móvel troca de sentido.
- (F) a velocidade média entre 2s e 4s.
- (G) a distância percorrida entre 2s e 4s.
- (H) os instantes para os quais o movimento é retrógrado.
- (I) os instantes para os quais o movimento é acelerado.

Solução:

(A) $v = \frac{ds}{dt} = 3 \cdot \frac{t^2}{3} - 2 \cdot \frac{5t}{2} + 6 + 0 \rightarrow v(t) = t^2 - 5t + 6$

(B) $a = \frac{dv}{dt} = 2 \cdot t - 5 \cdot 1 + 0 \rightarrow a(t) = 2t - 5$

(C) $v(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2$ m/s

(D) $a(6) = 2 \cdot 6 - 5 = 7$ m/s²

(E) trocar de sentido: $v = 0 \rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = 2$ s ou $t = 3$ s.

(F)
$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{\frac{4^3}{3} - \frac{5 \cdot 4^2}{2} + 6 \cdot 4 + 1 - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{5 \cdot 2^2}{2} + 6 \cdot 2 + 1 \right)}{4 - 2} = \frac{1}{3} \text{ m/s}$$

(G) como o móvel troca de sentido em $t = 3$ s,

$$d = |\Delta S_{2a3s}| + |\Delta S_{3a4s}| = \left| \left(\frac{3^3}{3} - \frac{5 \cdot 3^2}{2} + 6 \cdot 3 + 1 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{5 \cdot 2^2}{2} + 6 \cdot 2 + 1 \right) \right| + \left| \left(\frac{4^3}{3} - \frac{5 \cdot 4^2}{2} + 6 \cdot 4 + 1 \right) - \left(\frac{3^3}{3} - \frac{5 \cdot 3^2}{2} + 6 \cdot 3 + 1 \right) \right| = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1 \text{ m.}$$

(H) retrógrado: $v < 0 \rightarrow t^2 - 5t + 6 < 0 \rightarrow 2s < t < 3s$.

(F) acelerado: $a \cdot v > 0 \rightarrow (2t - 5) \cdot (t^2 - 5t + 6) > 0 \rightarrow (2t - 5) \cdot (t - 2) \cdot (t - 3) > 0 \rightarrow 2s < t < 2,5 \text{ s ou } t > 3s$.

10. Movimento retilíneo uniforme (MRU)

O movimento retilíneo uniforme é aquele no qual a velocidade escalar instantânea é constante, e não nula, para qualquer instante considerado por um corpo que descreve trajetória retilínea. Nesse tipo de movimento a velocidade média em qualquer trecho é igual à velocidade instantânea em qualquer ponto do percurso.

Convém destacar que, no caso do movimento retilíneo uniforme, podemos dizer que, em intervalos de tempos iguais, o móvel sofre deslocamentos iguais.

10.1 Função horária de posição

A função horária de posição é uma equação que mostra a posição de um corpo em função de cada instante.

$$v = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow v = \frac{s - s_0}{t - t_0} \rightarrow v(t - t_0) = s - s_0 \rightarrow s = s_0 + v(t - t_0)$$

Fazendo $t_0 = 0$ chegamos à equação horária de posição no MRU:

$$s(t) = s_0 + v \cdot t$$

Exemplo: Considere dois móveis, A e B, que se movimentam, sob uma estrada retilínea, em sentidos contrários e que no instante $t = 0$ distam 1400 metros entre si. As velocidades dos móveis A e B possuem módulos respectivamente iguais a 40 m/s e 30 m/s. Determine o instante em que os móveis se encontram e a que distância da posição inicial do móvel A isso ocorreu.

Solução:

Fazendo um sistema de referencial positivo no sentido $A \rightarrow B$ e com origem em A, teremos que as funções horárias serão:

$$S_A = 0 + 40t \rightarrow S_A = 40t \text{ e } S_B = 1400 - 30t$$

Em problemas que pedem encontro, uma ideia muito boa é encontrar as equações horárias de cada móvel e igualar suas posições (para que haja encontro, as posições precisam ser iguais).

$$\text{Daí, } S_A = S_B. \text{ Então } 40t = 1400 - 30t \rightarrow 70t = 1400 \rightarrow t = 20\text{s}$$

Para determinar a posição de encontro, substituiremos esse valor em uma das equações:

$$S_A = 40t = 40 \cdot 20 = 800 \text{ m}$$

Atenção!

Note que chegamos a essa equação fazendo $t_0 = 0$. Porém em alguns problemas um dos móveis sai com um atraso de " Δt " unidades de tempo. Nesse caso a equação horária para o móvel com atraso será $s(t) = s_0 + v \cdot (t - \Delta t)$.

Exemplo:

Para o exemplo anterior recalcule o tempo que foi pedido, considerando que o móvel A começou a se mover em $t = 7\text{s}$.

Solução:

Observe que agora não podemos mais considerar $t_0 = 0$ para os dois móveis. Com isso as equações horárias ficam da seguinte forma:

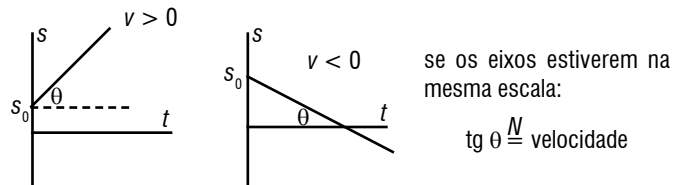
$S_A = 40 \cdot (t - 7)$ e $S_B = 1400 - 30t$ (cabe ressaltar que a função horária de A só vale para $t \geq 7\text{s}$).

$$\text{No encontro, } S_A = S_B. \text{ Então, } 40 \cdot (t - 7) = 1400 - 30t \rightarrow 40t - 280 = 1400 - 30t \rightarrow 70t = 1680 \rightarrow t = 24\text{s}.$$

Isso significa que A se moveu durante 17 s e B 24 s.

Gráfico $s \cdot t$

O gráfico posição por tempo ($s \cdot t$) do movimento retilíneo uniforme é regido pela função horária de posição, que é uma função linear (1ª grau). Portanto, o seu gráfico é sempre uma reta. Crescente se seu coeficiente angular for positivo (velocidade positiva) ou decrescente se seu coeficiente angular for negativo (velocidade negativa).



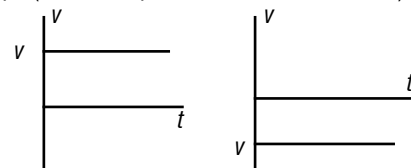
10.2 Função horária de velocidade

Por definição, um movimento é dito uniforme quando sua velocidade não se altera em relação ao tempo. Logo, a função horária de velocidade não poderia ser outra senão uma função constante.

$$v(t) = \text{constante}$$

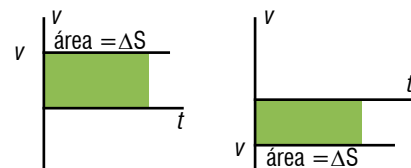
Gráfico $v \cdot t$

O gráfico $v \cdot t$ para esse mesmo movimento é uma reta paralela ao eixo do tempo (indicando que a velocidade é constante).



Um fato interessante sobre esse tipo de gráfico é que, ao calcularmos sua área, estamos multiplicando um eixo contendo a velocidade por outro contendo o tempo. Como já vimos, desse produto resulta o deslocamento do corpo.

Então, de uma maneira bem genérica (isso não se restringe a MRU), podemos dizer que a área do gráfico $v \cdot t$ é numericamente igual ao deslocamento do corpo (detalharemos mais esse conceito no próximo módulo).



10.3 Função horária de aceleração

Por ter velocidade constante, a aceleração no MRU é nula. Logo

$$a(t) = \text{constante} = 0$$

11. Velocidade relativa

Em muitos problemas de movimentos retilíneos, a solução torna-se muito mais simples ao se utilizar o conceito de velocidade relativa. Tal conceito nada mais é do que uma mudança de referencial, admitindo-se que um dos corpos em movimento está parado e observando o movimento do outro corpo em questão. De forma prática, pode-se calcular a velocidade relativa de aproximação ou de afastamento entre dois corpos em movimento de maneira muito simples (supondo V_a e V_b em módulo):

- Corpos se movem na mesma direção e mesmo sentido: $V_{rel} = |V_a - V_b|$
- Corpos se movem na mesma direção e sentidos contrários: $V_{rel} = V_a + V_b$

Para problemas de encontro, afastamento ou aproximação entre dois corpos em movimento uniforme, podemos escrever que:

$$V_{rel} = \frac{\Delta S_{rel}}{\Delta t}$$

Exemplo: Um ônibus parte da rodoviária com velocidade constante de 80 km/h. Um passageiro que se atrasou 15 minutos, toma um táxi e parte em direção ao ônibus. Sendo a velocidade do táxi de 100 km/h e supondo que não ocorra interrupção no trajeto, determine o tempo gasto pelo táxi para alcançar o ônibus.

Solução:

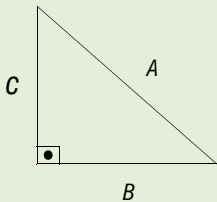
Nos 15 minutos (1/4 de hora) de atraso do passageiro, o ônibus se deslocou com velocidade de 80 km/h. Assim, quando o taxista parte com o passageiro, o ônibus já se encontra a $80 \cdot 1/4 = 20$ km à frente. A velocidade relativa entre o táxi e o ônibus é de 20 km/h e o tempo para o encontro é dado pela razão entre a distância relativa e a velocidade relativa:

$$\Delta t = \frac{20 \text{ km}}{20 \text{ km/h}} = 1 \text{ h}$$

Fique atento, pois isso não significa que o táxi andou 20 km para alcançar o ônibus!

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Um turista, passeando de bugre pelas areias de uma praia em Natal – RN, percorre uma trajetória triangular, que pode ser dividida em três trechos, conforme a figura abaixo.



Os trechos B e C possuem o mesmo comprimento, mas as velocidades médias desenvolvidas nos trechos A, B e C foram, respectivamente, v , $2v$ e v .

Quanto vale a velocidade escalar média desenvolvida pelo turista para percorrer toda a trajetória triangular?

Solução:

Seja L o lado de cada cateto. Assim:

$\Delta S_A = L$; $\Delta S_B = L$. O espaço percorrido na hipotenusa é ΔS_C , calculado pelo Teorema de Pitágoras:

$$(\Delta S_C)^2 = (\Delta S_A)^2 + (\Delta S_B)^2 = L^2 + L^2 = 2L^2 \Rightarrow$$

$$\Delta S_C = \sqrt{2} L.$$

Então o espaço total percorrido é:

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B + \Delta S_C = \sqrt{2} L + L + L \Rightarrow \Delta S = L(\sqrt{2} + 2).$$

O tempo gasto no percurso é:

$$\Delta t = \Delta t_A + \Delta t_B + \Delta t_C = \frac{\sqrt{2} L}{v} + \frac{L}{2v} + \frac{L}{v} = \frac{2\sqrt{2} L + L + 2L}{2v} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{L(2\sqrt{2} + 3)}{2v}$$

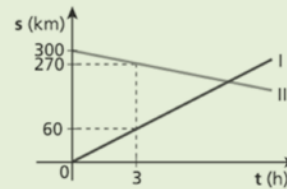
Calculando a velocidade média:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{L(\sqrt{2} + 2)}{\frac{L(2\sqrt{2} + 3)}{2v}} = \frac{(\sqrt{2} + 2)2v}{2\sqrt{2} + 3} = \frac{(\sqrt{2} + 2)2v}{2\sqrt{2} + 3} \times \left(\frac{2\sqrt{2} - 3}{2\sqrt{2} - 3} \right) \Rightarrow$$

$$v_m = \frac{(4 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 6)2v}{8 - 9} = \frac{(2\sqrt{2} - 4)v}{-1} \Rightarrow$$

$$v_m = (4 - 2\sqrt{2})v.$$

02 Dois tratores, I e II, percorrem a mesma rodovia e suas posições variam com o tempo, conforme o gráfico a seguir:



Determine o instante do encontro desses veículos.

Solução:

Para um intervalo de tempo de 3 horas o trator I se deslocou 60 km e o trator II se deslocou – 30 km. Com isso temos que $v_I = 20$ km/h e $v_{II} = -10$ km/h. Escrevendo as equações horárias para cada trator temos:

$$s_I = 20t \text{ e } s_{II} = 300 - 10t$$

$$\text{No encontro } s_I = s_{II} \rightarrow 20t = 300 - 10t \rightarrow t = 10 \text{ h}$$

03 Duas partículas (P e Q) deslocam-se sobre o eixo x com as respectivas posições dadas por:

$$P. x = 16 + 4bt^2$$

$$Q. x = bct^3, \text{ para } x \text{ em metros, } t \text{ em segundos e } c = 1 \text{ s}^{-1}.$$

Qual deve ser o valor de b para que uma partícula alcance a outra em 2 s e qual a velocidade da partícula P no ponto de encontro?

Solução:

$$\text{No encontro } x_P = x_Q.$$

$$16 + 4bt^2 = bct^3$$

$$16 + 4b(2)^2 = b(1)(2)^3$$

$$16 + 16b = 8b$$

$$b = -2 \text{ m/s}^2.$$

A velocidade de P é dada pela derivada na posição no instante $t = 2$ s.

$$v_P = \frac{dx}{dt} = \frac{d(16 - 8t^2)}{dt} = -16 \cdot 2 = -32 \text{ m/s}$$

04 Em relação a um referencial cartesiano OXY, uma partícula se move segundo as equações:

$$x = 8t - 4t^2 \text{ e } y = 12t - 6t^2$$

Determine a equação cartesiana da trajetória para esta partícula.

Solução:

Para determinar a equação da trajetória precisamos colocar x em função de y .

$$x = 4(2t - t^2) \rightarrow (2t - t^2) = x/4$$

$$y = 6(2t - t^2) \rightarrow (2t - t^2) = y/6$$

Logo, $\frac{x}{4} = \frac{y}{6}$

$$y = 1,5x$$

05 Quatro cidades A, B, C e D são percorridas por um automóvel. M, N e P são, respectivamente, os pontos médios de AB, BC e CD. A velocidade escalar média do móvel vale 50 km/h entre A e B, 75 km/h entre B e C, 70 km/h entre C e D, 60 km/h entre M e C e 60 km/h entre A e D. Calcule a razão MN/NP:

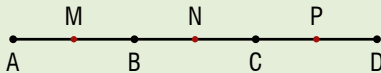
(A) 25/29.

(B) 2/3.

(C) 5/4.

(D) 4/5.

(E) 3/2.

Solução:

Por conveniência consideremos:

distância de A até B = x

distância de B até C = y

distância de C até D = z

Como $t = \Delta s/v$

1ª equação: $t_x = x/50$

2ª equação: $t_y = y/75$

3ª equação: $t_z = z/70$

4ª equação: $t_{MC} = t_x/2 + t_y = (y + x/2)/60$

5ª equação: $t_{AD} = t_x + t_y + t_z = (x+y+z)/60$

Substituindo as equações 1, 2 e 3 nas equações 4 e 5:

Na 4ª equação obteremos $x = 2y$

Na 5ª equação obteremos $z = 7/5y$

$$MN = x/2 + y/2 = (x+y)/2$$

$$NP = y/2 + z/2 = (z+y)/2$$

$$MN/NP = (x+y)/(z+y)$$

$$MN/NP = (2y + y)/(7/5y + y)$$

$$MN/NP = 3y/(12y/5)$$

$$MN/NP = 15y/12y$$

$$MN/NP = 5/4$$

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Um navio se desloca em movimento retilíneo para frente com velocidade constante. Do alto do mastro, deixa-se cair uma pedra sobre o convés (piso onde está fixada a base do mastro). Pode-se afirmar, com relação a um ponto fixo na beira do cais, que (despreze a resistência do ar):

(A) a trajetória de queda da pedra é retilínea e vertical.

(B) a pedra cairá sobre o convés, em um ponto situado atrás da base do mastro.

(C) a pedra cairá, segundo trajetória retilínea, em um ponto do convés situado à frente da base do mastro.

(D) a trajetória da pedra é parabólica e ela cairá em um ponto do convés à frente da base do mastro.

(E) a trajetória da pedra é parabólica e ela cairá na base do mastro.

02 Um iatista solitário completa certa travessia de 4.600 milhas náuticas, em 22 dias. Sua velocidade média, em Km/h, foi de:

(Dado: 1 milha náutica = 1.852 m.)

(A) 12,9.

(B) 14,7.

(C) 16,1.

(D) 17,6.

(E) 19,4.

03 Em uma pista de corrida, de 6 km de extensão, um carro desenvolve velocidades de até 250 km/h nas retas e de cerca de 180 km/h nas curvas. Ele gasta 3,6 minutos para dar duas voltas completas. Qual a velocidade escalar média nessas duas voltas, em km/h?

04 (EFOMM) Um navegador solitário completa certo percurso com velocidade média de 9 nós (1 nó = 1 milha/hora = aproximadamente 1,852 km/h) em 24 dias; a distância percorrida, em km, foi de:

(A) 5.401.

(B) 6.507.

(C) 8.723.

(D) 9.601.

(E) 10.202.

05 (EsPCEEx) Em uma mesma pista, duas partículas puntiformes, A e B, iniciam seus movimentos no mesmo instante com as suas posições medidas a partir da mesma origem dos espaços. As funções horárias das posições de A e B, para S, em metros, e t, em segundos, são dadas, respectivamente, por $S_A = 40 + 0,2t$ e $S_B = 10 + 0,6t$. Quando a partícula B alcançar a partícula A, elas estarão na posição:

(A) 55 m.

(B) 65 m.

(C) 75 m.

(D) 105 m.

(E) 125 m.

06 (EsPCEEx) Um automóvel, desenvolvendo uma velocidade constante de 60 km/h, faz, diariamente, uma viagem entre duas cidades vizinhas em um tempo habitual T. Se ele fizesse esta viagem com uma velocidade, também constante, de 90 km/h, o tempo de duração, em relação ao habitual, seria 10 minutos menor. Podemos dizer que o valor de T, em minutos, é:

(A) 60.

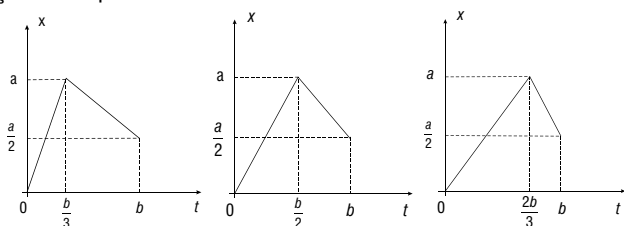
(B) 50.

(C) 40.

(D) 30.

(E) 20.

07 (AFA) Os gráficos a seguir referem-se a movimentos unidimensionais de um corpo em três situações diversas, representando a posição como função do tempo.



Nas três situações, são iguais as velocidades:

- (A) iniciais.
- (B) finais.
- (C) instantâneas.
- (D) médias.

08 Um móvel tem sua velocidade escalar instantânea (v) variando com o tempo (t), conforme a função: $v = t^2 - 4t$ (SI)
 Calcule sua aceleração escalar média entre os instantes:

- (A) 0 e 4 s;
- (B) 1 s e 5 s.

09 (AFA) Uma estrada de ferro retilínea liga duas cidades, A e B, separadas por uma distância de 440 km. Um trem percorre esta distância com movimento uniforme em 8 h. Após 6h de viagem, por problemas técnicos, o trem fica parado 30 minutos. Para que a viagem transcorresse sem atraso, a velocidade constante, em km/h, que o trem deveria percorrer o restante do percurso seria de, aproximadamente:

- (A) 55,0.
- (B) 61,2.
- (C) 73,3.
- (D) 100,0.

10 (AFA) Uma esteira rolante com velocidade V_e , transporta uma pessoa de A para B em 15 s. Essa mesma distância é percorrida em 30 s se a esteira estiver parada e a velocidade da pessoa for constante e igual a V_p . Se a pessoa caminhar de A para B, com a velocidade V_p , sobre a esteira em movimento, cuja velocidade é V_e , o tempo gasto no percurso, em segundos, será:

- (A) 5.
- (B) 10.
- (C) 15.
- (D) 30.

11 (AFA) Uma pessoa está observando uma corrida a 170 m do ponto de largada. Em dado instante, dispara-se a pistola que dá início à competição. Sabe-se que o tempo de reação de um determinado corredor é 0,2 s, sua velocidade é 7,2 km/h e a velocidade do som no ar é 340 m/s. A distância desse atleta em relação à linha de largada, quando o som do disparo chegar ao ouvido do espectador, é:

- (A) 0,5 m.
- (B) 0,6 m.
- (C) 0,7 m.
- (D) 0,8 m.

12 Um trem e um automóvel viajam paralelamente, no mesmo sentido, em um trecho retilíneo. Os seus movimentos são uniformes e a velocidade do automóvel é o dobro da do trem. Considerando-se desprezível o

comprimento do automóvel e sabendo-se que o trem tem 100 m de comprimento, qual a distância (em metros) percorrida pelo automóvel desde o instante em que alcançou o trem até o instante em que o ultrapassou?

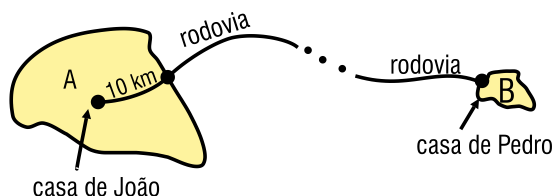
- (A) 100.
- (B) 200.
- (C) 250.
- (D) 400.
- (E) 500.

13 (AFA) Em relação a um observador parado na margem, a velocidade com que um barco sobe o rio vale 8 km/h e a com que o mesmo barco desce o rio vale 20 km/h, sempre com movimento uniforme. A velocidade da correnteza, em km/h, vale:

- (A) 3.
- (B) 6.
- (C) 8.
- (D) 12.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 (UFRJ) João fez uma pequena viagem de carro de sua casa, que fica no centro da cidade A, até a casa de seu amigo Pedro, que mora bem na entrada da cidade B. Para sair de sua cidade e entrar na rodovia que conduz à cidade em que Pedro mora, João percorreu uma distância de 10 km em meia hora. Na rodovia, ele manteve uma velocidade escalar constante até chegar à casa de Pedro. No total, João percorreu 330 km e gastou quatro horas e meia.



- a. Calcule a velocidade escalar média do carro de João no percurso dentro da cidade A.
- b. Calcule a velocidade escalar constante do carro na rodovia.

02 (AFA) Um automóvel faz uma viagem em que, na primeira metade do percurso, é obtida uma velocidade média de 100 km/h. Na segunda metade a velocidade média desenvolvida é de 150 km/h. Pode-se afirmar que a velocidade média, ao longo de todo o percurso, é, em km/h:

- (A) 130.
- (B) 125.
- (C) 120.
- (D) 110.

03 (AFA) Um terço de um percurso retilíneo é percorrido por um móvel com velocidade escalar média de 60 km/h e o restante do percurso, com velocidade escalar média de 80 km/h. Então a velocidade média do móvel, em km/h, em todo percurso, é:

- (A) 70,0.
- (B) 72,0.
- (C) 73,3.
- (D) 75,0.

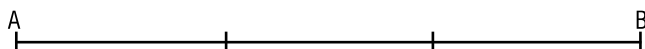
04 (EN) Um ciclista percorre 20 km em uma estrada de terra, em 60 minutos. Em seguida, anda mais 30 km em 0,5 h. A velocidade média do ciclista para todo o percurso, em km/h, é:

- (A) 10,0.
- (B) 26,6.
- (C) 33,3.
- (D) 40,0.
- (E) 66,6.

05 (AFA) Dois automóveis, *A* e *B*, encontram-se estacionados paralelamente ao marco zero de uma estrada. Em um dado instante, o automóvel *A* parte, movimentando-se com velocidade escalar constante $v_A = 80$ km/h. Depois de certo intervalo de tempo, Δt , o automóvel *B* parte no encaixo de *A* com velocidade escalar constante $v_B = 100$ km/h. Após 2 h de viagem, o motorista de *A* verifica que *B* se encontra 10 km atrás e conclui que o intervalo Δt , em que o motorista *B* ainda permaneceu estacionado, em horas, é igual a:

- (A) 0,25.
- (B) 0,50.
- (C) 1,00.
- (D) 4,00.

06 Uma partícula desloca-se do ponto **A** até o ponto **B**.



Na primeira terça parte do percurso, sua velocidade escalar média vale v_1 ; na segunda terça parte vale v_2 e na terceira, v_3 . Determine a velocidade escalar média no percurso total de *A* até *B*.

07 O trajeto de um móvel é dividido em *n* trechos iguais. No primeiro o, móvel tem velocidade média V_1 no segundo, V_2 e assim por diante até que no último tem velocidade média V_n . Prove que a velocidade média do móvel no percurso total é a média harmônica das velocidades médias em cada trecho.

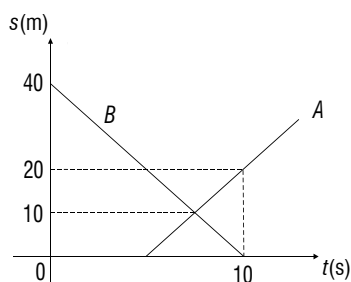
Obs: Média harmônica de *n* números é o inverso da média aritmética dos inversos dos mesmos *n* números.

08 (ITA) Para multar motoristas com velocidade superior a 90 km/h, um guarda rodoviário, munido de binóculo e cronômetro, aciona o cronômetro quando avista o automóvel passando pelo marco **A** e faz a leitura no cronômetro quando vê o veículo passar pelo marco **B**, situado a 1.500 m de **A**. Um motorista passa por **A** a 144 km/h e mantém essa velocidade durante 10 segundos, quando percebe a presença do guarda. Que velocidade média deverá manter em seguida, para não ser multado?

09 (ITA) Dois automóveis partem ao mesmo tempo de um mesmo ponto e num mesmo sentido. A velocidade do primeiro automóvel é de 50 Km/h e do segundo automóvel é de 40 Km/h. Depois de meia hora, do mesmo ponto e no mesmo sentido parte um terceiro automóvel que alcança o primeiro 1,5 h mais tarde que o segundo. Ache a velocidade do terceiro automóvel.

10 Um ponto percorre a metade do caminho com uma velocidade v_0 . Na parte restante, ele percorre a uma velocidade v_1 a metade do tempo e à velocidade v_2 o trajeto final. Determine a velocidade média do ponto durante o percurso todo.

11 (AFA) O diagrama abaixo representa as posições de dois corpos *A* e *B*, em função do tempo.



Por este diagrama, afirma-se que o corpo *A* iniciou o seu movimento, em relação ao corpo *B*, depois de:

- (A) 2,5 s.
- (B) 5,0 s.
- (C) 7,5 s.
- (D) 10 s.

12 Do Rio para São Paulo saíram dois ônibus com um intervalo $t = 10$ min e ambos com velocidades de $v = 30$ km/h. Com que velocidade *u* movia-se um ônibus em direção ao Rio, uma vez que encontrou os dois ônibus de sentido contrário em um intervalo de tempo $t' = 4$ min?

13 Um corpo movimenta-se sobre uma reta, e sua posição, em metros, é dada em função do tempo, em segundos, pela equação $s = 7 + 6t - 2t^2$. O instante em que o corpo inverte o sentido do movimento e a sua velocidade no instante $t = 4$ segundos são, respectivamente:

- (A) 0 e 7
- (B) -4 e 10
- (C) 1,5 e -10
- (D) 0,67 e -20

14 Uma partícula move-se ao longo do eixo *x* de tal modo que sua posição é dada por: $x = 5t^3 + 1$ (SI). Assinale a resposta correta:

- (A) A velocidade no instante $t = 3,0$ s é 135 m/s.
- (B) A velocidade no instante $t = 3,0$ s é 136 m/s.
- (C) A velocidade média entre os instantes $t = 2,0$ s e $t = 4,0$ s é igual à velocidade instantânea no instante $t = 3,0$ s.
- (D) A velocidade média e a velocidade instantânea são iguais ao longo de qualquer intervalo de tempo.
- (E) A aceleração da partícula é nula.

15 Um corpo sólido se move em uma trajetória retilínea segundo a lei $s = at - bt^3$, em que *a* vale 6 e *b* vale 2. Se *s* está no SI, determine:

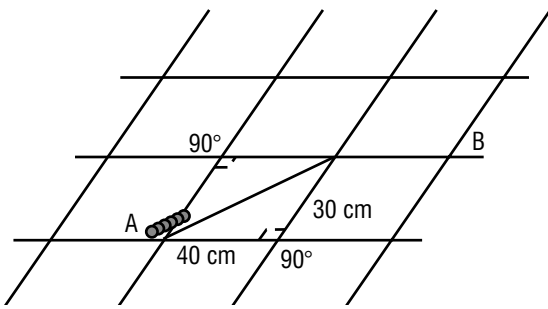
- (A) as unidades de *a* e *b* para que a equação esteja dimensionalmente correta.
- (B) as equações horárias da velocidade e da aceleração desse corpo.
- (C) os valores médios da velocidade e da aceleração entre o instante $t=0$ e o instante em que o corpo para.
- (D) o módulo da aceleração no momento em que o corpo para.

16 A função horária da posição de um móvel é dada pela seguinte equação: $S = \frac{2}{3}t^3 - 7t^2 + 20t - 6$, em que *S* e *t* estão nas unidades do SI.

Responda às seguintes perguntas:

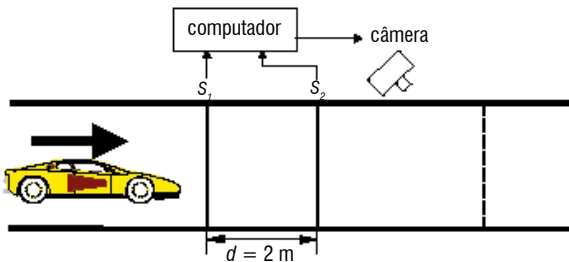
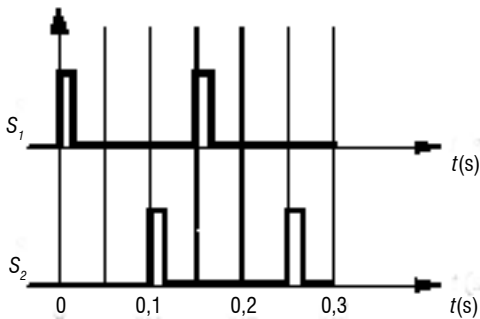
- (A) Qual a velocidade média entre os instantes 1 e 4 segundos?
- (B) Em que instantes o corpo inverte o sentido de movimento?
- (C) Qual a distância total percorrida pelo corpo entre os instantes 0 e 6 segundos?
- (D) Para que intervalos de tempo o movimento do corpo é acelerado?
- (E) Para que intervalos de tempo o movimento do corpo é retrógrado?

17 Um senhor estava esperando o trem sentado em um banco da estação. Distratamente, olhou para o chão e viu uma lagartinha que começava a cruzar a lajota retangular do piso de dimensões 40 cm · 30 cm. O senhor, como não dispunha de relógio, começou a contar suas pulsações enquanto a lagartinha fazia seu trajeto. Ela cruzou a primeira lajota diagonalmente e depois prosseguiu pela junta das lajotas, como indica a figura. O senhor contou ao todo 300 pulsações no trecho entre *A* e *B*. Sabendo que seu batimento cardíaco costuma ser, em média, 75 pulsações por minuto, responda:



- (A) Qual a distância total percorrida pela lagartinha?
 (B) Qual é a velocidade escalar média da lagartinha em cm/s?

18 A figura abaixo mostra o esquema simplificado de um dispositivo colocado em uma rua para controle de velocidade de automóveis (dispositivo popularmente chamado de radar). Os sensores S_1 e S_2 e a câmera estão ligados a um computador. Os sensores enviam um sinal ao computador sempre que são pressionados pelas rodas de um veículo. Se a velocidade do veículo está acima da permitida, o computador envia um sinal para que a câmera fotografe sua placa traseira no momento em que esta estiver sobre a linha tracejada. Para um certo veículo, os sinais dos sensores foram os seguintes:

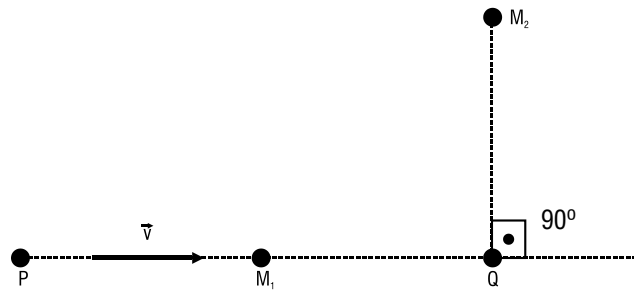


- (A) Determine a velocidade do veículo em km/h.
 (B) Calcule a distância entre os eixos do veículo.

19 (ITA) Considere dois carros que estejam participando de uma corrida. O carro A consegue realizar cada volta em 80 s enquanto o carro B é 5,0% mais lento. O carro A é forçado a uma parada nos boxes ao completar a volta de número 6. Incluindo aceleração, desaceleração e reparos, o carro A perde 135 s. Qual deve ser o número mínimo de voltas completas da corrida para que o carro A possa vencer?

- (A) 28.
 (C) 33.
 (D) 34.
 (B) 27.
 (E) n.r.a.

20 Considere que em um tiro de revólver, a bala percorre trajetória retilínea com velocidade V constante, desde o ponto inicial P até o alvo Q .

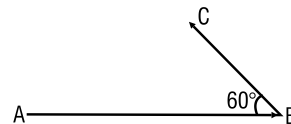


O aparelho M_1 registra simultaneamente o sinal sonoro do disparo e o do impacto da bala no alvo, o mesmo ocorrendo com o aparelho M_2 . Sendo V_s a velocidade do som no ar, então a razão entre as respectivas distâncias dos aparelhos M_1 e M_2 em relação ao alvo Q é:

- (A) $V_s (V - V_s) / (V^2 - V_s^2)$.
 (B) $V_s (V_s - V) / (V^2 - V_s^2)$.
 (C) $V (V - V_s) / (V_s^2 - V^2)$.
 (D) $V_s (V + V_s) / (V^2 - V_s^2)$.
 (E) $V_s (V - V_s) / (V^2 + V_s^2)$.

21 Dois trens estão a uma distância de 200 km e se aproximam um do outro com uma velocidade de 50 km/h cada um. Uma mosca voa constantemente entre as locomotivas dos dois trens, de um para-choque ao outro, com uma velocidade de 75 km/h, até o instante em que os trens se chocam e a mosca morre esmagada. Qual foi a distância total percorrida pela mosca?

22 (UERJ) Duas partículas, X e Y , em movimento retilíneo uniforme, têm velocidades respectivamente iguais a 0,2 km/s e 0,1 km/s. Em um certo instante t_1 , X está na posição A e Y na posição B , sendo a distância entre ambas de 10 km. As direções e os sentidos dos movimentos das partículas são indicados pelos segmentos orientados AB e BC , e o ângulo ABC mede 60° , conforme o esquema. Sabendo-se que a distância mínima entre X e Y vai ocorrer em um instante t_2 , o valor inteiro mais próximo de $t_2 - t_1$, em segundos, equivale a:



- (A) 24. (C) 50.
 (B) 36. (D) 72.

23 Uma lâmpada pende de um teto ficando a uma altura H do solo. Um atleta de altura h passa sob a lâmpada se deslocando em linha reta com velocidade constante V . Se $H = 5$ m, $h = 2$ m e $V = 6$ m/s, determine a velocidade com que a parte superior da cabeça da sombra do atleta se desloca no solo.

26 Dois carros estão em repouso em duas estradas perpendiculares. O primeiro está a uma distância l da interseção das duas estradas e o segundo a uma distância d do mesmo ponto. Os dois começam a mover-se simultaneamente em direção à interseção, o primeiro com aceleração constante a e o segundo com aceleração constante b . Qual a menor distância que eles tiveram entre si durante seus movimentos?

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

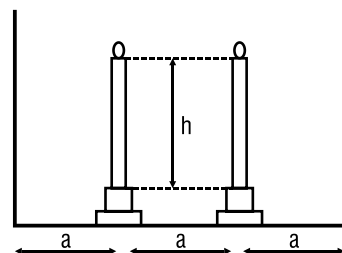
01 Dois trens partem simultaneamente de dois pontos A e B distantes 5000 m um do outro. Os trens possuem velocidades constantes de 20 m/s e de sentidos contrários, sendo que o trem I dirige-se para B. Sabendo que os trens possuem comprimento de 100 m, determine quanto tempo um automóvel deve esperar em A, após o início do movimento dos trens, para que, deslocando-se a 40 m/s, demore 50 s entre iniciar a ultrapassagem sobre o trem I e terminar a ultrapassagem sobre o trem II.

02 Uma pista tem o formato de um hexágono regular. Uma partícula percorre esta pista completa, retornando ao ponto de partida. No primeiro lado, sua velocidade tem módulo V e em cada vértice existe um dispositivo que, instantaneamente, dobra o módulo da velocidade da partícula. Uma segunda partícula percorre outra pista reta que liga dois vértices A e D, passando pelo ponto central do hexágono. Ela vai de A a D com velocidade em módulo igual a V e retorna a A com velocidade em módulo igual a $2V$. Qual a razão entre os módulos das velocidades médias escalares nos percursos totais das partículas 1 e 2?

03 Um engenheiro trabalha em uma fábrica, que fica nos arredores da cidade. Diariamente, ao chegar à última estação ferroviária, um carro da fábrica transporta-o para o local de trabalho. Certa vez, o engenheiro chegou à estação uma hora antes do habitual e sem esperar o carro foi a pé até o local de trabalho. No caminho, encontra-se com o carro e chegou à fábrica 10 minutos antes do habitual. Quanto tempo caminhou o engenheiro antes de encontrar-se com o carro?

04 Três turistas, que possuem uma bicicleta, devem chegar ao centro turístico no menor espaço de tempo (o tempo conta até que o último turista chegue ao centro). A bicicleta pode transportar apenas duas pessoas e, por isso, o terceiro turista deve iniciar o trajeto a pé. O primeiro turista, que nunca larga a bicicleta, leva o segundo turista até um determinado ponto do caminho, de onde este continua a andar a pé e o primeiro turista volta para transportar o terceiro. Encontre a velocidade média dos turistas, sabendo que a velocidade de quem está a pé é 4 km/h e de quem está na bicicleta é 20 km/h.

05 Duas velas, cujas alturas h no momento inicial eram iguais, se encontram a uma distância a uma da outra. A distância entre cada uma das velas e a parede mais próxima também vale a . Com que velocidade se movem as sombras das velas pelas paredes se uma vela se consome inteira em um tempo t_1 e a outra em um tempo t_2 ? Obs: As velocidades pedidas são aquelas válidas enquanto nenhuma das sombras chega ao solo.



06 Da cidade A partem simultaneamente um carro, uma motocicleta e uma bicicleta para a cidade B. Alcançando B, o carro retorna a cidade A e encontra a motocicleta a a quilômetros de B e a bicicleta a b quilômetros de B. A motocicleta ao chegar a B retorna também, encontrando a bicicleta a c quilômetros de B. Determine a distância AB (suponha todos os movimentos uniformes).

07 Duas retas que se cruzam se movem de modo progressivo em direções opostas com velocidades v_1 e v_2 , perpendiculares às retas correspondentes. O ângulo entre as retas é igual a α . Determine a velocidade do ponto de interseção destas retas.

08 Um avião voa horizontalmente a uma velocidade V . Um observador ouve o barulho do avião T segundos após o aparelho ter passado sobre a sua cabeça. Se a velocidade do som no ar vale C , determine a que altura H voava a aeronave.

RASCUNHO

1. Movimento retilíneo uniformemente variado

O movimento retilíneo uniformemente variado é aquele no qual a aceleração é constante e diferente de zero.

Por esse motivo, dizemos que, no MRUV, a velocidade escalar sofre variações iguais em intervalos de tempos iguais.

1.1 Função horária de velocidade

É a equação que nos permite identificar a velocidade instantânea de um móvel que possua aceleração não nula em função do tempo. Como a aceleração é constante, ela é igual à aceleração média para quaisquer instantes. Daí:

$$a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow v = \frac{v - v_0}{t - t_0} \rightarrow a \cdot (t - t_0) = v - v_0 \rightarrow v = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

Fazendo $t_0 = 0$, chegamos à equação horária de velocidade do MUV:

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

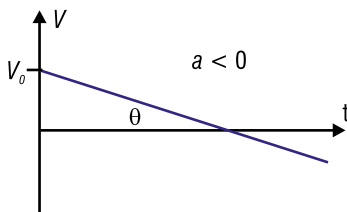
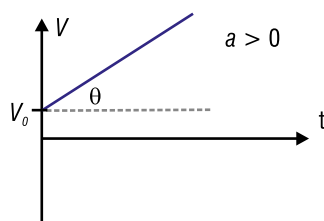
Atenção!

Note que chegamos a essa equação fazendo $t_0 = 0$. Porém em alguns problemas, um dos móveis inicia seu movimento com um atraso de “ Δt ” unidades de tempo. Nesse caso, a equação horária para o móvel com atraso será $v(t) = v_0 + a = (t - \Delta t)$.

O comportamento nesse caso é análogo ao que vimos no módulo passado.

Gráfico $v \times t$

Como essa função é linear, seu gráfico $v \times t$ é sempre uma reta. Crescente se seu coeficiente angular for positivo (aceleração positiva) ou decrescente se seu coeficiente angular for negativo (aceleração negativa).



Se os eixos estiverem na mesma escala:

$$\text{tg}\theta \stackrel{N}{=} \text{aceleração}$$

A tangente de inclinação da função mostra a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo e, portanto, mostra a aceleração. Outra maneira de ver isso é lembrar que o coeficiente angular da reta tangente a uma função, em um dado ponto, é a derivada dessa função (e já vimos que a derivada da velocidade em relação ao tempo resulta na aceleração).

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Atenção!

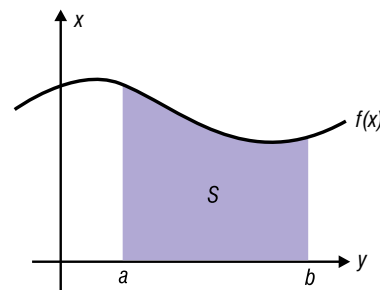
Imagine um gráfico $v \times t$ que seja uma reta inclinada crescente. A única informação que esse gráfico fornece é que o ângulo que essa reta faz com a horizontal é 45° . Nesse caso, quanto vale a aceleração do móvel?

Você pode ficar tentado a falar que $a = \text{tg}\theta = \text{tg}45^\circ = 1 \text{ m/s}^2$. Entretanto, como não há nenhuma informação adicional no gráfico, nada impede que os eixos estejam fora de escala e, portanto, não se pode determinar a aceleração. Muito cuidado com pegadinhas desses tipo: eixos fora de escala, origem deslocada, etc.

Se calcularmos a área desse gráfico, estaremos multiplicando a velocidade pelo tempo. Esse produto é igual ao deslocamento escalar nesse intervalo de tempo.

Vamos entender melhor esse conceito. Suponha que um móvel tem sua velocidade em função do tempo dada pela curva abaixo. Se dividirmos o intervalo que vai de $t = a$ a $t = b$ em vários pequenos intervalos de tempo (tantos quantos você possa imaginar), poderemos assumir que a velocidade será constante para cada pequeno intervalo desses. Daí, para cada intervalo de tempo, o deslocamento será dado por $\Delta S = v \cdot \Delta t$. Note que, já que podemos assumir que a velocidade é constante nesse intervalo, o produto $v \cdot \Delta t$ representa a área de um retângulo de base igual a Δt e altura igual a v . Se quisermos todo o deslocamento de a até b , basta, portanto, somar as áreas de cada pequeno retângulo formado. O resultado encontrado é a área abaixo da curva.

Matematicamente, esse é exatamente o conceito de integral de uma função (integral = área). Portanto, se integrarmos a velocidade em função do tempo para um intervalo de tempo dado, encontraremos o deslocamento que o móvel sofreu nesse período.



$$S = \int_a^b v(t) dt$$

Consequentemente, podemos escrever que $\Delta S = \int_{t_0}^t v(t) dt$

De forma parecida com a derivada, para calcular a integral de um polinômio, basta somar as integrais de cada termo. A regra a ser aplicada a cada termo é a seguinte: $\int a \cdot t^n dt = a \cdot \frac{1}{n+1} \cdot t^{n+1} + C$. Note que, para uma integral indefinida como essa (não tem limites de tempo), surge uma constante C, que só poderá ser determinada com alguma informação do problema (são as chamadas condições de contorno).

Exemplo:

Usando o mesmo exemplo do módulo anterior, suponha que um móvel tem sua velocidade em função do tempo dada pela equação $v(t) = t^2 - 5t + 6$. Para encontrar a equação horária da posição, precisamos integrar essa função. Daí:

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (t^2 - 5t + 6) dt = \int t^2 dt + \int (-5t) dt + \int 6 dt = \frac{1}{3} t^3$$

$$- 5 \cdot \frac{1}{2} t^2 + 6t + C. \text{ Essa constante poderia ser encontrada se o problema}$$

informasse a posição inicial do móvel (já que, pela equação encontrada, $s(0) = C$).

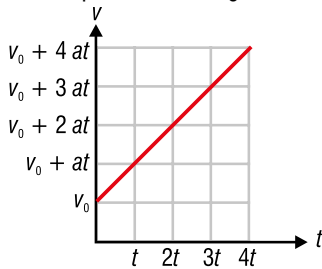
Integrais definidas são aquelas em que o intervalo de integração está definido. Elas são a área abaixo da curva de limites estabelecidos. A regra a ser aplicada a cada termo, nesse caso, é a seguinte:

$$\int_{t_0}^{t_f} a \cdot t^n dt = \left(a \cdot \frac{1}{n+1} \cdot t_f^{n+1} \right) - \left(a \cdot \frac{1}{n+1} \cdot t_0^{n+1} \right)$$

No nosso exemplo, se quisermos descobrir o deslocamento do móvel entre $t = 2s$ a $t = 4s$, precisamos fazer a integral da velocidade para os instantes de $t = 2s$ a $t = 4s$. Daí: $\Delta s = \int_2^4 (t^2 - 5t + 6) dt = \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \right) = \frac{2}{3} m$.

Exemplo:

Essa propriedade gráfica nos permite visualizar um fato interessante no MUV. Considere uma partícula com velocidade inicial v_0 e aceleração a . Seu gráfico $v \times t$ está representado na figura abaixo:



No primeiro intervalo de tempo o deslocamento é

$$\Delta s_1 = \text{área} = \frac{(2v_0 + at) \cdot t}{2} = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

No segundo intervalo de tempo o deslocamento é

$$\Delta s_2 = \text{área} = \frac{(2v_0 + 3at) \cdot t}{2} = v_0 t + \frac{3at^2}{2}$$

No terceiro intervalo de tempo o deslocamento é

$$\Delta s_3 = \text{área} = \frac{(2v_0 + 5at) \cdot t}{2} = v_0 t + \frac{5at^2}{2}$$

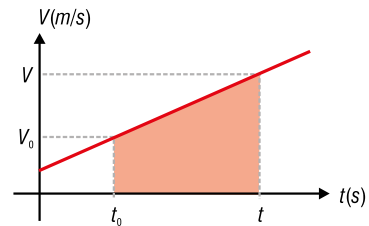
E assim sucessivamente.

Note que, em intervalos de tempos iguais, o corpo em MUV varia seus deslocamentos segundo uma progressão aritmética (P.A.) em que a razão é at^2 . Graficamente, note que, para cada “t” a mais no tempo, a área acrescentada é a de 2 metades de quadrado (ou 1 quadradinho inteiro), sendo a área do quadrado igual a at^2 .

É possível chegar à mesma conclusão usando a equação horária de posição.

1.2 Velocidade média no MUV

Considere um MUV qualquer de gráfico $v \times t$ abaixo:



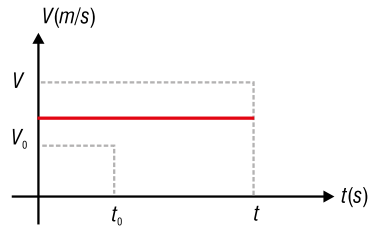
$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\text{área gráfico}}{t - t_0} = \frac{\frac{1}{2}(v + v_0) \cdot (t - t_0)}{(t - t_0)} \rightarrow V_m = \frac{(v + v_0)}{2}$$

Ou seja, no MUV, a velocidade média em um dado percurso é a média das velocidades nos extremos desse percurso.

Outra maneira de enxergar isso é olhar para o gráfico. Para que a velocidade média seja a mesma, o deslocamento precisa ser igual. Portanto, a área abaixo da curva precisa ser igual. Como o MUV forma um trapézio e, portanto, sua área é $b_{\text{média}} \cdot h$, podemos traçar uma reta horizontal que diste $b_{\text{média}}$ da origem para chegarmos à mesma área. Como

$$b_{\text{média}} = \frac{v_1 + v_2}{2}, \text{ então essa é a velocidade constante que gera o mesmo}$$

deslocamento. Por esse motivo, essa é a velocidade média.



1.3 Função horária de posição

Considere um móvel se deslocando em MUV, cujo módulo da aceleração vale a e, no instante $t_0 = 0$, sua posição é s_0 e sua velocidade, v_0 . Para esse móvel, podemos escrever que:

$$V_m = \frac{(v + v_0)}{2} \rightarrow \frac{\Delta S}{t} = \frac{(v + v_0)}{2}$$

Como $v = v_0 + a \cdot t$, temos:

$$\frac{\Delta S}{t} = \frac{v_0 + at + v_0}{2} \rightarrow \frac{\Delta S}{t} = \frac{2v_0 + at}{2} \rightarrow \Delta S = \frac{2v_0 t}{2} + \frac{at^2}{2}$$

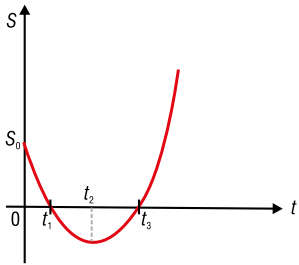
$$\rightarrow s - s_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Daí:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

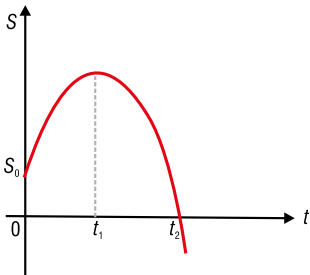
Essa equação nos mostra que a posição em função do tempo para um móvel em MUV. Ela varia segundo uma função quadrática e deve ter seu gráfico representado por uma parábola, portanto. Conhecer essa parábola e suas propriedades é muito importante. Por isso vamos analisar os casos.

1º caso: parábola com concavidade para cima:



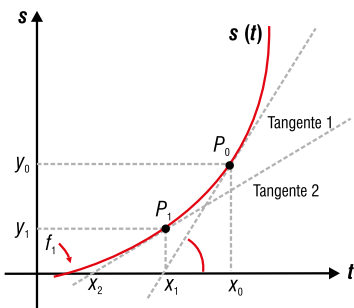
- Nesse tipo de gráfico a aceleração é positiva ($a > 0$).
- O ponto onde a curva toca o eixo S corresponde ao espaço inicial S_0 .
- Nos instantes t_1 e t_3 o corpo passa pela origem dos espaços ($S = 0$).
- No instante t_2 , vértice da parábola, o corpo inverte o sentido de seu movimento ($v = 0$).
- Do instante 0 até t_2 o espaço diminui, o movimento é retrógrado ($v < 0$) e retardado, pois a e V tem sinais contrários ($a > 0$ e $V < 0$).
- Após t_2 o espaço aumenta, o movimento é progressivo ($v > 0$) e acelerado, pois a e V têm mesmo sinal ($a > 0$ e $V > 0$).

2º caso: parábola com concavidade para baixo:



- Nesse tipo de gráfico a aceleração é negativa ($a < 0$).
- O ponto onde a curva toca o eixo S corresponde ao espaço inicial S_0 .
- Nos instantes t_2 o corpo passa pela origem dos espaços ($S = 0$).
- No instante t_1 , vértice da parábola, o corpo inverte o sentido de seu movimento ($v = 0$).
- Do instante 0 até t_1 o espaço aumenta, o movimento é progressivo ($v > 0$) e retardado, pois a e V tem sinais contrários ($a < 0$ e $V > 0$).
- Após t_1 o espaço diminui, o movimento é retrógrado ($v < 0$) e acelerado, pois a e V tem mesmo sinal ($a < 0$ e $V < 0$).

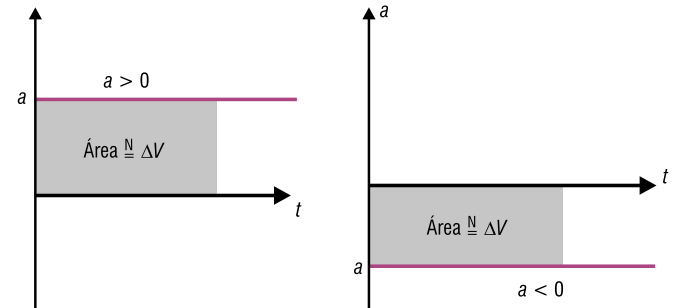
Independentemente do formato do gráfico $s \times t$, podemos, sem fazer cálculos, descobrir em que ponto desse gráfico $s \times t$ o móvel possui maior velocidade. Veja o gráfico a seguir:



Dado um gráfico $s \times t$ qualquer, a velocidade em um instante qualquer é dada pelo coeficiente angular da reta tangente ao ponto correspondente a esse instante. Nesse exemplo, vemos que a reta tangente a P_0 é mais inclinada que a reta tangente a P_1 . Isso indica que $v_{P_0} > v_{P_1}$.

1.4 Função horária de aceleração

Como no MUV, a aceleração tem valor constante, o gráfico $a \times t$ é uma reta paralela ao eixo do tempo, podendo a aceleração assumir valores positivos ou negativos.



Note que, se calcularmos a área dele, estamos multiplicando o eixo do tempo pelo eixo da aceleração. Como $\Delta V = a \times \Delta t$, concluímos que a área do gráfico $a \times t$ é numericamente igual à variação de velocidade.

1.5 Equação de Torricelli

Existe uma equação, denominada equação de Torricelli, que é utilizada em problemas em que o tempo não é conhecido (ou ele não é importante para o problema). Essa equação nasce de uma “fusão” entre as funções horárias de velocidade e posição no MUV.

Dica: em geral, quando o problema não precisa da variável tempo, essa equação deve ser bem útil.

$$v = v_0 + at \text{ (elevando-se ao quadrado)}$$

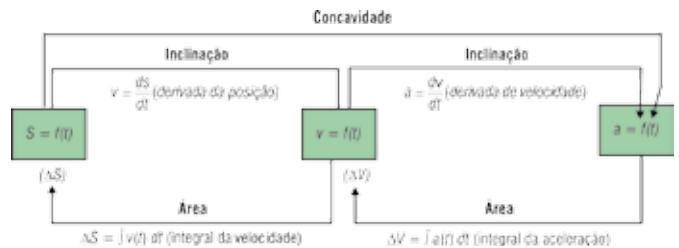
$$v^2 = v_0^2 + 2av_0t + a^2t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(v_0t + a t^2/2)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$$

1.6. Dica para problemas de gráfico

Para ajudar a memorização, podemos utilizar o fluxograma abaixo, que nos dá uma visão de conjunto de todas as propriedades gráficas:



Convém ressaltar que, matematicamente, ao calcularmos a tangente a um gráfico, estamos calculando a sua derivada e, ao calcularmos a área sob a curva, a integral das respectivas funções.

2. Movimentos verticais em campos gravitacionais uniformes

Todos os corpos ao redor da Terra são puxados para o seu centro. Isso ocorre devido ao que chamamos de campo gravitacional e a cada ponto desse campo temos associado um vetor chamado aceleração gravitacional (ou simplesmente gravidade).

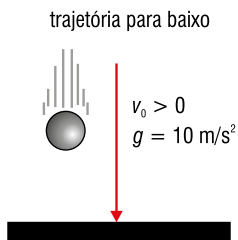
O que gera essa gravidade, suas propriedades e efeitos serão discutidos no módulo de Gravação. Aqui, iremos ver do ponto de vista da cinemática como isso influencia os corpos abandonados na proximidade da Terra.

Primeiro, temos que saber que, nos problemas que envolvem movimentos no campo gravitacional terrestre, considera-se a aceleração da gravidade constante quando esses movimentos envolvem alturas muito pequenas comparadas com o raio da Terra. A aceleração da gravidade próxima à superfície da Terra é $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, porém utiliza-se comumente o valor de 10 m/s^2 . A gravidade terrestre varia em função da latitude, mas isso também será abordado no tópico de Gravação.

Por ter valor aproximadamente constante, podemos dizer que todos os corpos lançados ou abandonados na superfície da Terra ficam sujeitos à mesma aceleração, executando, assim, um MUV. Em outras palavras, sempre podemos utilizar os conhecimentos adquiridos no estudo de MUV (gráficos, equações, etc.) para os movimentos verticais. Cabe ressaltar que a gravidade não depende da massa do corpo que está submetido a ela. O livro, a formiga, você, um avião e qualquer outro objeto ficam sujeitos à mesma aceleração (desde que a resistência do ar seja desprezada).

2.1 Queda livre

Todo corpo abandonado em um local livre da resistência do ar possui aceleração constante, executando um movimento uniformemente variado em que $a = g$. Se orientarmos seu referencial para baixo, com origem no ponto de lançamento, teremos as seguintes equações horárias:



MUV	Queda livre
$v = v_0 + a \cdot t$	$v = gt$
$\Delta S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$H = \frac{gt^2}{2}$
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$	$v^2 = 2gH$

Note que as equações de queda livre não são novas equações. Como já dito anteriormente, são as equações de MUV para essa situação.

Observação:

Quando um corpo está em queda livre, as alturas percorridas a cada segundo de movimento seguem uma P.A., como já mencionado anteriormente. Por ter velocidade inicial nula, os deslocamentos a cada segundo seguem a seguinte sequência:

No primeiro segundo de movimento a altura é $H = \frac{g \cdot 1^2}{2} = \frac{g}{2}$

No secundário segundo de movimento a altura é $H = \frac{g \cdot 2^2}{2} = 4 \cdot \frac{g}{2}$

No terceiro segundo de movimento a altura é $H = \frac{g \cdot 3^2}{2} = 9 \cdot \frac{g}{2}$

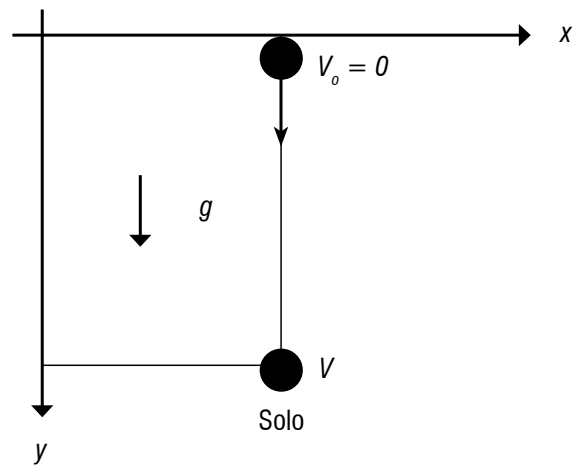
E assim sucessivamente.

Fazendo $x = \frac{g}{2}$, teremos que no n -ésimo segundo de queda livre, a distância percorrida pelo corpo é $d = x \cdot (2n - 1)$, em que x é a distância percorrida no primeiro segundo e n , o instante pedido.

Dica: esse problema também poderia ser resolvido com a ideia de que a distância percorrida no n -ésimo segundo é a distância percorrida pelo móvel até o instante n menos a distância percorrida pelo móvel até o instante $n-1$. Ao fazer isso, você transforma um problema que aparentemente não é de queda livre (já que o corpo tem velocidade no instante $n-1$) em um problema de queda livre. É muito mais interessante transformar em queda livre, porque as equações são bem mais simples.

2.2 Lançamento vertical para baixo

No lançamento vertical para baixo, consideramos um corpo que é lançado para baixo (tem, portanto, velocidade inicial vertical para baixo) em um local livre da resistência do ar e com aceleração da gravidade constante. Esse corpo, tal como na queda livre, vai executar um MUV em que $a = g$. Nesse caso, as equações podem ser escritas como:



MUV	Lançamento vertical para baixo
$v = v_0 + a \cdot t$	$v = v_0 + gt$
$\Delta S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$H = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$	$v^2 = v_0^2 + 2gH$

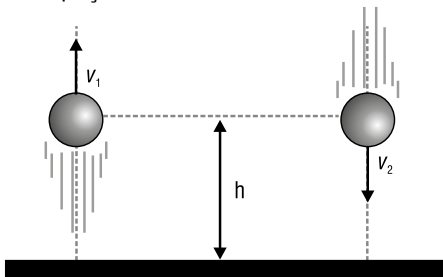
2.3 Lançamento vertical para cima

Um corpo lançado verticalmente para cima tem a subida como um movimento retardado e a descida como um movimento acelerado em que $v_0 = 0$ (queda livre). Esses movimentos de subida e de descida são simétricos. Há 2 conclusões importantes acerca disso:

- O módulo da velocidade com que um corpo passa subindo por uma altura qualquer é a mesma que ele passa descendo pela mesma altura.

Demonstração:

Aplicando a equação de Torricelli:



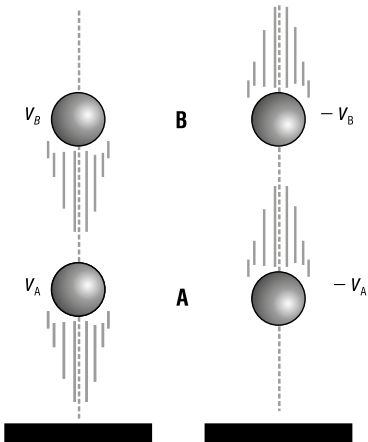
$$v_2^2 = v_1^2 + 2g\Delta S$$

$$\Delta S = 0 (S_1 = S_2)$$

$$v_2^2 = v_1^2 \Rightarrow v_2 = -v_1$$

- II. O intervalo de tempo decorrido entre as passagens por dois patamares determinados A e B é o mesmo na subida e na descida.

Demonstração:



$$g = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$g = \frac{v_B - v_a}{\Delta t_{AB}} = \frac{-v_A + v_B}{\Delta t'_{AB}}$$

$$\Delta t_{AB} = \Delta t'_{AB}$$

As equações para um corpo lançado verticalmente para cima são as mesmas do MUV.

Atenção!

Uma vez adotado o referencial, ele precisa ser mantido para todas as variáveis. A maneira mais comum de resolver problemas desse tipo é orientarmos o referencial positivo para cima e a origem na posição inicial do móvel. Nesse caso, a gravidade é negativa sempre. É comum as pessoas trocarem o sinal da gravidade de acordo com o movimento de descida ou subida. Isso não existe. A gravidade vai ter um único sinal em todo o problema e isso só depende do referencial adotado!

Dica: em um número significativo das questões desse tipo de lançamento, é muito mais fácil estudar a descida (já que a descida é como se fosse uma queda livre). Lembre-se disso!

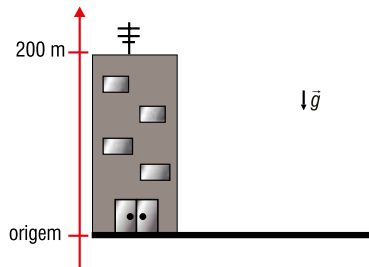
Exemplo:

Um corpo é lançado para cima do topo de um prédio de 200 metros com velocidade inicial de 30 m/s em um local onde a resistência do ar pode ser considerada desprezível. Considerando a gravidade igual a 10 m/s², determine:

- o tempo total de permanência no ar.
- a altura máxima atingida por esse corpo.
- a velocidade do corpo imediatamente antes de tocar no solo.

Solução:

Antes de responder à pergunta, vamos definir nosso referencial orientado para cima e com origem no solo. A figura a seguir representa o exposto:



A equação horária de posição para o corpo que é lançado para cima fica assim:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} \rightarrow h = 200 + 30t - 5t^2$$

- O tempo de permanência no ar é o tempo que ele leva para atingir o solo ($h = 0$).

$$0 = 200 + 30t - 5t^2 \rightarrow 0 = 40 + 6t - t^2$$

$$t = -4s \text{ (não convém)} \text{ ou } t = 10s \text{ (convém)}$$

- Matematicamente a altura máxima é o vértice da equação.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(30^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 200)}{4(-5)} = \frac{(-4900)}{(-20)} = 245 \text{ m}$$

Obs: Esse item poderia ser feito sem a utilização da equação horária de posição.

Tempo para atingir a altura máxima: $v = v_0 - gt \rightarrow 0 = 30 - 10t \rightarrow t = 3s$
 Para retornar a altura do lançamento gastará 3 segundos em queda livre.

$$H = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \cdot 3^2}{2} = 45 \text{ m}$$

Como a altura de subida é igual à de descida, temos que a altura máxima é $200 + 45 = 245 \text{ m}$.

- A equação horária de velocidade no MUV é $v = v_0 - gt \rightarrow v = 30 - 10t$
 O corpo chega ao solo no instante 10 segundos.

$v = 30 - 10t \rightarrow v = 30 - 10 \cdot 10 \rightarrow v = -70 \text{ m/s}$ (negativo) pois imediatamente antes de chegar ao solo o vetor velocidade aponta para baixo, ou seja, contra o sentido do referencial adotado.)

2.4. Influência do ar

Alguns problemas, mais empíricos, não desprezam a influência do ar nos movimentos verticais. Tal fenômeno será estudado mais adiante, em dinâmica. No entanto, pode-se adiantar que a resistência do ar depende da forma e da velocidade do corpo e sua expressão é dada por:

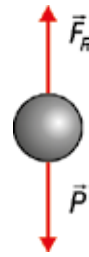
$$F_r = c \cdot v^2$$

em que c é uma constante que depende da forma do corpo e da área da secção transversal do corpo e v é a velocidade instantânea do corpo.

Isso significa que, para um corpo qualquer, quanto maior for a velocidade, maior será a resistência do ar. Evidentemente, a resistência do ar não cresce indefinidamente. Seu crescimento só ocorre enquanto é menor que a força peso para o corpo. Isso porque a força de resistência é proporcional ao quadrado da velocidade. No momento em que seu valor se iguala ao valor da força peso, a aceleração passa a ser zero e a velocidade para de aumentar. Consequentemente, a força de resistência para de crescer e fica igual ao peso desse instante para frente. Nesse momento, o corpo atinge a sua **velocidade limite**. A partir daí, o movimento de queda torna-se uniforme, ou seja, o corpo cai com velocidade constante.

Cálculo da velocidade limite.

$$|\vec{P}| = |\vec{F}_r| \rightarrow m \cdot g = c \cdot v^2 \rightarrow v^2 = \frac{m \cdot g}{c} \rightarrow v_L = \sqrt{\frac{m \cdot g}{c}}$$



em que:

m → massa da corpo;

g → aceleração da gravidade local;

c → coeficiente de atrito com o ar.

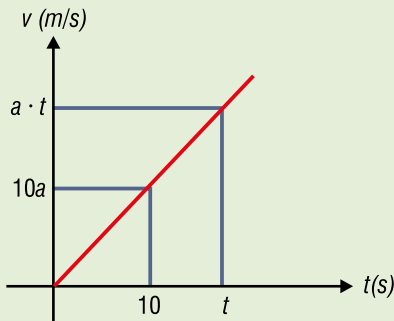
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Uma partícula, a partir do repouso, descreve um movimento retilíneo uniformemente variado e, em 10 s, percorre metade do espaço total previsto. A segunda metade desse espaço será percorrida em, aproximadamente:

- (A) 2,0 s.
- (B) 4,0 s.
- (C) 5,8 s.
- (D) 10 s.
- (E) 14 s.

Solução:

O gráfico a seguir ilustra o movimento da partícula que parte do repouso e possui aceleração "a":

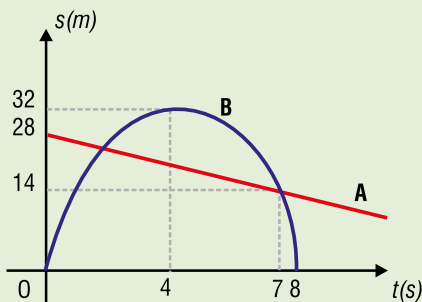


Nas condições do problema, a área do triângulo tem que ser igual à área do trapézio.

$$\frac{10 \cdot 10a}{2} = \frac{(at + 10a)(t - 10)}{2} \rightarrow 100a = a(t + 10)(t - 10) \rightarrow t^2 - 100 = 100 \rightarrow t = \sqrt{200} \cong 14s$$

Como a questão só pede o tempo na segunda metade, a resposta é, aproximadamente, 4 s.

02 Duas partículas A e B desenvolvem movimentos sobre uma mesma trajetória, cujos gráficos horários são dados por:



Qual a velocidade da partícula B, em m/s, no primeiro encontro entre A e B?

Solução:

Nítidamente, a partícula A executa um movimento uniforme e a partícula B executa um movimento uniformemente variado. Escrevendo suas equações horárias:

$$v_A = \frac{14 - 28}{4} = -2 \text{ m/s} \rightarrow S_A = 28 - 2t$$

$$S_B = 0 + v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$$

$$S_B = v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2} \rightarrow 32 = v_0 \cdot 4 + \frac{a \cdot 4^2}{2} \rightarrow 32 = 4v_0 + 8a \rightarrow v_0 + 2a = 8$$

$$S_B = v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2} \rightarrow 14 = v_0 \cdot 7 + \frac{a \cdot 7^2}{2} \rightarrow 28 = 14v_0 + 49a \rightarrow 2v_0 + 7a = 4$$

$$a = -4 \text{ m/s}^2 \text{ e } v_0 = 16 \text{ m/s} \rightarrow S_B = 16 \cdot t - 2t^2$$

$$\text{No encontro } S_A = S_B \rightarrow 28 - 2t = 16t - 2t^2 \rightarrow 2t^2 - 18t + 28 = 0 \rightarrow t^2 - 9t + 14 = 0 \rightarrow t = 2s \text{ ou } t = 7s$$

Calculando V_B em:

$$t = 2s \rightarrow v_B = \frac{ds}{dt} = \frac{d(16t - 2t^2)}{dt} = 16 - 4t = 16 - 4 \cdot 2 = 8 \text{ m/s}$$

03 Um corpo cai em queda livre, de uma altura tal que durante o último segundo de queda ele percorre 1/4 da altura total. Calcule o tempo de queda supondo nula a velocidade inicial do corpo.

(A) $t = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \text{ s}$

(B) $t = \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \text{ s}$

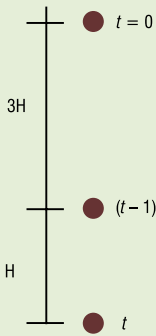
(C) $t = \frac{3}{2 - \sqrt{3}} \text{ s}$

(D) $t = \frac{4}{2 - \sqrt{3}} \text{ s}$

(E) $t = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} \text{ s}$

Solução:

Observe a ilustração:



Em todo o percurso ele percorrerá $4H = \frac{gt^2}{2}$

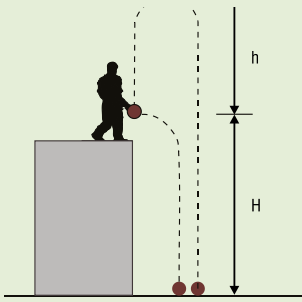
Na primeira parte do percurso, ele percorrerá $3H = \frac{g(t-1)^2}{2}$

Dividindo as equações

$$\frac{4}{3} = \frac{t^2}{(t-1)^2} \rightarrow 4(t-1)^2 = 3t^2 \rightarrow \sqrt{4(t-1)^2} = \sqrt{3t^2} \rightarrow 2(t-1) = t\sqrt{3}$$

$$2t - 2 = t\sqrt{3} \rightarrow t \cdot (2 - \sqrt{3}) = 2 \rightarrow t = \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$$

04 À borda de um precipício de um certo planeta, no qual se pode desprezar a resistência do ar, um astronauta mede o tempo t_1 que uma pedra leva para atingir o solo, após cair de uma de altura H . A seguir, ele mede o tempo t_2 que uma pedra também leva para atingir o solo, após ser lançada para cima até uma altura h , como mostra a figura. Assinale a expressão que dá a altura H .



(A) $H = \frac{(t_1^2 t_2^2 h)}{2(t_2^2 - t_1^2)^2}$

(D) $H = \frac{4t_1 t_2 h}{(t_2^2 - t_1^2)}$

(B) $H = \frac{(t_1 t_2 h)}{4(t_2^2 - t_1^2)}$

(E) $H = \frac{4t_1^2 t_2^2 h}{(t_2^2 - t_1^2)^2}$

(C) $H = \frac{2t_1^2 t_2^2 h}{(t_2^2 - t_1^2)^2}$

Solução:

Vamos dividir nosso problema em partes.

Queda livre

$$H = \frac{g \cdot t_1^2}{2} \rightarrow g = \frac{2H}{t_1^2}$$

Lançamento para cima (só a subida):

$$v_2 = v_0^2 + 2a\Delta S$$

Na altura máxima $v = 0$. Considerando o referencial no ponto de lançamento e adotando para cima positivo teremos:

$$0^2 = v_0^2 + 2 \cdot (-g) \cdot h \rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

Queda da altura H na descida. Considerando o referencial no ponto de lançamento e adotando para baixo positivo teremos:

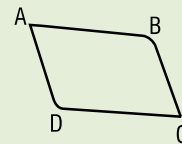
$$\Delta S = v_0 t + \frac{a \cdot t^2}{2} \rightarrow H = t_2 \cdot \sqrt{2gh} + \frac{g \cdot t_2^2}{2}$$

Substituindo

$$H = t_2 \cdot \sqrt{2h} \cdot \frac{\sqrt{2H}}{t_1} + \frac{t_2^2}{2} \cdot \frac{2H}{t_1^2} \rightarrow H \left(1 - \frac{t_2^2}{t_1^2} \right) = 2\sqrt{Hh} \cdot \frac{t_2}{t_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2} = 2 \frac{t_2 \cdot \sqrt{h}}{t_1 \cdot \sqrt{H}} \rightarrow H = \frac{4t_1^2 - t_2^2}{(t_1^2 - t_2^2)^2} \cdot h$$

05 No arranjo mostrado a seguir, do ponto A largamos com velocidade nula duas pequenas bolas que se moverão sob a influência da gravidade em um plano vertical, sem rolamento ou atrito, uma pelo trecho ABC e outra pelo trecho ADC. As partes AD e BC dos trechos são paralelas e as partes AB e DC também. Os vértices B de ABC e D de ADC são suavemente arredondados para que cada bola não sofra uma mudança brusca na sua trajetória. Pode-se afirmar que:



- A bola que se move pelo trecho ABC chega ao ponto C primeiro.
- A bola que se move pelo trecho ADC chega ao ponto C primeiro.
- As duas bolas chegam juntas ao ponto C.
- A bola de maior massa chega primeiro (e se tiverem a mesma massa, chegam juntas).
- É necessário saber as massas das bolas e os ângulos relativos à vertical de cada parte dos trechos para responder.

Solução:

Como o enunciado fala que AD é paralela a BC e AB é paralela a DC consideraremos os movimentos como MRUV. Nesse caso a velocidade média entre dois pontos é a média aritmética da velocidade entre esses dois pontos. Portanto:

$$V_{AD} = \frac{V_A + V_D}{2} \rightarrow V_{AD} = \frac{V_D}{2}$$

$$V_{AB} = \frac{V_A + V_B}{2} \rightarrow V_{AB} = \frac{V_B}{2}$$

$$V_{DC} = \frac{V_C + V_D}{2}$$

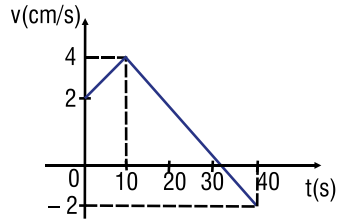
$$V_{BC} = \frac{V_B + V_C}{2}$$

Já que $V_D > V_B$ temos que V_{AD} é maior que V_{AB} e V_{DC} é maior que V_{BC} .

Portanto, no trajeto ADC a velocidade escalar média é maior que no trajeto ABC e, como a distância total percorrida é a mesma, concluímos que o tempo gasto no trajeto ADC é menor.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 A figura representa o gráfico horário da velocidade de um ponto material que se move segundo o eixo Ox. No instante $t = 0$ a abscissa é $x_0 = 2$ cm. Qual a abscissa em $t = 40$ s?



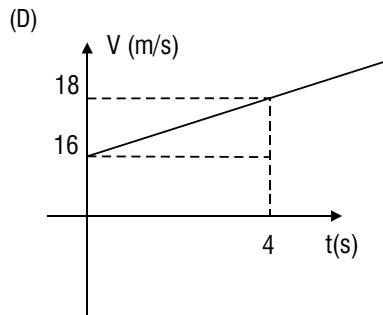
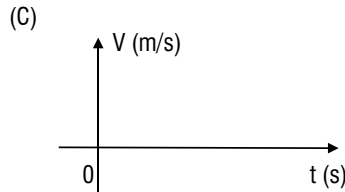
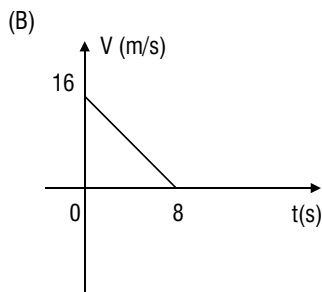
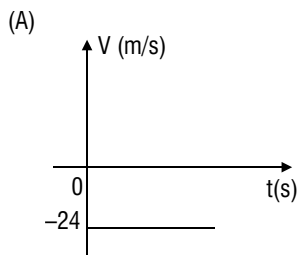
02 Um corpo cai no vácuo de uma altura igual a 245 m em relação ao solo. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

- (A) o tempo de duração da queda;
- (B) o módulo da velocidade do corpo imediatamente antes de se chocar com o solo.

03 Um corpo é abandonado do repouso de uma altura h acima do solo. No mesmo instante, um outro é lançado para cima, a partir do solo, segundo a mesma vertical, com velocidade v . Sabendo que os corpos se encontram na metade da altura da descida do primeiro, pode-se afirmar que h vale:

- (A) $\frac{v}{g}$.
- (B) $\frac{v^2}{g}$.
- (C) $\left(\frac{v}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$.
- (D) $\left(\frac{v}{g}\right)^2$.

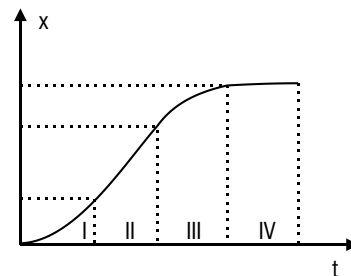
04 (AFA) Sabendo-se que a função horária de um partícula é: $S = -t^2 + 16t - 24$, o gráfico que representa a função $V = f(t)$ será:



05 (AFA) Ao ultrapassar uma viga de madeira, uma bala tem sua velocidade escalar variada de 850 m/s para 650 m/s. A espessura da viga é 10 cm. Admitindo o movimento como sendo uniformemente variado, o intervalo de tempo, em segundos, em que a bala permaneceu no interior da viga foi aproximadamente:

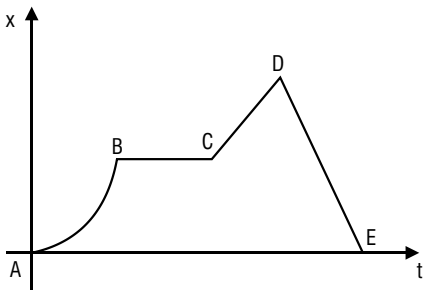
- (A) $5,0 \cdot 10^{-4}$.
- (B) $1,3 \cdot 10^{-4}$.
- (C) $5,0 \cdot 10^{-2}$.
- (D) $1,3 \cdot 10^{-2}$.

06 (AFA) A posição x de um corpo que se move ao longo de uma reta, em função do tempo t , é mostrada no gráfico. Analise as afirmações abaixo e marque a alternativa correta:



- (A) A velocidade do corpo é positiva nos quatro trechos.
- (B) A aceleração do corpo é nula apenas no trecho IV.
- (C) A trajetória descrita pelo corpo no trecho I é parabólica.
- (D) O movimento descrito pelo corpo no trecho III é progressivo e retardado.

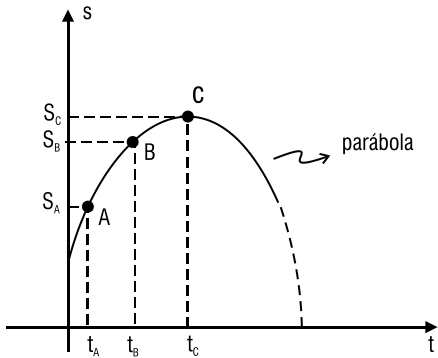
07 (AFA) Um móvel desloca-se ao longo de uma linha reta, sendo sua posição em função do tempo dada pelo gráfico abaixo:



Pode-se afirmar que:

- (A) nos trechos CD e DE, o movimento foi acelerado.
- (B) no trecho BC, a velocidade foi constante e não nula.
- (C) no trecho AB, a velocidade é decrescente.
- (D) no trecho DE, a velocidade é negativa.

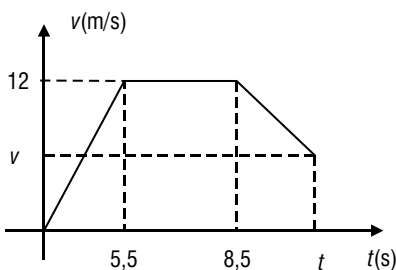
08 (AFA) A figura abaixo apresenta o gráfico posição x tempo para um móvel em movimento retilíneo.



É correto afirmar que:

- (A) a velocidade no instante t_A é menor que a velocidade no instante t_B .
- (B) para t_C , a aceleração do móvel é nula.
- (C) para $t_A < t < t_C$, o movimento é acelerado.
- (D) para $t_B < t < t_C$, a velocidade do móvel decresce de maneira uniforme.

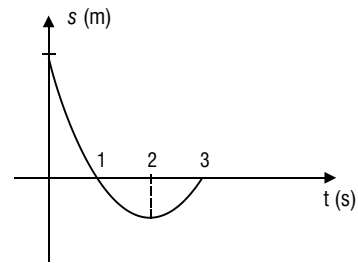
09 (AFA) O gráfico abaixo mostra como variou a velocidade de um atleta durante uma disputa de 100 m rasos.



Sendo de 8,0 m/s a velocidade média deste atleta, pode-se afirmar que a velocidade v no instante em que ele cruzou a linha de chegada era, em m/s,

- (A) 5,0.
- (B) 3,5.
- (C) 8,5.
- (D) 10.

10 (AFA) O gráfico da posição (S) em função do tempo (t) a seguir representa o movimento retilíneo de um móvel.



A partir do gráfico, é correto afirmar que:

- (A) no primeiro segundo, o seu movimento é progressivo.
- (B) entre 1 s e 3 s, a aceleração é negativa.
- (C) no instante 2 s, a velocidade do móvel é nula.
- (D) nos instantes 1 s e 3 s, os vetores velocidades são iguais.

11 (AFA) Um vagão movimenta-se sobre trilhos retos e horizontais obedecendo à equação horária $S = 20t - 5t^2$ (SI). Um fio ideal tem uma de suas extremidades presa ao teto do vagão e, na outra, existe uma esfera formando um pêndulo. As figuras que melhor representam as configurações do sistema vagão-pêndulo de velocidade v e aceleração a , nos instantes 1 s, 2 s e 3 s, são respectivamente:

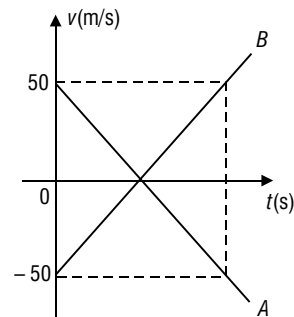
(A)

(B)

(C)

(D)

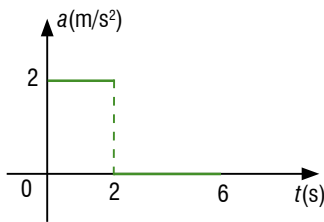
12 (AFA) Duas partículas, A e B, que executam movimentos retilíneos uniformemente variados, se encontram em $t = 0$ na mesma posição. Suas velocidades, a partir desse instante, são representadas pelo gráfico abaixo.



As acelerações experimentadas por A e B têm o mesmo módulo de $0,2 \text{ m/s}^2$. Com base nesses dados, é correto afirmar que essas partículas se encontrarão novamente no instante

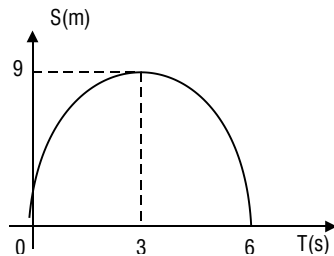
- (A) 10 s. (C) 100 s.
(B) 50 s. (D) 500 s.

13 (EN) Uma partícula possui velocidade igual a 2 m/s no instante $t = 0$ e percorre uma trajetória retilínea e horizontal. Sabe-se que a sua aceleração varia em relação ao tempo de acordo com o diagrama abaixo. Ao fim de 4 segundos, a distância percorrida pela partícula é de:



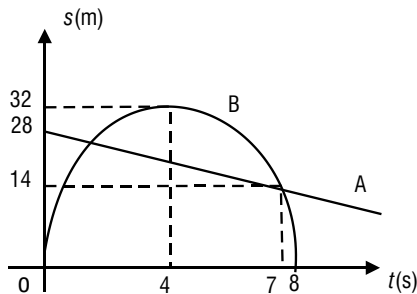
- (A) 10 m. (D) 42 m.
(B) 22 m. (E) 20 m.
(C) 32 m.

14 (AFA) O gráfico da posição em função do tempo para um objeto que se move em trajetória retilínea, é dado na figura abaixo. A velocidade inicial, em m/s , e a aceleração, em m/s^2 , são, respectivamente:



- (A) 6 e 2. (C) 9 e 3.
(B) 6 e 3.
(D) 9 e 6.

15 (AFA) Duas partículas A e B desenvolvem movimentos sobre uma mesma trajetória, cujos gráficos horários são dados por:



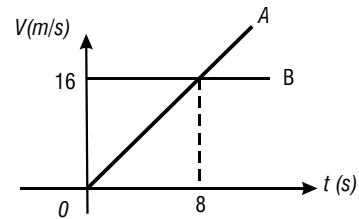
No instante em que A e B se encontram, os módulos das velocidades de A e de B valem, respectivamente:

- (A) 2 e 12. (C) 2,57 e 12.
(B) 2 e 16. (D) 2,57 e 16.

16 (EFOMM) Uma lancha da guarda costeira, atracada à costa, recebe a denúncia de que um navio, carregado de contrabando, a 50 milhas afastado da costa, vem avançando a uma velocidade constante de 12 nós. A distância mínima que qualquer navio estranho deve estar da costa é de 20 milhas. A aceleração constante mínima que a lancha deverá ter, em milhas/h^2 , para que o navio não adentre o perímetro da costa é:

- (A) 0,8. (D) 6,4.
(B) 1,6. (E) 16.
(C) 3,2.

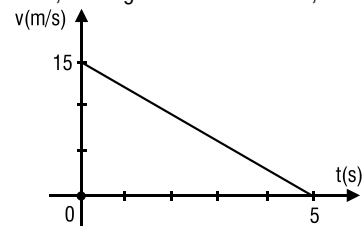
17 (EsPCEx) O gráfico abaixo representa a velocidade (V) em função do tempo (t) dos móveis A e B, que percorrem a mesma trajetória no mesmo sentido e que, no instante inicial ($t = 0$), partem do mesmo ponto.



A distância percorrida pelo móvel A será o dobro daquela percorrida pelo móvel B quando o tempo de deslocamento for igual a:

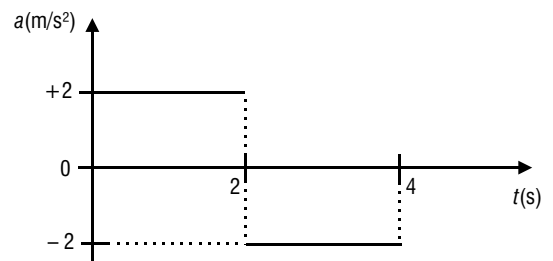
- (A) 8 s. (D) 32 s.
(B) 16 s. (E) 40 s.
(C) 24 s.

18 (EsPCEx) O gráfico abaixo descreve a velocidade V , em função do tempo t , de um móvel que parte da posição inicial 10 m de sua trajetória. A função horária da sua posição, em que o tempo t e a posição S são dados, respectivamente, em segundos e em metros, é:



- (A) $S = 10 - 15t + 3t^2/2$.
(B) $S = 15 + 10t - 5t^2/2$.
(C) $S = 10 + 15t - 3t^2/2$.
(D) $S = 15 - 10t + 5t^2/2$.
(E) $S = 10 + 15t - 5t^2/2$.

19 (AFA) Um automóvel parte do repouso e se movimenta com a aceleração mostrada, de maneira aproximada, na figura abaixo:



Depois que sua aceleração mudou de sentido, o deslocamento (variação de posição) entre os instantes $t = 2$ s e $t = 3$ s vale, em metros:

- (A) 0. (C) 2.
 (B) 1. (D) 3.
 (E) 4.

20 (AFA) Um corpo é abandonado do topo de um precipício. O ruído produzido pela queda do corpo ao atingir o chão é ouvido 10 s após o seu abandono. Considerando a velocidade do som no ar igual a 340 m/s, pode-se afirmar que a altura do precipício, em metros, é aproximadamente:

- (A) 200. (C) 391.
 (B) 288. (D) 423.

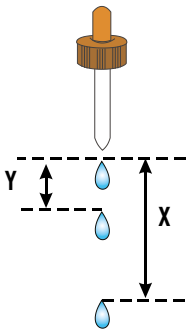
21 (AFA) Uma bola abandonada de uma altura H , no vácuo, chega ao solo e atinge, agora, altura máxima h . A razão entre a velocidade com que a bola chega ao solo e aquela com que ela deixa o solo é:

- (A) $\left(\frac{H}{h}\right)^{1/2}$ (C) $\left(\frac{H}{h}\right)^{3/2}$
 (B) $\frac{H}{h}$ (D) $\left(\frac{H}{h}\right)^2$

22 (AFA) Uma equipe de resgate se encontra em um helicóptero, parado em relação ao solo, a 305 m de altura. Um paraquedista abandona o helicóptero e cai livremente durante 1,0 s, quando abre o paraquedas. A partir desse instante, mantendo-se constante sua velocidade, o paraquedista atingirá o solo em:

- (A) 15 s. (C) 30 s.
 (B) 28 s. (D) 60 s.

23 (AFA) Certa mãe, ao administrar um medicamento para o seu filho, utiliza um conta-gotas pingando em intervalos de tempo iguais. A figura a seguir mostra a situação no instante em que uma das gotas está se soltando.



Considerando que cada pingo abandone o conta-gotas com velocidade nula e desprezando a resistência do ar, pode-se afirmar que a razão $\frac{X}{Y}$, entre as distâncias X e Y , mostradas na figura, vale:

- (A) 2. (C) $\frac{1}{4}$.
 (B) $\frac{1}{2}$. (D) 4.

24 (AFA) Um corpo é abandonado do repouso de uma altura h acima do solo. No mesmo instante, um outro é lançado para cima, a partir do solo, segundo a mesma vertical, com velocidade v . Sabendo que os corpos se encontram na metade da altura da descida do primeiro, pode-se afirmar que h vale:

- (A) $\frac{v}{g}$. (C) $\left(\frac{v}{g}\right)^2$.
 (B) $\left(\frac{v}{g}\right)^{1/2}$. (D) $\frac{v^2}{g}$.

25 (AFA) Em uma experiência realizada na lua, uma pedra de 200 g é lançada verticalmente para cima e, no mesmo instante, outra pedra idêntica é abandonada de uma altura de 40 m. Sabendo-se que as duas pedras colidem a 20 m de altura e que a aceleração da gravidade na Lua é $g = 1,6 \text{ m/s}^2$, a velocidade com que foi lançada a primeira pedra, em m/s, é:

- (A) 2. (C) 6.
 (B) 4. (D) 8.

26 (AFA) Uma pequena esfera é abandonada em queda livre de uma altura de 80 m, em relação ao solo. Dois segundos após, uma segunda esfera é atirada, verticalmente para baixo. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10 \text{ m/s}^2$. A fim de que as esferas atinjam o solo no mesmo instante, a velocidade de lançamento da segunda esfera, em m/s, deve ser:

- (A) 15. (C) 25.
 (B) 20. (D) 30.

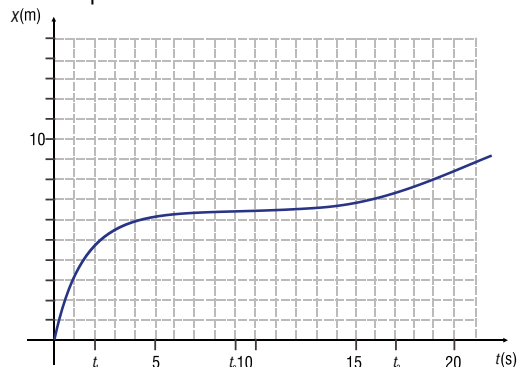
27 (EFOMM) Um corpo é lançado verticalmente para cima a partir da superfície da Terra e atinge a altura de 80 metros. A gravidade na superfície da Terra é de 10 m/s^2 e são desprezados os efeitos de altitude e da resistência do ar. A velocidade de lançamento é:

- (A) 80 m/s. (D) 30 m/s.
 (B) 60 m/s. (E) 25 m/s.
 (C) 40 m/s.

28 (EsPCEX) Em um local onde a aceleração da gravidade é constante e igual a 10 m/s^2 , um corpo entra em queda livre com velocidade inicial nula, caindo de uma altura h . No último segundo da queda, o corpo percorre três quartas partes do deslocamento total (h). O tempo total da queda é de:

- (A) 2 s. (D) 5 s.
 (B) 3 s. (E) 6 s.
 (C) 4 s.

29 O gráfico a seguir mostra a abscissa da posição de uma partícula que se move ao longo do eixo x em função do tempo t e destaca três instantes de tempo distintos t_1 , t_2 e t_3 . Coloque em ordem crescente os valores das velocidades escalares instantâneas da partícula nos instantes t_1 , t_2 e t_3 . Justifique a sua resposta.



30 Um carro de testes parte do repouso com uma aceleração constante de $6,00 \text{ m/s}^2$ em uma pista retilínea. Ao atingir a velocidade de 216 km/h , é submetido a uma desaceleração constante até parar. Qual foi o módulo da desaceleração, em m/s^2 , considerando que a distância total percorrida pelo carro foi de 750 m ?

- (A) 3,50. (D) 5,00.
 (B) 4,00. (E) 5,50.
 (C) 4,50.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

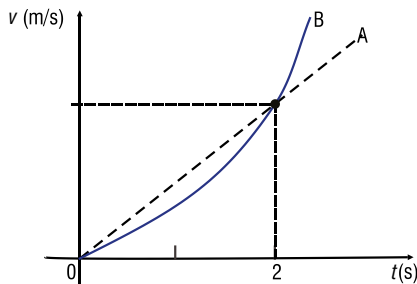
01 A maior aceleração (ou desaceleração) tolerável pelos passageiros de um trem urbano é de 2 m/s^2 . Sabe-se que a distância entre duas estações consecutivas é de 800 m e que o trem para em todas as estações.

Determine:

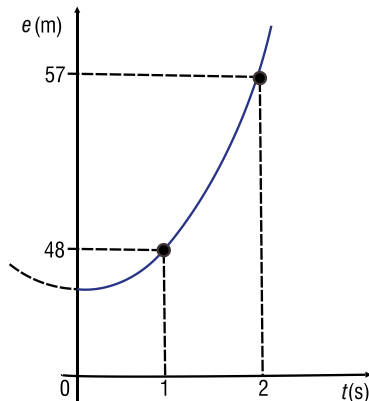
- (A) a máxima velocidade que o trem pode atingir no percurso de uma estação a outra;
 (B) o tempo mínimo para o trem ir de uma estação a outra consecutiva.

Sugestão: Resolva essa questão utilizando o gráfico da velocidade escalar em função do tempo.

02 Duas partículas *A* e *B* deslocam-se ao longo do eixo *Ox* com velocidades dadas pelo gráfico a seguir, sendo que no instante $t_0 = 0$ ambas estão na origem do sistema de coordenadas. No instante $t = 2 \text{ s}$, *A* e *B* estão, respectivamente, nos pontos de abscissas x_1 e x_2 , com acelerações a_1 e a_2 . Compare x_1 com x_2 e a_1 com a_2 .



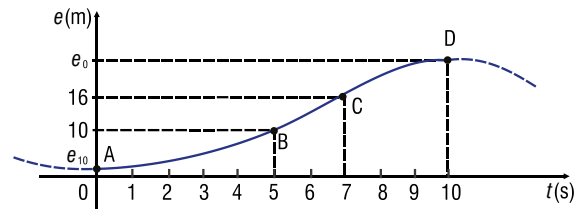
03 (ITA) Os espaços de um móvel variam com o tempo, conforme o gráfico a seguir, que é um arco de parábola cujo vértice está localizado no eixo *e*:



Determine:

- (A) o espaço em $t = 0$;
 (B) a aceleração escalar;
 (C) a velocidade em $t = 3 \text{ s}$.

04 (ITA) O espaço (*e*) de uma partícula variou com o tempo (*t*), conforme indica o diagrama a seguir:



No gráfico, os trechos *AB* e *CD* são arcos de parábola, ao passo que o trecho *BC* é um segmento de reta. Determine:

- (A) o espaço inicial (e_0) da partícula;
 (B) a aceleração escalar no trecho *CD*;
 (C) o espaço (e_{10}) da partícula em $t = 10 \text{ s}$.

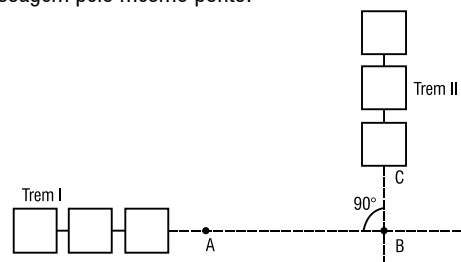
05 (ITA) Um móvel parte da origem do eixo *x* com velocidade constante igual a 3 m/s . No instante $t = 6 \text{ s}$ o móvel sofre uma aceleração $g = -4 \text{ m/s}^2$. A equação horária a partir do instante $t = 6 \text{ s}$ será:

- (A) $x = 3t - 2t^2$.
 (B) $x = 18 + 3t - 2t^2$.
 (C) $x = 18 - 2t^2$.
 (D) $x = -72 + 27t - 2t^2$.
 (E) $x = 27t - 2t^2$.

06 (ITA) De uma estação parte um trem *A* com velocidade constante $V_A = 80 \text{ km/h}$. Depois de certo tempo, parte dessa mesma estação um outro trem *B*, com velocidade constante $V_B = 100 \text{ km/h}$. Depois de um tempo de percurso, o maquinista de *B* verifica que seu trem encontra-se a 3 km de *A*. A partir desse instante ele aciona os freios indefinidamente, comunicando ao trem uma aceleração $a = -50 \text{ km/h}^2$. O trem *A* continua a seu movimento anterior. Nessas condições:

- (A) não houve encontro dos trens.
 (B) depois de 2 horas o trem *B* para e a distância que o separa de *A* é de 64 km .
 (C) houve encontro dos trens depois de 12 minutos.
 (D) houve encontro dos trens depois de 36 minutos.
 (E) não houve encontro dos trens, eles continuam caminhando e a distância que os separa, agora, é de 2 km .

07 (IME) O trem I desloca-se em linha reta, com velocidade constante de 54 km/h , aproximando-se do ponto *B*, como mostra a figura. Determine quanto tempo após a locomotiva do trem I atingir o ponto *A* deve o trem II partir do repouso em *C*, com aceleração constante de $0,2 \text{ m/s}^2$, de forma que 10 segundos após terminar a sua passagem pelo ponto *B* o trem I inicie a passagem pelo mesmo ponto.



Notas:

Ambos os trens medem 100 metros de comprimento, incluindo suas locomotivas, que viajam à frente.

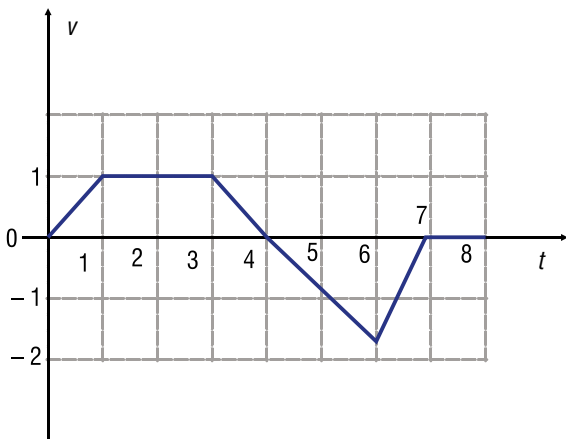
As distâncias ao ponto *B* são: $\overline{AB} = 3.000 \text{ m}$. $\overline{CB} = 710 \text{ m}$.

08 (ITA) Um automóvel a 90 km/h passa por um guarda em um local em que a velocidade máxima é de 60 km/h. O guarda começa a perseguir o infrator com sua moto mantendo aceleração constante até que atinge 108 km/h em 10 segundos e continua com essa velocidade até alcançá-lo. Qual a distância total percorrida pelo guarda?

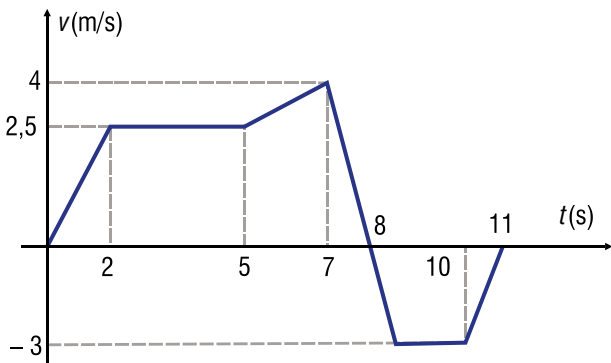
09 (ITA) Um móvel A parte da origem O, com velocidade inicial nula, no instante $t_0 = 0$ e percorre o eixo Ox com aceleração constante a . Após um intervalo de tempo Δt , contado a partir da saída de A, um segundo móvel B parte de O com aceleração $n \cdot a$, sendo $n > 1$. Prove que B alcançará A

$$\text{no instante } t = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} \right) \times \Delta t$$

10 Um móvel se move ao longo do eixo x com uma velocidade v_x descrita pelo gráfico abaixo em função do tempo. Sabendo-se que no momento $t = 0$ a posição do corpo era $x = 0$, esboce os gráficos da aceleração do corpo, de sua coordenada x e da distância total percorrida, todos em função do tempo.



11 Dado o gráfico abaixo, calcule os itens pedidos, sabendo que a posição inicial do corpo é $S_0 = 3$ m.

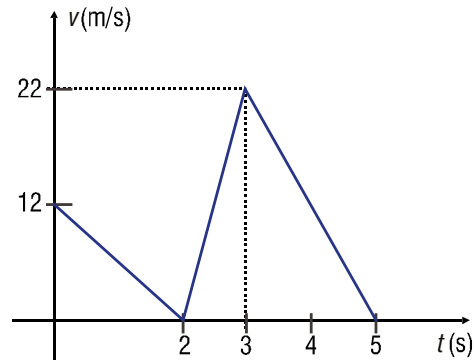


- (A) a aceleração do corpo em cada intervalo de tempo até 11s.
- (B) o deslocamento do corpo de 0 a 11s.
- (C) a distância total percorrida de 0 a 11s.
- (D) a velocidade média entre $t = 2$ s e $t = 7$ s.
- (E) a aceleração média entre $t = 0$ e $t = 11$ s.
- (F) o corpo teria tido um deslocamento maior se andasse durante os 11s a uma velocidade de $v = 1,5$ m/s?

12 (IRODOV) Um automóvel, tendo velocidade inicial nula, se desloca por um caminho reto. Inicialmente, ele trafega com aceleração constante $w = 5$ m/s², logo depois com uma velocidade constante e, finalmente, reduz sua velocidade com a mesma aceleração w , parando. Durante os 25 segundos de movimento, sua velocidade média foi de 72 km/h. Durante quanto tempo o automóvel manteve sua velocidade constante?

13 Dois carros A e B movem-se no mesmo sentido com velocidades V_A e V_B , respectivamente. Quando o carro A está a distância d atrás de B, o motorista do carro A pisa no freio, o que causa uma desaceleração constante de módulo a . Qual a condição necessária para que não haja colisão entre A e B?

14 (AFA) O gráfico abaixo representa o movimento de subida de um protótipo de foguete em dois estágios lançado a partir do solo.



Após ter atingido a altura máxima, pode-se afirmar que o tempo de queda livre desse protótipo será de:

- (A) 1 s.
- (B) 2 s.
- (C) 3 s.
- (D) 4 s.

15 (IME) De dois pontos A e B situados sobre a mesma vertical, respectivamente a 45 m e 20 m do solo, deixam-se cair duas esferas, no mesmo instante. Uma prancha desloca-se no solo horizontalmente com movimento uniforme. Observa-se que as esferas atingem a prancha em pontos que distam 2 m. Nestas condições, supondo $g = 10$ m/s² e desprezando a resistência do ar, qual a velocidade da prancha?

16 Uma partícula é abandonada a partir do repouso, de um ponto situado a 270 m acima do solo. Divida essa altura em três partes tais que sejam percorridas em intervalos de tempo iguais.

17 Uma pedra cai de uma altura B e os últimos 196 m são percorridos em 4,0 s. Desprezando a resistência do ar e fazendo $g = 10$ m/s², calcule h.

18 Um objeto é lançado do solo verticalmente para cima. Considere a resistência do ar desprezível e $g = 10$ m/s². Calcule a distância percorrida pelo objeto durante o último segundo da subida, supondo que ele gaste mais de 1,0 s para atingir o ponto mais alto de sua trajetória.

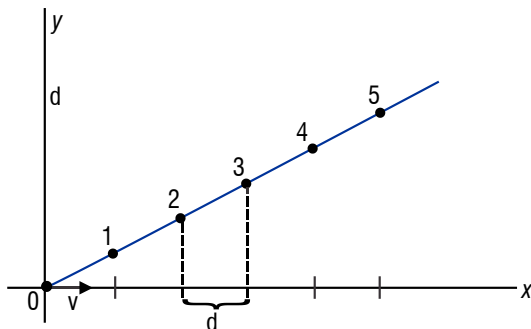
19 Uma pedra cai de um balão, que sobe com velocidade constante de 10 m/s. Se a pedra demora 10 s para atingir o solo, a que altura estava o balão no instante em que iniciou a queda da pedra?

20 Quando um corpo se move no ar com velocidades subsônicas, a força de resistência do ar é dada aproximadamente por: $F = \frac{K d A}{2} v^2$ em que

k é um coeficiente que depende da forma do corpo, d é a densidade do ar, A é a área da maior seção transversal do corpo perpendicular à direção do movimento e v é a velocidade do corpo em relação ao ar. Consideremos uma esfera de 20 N de peso abandonada no ar de grande altura e suponhamos que a resistência do ar seja dada por $F = 0,20 v^2$ (SI). Desprezar o empuxo do ar. Determine:

- (A) o módulo da máxima velocidade que a esfera pode atingir durante a queda;
- (B) os esboços dos gráficos dos módulos da velocidade e da aceleração da esfera em função do tempo.

21 Cinco bolinhas de aço estão presas por eletroímãs ao longo de uma reta r , de equação $y = kx$. As bolas estão em posições equidistantes tais que $d = 0,5$ m. Uma bolinha "0" parte da origem ao longo de x (mesa horizontal sem atrito) com velocidade $v = 2$ m/s, constante, no mesmo instante em que todas as outras são desligadas dos eletroímãs. Calcule o valor de k tal que "0" se choque com a bola número 4. Adote $g = 10$ m/s².



EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Um ônibus com aceleração máxima a e desaceleração máxima b (magnitude da aceleração de frenagem) deve percorrer uma distância d . O motorista pode escolher entre: 1) seguir com aceleração máxima até certo ponto e a partir daí frear com desaceleração máxima até chegar; 2) acelerar até uma certa velocidade, mantê-la constante e depois frear até a chegada. Mostre que a primeira opção é a que minimiza o tempo gasto no trajeto (Sugestão: gráfico $v \times t$) e calcule o tempo mínimo de percurso em função de a, b, d .

02 Em uma rodovia de mão dupla, um carro encontra-se 15 m atrás de um caminhão (distância entre os pontos médios), ambos trafegando a 80 km/h. O carro tem uma aceleração máxima de 3 m/s². O motorista deseja ultrapassar o caminhão e voltar a sua pista 15 m adiante do caminhão. No momento em que começa a ultrapassagem, avista um ônibus que vem vindo no sentido oposto, também a 80 km/h. A que distância mínima precisa estar do outro carro para que a ultrapassagem seja segura?

03 (ITA) Um corpo, inicialmente em repouso, entra em movimento com aceleração escalar constante a , no instante $t = 0$:

- (A) Mostre que as diferenças entre as distâncias percorridas em intervalos de tempos consecutivos e iguais a uma unidade de tempo são sempre as mesmas e têm o mesmo valor numérico de a .
- (B) Determine a distância percorrida durante a n ésima unidade de tempo. Verifique que ela é um múltiplo ímpar da distância percorrida na primeira unidade de tempo.

04 Um trem, cujo comprimento é de 350 m, move-se em uma trajetória retilínea com uma aceleração constante de 0,03 m/s². Passado um tempo de 30 segundos de iniciado o movimento, foi conectado o retrovisor da locomotiva, em seu extremo dianteiro. Transcorridos 60 segundos a partir desse momento, foi colocada a lâmpada de sinalização em seu extremo traseiro. Ache a distância entre os pontos em que ocorreram esses acontecimentos em um referencial ligado ao trem e à Terra. Em qual sentido e com que velocidade constante v com relação à Terra deve mover-se um certo referencial K para que ambos os acontecimentos ocorram no mesmo lugar?

05 Dois carros estão em repouso em duas estradas perpendiculares. O primeiro está a uma distância l da interseção das duas estradas e o segundo a uma distância d do mesmo ponto. Os dois começam a mover-se simultaneamente em direção à interseção, o primeiro com aceleração constante a e o segundo com aceleração constante b . Qual a menor distância que eles tiveram entre si durante seus movimentos?

06 Um corpo começa seu movimento a partir do repouso desde um ponto A. Primeiramente o corpo se move durante um tempo T de maneira uniformemente acelerada. Depois, troca o sentido de sua aceleração, mantendo o módulo da mesma. Dentro de quanto tempo, desde o começo do movimento, o corpo regressará ao ponto A?

07 Um foguete é lançado verticalmente para cima. O combustível, que lhe imprime uma aceleração de 1,5 g durante o período de queima, esgota-se após 30 s. Qual a altitude máxima alcançada pelo foguete desprezando a resistência do ar? Com que velocidade e depois de quanto tempo ele voltaria a atingir o solo?

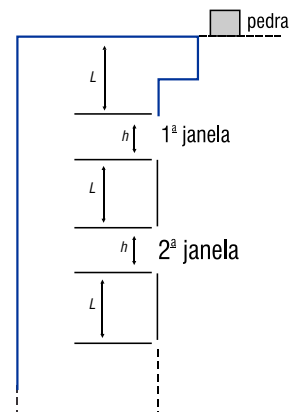
08 Um corpo é abandonado a 5 m de altura. Ao colidir com o chão ele volta verticalmente com uma velocidade igual a 2/3 daquela com a qual ele colidiu. As colisões vão se sucedendo e a velocidade é sempre multiplicada por 2/3. Depois de quanto tempo o corpo para? Considere $g = 10$ m/s².

09 (IME) Um elevador parte do repouso e sobe com aceleração constante igual a 2 m/s² em relação a um observador fixo fora do elevador. Quando sua velocidade atinge o valor $v = 6$ m/s, uma pessoa que está dentro do elevador larga um pacote de uma altura $h = 2,16$ m, em relação ao piso do elevador. Considerando que o elevador continue em seu movimento acelerado ascendente, determine para o observador fixo e para o localizado no interior do elevador:

- (A) o tempo de queda.
- (B) a distância total percorrida pelo pacote até que este encontre o piso do elevador.
- (C) se o pacote entra em movimento descendente.

Considere $g = 10$ m/s².

10 (ITA) A partir do repouso, deixa-se cair uma pedra da borda no alto de um edifício. A figura seguinte mostra a disposição das janelas, com as pertinentes alturas h e distâncias L que se repetem igualmente para as demais janelas, até o térreo. Se a pedra percorre a altura h da primeira janela em t segundos, quanto tempo levará para percorrer, em segundos, a mesma altura h da quarta janela? Despreze a resistência do ar.



11 Um paraquedista salta de uma altura de 1800 m em queda livre. Quando abre o paraquedas, está a uma velocidade v e fica sujeito a uma desaceleração constante igual a 2 m/s^2 até que sua velocidade seja a metade de quando abriu o paraquedas. A partir daí, esta velocidade se mantém constante até atingir o solo. Sabendo que o tempo total de voo é 35 s, qual a duração da queda livre?

12 Uma partícula é abandonada, a partir do repouso, de uma altura h acima do solo. Determine a fórmula do termo geral da sequência obtida pela divisão dessa altura em p partes tais que sejam percorridas em intervalos de tempo iguais.

RASCUNHO

1. Movimento circular

Um movimento circular é aquele em que o corpo se desloca segundo uma trajetória circular. Faremos um estudo do movimento muito próximo ao que já foi abordado nos outros módulos. Entretanto, vamos nos preocupar mais com grandezas angulares, em vez de lineares. Por exemplo: além de verificar a distância percorrida, precisaremos medir o ângulo varrido pelo móvel.

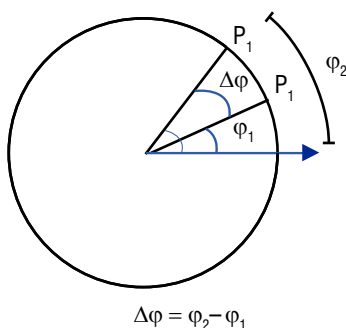
1.1 Fase e deslocamento angular

Unidade no SI: radianos; abreviação: rad

Outra unidade comum: grau (°)

Considere que, no instante $t_0 = 0$, uma partícula se encontra no ponto P_1 de uma circunferência e que, em um instante posterior t , essa partícula se encontra num ponto P_2 . O deslocamento angular ($\Delta\varphi$) sofrido por essa partícula é a diferença entre os ângulos (ou fases) formados com um eixo. Normalmente, utilizamos como eixo de referência uma reta horizontal que possui origem coincidente com o centro da circunferência e positivo para a direita.

Atenção: definir origem e referencial continua sendo essencial. A origem é dada por um eixo arbitrário (como dito acima). O referencial, no caso de movimentos circulares, é positivo de acordo com o sentido do movimento: horário ou anti-horário.



A unidade mais usual de ângulo é o radiano. Para determinar o ângulo nessa unidade, basta calcular a razão entre o arco percorrido e o raio. Por definição, um radiano é o ângulo descrito quando o comprimento do arco é igual ao raio. Portanto, se considerarmos uma volta, teremos que:

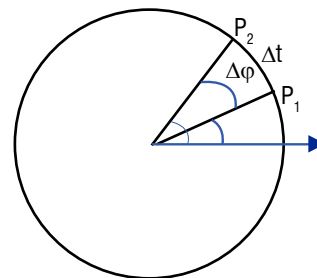
$$\text{arco} = 2\pi R \rightarrow \text{ângulo} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad} \rightarrow 2\pi \text{ rad} = 360^\circ \rightarrow \pi \text{ rad} = 180^\circ$$

1.2 Velocidade angular

Unidade no SI: radiano/segundo; abreviação: rad/s

Outras unidades comuns: grau/segundo

Definimos a velocidade angular média (ω_m) como a razão entre o deslocamento angular e o tempo gasto para tal deslocamento.



$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Convém ressaltar que a velocidade angular não depende do raio do círculo e que esse valor obtido nos fornece uma média de deslocamento angular por unidade de tempo.

Analogamente ao que foi dito na cinemática escalar, existe diferença entre velocidade angular média e velocidade angular instantânea.

A velocidade angular instantânea é dada pela velocidade angular média para um intervalo de tempo tendendo a zero.

$$\omega_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

1.3 Aceleração angular

Unidade no SI: radiano/segundo ao quadrado; abreviação: rad/s²

A aceleração angular média indica o quão rápido a velocidade angular sofre variações. Seu módulo é dado por:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Analogamente ao que foi dito na cinemática escalar, existe diferença entre aceleração angular média e aceleração angular instantânea.

A aceleração angular instantânea é dada pela aceleração angular média para um intervalo de tempo tendendo a zero.

$$\alpha_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

1.4 Relação entre a cinemática angular e escalar

Para mostrar a relação direta entre a velocidade angular média (ω_m) e velocidade escalar média (v_m), vamos partir da definição de radiano.

$$\Delta\varphi = \frac{\text{arco percorrido}}{\text{raio}} = \frac{\Delta S}{R} \rightarrow \Delta S = \Delta\varphi \cdot R$$

Diferenciando em relação ao tempo, temos que:

$$\frac{d}{dt}(\Delta S) = \frac{d}{dt}(\Delta\varphi \cdot R) \rightarrow \frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow v = \omega R$$

Diferenciando em relação ao tempo mais uma vez, temos que:

$$\frac{d}{dt}(v) = \frac{d}{dt}(\omega R) \rightarrow \frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \rightarrow a = \alpha R$$

1.5 Tipos de movimento circular

Os movimentos circulares normalmente seguem um padrão. Ou são movimentos circulares uniformes (MCU), ou são movimentos circulares uniformemente variados (MCUV). No primeiro caso, a velocidade angular é constante e, conseqüentemente sua aceleração angular é nula. A função horária no MCU nasce da mesma ideia do MRU.

$s = s_0 + v t$ $v = c^{te}$ $a = 0$	⇒	dividindo-se cada função horária por R obtemos as equações do MRU	⇒	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$ $\omega = c^{te}$ $\alpha = 0$
--------------------------------------	---	---	---	---

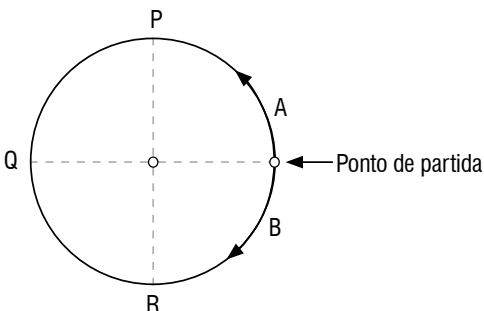
No movimento circular uniformemente variado (MCUV), a aceleração angular é constante e não nula. Nesse caso a velocidade angular sofre alterações iguais para o mesmo intervalo de tempo. Suas funções horárias podem ser determinadas a partir das equações de MUV:

$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$ $v = v_0 + at$ $a = cte.$	⇒	dividindo-se cada função horária por R obtemos as equações do MRU	⇒	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\alpha = c^{te}$
---	---	---	---	--

$v^2 = v_0^2 + 2 a \Delta \varphi$	⇒	dividindo-se cada função horária por R^2 obtemos as equações de Torricelli do MRU	⇒	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha \Delta \varphi$
------------------------------------	---	---	---	---

O comportamento gráfico do MCU é análogo ao comportamento do MRU enquanto os gráficos do MCVU são análogos ao do MRUV.

Exemplo: (U.F.U.) Em uma pista circular de um velódromo, dois ciclistas correm em sentidos opostos. O ciclista A parte com uma velocidade angular constante de $0,50\pi$ rad/s e o ciclista B, com $1,5 \pi$ rad/s, 2,0 segundos após. Eles irão se encontrar pela primeira vez:



- (A) no ponto P.
- (B) entre P e Q.
- (C) no ponto Q.
- (D) entre Q e R.
- (E) no ponto R.

Solução: Adotaremos um sistema de referência com origem no ponto de partida e positivo no sentido anti-horário. O enunciado diz que os ciclistas mantêm a velocidade constante. Temos, portanto, um MCU. Escrevendo as equações horárias, a partir do movimento de B, teremos:

$$\varphi_A = 0 + 0,5 \cdot \pi \cdot (t + 2) \qquad \varphi_B = 0 - 1,5 \cdot \pi \cdot t$$

No encontro a soma dos módulos dos deslocamentos angulares tem que ser igual a 2π (uma volta completa).

Importante: Note como há uma diferença relevante aqui. Em MRU ou MRUV, o encontro acontecia quando as posições eram iguais. Aqui, é importante contar o número de voltas.

Isso significa que eles se encontraram 0,5 segundo após a saída de B.

$$|\varphi_A| + |\varphi_B| = 2\pi \rightarrow 0,5 \cdot \pi \cdot (t + 2) + 1,5 \cdot \pi \cdot t = 2 \cdot \pi \rightarrow 0,5 \cdot t + 1 + 1,5t = 2 \rightarrow 2t = 1 \rightarrow t = \frac{1}{2} s$$

Substituindo em qualquer equação descobriremos o ponto de encontro.

$$\varphi_A = 0,5 \cdot \pi \cdot (0,5 + 2) = 1,25\pi \text{ ou seja, entre os pontos Q e R}$$

Obs.: Igualamos a soma dos módulos dos deslocamentos angulares a 2π pois queremos o primeiro encontro. Se esse movimento continuasse infinito, encontros ocorreriam e poderíamos escrever de uma maneira genérica que

$$|\varphi_A| + |\varphi_B| = 2 \cdot k \cdot \pi$$

Em que k representa o numero de vezes do encontro.

1.6 Período e frequência

Período (T) é o tempo gasto para que o corpo execute um ciclo. No SI, a unidade de período é o segundo [s].

Frequência (f) é o número de ciclos dados em uma unidade de tempo. No SI, a unidade é o Hertz [Hz] = [ciclos/s]. Contudo, existe uma unidade ainda muito utilizada denominada rpm (rotações por minuto). Sua relação com o Hertz é $1 \text{ Hz} = 60 \text{ rpm}$.

A partir das definições apresentadas podemos escrever que:

- Pela definição
- 1 volta $\rightarrow T$ segundos
- f voltas $\rightarrow 1$ segundo

Então:

$$f \cdot T = 1 \quad \text{ou} \quad T = \frac{1}{f}$$

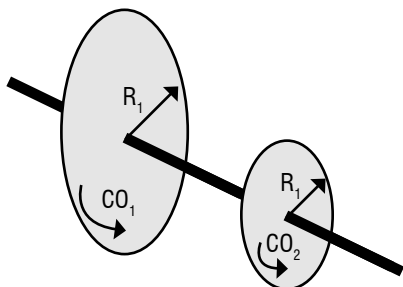
A velocidade angular no MCU para k voltas pode ser escrita como:

$$\omega = \frac{k \cdot 2\pi}{k \cdot T} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega = 2\pi \cdot f$$

1.7 Transmissão de movimento

A transmissão de movimentos pode ser feita basicamente de duas maneiras: transmitindo velocidade angular (fazendo com que discos, rodas, polias ou engrenagens se toquem) ou transmitindo velocidade linear (interligando os corpos por meio de uma correia ou corrente).

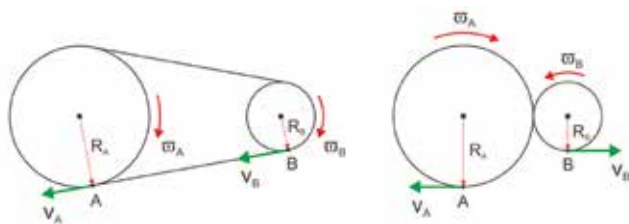
Na transmissão de velocidade angular, os eixos dos discos são dispostos coaxialmente. Dessa maneira, quando um executar k voltas, o outro também terá executado k voltas.



Como a rotação das polias é igual à do eixo:

$$\omega_1 = \omega_2 \begin{cases} \omega_1 = \omega_2 \\ T_1 = T_2 \\ \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} \end{cases}$$

Na transmissão de velocidade linear, os discos são interligados de modo que quando um deles tem um deslocamento escalar o outro disco tenha o mesmo deslocamento.



Daí, a velocidade de todos os pontos da correia vai ser a mesma, assim como os “dentes” das polias. Portanto:

$$v_1 = v_2 \begin{cases} \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \\ f_1 R_1 = f_2 R_2 \\ \frac{R_1}{T_1} = \frac{R_2}{T_2} \end{cases}$$

Uma consequência imediata é que quanto maior o raio do disco menor será sua velocidade angular.

Ex.: (Unicamp-2005) Em 1885, Michaux lançou o biciclo com uma roda dianteira diretamente acionada por pedais (Fig. A). Através do emprego da roda dentada, que já tinha sido concebida por Leonardo da Vinci, obteve-se melhor aproveitamento da força nos pedais (Fig. B). Considere que um ciclista consiga pedalar 40 voltas por minuto em ambas as bicicletas.

Dado: $\pi = 3$

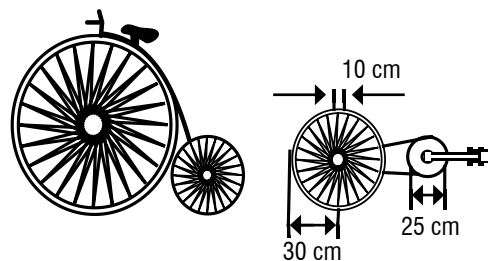


Figura A

Figura B

- (A) Qual a velocidade de translação do biciclo de Michaux para um diâmetro da roda de 1,20 m?
- (B) Qual a velocidade de translação para a bicicleta padrão aro 60 (Fig. B)?

Solução:

- (A) No biciclo de Michaux a frequência imposta é exatamente a frequência de movimento. Assim:

$$v = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cong 2 \cdot 3 \cdot \frac{40}{60} \cdot 0,6 \cong 2,4 \text{ m/s}$$

- (B) Na bicicleta temos que a velocidade linear (escalar) da coroa dentada é a mesma do pinhão.

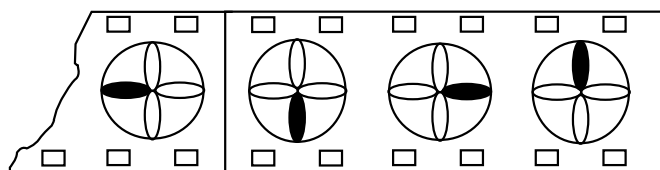
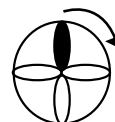
$$v_{coroa} = v_{pinhão} \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot \frac{d_c}{2} = \omega_p \cdot \frac{d_p}{2} \rightarrow 2 \cdot 3 \cdot \frac{40}{60} \cdot 25 = \omega_p \cdot 10 = 10 \text{ rad/s}$$

A velocidade angular do pinhão é a mesma velocidade angular da roda

$$\omega_{pinhão} = \omega_{roda} \rightarrow 10 = \frac{v_{roda}}{R} \rightarrow v_{roda} = 10 \cdot 0,3 \rightarrow v_{roda} = 3 \text{ m/s}$$

Exemplo: (Ufrj-1998) O olho humano retém durante 1/24 de segundo as imagens que se formam na retina. Essa memória visual permitiu a invenção do cinema. A filmadora bate 24 fotografias (fotogramas) por segundo. Uma vez revelado, o filme é projetado à razão de 24 fotogramas por segundo. Assim, o fotograma seguinte é projetado no exato instante em que o fotograma anterior está desaparecendo de nossa memória visual, o que nos dá a sensação de continuidade.

Filma-se um ventilador cujas pás estão girando no sentido horário. O ventilador possui quatro pás simetricamente dispostas, uma das quais pintadas de cor diferente, como ilustra a figura. Ao projetarmos o filme, os fotogramas aparecem na tela na seguinte seqüência o que nos dá a sensação de que as pás estão girando no sentido anti-horário.



Calcule quantas rotações por segundo, no mínimo, as pás devem estar efetuando para que isto ocorra.

Solução: A ilusão de que as pás estão girando no sentido oposto ao real é devido ao fato de nosso cérebro interpretar que o movimento, de um fotograma para o outro, se dá no sentido do menor deslocamento angular. O olho humano tira fotos da realidade de 1/24 a 1/24 segundo e “junta” as sucessivas imagens, sempre atribuindo o menor caminho a cada objeto.

Entre dois fotogramas consecutivos, a pá destacada efetua, no mínimo, 3/4 de volta, em um intervalo de tempo de 1/24 s. Portanto a frequência mínima de rotação é

$$f = \frac{3/4}{1/24} = \frac{3}{4} \cdot \frac{24}{1} = 18 \text{ Hz}$$

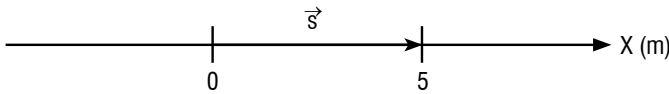
2. Cinemática vetorial

Após entendermos todos os conceitos de movimento aplicados a movimentos retilíneos ou circulares, vamos aprender como estender cada assunto a qualquer movimento. Para isso, precisamos usar os conceitos vetoriais das grandezas já previamente apresentadas.

2.1 Vetor posição (\vec{s})

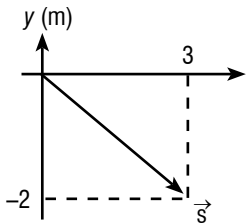
O vetor posição é um vetor com centro na origem de referência e extremidade na posição do corpo em questão. Sua análise pode ser unidimensional, bidimensional ou tridimensional, como mostram os exemplos a seguir:

Análise unidimensional



$$|\vec{s}| = 5m \quad \vec{s} = \hat{i}$$

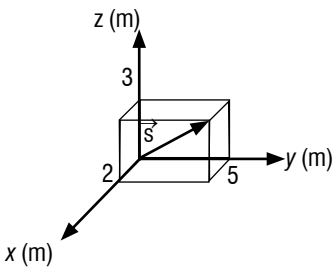
Análise bidimensional



$$|\vec{s}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}m$$

$$\vec{s} = 3\hat{i} - 2\hat{j} \text{ ou } \vec{s} = (3, -2)$$

Análise tridimensional



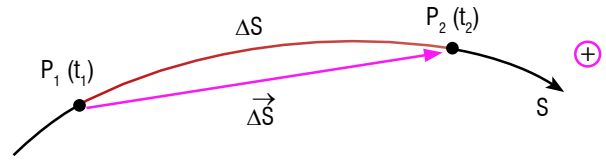
$$|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{38}m$$

$$\vec{s} = 2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

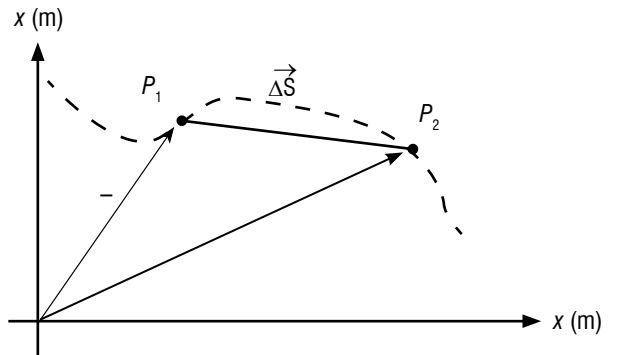
$$\vec{s} = (2, 5, 3)$$

2.2 Vetor deslocamento ($\vec{\Delta S}$)

O vetor deslocamento de um corpo entre os instantes t_1 e t_2 é o vetor representado por um segmento orientado de origem em P_1 (posição do corpo no instante t_1) e extremidade em P_2 (posição do corpo no instante t_2).



Por definição, o vetor deslocamento é a diferença entre os vetores posições de P_1 e P_2 .



Observa-se que o módulo do vetor deslocamento tem como valor máximo o módulo do deslocamento escalar (já que uma reta é a menor distância entre dois pontos). A igualdade só ocorre nos movimentos retilíneos.

2.3 Velocidade vetorial média

É o quociente entre o vetor deslocamento ($\vec{\Delta S}$) e o correspondente intervalo de tempo.

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{\Delta S}}{\Delta t}$$

Note que o módulo do vetor velocidade média tem como valor máximo o módulo da velocidade escalar média. Esses módulos só serão iguais nos movimentos retilíneos porque é a única situação em que coincidem os valores do deslocamento escalar e do vetor deslocamento.

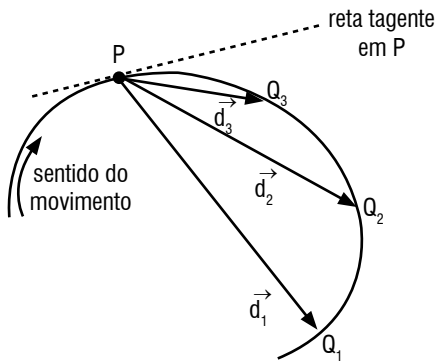
Além disso o vetor velocidade média tem a mesma direção e sentido do vetor deslocamento, pois se trata da multiplicação de um vetor por um escalar positivo.

2.4 Velocidade vetorial instantânea

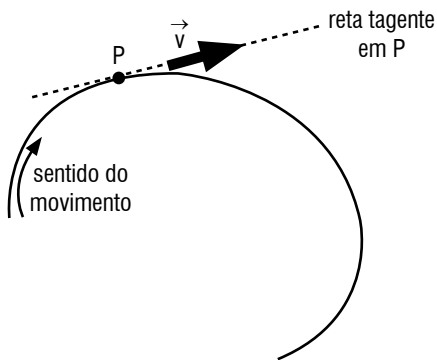
A velocidade vetorial instantânea é o limite da velocidade vetorial para um intervalo de tempo tendendo a zero. Matematicamente:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta S}}{\Delta t}$$

Em outras palavras, se quisermos determinar a velocidade vetorial instantânea de uma partícula quando esta passa por um ponto P, devemos tomar outro ponto Q da trajetória e fazer P tender a Q.



Quanto mais próximo Q está de P, maior será a aproximação do vetor deslocamento com a reta tangente a P.



IMPORTANTE: Isso mostra que o vetor velocidade instantânea é sempre tangente à trajetória.

2.5 Vetor aceleração

O vetor aceleração média indica a razão entre a variação de velocidade vetorial de um corpo e o intervalo de tempo. Lembre-se de que, para que haja essa variação de do vetor velocidade, não necessariamente precisa haver mudança no módulo (um vetor tem direção e sentido, além do módulo).

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t}$$

O vetor aceleração média tem a mesma direção e sentido do vetor variação de velocidade (subtração vetorial), pois se trata da multiplicação de um vetor por um escalar positivo.

O vetor aceleração instantânea é o limite desse quociente quando o intervalo de tempo tende a zero.

$$\vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

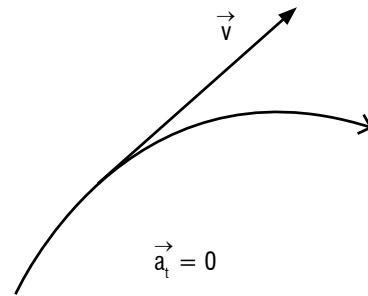
A aceleração instantânea pode ser subdividida em duas: a aceleração tangencial e a aceleração centrípeta.

2.5.1. Aceleração tangencial

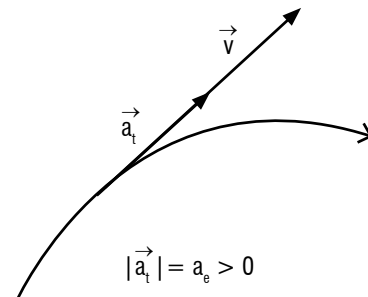
É responsável pela mudança de intensidade (módulo) do vetor velocidade instantânea.

A componente tangencial da aceleração (\vec{a}_t) tem sempre a mesma direção do vetor velocidade instantânea. O sentido vai depender do tipo de movimento – acelerado, retardado ou uniforme.

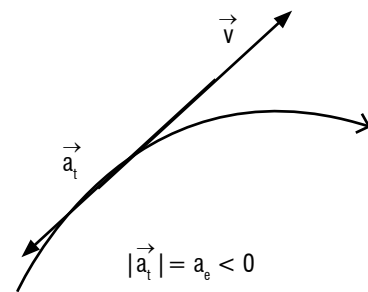
Uniforme



Acelerado



Retardado



2.5.2 Aceleração centrípeta

É responsável pela mudança de direção do vetor velocidade instantânea.

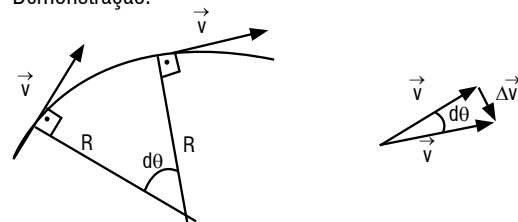
A componente centrípeta da aceleração (\vec{a}_{cp}) tem sempre a direção radial e sentido apontado para o centro.

Atenção: esta componente de aceleração é nula somente para movimentos retilíneos.

O módulo da aceleração centrípeta é dado pela expressão:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}$$

Demonstração:



$$|\Delta \vec{v}| = v \cdot d\theta$$

$$|\Delta \vec{s}| = R \cdot d\theta$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{v \cdot d\theta}{\frac{\Delta s}{v}} = \frac{v^2}{\frac{\Delta s}{d\theta}}$$

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{v^2}{R}$$

Atenção!

Essa expressão pode ser utilizada em todo movimento curvilíneo, desde que se encontre o raio de curvatura do referido trecho da curva (basta trocar o R pelo raio de curvatura).

Ex.: Um corpo lançado obliquamente possui no ponto mais alto da trajetória uma velocidade de 5 m/s (horizontal). Considerando que nesse local o corpo fica sujeito somente à aceleração da gravidade (10 m/s²), determine o raio de curvatura nesse mesmo ponto.

Solução: No ponto de altura máxima a aceleração é ortogonal a velocidade e, portanto, é a componente centrípeta. Em outras palavras, nessa situação, a aceleração da gravidade desempenha o papel de aceleração centrípeta (já que é perpendicular à velocidade).

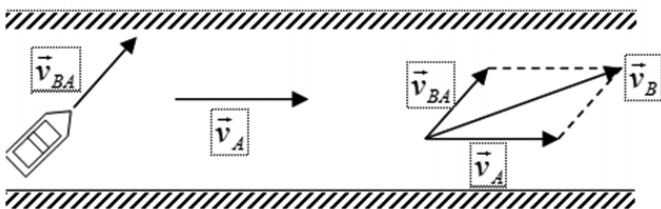
$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \rightarrow 10 = \frac{5^2}{R} \rightarrow R = 2,5m$$

2.6 Movimento relativo e composição de movimentos

Quando se quer mudar o referencial de um vetor, matematicamente, basta seguir a seguinte regra: $X_{a,b} = X_{a,c} + X_{c,b} = X_{a,c} - X_{b,c}$.

Importante: note que todas as contas desse assuntos são vetoriais!!!

Ex.: Considere a figura seguinte, em que um barco atravessa um rio. Seja $\vec{v}_{B,A}$ a velocidade do barco em relação às águas e $\vec{v}_{A,T}$ a velocidade das águas em relação às margens (Terra)



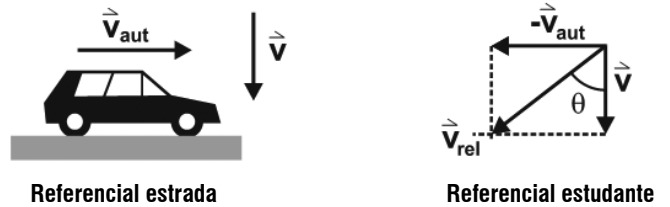
Aplicando a definição de velocidade relativa $\vec{v}_{B,A} = \vec{v}_{B,T} - \vec{v}_{A,T}$, obtemos a velocidade do barco em relação as margens (mesmo referencial da velocidade das águas):

$$\vec{v}_{B,T} = \vec{v}_{B,A} + \vec{v}_{A,T}$$

Exemplo: (Ufal) De dentro de um automóvel em movimento retilíneo uniforme, numa estrada horizontal, um estudante olha pela janela lateral e observa a chuva caindo, fazendo um ângulo θ com a direção vertical, com $\text{sen}\theta = 0,8$ e $\text{cos}\theta = 0,6$. Para uma pessoa parada na estrada, a chuva cai

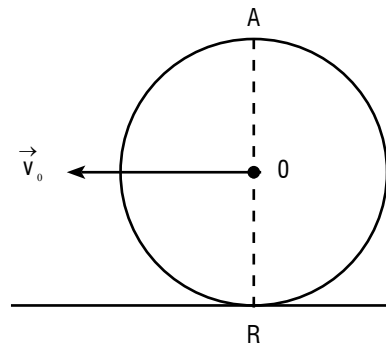
verticalmente, com velocidade constante de módulo v . Se o velocímetro do automóvel marca 80,0 km/h, pode-se concluir que o valor de v é igual a:
 (A) 48,0 km/h.
 (B) 60,0 km/h.
 (C) 64,0 km/h.
 (D) 80,0 km/h.
 (E) 106,7 km/h.

Solução: A figura mostra o automóvel e as velocidades do automóvel \vec{v}_{aut} e da chuva (\vec{v}), para a pessoa parada na beira da estrada. O diagrama vetorial mostra a composição dessas velocidades para o estudante.



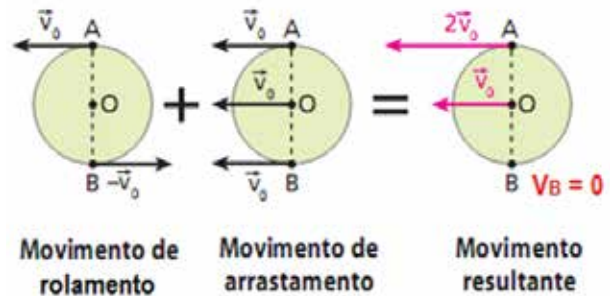
$$\text{tg}\theta = \frac{v_{aut}}{v} \Rightarrow \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} = \frac{v_{aut}}{v} \Rightarrow \frac{0,8}{0,6} = \frac{80}{v} \Rightarrow v = 60 \text{ km/h}$$

Ex.: Um disco roda sobre uma superfície plana, sem deslizar. A velocidade do centro O é \vec{v}_0 . Em relação ao plano:



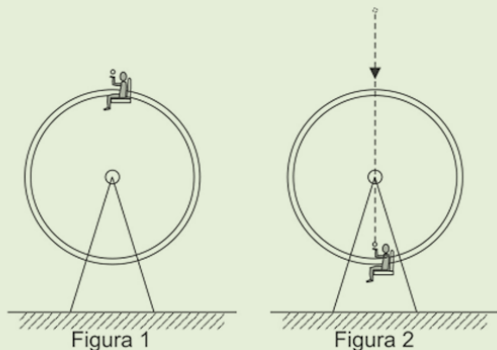
- (A) Qual a velocidade do ponto A?
- (B) Qual a velocidade do ponto B?

Solução: Os pontos A e B têm dois movimentos: um provocado pela rotação do disco, e outro provocado pela translação. O movimento resultante, observado do plano de rolagem, é a composição desses movimentos parciais. A figura abaixo ilustra essa composição.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Uma pessoa brincando em uma roda-gigante, ao passar pelo ponto mais alto, arremessa uma pequena bola (Figura 1), de forma que esta descreve, em relação ao solo, a trajetória de um lançamento vertical para cima.



A velocidade de lançamento da bola na direção vertical tem o mesmo módulo de velocidade escalar (v) da roda gigante, que executa um movimento circular uniforme. Despreze a resistência do ar, considere a aceleração da gravidade igual a g e $\pi = 3$. Se a pessoa consegue pegar a bola no ponto mais próximo do solo (figura 2), o período de rotação da roda-gigante pode ser igual a

- (A) $\frac{v}{g}$
- (B) $\frac{10v}{7g}$
- (C) $\frac{20v}{3g}$
- (D) $12\frac{v}{g}$

Solução:



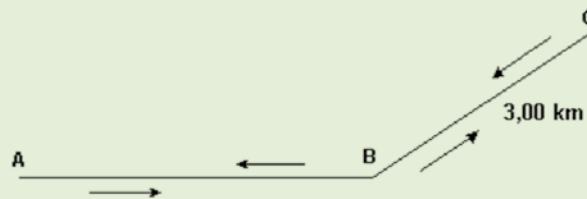
O intervalo de tempo entre o começo e o fim é $T/2$.

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} \rightarrow 0 = 2R + v \cdot \frac{T}{2} - \frac{g \left(\frac{T}{2}\right)^2}{2} \rightarrow \frac{g \cdot T^2}{8} - v \cdot \frac{T}{2} - 2R = 0$$

Porém $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} \rightarrow R = \frac{v \cdot T}{6}$. Substituindo teremos:

$$\frac{g \cdot T^2}{8} - v \cdot \frac{T}{2} - 2 \frac{v \cdot T}{6} = 0 \rightarrow 3g \cdot T^2 - 12v \cdot T - 8v \cdot T = 0 \rightarrow T = \frac{20}{3} \cdot \frac{v}{g}$$

02 Na figura, um ciclista percorre o trecho AB com velocidade escalar média de 22,5 km/h e, em seguida, o trecho BC de 3,00 km de extensão. No retorno, ao passar em B, verifica ser de 20,0 km/h sua velocidade escalar média no percurso então percorrido, ABCB. Finalmente, ele chega em A perfazendo todo o percurso de ida e volta em 1,00 h, com velocidade escalar média de 24,0 km/h. Assinale o módulo v do vetor velocidade média referente ao percurso ABCB.



- (A) $v = 12,0$ km/h
- (B) $v = 12,00$ km/h
- (C) $v = 20,0$ km/h
- (D) $v = 20,00$ km/h
- (E) $v = 36,0$ km/h

Solução:

Considerando o deslocamento em todo o trajeto

$$\Delta S = v \cdot \Delta t = 24 \cdot 1 = 24 \text{ km}$$

A distância AB pode ser calculada da seguinte forma:

$$\Delta S = 2 \cdot AB + 2 \cdot BC \rightarrow \Delta S/2 = AB + BC \rightarrow AB =$$

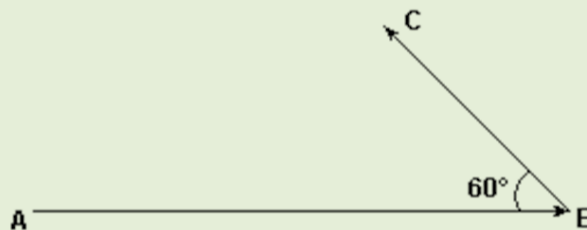
$$\Delta S/2 - BC = \frac{24}{2} - 3 = 12 - 3 = 9 \text{ km}$$

Cálculo do tempo total gasto no trecho ABCB

$$v = \Delta S / \Delta t \rightarrow \Delta t = \Delta S / v = \frac{9+6}{20} = \frac{15}{20} = 0,75h$$

$$\text{O módulo da velocidade vetorial média é } \frac{9}{0,75} = 12 \text{ km/h}$$

03 Duas partículas, X e Y, em movimento retilíneo uniforme, têm velocidades respectivamente iguais a 0,2 km/s e 0,1 km/s. Em um certo instante t_1 , X está na posição A e Y na posição B, sendo a distância entre ambas de 10 km. As direções e os sentidos dos movimentos das partículas são indicados pelos segmentos orientados AB e BC, e o ângulo \widehat{ABC} mede 60° , conforme o esquema.



Sabendo-se que a distância mínima entre X e Y vai ocorrer em um instante t_2 , o valor inteiro mais próximo de $t_2 - t_1$, em segundos, equivale a:

- (A) 24
- (B) 36
- (C) 50
- (D) 72

Solução:

Vamos considerar que o ponto A é a origem de um sistema cartesiano e que o segmento AB esteja contido no eixo das abscissas. Desta forma, podemos dizer que as equações paramétricas da partícula X são $y = 0$ e $x = 0,2t$ e que as equações paramétricas da partícula Y são $y = 0,1t \cdot \text{sen}(60)$ e $x = 10 - 0,1t \cdot \text{cos}(60)$.

Importante: A ideia de desenhar a figura para um instante genérico t e, a partir disso, obrigá-lo ou calculá-lo matematicamente algumas coisas é muito usada na cinemática. Fique atento a isso!

Para calcularmos a distância mínima vamos considerar um instante t . A distância entre os pontos X e Y, nesse instante, é dada pelo teorema de Pitágoras e desta forma temos:

$$d = \sqrt{[\Delta x^2 + \Delta y^2]}$$

$$d = \sqrt{[(10 - 0,05 \cdot t - 0,2 \cdot t)^2 + (0,05 \cdot t \sqrt{3})^2]}$$

$$d = \sqrt{[100 - 5t + 0,0625 \cdot t^2 + 0,0075 \cdot t^2]}$$

$$d = \sqrt{[100 - 5 \cdot t + 0,07 \cdot t^2]}$$

A distância d é função do tempo t e esta função é quadrática com concavidade para cima, o que significa que possui ponto de mínimo. Assim:

$$t = -b / (2a) = \frac{5}{0,14} = 35,7s \approx 36s$$

04 Considere dois carros que estejam participando de uma corrida. O carro A consegue realizar cada volta em 80 segundos, enquanto o carro B é 5,0% mais lento. O carro A é forçado a uma parada, nos boxes ao completar a volta número 6. Incluindo aceleração, desaceleração e reparo o carro A perde 135 segundos. Qual deve ser o número mínimo de voltas completas da corrida para que o carro A possa vencer?

Solução:

$$\omega_A = \frac{2\pi}{T_A} = \frac{\pi}{40} \text{ rad/s} \quad \omega_B = \frac{2\pi}{T_B} = \frac{2\pi}{1,05 \cdot T_A} = \frac{\pi}{42} \text{ rad/s}$$

Adotando o ponto de largada como origem do sistema de referência teremos:

$$\varphi_A = \frac{\pi}{40} \cdot t \quad \varphi_B = \frac{\pi}{42} \cdot t$$

Enquanto A dá 6 voltas B percorre $\varphi_B = \frac{\pi}{42} \cdot (480 + 135) = \frac{615\pi}{42} \text{ rad}$

A partir daí as equações horárias são:

$$\varphi_A = 12\pi + \frac{\pi}{40}t \quad \varphi_B = \frac{615\pi}{42} + \frac{\pi}{42}t$$

No próximo encontro entre os móveis (após a volta do móvel A):

$$12\pi + \frac{\pi}{40}t = \frac{615\pi}{42} + \frac{\pi}{42}t \rightarrow t = 2220 \text{ s}$$

Nesse intervalo de tempo o móvel A executa 27 voltas completas

$$\left(\frac{2220}{80} = 27,75\right)$$

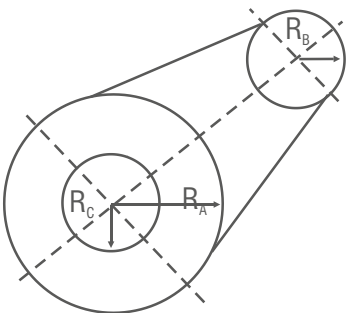
Para vencer ele precisará de $6 + 27 + 1 = 34$ voltas.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 (EFOMM) Uma bomba centrífuga gira a 1800 rpm. A velocidade tangencial de um volume de fluido impelido pelo seu rotor, de raio igual a 12 cm, é em m/s de:

- (A) $6,1 \pi$
- (B) $7,2 \pi$
- (C) $8,6 \pi$
- (D) $9,3 \pi$
- (E) $10,4 \pi$

02



Na figura acima, temos um sistema de transmissão de movimento de um dos motores auxiliares de um navio, formado por três discos A, B e C. Os raios dos discos B e C são iguais e correspondem à metade do raio do disco A. Sabe-se que o disco A move-se solidariamente com o disco B através de uma correia, e que os discos A e C estão ligados ao mesmo eixo central.

Analise as afirmativas abaixo:

- I. A velocidade angular do disco C é metade do disco B.
- II. A velocidade escalar de um ponto do perímetro do disco A é o dobro da velocidade escalar de um ponto do perímetro do disco C.
- III. Os discos B e C têm a mesma velocidade escalar em pontos de seus perímetros.
- IV. O período do disco C é o dobro do período do disco B.
- V. As frequências dos discos A e B são iguais.

Com base nessas informações, assinale a alternativa correta.

- (A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
- (B) As afirmativas II e I são verdadeiras.
- (C) As afirmativas III e IV são verdadeiras.
- (D) As afirmativas I, II, IV são verdadeiras.
- (E) As afirmativas I e IV são verdadeiras.

03 (AFA) No avião de treinamento T-25 utilizado na AFA, a hélice gira 2700 rpm durante a corrida no solo e, após a decolagem, a rotação é reduzida para 2450 rpm em apenas 5 segundos. Supondo-se que a hélice sofre uma desaceleração uniforme, a aceleração angular da hélice, em valor absoluto, vale aproximadamente, em rad/s^2 :

- (A) 1,67.
- (B) 3,14.
- (C) 5,23.
- (D) 8,72.

04 (AFA) Duas partículas partem da mesma posição, no mesmo instante, e descrevem a mesma trajetória circular de raio R . Supondo que elas girem no mesmo sentido a $0,25$ rps e $0,2$ rps, após quantos segundos estarão juntas novamente na posição de partida?

- (A) 5.
- (B) 10.
- (C) 15.
- (D) 20.

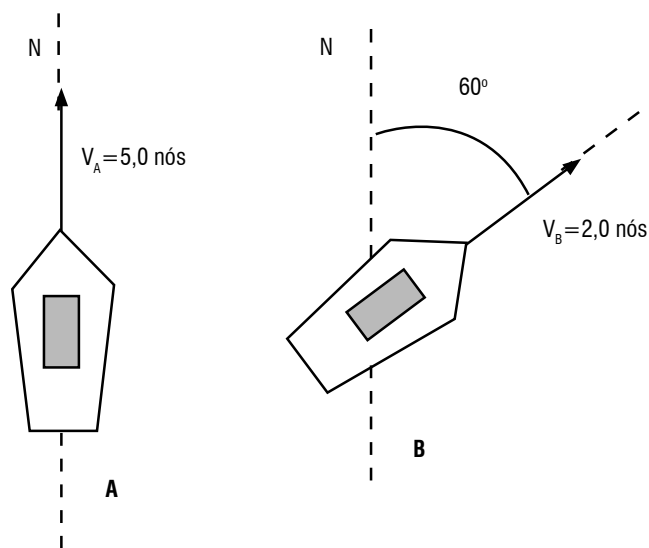
05 (AFA) O odômetro de um automóvel é um aparelho que mede a distância percorrida. Na realidade, esse aparelho é ajustado para fornecer a distância percorrida através do número de voltas e do diâmetro do pneu. Considere um automóvel cujos pneus, quando novos, têm diâmetro D . Suponha que os pneus tenham se desgastado e apresentem 98% do diâmetro original. Quando o velocímetro assinalar 100 km/h, a velocidade real do automóvel será:

- (A) 104 km/h.
- (B) 102 km/h.
- (C) 98 km/h.
- (D) 96 km/h.

06 Uma lancha atravessa um rio, deslocando-se segundo uma trajetória perpendicular à margem. Sua velocidade em relação à água é constante e tem módulo igual a $2\sqrt{3}$ m/s. A velocidade da correnteza do rio em relação a um observador parado na sua margem é constante e vale 4 m/s. O módulo da velocidade da lancha em relação a este observador é:

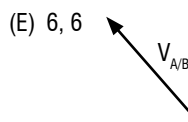
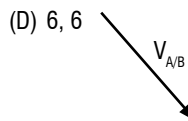
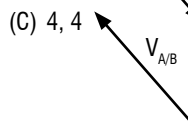
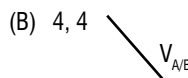
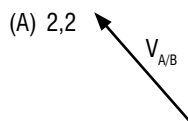
- (A) 2 m/s.
- (B) 4 m/s.
- (C) 6 m/s.
- (D) 8 m/s.
- (E) 10 m/s.

07 (EFOMM) Observe as figuras a seguir.

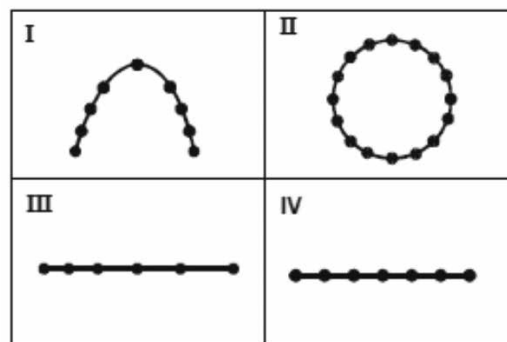


Em uma região de mar calmo, dois navios, A e B , navegam com velocidades, respectivamente, iguais a $v_A = 5,0$ nós no rumo norte e $v_B = 2,0$ nós na direção 60° NE, medidas em relação à terra, conforme indica a figura acima. O comandante do navio B precisa medir a velocidade do navio A em relação ao navio B . Que item informa o módulo, em nós, e esboça a direção e sentido do vetor velocidade a ser medido?

(Dado: $\cos 60^\circ = 0,5$.)



08 (AFA) As figuras abaixo apresentam pontos que indicam as posições de um móvel, obtidas em intervalos de tempos iguais. Em quais figuras o móvel apresenta aceleração **não** nula?

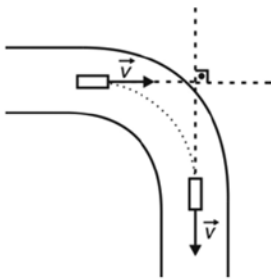


- (A) Apenas em I, III e IV.
- (B) Apenas em II e IV.
- (C) Apenas I, II e III.
- (D) Em I, II, III e IV.

09 (AFA) Considere que dois vetores \vec{A} e \vec{B} fazem entre si um ângulo de 60° , quando têm suas origens sobre um ponto em comum. Além disso, considere também, que o módulo de \vec{B} é duas vezes maior que o de \vec{A} , ou seja, $B = 2A$. Sendo o vetor soma $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$ e o vetor diferença $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$, a razão entre os módulos S/D vale:

- (A) $\frac{\sqrt{21}}{3}$.
- (B) 1.
- (C) $\sqrt{7}$.
- (D) 3.

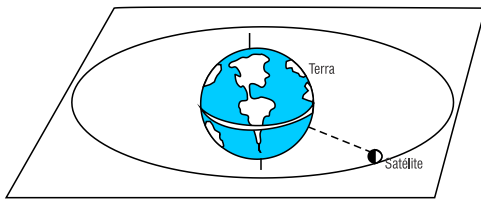
10 (AFA) Um carro percorre uma curva circular com velocidade linear constante de 15 m/s completando-a em $5\sqrt{2}$ s, conforme figura abaixo.



É correto afirmar que o módulo da aceleração média vetorial experimentada pelo carro nesse trecho, em m/s^2 , é:

- (A) 0.
- (B) 1,8.
- (C) 3,0.
- (D) 5,3.

11 Um satélite geoestacionário, desses usados em telecomunicações, é colocado em órbita circular no plano do equador terrestre. Como seu próprio nome diz, esse satélite se mantém sempre sobre um mesmo local da Terra.



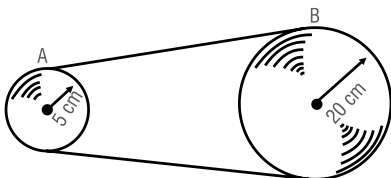
- (A) Calcule o período de translação do satélite em relação à Terra.
- (B) Compare a velocidade angular do satélite (ω_s) com a velocidade angular do ponto da superfície da Terra sobre o qual ele se encontra (ω_T).
- (C) Compare a velocidade linear do satélite (V_s) com a do ponto referido no item anterior (v_T).

12 Uma formiga encontra-se no centro de um disco de raio igual a 20 cm, que executa rotação uniforme com frequência de 30 rpm. A formiga passa, então, a caminhar ao longo de um raio do disco, dirigindo-se para a sua periferia com velocidade escalar constante e igual a 5 cm/s em relação ao disco. Ao chegar a um ponto periférico, quantas voltas a formiga terá dado?

13 Sabendo que o raio da Terra mede aproximadamente 6.400 km, determine:

- (A) a velocidade escalar angular do movimento de rotação da Terra;
- (B) a velocidade escalar linear de um ponto situado no equador, relativa ao movimento de rotação;
- (C) a velocidade escalar linear de um ponto da superfície situado a 60° de latitude, relativa ao movimento de rotação.

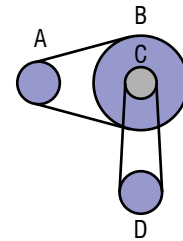
14 Na situação esquematizada na figura, temos duas polias A e B acopladas através de uma correia inextensível. Quando a polia A gira, movimentando a correia que, por sua vez, faz a polia B girar também.



Admitindo que não haja escorregamento entre a correia e as polias, e supondo que a polia A execute 60 rpm, calcule a frequência de rotação da polia B.

15 Dois ciclistas partem de um mesmo ponto de uma pista circular de raio igual a 100 m, no mesmo instante e em sentidos contrários. Suas velocidades escalares lineares valem 2π m/s e 3π m/s. Após quanto tempo eles se encontrarão pela primeira vez?

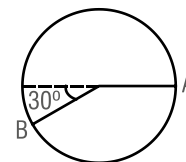
16 (EFOMM) No sistema de transmissão de movimento da figura abaixo, a polia motora "A" tem 500 mm de diâmetro e gira a 120 rpm. As polias intermediárias "B" e "C", solidárias entre si (soldadas uma na outra), têm, respectivamente, 1000 mm e 200 mm. A rotação da polia "D", de diâmetro 400 mm, é de:



- (A) 120 rpm.
- (B) 80 rpm.
- (C) 60 rpm.
- (D) 20 rpm.
- (E) 30 rpm.

17 Às 12 horas, o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos de um relógio se sobrepõem. Depois de quanto tempo ocorre a próxima sobreposição?

18 Em um certo instante, um ponto material parte de A com MCU de período igual a 30 s, em sentido anti-horário. Um segundo depois, parte de B outro ponto material com MCU de período igual a 120 s, em sentido horário.



Determine quanto tempo depois da partida de A os pontos se encontrarão pela primeira vez.

19 (EFOMM) Um satélite meteorológico envia para os computadores de bordo de um navio contêiner informações sobre um tornado que se forma na rota desse navio a 54,0 milhas a boreste (direita). Segundo as informações, o tornado tem forma cônica de 252 m de altura e 84 m de raio. A velocidade angular é aproximadamente 45 rad/s. O módulo da velocidade vetorial de rotação do tornado, em km/h, em um ponto situado a 3 m do plano de sua base, vale:

- (A) 162.
- (B) 242.
- (C) 308.
- (D) 476.
- (E) 588.

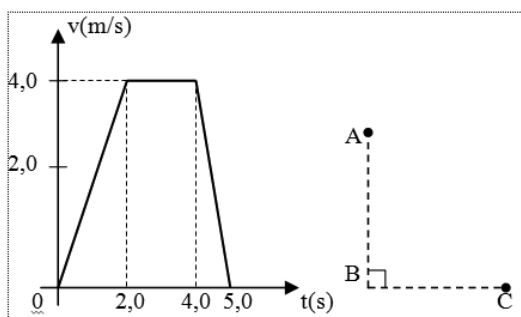
20 Uma partícula em movimento circular uniformemente variado tem sua velocidade angular alterada de 2π rad/s para 10π rad/s, durante 20 s. Calcule o número de voltas que a partícula efetua nesse intervalo de tempo.

21 Um ventilador gira à razão de 900 rpm. Ao desligá-lo, seu movimento passa a ser uniformemente retardado, até parar após 75 voltas. Qual o tempo decorrido desde o momento em que fio foi desligado até sua parada completa?

22 Um garoto, perdido em uma região desértica plana, desloca-se sequencialmente 4,0 km para o norte, 2,0 km para o leste e 2,5 km para o sul, gastando 10 h no percurso total. Determine:

- (A) o módulo da velocidade escalar média do garoto.
- (B) a intensidade da sua velocidade vetorial média.

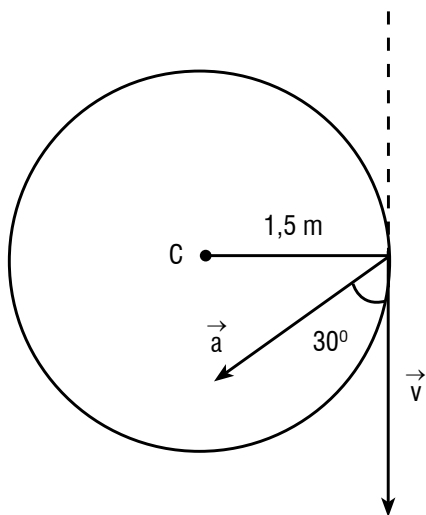
23 Uma partícula parte do ponto A da trajetória ABC, esquematizada abaixo, no instante $t_0 = 0$, atinge o ponto B no instante $t_1 = 3,0$ s e para no ponto C no instante $t_2 = 5,0$ s. A variação de sua velocidade escalar pode ser observada no gráfico abaixo:



Considerando o intervalo de 0 a 5,0 s, calcule para a partícula:

- (A) o valor absoluto da velocidade escalar média.
- (B) a intensidade da velocidade vetorial média.

24 Uma partícula percorre uma circunferência de 1,5 m de raio no sentido horário, como está representado na figura. No instante t_0 , a velocidade vetorial da partícula é \vec{v} e a aceleração vetorial é \vec{a} .

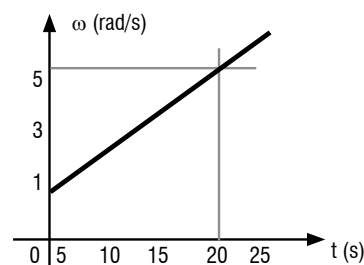


Sabendo que $|\vec{v}| = 3,0$ m/s:

- (A) calcule $|\vec{a}|$;
- (B) diga se no instante t_0 o movimento é acelerado ou retardado. Justifique sua resposta.

25 Um barco motorizado desce um rio deslocando-se de um porto A até um porto B, distante 36 km, em 0,90 h. Em seguida, esse mesmo barco sobe o rio deslocando-se do porto B até o porto A em 1,2 h. Sendo v_B a velocidade do barco em relação às águas e v_C a velocidade das águas em relação margens, calcular v_C e v_B .

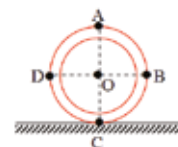
26



Um flutuador em colchão de ar, desloca-se em um círculo horizontal, sobre uma mesa preso à extremidade de um fio inextensível, de comprimento 0,8 m velocidade angular mostrada no gráfico (a propulsão é dada pelos gases expelidos pelo aparelho). Suponha a massa do aparelho constante. Calcule as acelerações angular γ , tangencial (a_t) e centrípeta (a_c) e assinale a resposta correta abaixo.

	γ (rad/s ²)	a_t (m/s ²)	a_c (m/s ²)
(A)	0,25	0,20	$0,8 + 0,32 t + 0,032 t^2$
(B)	0,20	0,16	$0,8 + 0,4 t + 0,05 t^2$
(C)	0,25	0,20	$0,8 + 0,4 t + 0,05 t^2$
(D)	0,20	0,16	$0,8 + 0,32 t + 0,032 t^2$
(E)	0,25	0,16	$0,8 + 0,32 t + 0,032 t^2$

27 Um automóvel desenvolve, numa estrada plana e horizontal, movimento retilíneo e uniforme com velocidade de módulo v . Supondo que suas rodas rolem sem escorregar, calcule em relação ao plano de rolamento, os módulos das velocidades instantâneas dos pontos A, B, C, D e O, indicados na figura a seguir.



28 Um trem dotado de janelas laterais retangulares de dimensões 80 cm x 60 cm viaja ao longo de uma ferrovia retilínea e horizontal com velocidade constante de 40 km/h. Ao mesmo tempo, cai uma chuva vertical (chuva sem vento), de modo que as gotas apresentam, em relação ao solo, velocidade constante de intensidade v . Sabendo que o trajeto das gotas de chuva observado nas janelas laterais do trem tem a direção da diagonal dessas janelas, determine:

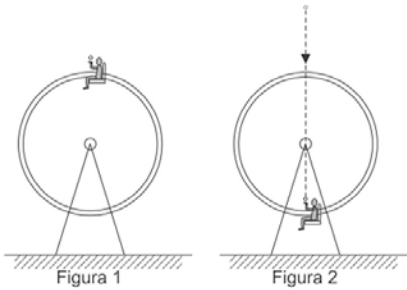
- (A) o valor de v ;
- (B) a intensidade da velocidade das gotas de chuva em relação a um observador no trem.

29 (AFA) Dois aeroportos, A e B, estão no mesmo meridiano, com B 600 km ao sul de A. Um avião P decola de A para B ao mesmo tempo que um avião Q, idêntico a P, decola de B para A. Um vento de 30 km/h sopra na direção sul-norte. O avião Q chega ao aeroporto A 1 hora antes do avião P chegar ao aeroporto B. A velocidade dos dois aviões em relação ao ar (admitindo que sejam iguais) é, aproximadamente, em km/h:

- (A) 690.
- (B) 390.
- (C) 190.
- (D) 90.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 (AFA) Uma pessoa, brincando em uma roda-gigante, ao passar pelo ponto mais alto, arremessa uma pequena bola (Figura 1), de forma que esta descreve, em relação ao solo, a trajetória de um lançamento vertical para cima.



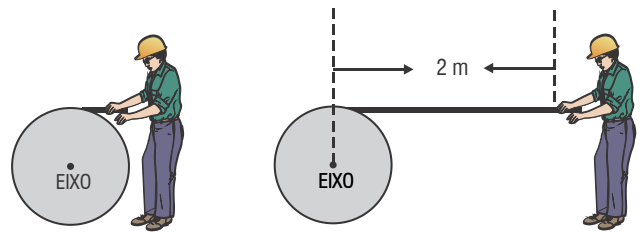
A velocidade de lançamento da bola na direção vertical tem o mesmo módulo da velocidade escalar (v) da roda-gigante, que executa um movimento circular uniforme. Despreze a resistência do ar, considere a aceleração da gravidade igual a g e $\pi = 3$. Se a pessoa consegue pegar a bola no ponto mais próximo do solo (Figura 2), o período de rotação da roda-gigante pode ser igual a:

- (A) $\frac{v}{g}$
- (B) $\frac{10v}{7g}$
- (C) $\frac{20v}{3g}$
- (D) $12\frac{v}{g}$

02 (AFA) O movimento da coroa dentada (A) de uma bicicleta é transmitido a uma catraca (B) localizada no eixo da roda traseira (C) por meio de uma corrente. A opção que representa a bicicleta mais veloz para o mesmo número de pedaladas do ciclista é:

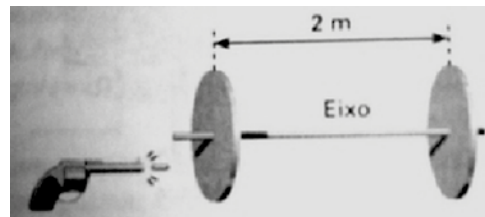
- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

03 (AFA) Um operário puxa a extremidade de um cabo que está enrolado num cilindro. À medida que o operário puxa o cabo o cilindro vai rolando sem escorregar. Quando a distância entre o operário e o cilindro for igual a 2 m (ver figura abaixo), o deslocamento do operário em relação ao solo será de:



- (A) 1 m.
- (B) 2 m.
- (C) 4 m.
- (D) 6 m.

04 A figura representa dois discos de papelão fixados a um mesmo eixo, que rota com frequência igual a 50Hz. Os discos foram fixados em locais do eixo distantes 2m um do outro. Um projétil é disparado paralelamente ao eixo, movendo-se em movimento retilíneo e uniforme, perfurando os discos. O ângulo entre o plano que contém o eixo e o furo no primeiro disco e o plano que contém o eixo e o furo no segundo disco é igual a 45° . Determine a velocidade do projétil, sabendo que, entre as duas perfurações, os discos completaram 2 voltas.



05 (ITA) Um avião voa numa altitude e velocidade de módulo constantes, numa trajetória circular de raio R , cujo centro coincide com o pico de uma montanha onde está instalado um canhão. A velocidade tangencial do avião é de 200 m/s e a componente horizontal da velocidade da bala do canhão é de 800 m/s. Desprezando o atrito e o efeito de rotação da Terra e admitindo que o canhão está direcionado de forma a compensar o efeito de atração gravitacional, para atingir o avião, no instante do disparo o canhão deverá estar apontando para um ponto à frente do mesmo situado a quantos rad?

06 Acima de um disco horizontal de centro O que gira em torno do seu eixo, no vácuo, dando 50 voltas por minuto, estão suspensas duas pequenas esferas M e N . A primeira está 2 m acima do disco e a segunda a 4,5m, ambas na mesma vertical. Elas são abandonadas simultaneamente e, ao chocar-se com o disco, deixam sobre ele pequenas marcas M' e N' tais que o ângulo $M'ON'$ é igual a $95,5^\circ$. Podemos concluir que a aceleração da gravidade no local vale quanto?

07 Num dado instante dois navios encontram-se sobre o mesmo meridiano. O navio N' encontra-se a uma distância d ao norte do navio N .

- (A) N faz rota para o norte com velocidade v . N' faz rota para o leste com velocidade v' . Qual será a mínima distância entre os navios?
- (B) N' faz rota para leste com velocidade v' . Qual é o rumo que N deve tomar para encontrar N' ? Quanto tempo levará?

08 O ponteiro dos minutos do relógio de uma igreja tem o dobro do comprimento do ponteiro das horas. A que hora após a meia-noite a extremidade do ponteiro dos minutos está se afastando da extremidade do ponteiro das horas com velocidade máxima?

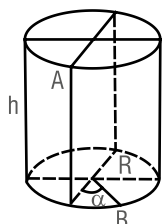
EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 De uma parte retilínea da margem ao mesmo tempo saíram dois barcos, *A* e *B*, que se encontravam a uma distância inicial $d = 3$ km um do outro. O barco *A* dirigiu-se por uma reta perpendicular à margem. O barco *B* tomou um caminho constantemente dirigido ao barco *A*. É evidente que após um tempo muito grande o barco *B* navegará atrás do barco *A* a uma certa distância. Determine qual é essa distância.

02 Na tela de um cinema vê-se uma carruagem em movimento. O raio das rodas dianteiras das carruagens é $r = 0,35$ m e o raio das rodas traseiras é $R = 1,5r$. As rodas dianteiras têm $N_1 = 6$ raios. A câmara cinematográfica roda a fita com uma velocidade de 24 quadros/s. Determinar a velocidade mínima segundo a qual temos a impressão de que as rodas dianteiras estão em repouso na tela. Qual o menor número de raios N_2 que deverão ter as rodas traseiras a fim de que as mesmas também pareçam estar em repouso?

Extra: Para que valores da velocidade da carruagem do problema acima os espectadores terão a impressão de que os raios das rodas dianteira e traseira giram em sentidos opostos?

03 Um pequena formiga move-se sobre uma lata cilíndrica através de sua superfície lateral do pontos *A* pra o ponto *B* pelo caminho mais rápido e com uma velocidade v constante em módulo.



- (A) Qual o tempo gasto neste percurso?
- (B) Qual a velocidade angular da sombra da formiga sobre o plano da base?

04 O movimento de uma partícula é descrito pelas equações:

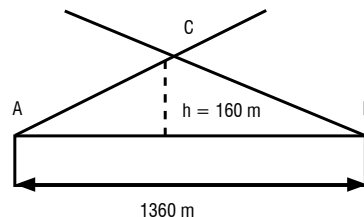
$$\begin{aligned} x &= b \cdot \operatorname{sen} \omega t \\ y &= b \cdot \operatorname{cos} \omega t \\ z &= ut \end{aligned}$$

- (A) Qual é a trajetória descrita pela partícula?
- (B) Qual é o módulo de sua velocidade?
- (C) Qual é a distância percorrida em um ciclo?

05 (ITA) Um nadador, que pode desenvolver uma velocidade de 0,900 m/s na água parada, atravessa um rio de largura D metros, cuja correnteza tem velocidade de 1,08 km/h. Nadando em linha reta ele quer alcançar um ponto da outra margem situado $\frac{\sqrt{3}}{3}$ metros abaixo do ponto de partida. Para que isso ocorra, sua velocidade em relação ao rio deve formar com a correnteza o ângulo:

- (A) $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{12}(\sqrt{33} + 1)$
- (B) $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (C) Zero grau
- (D) $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{12}$

06 (ITA) A figura representa a vista aérea de um trecho retilíneo de ferrovia. Duas locomotivas a vapor, *A* e *B*, deslocam-se em sentidos contrários com velocidades constantes de 50,4 km/h e 72 km/h respectivamente. Uma vez que *AC* representa o rastro de fumaça do trem *A*, *BC* o rastro de fumaça de *B* e que $AC = BC$, determine a velocidade do vento.



07 Um rio tem 1 km de largura. A velocidade da correnteza é v . Um homem rema 1 km rio acima e volta ao local da partida. Outro homem, também remando, vai e volta de uma margem à outra, atingindo um ponto diretamente oposto ao ponto de onde partiu. Sabendo que, remando, as velocidades dos homens são constantes e iguais a 5 km/h, determine v para que a diferença entre os tempos gastos nos dois trajetos completos seja de 7,5 minutos.

08 As coordenadas de um corpo são $x = t^2$ e $y = (t - 1)^2$ (SI).

- (A) Obter a equação da trajetória.
- (B) Em que instante a velocidade é mínima?
- (C) Calcular as coordenadas quando a velocidade for 10 m/s.
- (D) Calcular as acelerações tangencial e centrípeta num instante t qualquer.

09 Os componentes do vetor velocidade de uma partícula são dados por: e e R , onde w e R são constantes. A extremidade do vetor posição descreve uma curva chamada cicloide. Determine o módulo das componentes da velocidade e da aceleração da partícula quando ela se encontra:

- (A) no valor máximo de y .
- (B) no valor mínimo de y .

10 Quatro tartarugas encontram-se nos cantos de um quadrado de lado a . Simultaneamente, elas começam a movimentar-se com uma velocidade constante em grandeza v , sendo que a primeira se dirige sempre em direção à segunda, a segunda sempre em direção à terceira, a terceira sempre em direção à quarta e a quarta sempre em direção à primeira. As tartarugas se encontrarão? Caso sim, depois de quanto tempo?

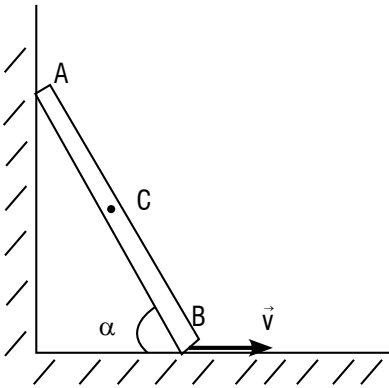
DESAFIO: Se fossem N tartarugas nos N vértices de um polígono regular de N lados, qual seria o tempo necessário para que as tartarugas se encontrassem?

11 Uma roda de raio R rola com velocidade constante v_0 ao longo de um plano horizontal. Prove que a posição de qualquer ponto em sua periferia é dada pelas equações $x = R(\omega t - \operatorname{sen} \omega t)$ e $y = R(1 - \operatorname{cos} \omega t)$, em que $\omega = \frac{v_0}{R}$ é a velocidade angular da roda e t é o tempo medido desde o instante em que o ponto está em contato com o plano. Determine as componentes da velocidade e da aceleração do ponto.

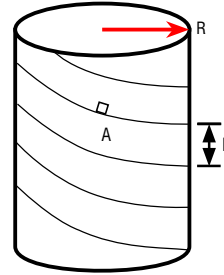
12 Um bote pode viajar a uma velocidade de 3 m/s na água parada. Um barqueiro deseja cruzar um rio percorrendo a menor distância possível. Em que direção ele deve remar com relação à margem se a velocidade da água é:

- (A) 2 m/s?
- (B) 4 m/s?

13 Uma barra rígida está apoiada no canto de uma sala (vide figura ao lado). O extremo A desliza pela parede enquanto o extremo B desliza pelo solo. Encontre a velocidade do ponto C (centro da barra) em função do ângulo α , se a velocidade do ponto B for constante e igual a v . Despreze todas as forças de atrito.



14 Determine a aceleração do corpo A , o qual desliza-se sem velocidade inicial pela rosca de um parafuso com passo h e raio R , no final da n -ésima volta (figura). Despreza-se o atrito.



15 Em relação a um referencial cartesiano uma partícula se move de acordo com as seguintes funções horárias:

$$x = 3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{3}\right) \text{ e } y = 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi \cdot t}{3}\right).$$

- (A) Qual a equação da trajetória da partícula?
- (B) Em que sentido a trajetória é percorrida?
- (C) Qual a velocidade da partícula em $t = 0$?
- (D) Qual o módulo da aceleração em $t = 1\text{ s}$?

RASCUNHO

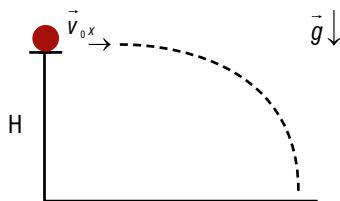
1. Princípio da independência dos movimentos (Princípio de Galileu)

“Se um corpo descreve um movimento composto, cada um dos movimentos componentes é descrito independentemente dos outros, ou seja, como se os outros não existissem e no mesmo intervalo de tempo”.

O princípio de Galileu nos mostra que, quando possuímos um movimento que é resultado da soma de movimentos simultâneos, nós podemos estudá-los separadamente. Assim, ao lançarmos um corpo horizontalmente ou obliquamente, temos dois movimentos: um no eixo horizontal e outro no eixo vertical. Esses movimentos ficam mais fáceis se estudados separadamente.

2. Lançamento horizontal

Ao lançarmos um corpo, de uma certa altura h , em um local livre da resistência do ar e com aceleração da gravidade igual a g , temos que ele executará uma curva como a representada a seguir.



O movimento na vertical (eixo y) será uniformemente acelerado, pois a aceleração da gravidade é constante e na horizontal (eixo x) assim, o movimento será uniforme. É importante que, ao resolvermos um problema de lançamento horizontal, observemos que a velocidade de lançamento só influencia o alcance horizontal do corpo, e a vertical desse tipo de lançamento é uma queda livre.

Assim, as equações horárias ficam:

Eixo vertical (eixo y)

$$h = \frac{gt^2}{2} \quad v_y = gt \quad v_y = \sqrt{2gh}$$

Eixo horizontal (eixo x)

$$A = v_x \cdot t$$

Exemplo: Um avião de bombardeio voa a uma altitude de 320 m com uma velocidade de 70 m/s e surpreende uma lancha torpedeira viajando a 20 m/s na mesma direção e sentido do avião. A que distância horizontal atrás da lancha o avião deve lançar a bomba para atingi-la? Adote $g = 10\text{m/s}^2$.

Solução:

A bomba executará um lançamento horizontal, visto que sairá do avião mantendo a mesma velocidade horizontal. Neste caso, sua vertical é uma queda livre:

$$h = \frac{gt^2}{2} \rightarrow -320 = \frac{10 \cdot t^2}{2} \rightarrow t = 8\text{s}$$

O alcance horizontal dessa bomba é dado por:

$$A = v_x \cdot t \rightarrow A = 70 \cdot 8 = 560\text{ m}$$

Nesses 8s de movimento, a lancha se deslocou $20 \cdot 8 = 160\text{ m}$

Portanto, o avião deve ficar a $560 - 160 = 400$ metros de distância para atingir a lancha.

Exemplo: Uma partícula é lançada horizontalmente de uma altura H , com velocidade inicial v , em um local onde a aceleração da gravidade é constante e vale g . Considerando desprezíveis quaisquer forças dissipativas determine:

- (A) a altura num instante t ;
- (B) o módulo da velocidade da partícula num instante t ;
- (C) a equação da trajetória.

Solução:

- (A) Para determinarmos a altura temos que estudar a vertical (MUV em que $|a| = g$). Vamos considerar o sistema de referência com origem no solo e positivo para cima. Assim:

$$h = h_0 + v_0t - \frac{gt^2}{2} \rightarrow h = H - \frac{gt^2}{2}$$

- (B) Em um instante genérico t , a partícula possuirá uma componente horizontal de velocidade (constante) e uma componente vertical. Assim:

$$v_x = v \text{ e } v_y = gt$$

O módulo da velocidade resultante será dado por:

$$v_R^2 = v_x^2 + v_y^2 \rightarrow v_R = \sqrt{v^2 + g^2t^2}$$

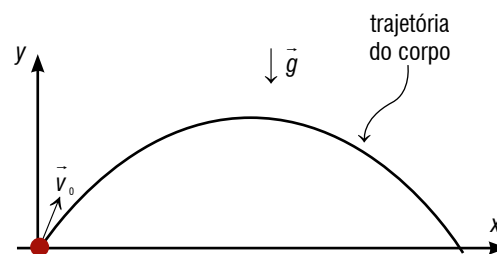
- (C) Para determinar a equação da trajetória, vamos colocar A em função de h .

$$A = v \cdot t \rightarrow t = \frac{A}{v}$$

$$h = H - \frac{gt^2}{2} \rightarrow h = H - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{A}{v}\right)^2 \rightarrow h = H - \frac{g \cdot A^2}{2 \cdot v^2} \text{ (parábola, portanto)}$$

3. Lançamento oblíquo

Consideremos uma partícula lançada de um ponto O , sobre a superfície da Terra, com velocidade \vec{v}_0 cuja direção não é nem horizontal nem vertical. Desprezando os efeitos do ar, temos que, para um referencial inercial, a trajetória da partícula será uma parábola (isso será provado mais adiante).

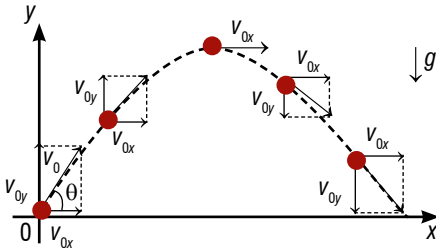


Repare que, durante a sua trajetória, a partícula executa dois movimentos: um horizontal e outro vertical. O princípio da independência de Galileu diz que esses movimentos podem ser estudados separadamente.

Chamando de θ o ângulo entre o vetor velocidade inicial \vec{v}_0 e a horizontal, temos que as componentes horizontal e vertical da velocidade possuem, no início, módulos respectivamente iguais a:

$$|\vec{v}_x| = |\vec{v}_0| \cdot \cos\theta \quad |\vec{v}_y| = |\vec{v}_0| \cdot \sin\theta$$

O movimento vertical é um movimento uniformemente variado, em que o módulo da aceleração é igual à aceleração da gravidade. O movimento horizontal é um movimento uniforme. Em outras palavras a partícula, sobe desacelerando (pois a componente da velocidade nessa direção é contrária à gravidade) e desce acelerando (pois a componente da velocidade nessa direção é a favor da gravidade), sem modificar sua componente horizontal de velocidade.



É interessante notar que, analogamente ao lançamento para cima, estudado anteriormente, dois pontos da trajetória que estão sob a mesma horizontal terão o mesmo módulo de velocidade vertical. Como a velocidade horizontal não se altera, podemos ampliar e dizer que, em um lançamento oblíquo, pontos na mesma horizontal possuem mesmo módulo de velocidade.

3.1 Parametrizando as equações

Uma vez conhecido que no lançamento oblíquo temos um MUV na vertical e um MU na horizontal, podemos escrever que as funções horárias para cada eixo são (origem é o ponto de lançamento e referencial é positivo para cima e para a direita):

- Vertical (MUV) $\rightarrow y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2} \rightarrow y = v_0 \cdot \sin\theta \cdot t - \frac{gt^2}{2}$
- Horizontal (UM) $\rightarrow x = x_0 + v_x \cdot t \rightarrow x = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t$

Isolando a variável "t" na segunda equação:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\theta}$$

Substituindo a variável "t" na primeira equação, teremos:

$$y = v_0 \cdot \sin\theta \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos\theta} - \frac{g \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\theta} \right)^2}{2} \rightarrow y = x \tan\theta - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$$

Note que como θ , v_0 e g são constantes a posição no eixo y é uma função quadrática de variável x, provando que todo lançamento oblíquo possui como trajetória uma parábola.

3.2 Tempo de voo, altura máxima e alcance horizontal

O tempo de voo de uma partícula lançada oblíquamente é tão maior quanto maior for a componente vertical da velocidade inicial. Assim, para descobrir o tempo de voo, analisaremos a vertical. Lembre-se que os movimentos de subida e descida são simétricos, portanto, o tempo de

subida é igual ao de descida. O tempo de voo será o dobro do tempo de subida (t_s). Na altura máxima, a componente vertical de velocidade é nula.

$$v_y = v_{y_0} - gt \rightarrow 0 = v_0 \sin\theta - gt \rightarrow t_s = \frac{v_0 \cdot \sin\theta}{g}$$

$$t_{voo} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\theta}{g}$$

Para o cálculo da altura máxima, mais uma vez faremos a análise da vertical:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta S \rightarrow 0 = (v_0 \sin\theta)^2 - 2gH \rightarrow H_{MAX} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

Essa equação mostra que, se variarmos somente o ângulo de lançamento, a altura máxima ocorrerá quando $\sin^2\theta = 1$, ou seja, quando $\theta = 90^\circ$ (lançamento vertical).

Finalmente, para determinar o alcance horizontal de um projétil lançado oblíquamente, devemos analisar a horizontal, em que o movimento é uniforme:

$$\Delta S = v_x \cdot \Delta t \rightarrow A_{HOR} = v_0 \cdot \cos\theta \cdot \Delta t \rightarrow A_{HOR} = v_0 \cdot \cos\theta \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\theta}{g} \rightarrow$$

$$A_{HOR} = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{g}$$

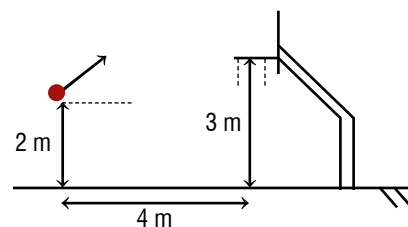
Fazendo $2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta = \sin 2\theta$

$$A_{HOR} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\theta}{g}$$

Sobre essa expressão, dois pontos devem ser destacados.

- Para valores fixos de v_0 e g o alcance horizontal será máximo quando $\sin(2\theta) = 1$, ou seja, quando $\theta = 45^\circ$. (Considerando altura final e inicial iguais e aceleração apenas no eixo vertical)
- Para valores fixos de v_0 e g , teremos mesmo alcance horizontal para dois ângulos α e β , tais que $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Exemplo: Em uma partida de basquete, um jogador tem direito a realizar dois lances livres. O centro da cesta está situado a uma distância de 4,0 m da linha de lançamento e a uma altura de 3,0 m do solo, conforme a figura. A bola é lançada sempre a uma altura de 2,0 m do solo. No primeiro lançamento, a bola é lançada com velocidade de 5,0 m/s, formando um ângulo de 30° com a horizontal, e não atinge a cesta. No segundo lançamento, a bola é lançada com uma velocidade desconhecida, formando um ângulo de 30° com a horizontal, e atinge a cesta. Dados: $\cos 30^\circ = 0,86$; $\sin 30^\circ = 0,50$; $\tan 30^\circ = 0,57$; $\cos^2 30^\circ = 0,75$.



- (A) Determine o instante em que a altura máxima é atingida pela bola no primeiro lançamento.
- (B) Demonstre que a bola não atinge a cesta no primeiro lançamento.
- (C) Determine a velocidade inicial da bola no segundo lançamento.

Solução:

(A) $v = v_0 + a \cdot t \rightarrow 0 = 5 \cdot \text{sen}30^\circ - 10 \cdot t \rightarrow 10 \cdot t = 2,5 \rightarrow t = 0,25 \text{ s}$

(B) No primeiro lançamento, a bola atinge a altura máxima de:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2/2$$

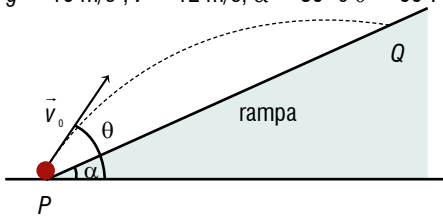
$$y = 2 + 5 \cdot \text{sen}30^\circ \cdot 0,25 - 5 \cdot (0,25)^2$$

$$y = 2 + 0,625 - 0,3125 = 2,3125 \text{ m.}$$

Esta altura não é suficiente para atingir a altura da cesta.

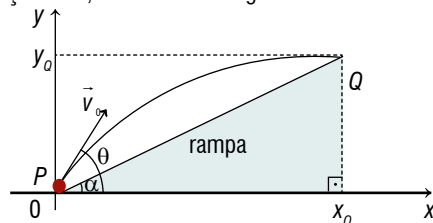
(C) A condição para acertar a cesta é a de que para $x = 4 \text{ m} \rightarrow y = 3 \text{ m}$. Pelo movimento na direção horizontal $\rightarrow x = x_0 + v \cdot t \rightarrow 4 = 0 + v \cdot \text{cos}30^\circ \cdot t \rightarrow 4 = 0,86 \cdot v \cdot t \rightarrow v \cdot t = 4,651$ em que v é a velocidade de lançamento da bola que acerta a cesta, e t é o tempo necessário para acertar a cesta. Pelo movimento na direção vertical da bola $\rightarrow y = y_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2/2 \rightarrow 3 = 2 + v \cdot \text{sen}30^\circ \cdot t - 5 \cdot t^2 \rightarrow 1 = 0,5 \cdot v \cdot t - 5 \cdot t^2$. Então $\rightarrow 1 = 0,5 \cdot 4,651 - 5 \cdot t^2 \rightarrow 5 \cdot t^2 = 1,3255 \rightarrow t^2 = 0,2651 \rightarrow t = 0,515 \text{ s}$. Assim $\rightarrow v \cdot t = 4,651 \rightarrow v \cdot 0,515 = 4,651 \rightarrow v = 4,651/0,515 = 9,03 \text{ m/s}$.

Exemplo 2: Uma bolinha de aço é lançada de um ponto P de uma rampa inclinada de α em relação à horizontal, com velocidade inicial v_0 , que forma um ângulo θ com a horizontal. Calcule a distância do ponto P ao ponto Q , onde a bolinha colide com a rampa. Despreze influências do ar e considere $g = 10 \text{ m/s}^2$, $v = 12 \text{ m/s}$, $\alpha = 30^\circ$ e $\theta = 60^\circ$.



Solução:

Para a solução dessa questão, iremos considerar um eixo cartesiano no ponto de lançamento, como ilustra a figura abaixo:



As componentes horizontal e vertical da velocidade possuem módulos respectivamente iguais a $v_0 \cos \theta$ e $v_0 \text{sen} \theta$. Com isso, as equações horárias passam a ser:

$$x = v_0 \cdot \text{cos} \theta \cdot t \quad \text{e} \quad y = v_0 \cdot \text{sen} \theta \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Denominando a distância PQ de d , observe o triângulo PX_0Q . A partir dele e considerando que $\alpha = 30^\circ$, temos que a altura será $y_0 = \frac{d}{2}$ e o alcance horizontal será $x_0 = \frac{d\sqrt{3}}{2}$.

Substituindo nas equações horárias:

$$x = v_0 \cdot \text{cos} \theta \cdot t = \frac{d\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \text{cos}60^\circ \cdot t = \frac{d\sqrt{3}}{2}$$

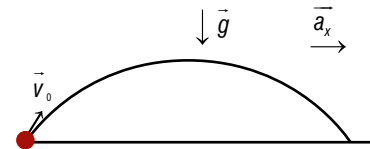
$$y = v_0 \cdot \text{sen} \theta \cdot t - \frac{gt^2}{2} \rightarrow \frac{d}{2} = 12 \cdot \text{sen}60^\circ \cdot t - \frac{10 \cdot t^2}{2} \rightarrow \frac{d}{2} =$$

$$= 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{d\sqrt{3}}{2} - \frac{10}{2} \cdot \left(\frac{d\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$d = 3d - \frac{10d^2}{48} \rightarrow 10d = 96 \rightarrow d = 9,6 \text{ m}$$

Dica: uma outra forma de resolver o problema anterior (e, muitas vezes, mais rápida) é usar o par de eixos coincidindo com o plano inclinado. Nesse caso, a gravidade não coincidiria com um eixo e, por esse motivo, precisaria ser decomposta. Daí, teríamos MUV nos dois eixos. Podemos resolver um problema de MUV nos dois eixos da forma explicitada abaixo. Basicamente, a mudança é a seguinte: em vez de usar equações de MU na horizontal, devemos usar equações de MUV. Todo o raciocínio permanece igual.

Exemplo: Uma partícula é lançada obliquamente em um local onde, além da aceleração da gravidade (10 m/s^2), existe uma aceleração horizontal cujo módulo vale 4 m/s^2 . Considerando que a velocidade inicial da partícula é $\vec{v}_0 = 2\hat{i} + 30\hat{j}$, determine o tempo de voo dessa partícula e o alcance horizontal obtido.



Solução:

Os movimentos horizontais e verticais são independentes. Logo, para a determinação do tempo de voo só utilizaremos a vertical.

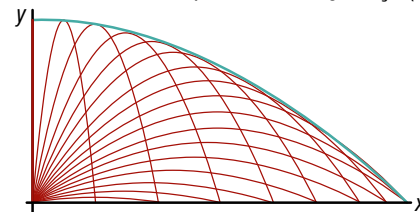
$$v = v_0 - gt \rightarrow 0 = 30 - 10t \rightarrow t_{\text{sub}} = 3\text{s} \rightarrow t_{\text{voo}} = 6\text{s}$$

Sabemos agora que após 6 segundos de movimento a partícula retorna ao solo. O diferencial nessa questão é que na horizontal o movimento é uniformemente acelerado. Portanto, para calcularmos o alcance horizontal usaremos as equações de MUV:

$$A = v_0 t + \frac{a_x t^2}{2} \rightarrow A = 2 \cdot 6 + \frac{4 \cdot 6^2}{2} \rightarrow A = 84 \text{ m}$$

3.3 Parábola de segurança

Para valores fixos de v_0 e g e variando somente o ângulo de lançamento (permitindo todas as possibilidades para a variação do ângulo), observamos que para cada ângulo teremos uma parábola diferente. Todas essas parábolas possuem em comum o fato de que são envolvidas por uma única parábola denominada parábola de segurança (PS).



Note que a altura máxima da parábola de segurança é a altura máxima de um lançamento vertical para cima $\left(h = \frac{v_0^2}{2g}\right)$ e que a equação da PS é do tipo $y = ax^2 + c$ (simétrica em relação ao eixo y).

Como o termo independente é a altura máxima, então a equação da PS é do tipo $y = ax^2 + \frac{v_0^2}{2g}$.

O alcance horizontal máximo é quando $\theta = 45^\circ$. Portanto, $\frac{v_0}{g}$ é raiz da PS. Isso implica que $a = \frac{-g}{2v_0^2}$.

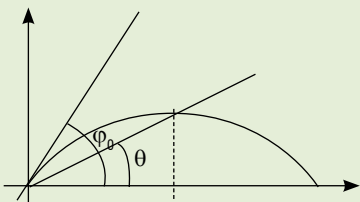
Finalmente chegamos à equação da PS:

$$y = \frac{-g}{2v_0^2} \cdot x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

Uma vez fixo v_0 e g , é impossível atingir um alvo fora da parábola de segurança qualquer que seja o ângulo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Uma bola é chutada da superfície de um terreno plano seguindo um ângulo φ_0 acima da horizontal.

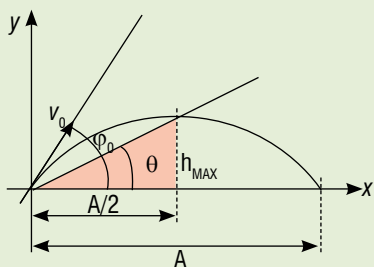


Se θ é o ângulo de elevação do ponto mais alto da trajetória, visto do ponto de lançamento, a razão $\text{tg } \theta / \text{tg } \varphi_0$, desprezando-se a resistência do ar, é igual a:

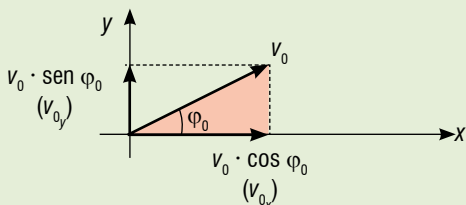
- (A) 1/4. (C) 1/6.
 (B) 1/2. (D) 1/8.

Solução: Letra B.

Para determinar θ , observe a figura:



$$\text{tg } \theta = h_{\text{MAX}} / (A/2) = [(V_0^2 \cdot \text{sen}^2 2\theta / 2g) / (V_0^2 \cdot 2 \cdot \text{sen } \theta \cdot \text{cos } \theta / 2g)] = \text{sen } \theta / 2 \cdot \text{cos } \theta.$$



$$\text{tg } \varphi_0 = V_{0y} / V_{0x} = V_0 \cdot \text{sen } \varphi_0 / V_0 \cdot \text{cos } \varphi_0 = \text{sen } \varphi_0 / \text{cos } \varphi_0 = \text{sen } \theta / \text{cos } \theta.$$

$$\text{tg } \theta / \text{tg } \varphi_0 = (\text{sen } \theta / 2 \cdot \text{cos } \theta) / (\text{sen } \theta / \text{cos } \theta) = 1/2.$$

02 (ITA) Considere hipoteticamente duas bolas lançadas de um mesmo lugar ao mesmo tempo: a bola 1, com velocidade para cima de 30 m/s, e a bola 2, com velocidade de 50 m/s formando um ângulo de 30° com a horizontal. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, assinale a distância entre as bolas no instante em que a primeira alcança sua máxima altura.

- (A) $d = \sqrt{6250} \text{ m}$. (D) $d = \sqrt{19375} \text{ m}$.
 (B) $d = \sqrt{2717} \text{ m}$. (E) $d = \sqrt{26875} \text{ m}$.
 (C) $d = \sqrt{17100} \text{ m}$.

Solução: Letra C.

Bola 1

Posição horizontal $x = 0$

Posição vertical $y = 30 \cdot t - 5 \cdot t^2$

Atinge a altura máxima em $v_y = 0 \rightarrow 0 = 30 - 10 \cdot t \rightarrow t = 3 \text{ s}$

A posição vertical será $y = 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 90 - 45 = 45 \text{ m}$

No instante em que a bola 1 atinge a altura máxima, ela está na posição (0;45) m

Bola 2

Posição horizontal $x = 50 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t = 25 \cdot t \cdot \sqrt{3} = 75\sqrt{3} \text{ m}$

Posição vertical $y = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot t - 5 \cdot t^2 = 25t - 5t^2 = 75 - 45 = 30 \text{ m}$

No instante em que a bola 1 atinge a altura máxima, a bola 2 está na posição $(75\sqrt{3}; 30) \text{ m}$

A distância entre elas é dada por :

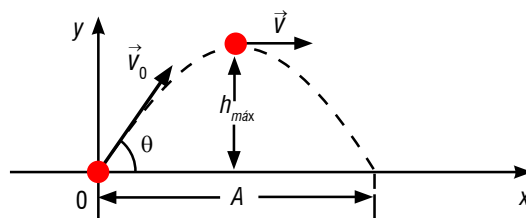
$$d = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = \sqrt{(75^2 \cdot 3 + 15^2)} = \sqrt{(5625 \cdot 3 + 225)} = \sqrt{(16875 + 225)} = \sqrt{(17100)} \text{ m}$$

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 Uma pedra é jogada para cima em uma direção que forma um ângulo de 30° com a horizontal no campo gravitacional terrestre, considerado uniforme. Ignorando-se o atrito com o ar, no ponto mais alto alcançado pela pedra:

- (A) o módulo de sua aceleração é zero.
 (B) o módulo de sua velocidade é zero.
 (C) o módulo de sua aceleração atinge um mínimo, mas não é zero.
 (D) o módulo de sua velocidade atinge um mínimo, mas não é zero.
 (E) o módulo de seu vetor posição, em relação ao ponto de lançamento, é máximo.

02 Um corpo é lançado obliquamente com velocidade de módulo 50 m/s, sob um ângulo de lançamento θ ($\text{sen } \theta = 0,6$, $\text{cos } \theta = 0,8$), conforme indica a figura. Calcule, considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e desprezando influências do ar:

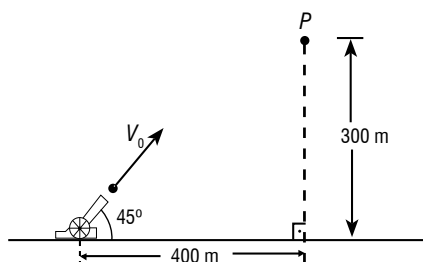


- (A) a velocidade do corpo ao passar pelo vértice do arco de parábola;
- (B) o tempo de subida;
- (C) a altura máxima (h_{\max});
- (D) o alcance horizontal (A).

03 Um gato de 1 quilograma dá um pulo, atingindo uma altura de 1,25 m e caindo a uma distância de 1,5 m do local do pulo.

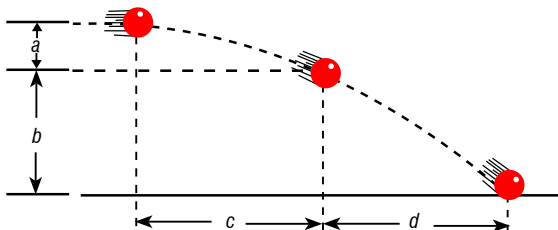
- (A) Calcule a componente vertical de sua velocidade inicial.
- (B) Calcule a velocidade horizontal do gato.
- (C) Qual a força que atua no gato no ponto mais alto do pulo? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

04 O canhão da figura dispara um projétil com velocidade inicial de módulo igual a v_0 , atingindo um alvo estacionário situado em P:



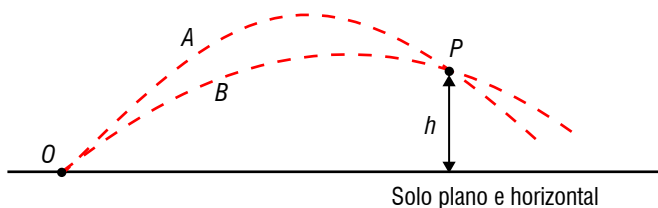
Desprezando influências do ar e supondo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine o valor de v_0 .

05 A figura a seguir mostra a fotografia estroboscópica de uma bolinha lançada horizontalmente, nas proximidades da Terra.



Se $a = 1 \text{ m}$ e $c = 4 \text{ m}$, calcule b e d .

06 Dois projéteis A e B são lançados obliquamente, descrevendo as trajetórias parabólicas representadas na figura:



Sabendo que ambos partiram do ponto O com velocidade de mesmo módulo v_0 , compare os módulos das velocidades com que A e B passam pelo ponto P.

07 (AFA) Duas armas são disparadas simultaneamente, na horizontal, de uma mesma altura. Sabendo que os projéteis possuem diferentes massas e desprezando a resistência do ar, pode-se afirmar que:

- (A) a bala mais pesada atinge o solo em um tempo menor.
- (B) o tempo de queda das balas é o mesmo.

- (C) a bala que foi disparada com maior velocidade atinge o solo em um tempo maior.
- (D) nada se pode dizer a respeito do tempo de queda, porque não se sabe qual das armas é mais possante.

08 (AFA) Durante um jogo de basquetebol, um jogador arremessa a bola com velocidade inicial de 10 m/s formando um ângulo de 30° acima da horizontal. Sabendo que a altura do cesto é 3,05 m e que o lançamento foi feito de uma altura de 2 m, a distância horizontal, em metros, do jogador ao cesto, para que ele consiga fazer os pontos sem o auxílio da tabela, deverá ser aproximadamente:

- (A) 2,02.
- (B) 4,00.
- (C) 6,09.
- (D) 7,05.

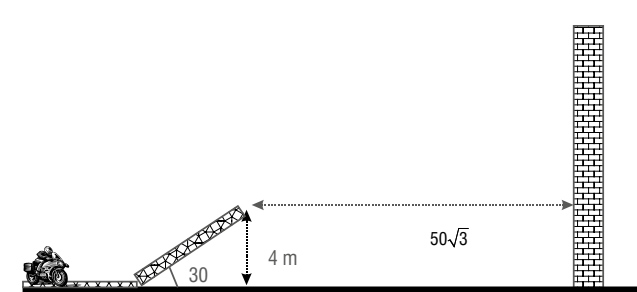
09 (AFA) Dois projéteis A e B são lançados obliquamente em relação à horizontal. Sabendo que ambos permanecem no ar durante o mesmo intervalo de tempo e que o alcance de B é maior que o alcance de A, afirma-se:

- I. Ambos atingem a mesma altura máxima.
- II. A velocidade inicial de B é maior que a de A.
- III. A maior altura é atingida por A, que foi lançado com maior velocidade.

É(são) verdadeira(s) apenas:

- (A) I.
- (B) II.
- (C) III.
- (D) I e II.

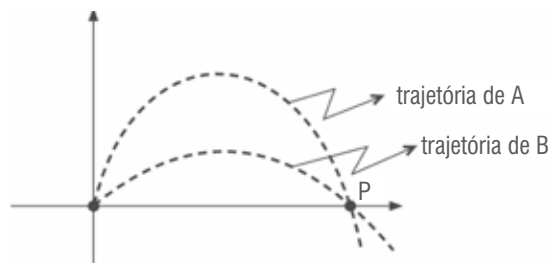
10 (AFA) Um audacioso motociclista deseja saltar de uma rampa de 4 m de altura e inclinação 30° e passar sobre um muro (altura igual a 34 m) que está localizado a $50\sqrt{3}$ m do final da rampa. Para conseguir o desejado, a velocidade mínima da moto no final da rampa deverá ser igual a:



obs.: o desenho está fora de escala.

- (A) 144 km/h.
- (B) 72 km/h.
- (C) 180 km/h.
- (D) 50 km/h.

11 (AFA) A figura abaixo representa as trajetórias de dois projéteis A e B lançados no mesmo instante em um local onde o campo gravitacional é constante e a resistência do ar é desprezível.



Ao passar pelo ponto P , ponto comum de suas trajetórias, os projéteis possuíam a mesma:

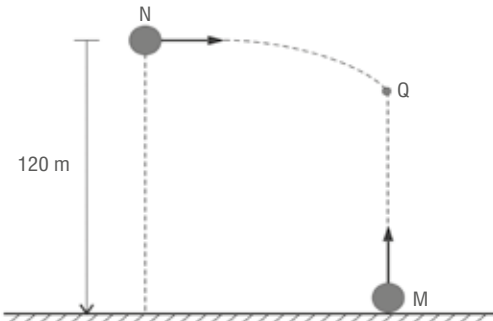
- (A) velocidade tangencial.
- (B) velocidade horizontal.
- (C) aceleração centrípeta.
- (D) aceleração resultante.

12 (AFA) Um canhão dispara projéteis com velocidade \vec{v}_0 . Desprezando-se os efeitos do ar e adotando-se g como módulo do vetor aceleração da gravidade, pode-se afirmar que a altura máxima atingida pelo projétil, quando o alcance horizontal for máximo, é:

- (A) $\frac{v_0^2}{4g}$.
- (B) $\frac{v_0^2}{4g}$.
- (C) $\frac{2v_0}{g}$.
- (D) $\frac{v_0}{2g}$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 (AFA) Considere uma partícula M lançada verticalmente para cima com uma velocidade de 30 m/s. No mesmo instante, uma outra partícula N é lançada horizontalmente de um ponto situado a 120 m do solo. Sabe-se que elas irão se chocar em um ponto Q , conforme a figura. Desprezando os efeitos do ar, a altura do ponto Q é:

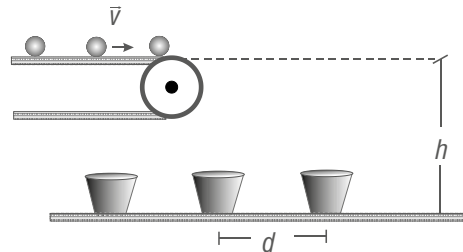


- (A) 80 m.
- (B) 60 m.
- (C) 40 m.
- (D) 15 m.

02 (AFA) Um projétil é disparado com velocidade de 250 m/s em uma direção que faz um ângulo θ com a horizontal. Após um intervalo de tempo, o projétil choca-se com um obstáculo a 5.250 m do ponto de disparo. Desprezando-se a resistência do ar e considerando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\text{sen } \theta = 0,7$, a velocidade do projétil, em m/s, no instante do choque é:

- (A) 125.
- (B) 175.
- (C) 215.
- (D) 250.

03 (AFA) Duas esteiras mantêm movimentos uniformes e sincronizados de forma que bolinhas sucessivamente abandonadas em uma delas atingem ordenadamente recipientes conduzidos pela outra. Cada bolinha atinge o recipiente no instante em que a seguinte é abandonada. Sabe-se que a velocidade da esteira superior é v e que o espaçamento das bolinhas é a metade da distância d . Sendo g a aceleração da gravidade local, a altura h entre as esferas e a solo vale:



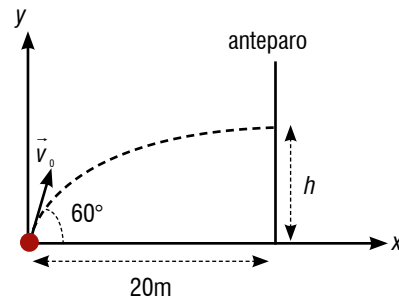
- (A) $\frac{g}{8} \left(\frac{d}{v}\right)^2$.
- (B) $\frac{g}{2} \left(\frac{d}{v}\right)^2$.
- (C) $g \frac{d}{v}$.
- (D) $\frac{g d}{2 v}$.

04 Um objeto é lançado obliquamente ao ar com ângulo de lançamento θ . Sabendo-se que o alcance máximo foi 122,5 m, qual a sua velocidade inicial de lançamento, em m/s? (Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

- (A) 10.
- (B) 12,5.
- (C) 35.
- (D) 49,5.

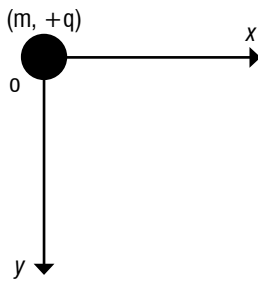
05 Em uma região plana, um projétil é lançado do solo para cima, com velocidade de 400 m/s, em uma direção que faz 60° com a horizontal. Calcule a razão entre a distância do ponto de lançamento até o ponto no qual o projétil atinge novamente o solo e a altura máxima por ele alcançada.

06 Um projétil é lançado contra um anteparo vertical situado a 20 m do ponto de lançamento. Despreze a resistência do ar. Se esse lançamento é feito com uma velocidade inicial de 20 m/s numa direção que faz um ângulo de 60° com a horizontal, a altura aproximada do ponto onde o projétil se choca com o anteparo, em metros, é: (Dados: $\text{tg}60^\circ \approx 1,7$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.)



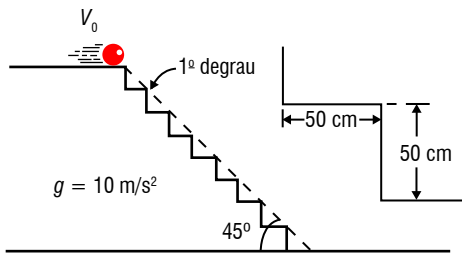
- (A) 7,0.
- (B) 11.
- (C) 14.
- (D) 19.
- (E) 23.

07 Uma partícula, de massa $m = 40,0$ gramas e carga elétrica $q = 8,0 \text{ mC}$, encontra-se inicialmente fixa na origem do sistema coordenado XOY (veja figura abaixo). Na região, existe um campo elétrico uniforme $\vec{E} = 100 \hat{i} (\text{N/C})$. A partícula é solta e passa a se mover na presença dos campos elétrico e gravitacional $[\vec{g} = 10,0 \hat{j} (\text{m/s}^2)]$. No instante em que a coordenada $x = 40,0 \text{ cm}$, a energia cinética da partícula, em joule, é:



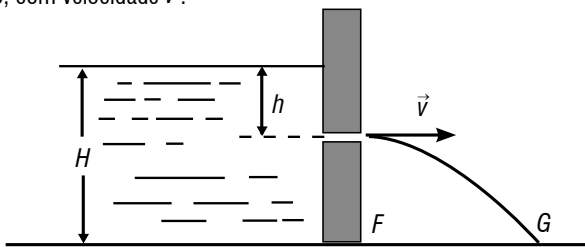
- (A) $30,0 \cdot 10^{-2}$
- (B) $40,0 \cdot 10^{-2}$
- (C) $47,0 \cdot 10^{-2}$
- (D) $35,0 \cdot 10^{-2}$
- (E) $45,0 \cdot 10^{-2}$

08 Uma bola rola do alto de uma escada com velocidade horizontal de módulo $v_0 = 4$ m/s. Cada degrau mede 50 cm de profundidade e 50 cm de altura.



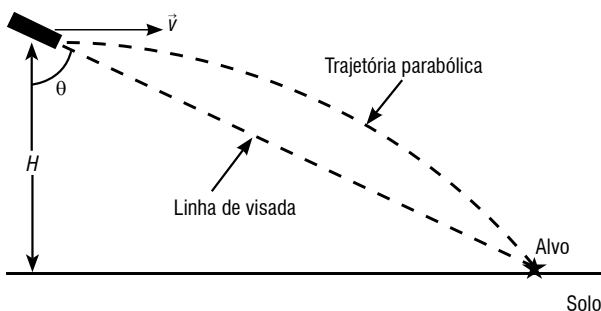
Desprezando influências do ar, determine que degrau a bola tocará primeiro.

09 Se um pequeno furo for feito na parede vertical de um reservatório que contenha um líquido ideal (sem viscosidade), um filete de líquido escoará pelo furo e sua velocidade inicial terá intensidade $v = \sqrt{2gh}$. Considere o movimento do fluido como o de um projétil lançado no vácuo, desde o furo, com velocidade \vec{v} .

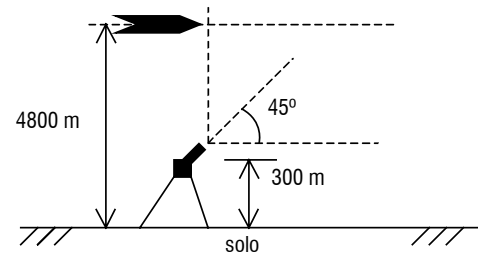


Se desejarmos que o filete incida em um ponto G o mais afastado possível de F, a que profundidade h o furo deverá ser feito?

10 Um avião de bombardeio voa horizontalmente em linha reta, à altura H , com velocidade \vec{v} . Desprezando influências do ar no movimento da bomba, determine o ângulo θ no momento da largada da bomba para que ela atinja o alvo. (Dado: g = aceleração da gravidade.)

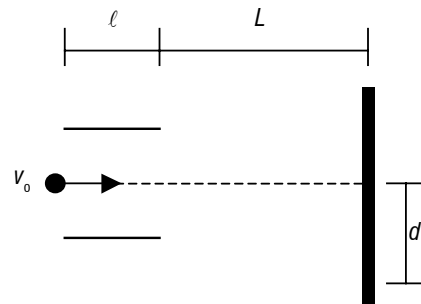


11 (IME) Um míssil, viajando paralelamente à superfície da Terra com uma velocidade de 180 m/s, passa sobre um canhão à altura de 4800 m no exato momento em que seu combustível acaba. Neste instante, o canhão dispara a 45° e atinge o míssil. O canhão está no topo de uma colina de 300 m de altura.



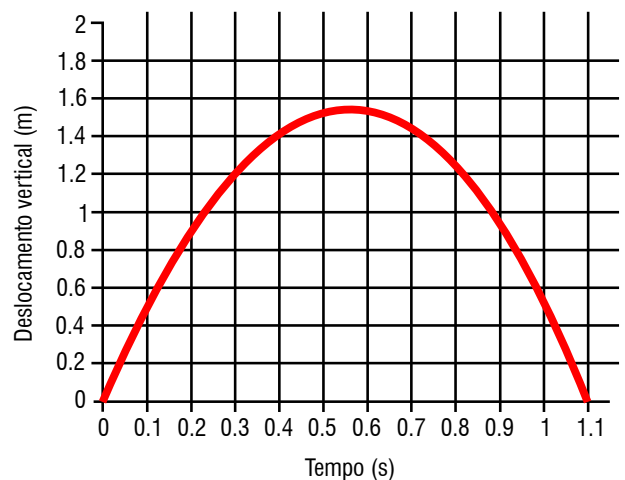
Sabendo a aceleração local da gravidade $g = 10$ m/s², determine a altura da posição de encontro do míssil com a bala do canhão, em relação ao solo. Despreze a resistência do ar.

12 (ITA) Duas placas paralelas, de comprimento ℓ , estão carregadas e servem como controladoras de elétrons em um tubo de raios catódicos. A distância das placas até a tela do tubo é L . Um feixe de elétrons de massa m e carga e penetra entre as placas com uma velocidade v_0 , como mostra a figura.



Qual é o campo elétrico entre as placas se o deslocamento do feixe na tela do tubo é igual a d ?

13 (UNICAMP) O famoso salto duplo *twist* carpado de Daiane dos Santos foi analisado durante um dia de treinamento no Centro Olímpico em Curitiba, através de sensores e filmagens que permitiram reproduzir a trajetória do centro de gravidade de Daiane na direção vertical (em metros), assim como o tempo de duração do salto. De acordo com o gráfico, determine:



- (A) a altura máxima atingida pelo centro de gravidade de Daiane;
- (B) a velocidade média horizontal do salto, sabendo-se que a distância percorrida nessa direção é de 1,3 m;
- (C) a velocidade vertical de saída do solo.

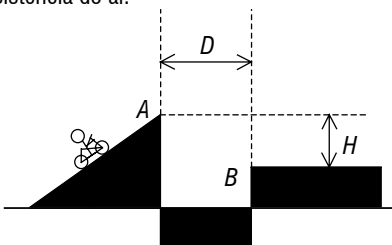
14 (ITA) Durante as Olimpíadas de 1968, na cidade do México, Bob Beamow bateu o recorde de salto em distância, cobrindo 8,9 m de extensão. Suponha que, durante o salto, o centro de gravidade do atleta teve sua altura variando de 1,0 m no início, chegando ao máximo de 2,0 m e terminando a 0,20 m no fim do salto. Desprezando o atrito com o ar, qual a componente horizontal da velocidade inicial do salto?

15 Um garoto está 4 m à frente de uma parede vertical e lança uma bola. A bola deixa a mão do garoto a uma altura de 2 m do solo com velocidade inicial $\vec{v} = 10\hat{i} + 10\hat{j}$ m/s. Quando a bola bate na parede, a componente horizontal do vetor velocidade troca de sentido e a vertical permanece inalterada. Onde a bola atinge o solo?

16 Calcule o raio de curvatura da trajetória de um projétil que foi lançado com velocidade inicial V_0 formando um ângulo α com a horizontal nos seguintes casos:

- (A) no ponto mais alto da trajetória;
- (B) no instante de lançamento;
- (C) em um instante genérico t após o lançamento.

17 (IME) Um motociclista movimenta sua motocicleta e sobe a rampa de inclinação da figura. Determine em função de g , α , H e D , o menor valor da velocidade que o motociclista deve ter em A para chegar em B . Nota: Considere o conjunto motociclista-motocicleta como uma partícula. Despreze a resistência do ar.



18 (ITA) O módulo v_1 da velocidade de um projétil no seu ponto de altura máxima é $\sqrt{\frac{6}{7}}$ do valor da velocidade v_2 no ponto onde a altura é metade da altura máxima. Obtenha o cosseno do ângulo de lançamento formado com a horizontal.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Um esguicho expele um jato de água de espessura desprezível com uma velocidade inicial $v_0 = 10$ m/s da extremidade da entrada de um cano horizontal de diâmetro interno $d = 1$ m. Determine a máxima distância que o jato pode alcançar no interior do cano.

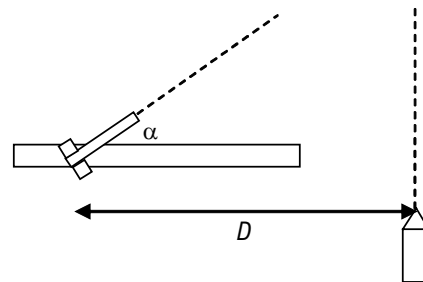
02 Um canhão lança um projétil por cima de uma montanha de altura h , de forma a passar quase tangenciando o cume C no ponto mais alto de sua trajetória. A distância horizontal entre o cume e o canhão é R . Atrás da montanha há uma depressão de profundidade d . Determine a distância horizontal entre o ponto de lançamento O e o ponto P onde o projétil atinge o solo em função de R , d e h .

03 (Saraeva) Em um rio, a uma distância $L = 90$ m da origem está ancorada uma balsa. A velocidade da corrente do rio junto à origem é $u_0 = 0$ e essa velocidade cresce proporcionalmente à distância da origem até que junto à balsa vale $u_L = 2$ m/s. Uma canoa se dirige da origem até a balsa com velocidade em relação à água de $v = 2$ m/s. Como o motorista deve orientar a canoa para que esta chegue exatamente onde está a balsa, sabendo que a origem e a balsa estão na mesma linha perpendicular à correnteza? Qual tempo T levará a canoa para percorrer esse trajeto?

04 De um ponto qualquer são lançados simultaneamente dois corpos formando ângulos distintos α e β com a horizontal, para lados opostos e com a mesma velocidade inicial v_0 . Qual é a velocidade de movimento dos corpos um relativamente ao outro?

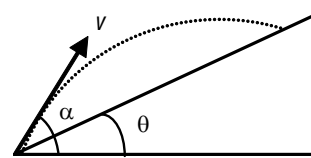
05 Qual o máximo ângulo com a horizontal segundo o qual uma pedra pode ser lançada de forma a estar sempre se afastando de quem a lançou?

06 Um canhão está situado sobre um pequeno muro de altura desprezível na costa de um país. O canhão está inclinado de modo a formar um ângulo β com a horizontal. Seu objetivo é destruir um navio que se move ao longo de uma linha distando D do canhão. O projétil sai do canhão com velocidade V_0 e a velocidade do navio é v_{navio} . O projétil é disparado no exato instante em que o navio passa pela linha do muro.



Determine qual deve ser o ângulo α na horizontal entre a linha de disparo e a direção do muro de forma que o tiro seja bem sucedido. Sabe-se que o ângulo α é maior do que 45° e que $g = 10$ m/s², $D = 10\sqrt{5}$ m, $V_0 = 20$ m/s e $v_{navio} = 10$ m/s.

07 Uma arma é colocada na base de uma colina cuja inclinação com a horizontal é θ . Se a arma está inclinada de um ângulo α ($\alpha > \theta$) com a horizontal, e a velocidade do disparo é v , calcule a distância percorrida pelo projétil ao longo da colina até que o choque aconteça. A gravidade no local do experimento vale g .



08 Mostre que um projétil lançado do chão com velocidade inicial v_0 pode atingir um ponto situado à distância x e à altura y para dois ângulos de elevação diferentes, contanto que o ponto (x, y) esteja abaixo da parábola

de segurança $y = \frac{1}{2} \cdot \left(A - \frac{x^2}{A} \right)$, em que A é o alcance máximo.

09 Um canhão de uma fortaleza dispara ao mar projéteis com velocidade de 4 m/s de uma altura de 1 m acima do nível do mar. Um navio pirata aproxima-se da costa a fim de invadir a fortaleza. Qual a menor velocidade inicial v_0 com que o navio pirata deve lançar seus projéteis a fim de destruir o canhão da fortaleza sem ser alvejado?

A termometria é a parte da termologia que se preocupa em medir a temperatura de corpos e sistemas, segundo escalas termométricas, as quais serão apresentadas neste capítulo.

1. Noções Iniciais

- (A) **Temperatura:** é uma grandeza física que mede o estado de agitação das partículas de um corpo, caracterizando seu estado térmico. Várias propriedades de um corpo variam com a temperatura.
- (B) **Calor:** é uma modalidade de energia transmitida de um corpo para outro, quando existe entre eles uma diferença de temperatura. Em outras palavras, calor é energia em trânsito.
- (C) **Equilíbrio térmico:** Em um contato entre dois corpos a diferentes temperaturas, o corpo a uma temperatura maior fornece calor ao corpo de menor temperatura, em um fenômeno que se prossegue até que, em um certo instante, as duas temperaturas se tornam iguais. Nesse instante, as duas temperaturas se tornam iguais. Nesse instante, diz-se que cessou a transferência de calor e que os dois corpos se encontram em equilíbrio térmico.

2. Lei Zero da Termodinâmica

Quando dois corpos estão, separadamente, em equilíbrio com um terceiro, então estão em equilíbrio entre si. Ou seja, o equilíbrio térmico é caracterizado pelas mesmas condições de temperatura.

3. Medida da Temperatura

3.1 Termômetros

Instrumento de medição de temperatura.

3.1.1 Termômetro de mercúrio



O mais conhecido. É muito utilizado para medir a temperatura do corpo humano.

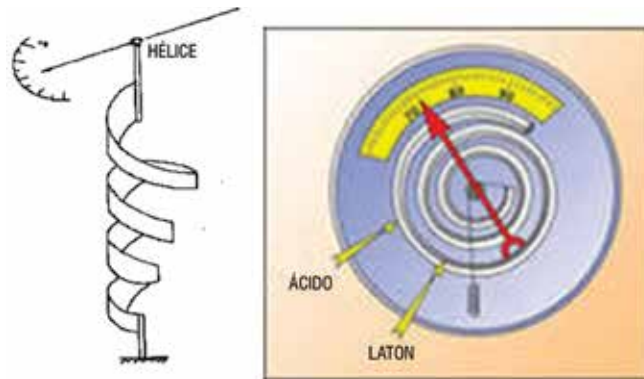
3.1.2 Termômetro eletrônico

É bastante comum medir a temperatura com componentes eletrônicos. O sensor mais comum é um termoresistor (ou termistor).



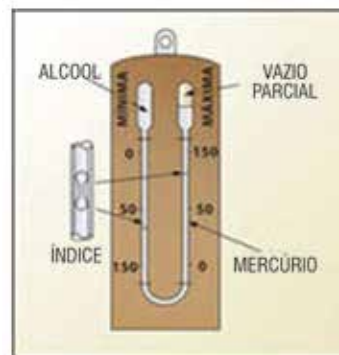
O dispositivo muda sua **resistência** com a alteração da temperatura. Um computador ou outro circuito mede a resistência e a converte em temperatura, tanto para exibi-la quanto para decidir se liga ou desliga alguma coisa (este assunto será mais profundamente estudado em Resistores).

3.1.3 Termômetro de lâmina bimetálica



Composto por duas lâminas metálicas unidas rigidamente que, ao serem aquecidas ou esfriadas, dilatam-se, e devido aos materiais serem de diferentes coeficientes de dilatação, gira informando a temperatura do corpo (este assunto será mais profundamente estudado em Dilatações).

3.1.4 Termômetros Meteorológicos



Termômetro de máxima e mínima temperaturas

Medem a temperatura do ambiente informando a temperatura máxima e mínima.

3.1.5 Termômetro de radiação



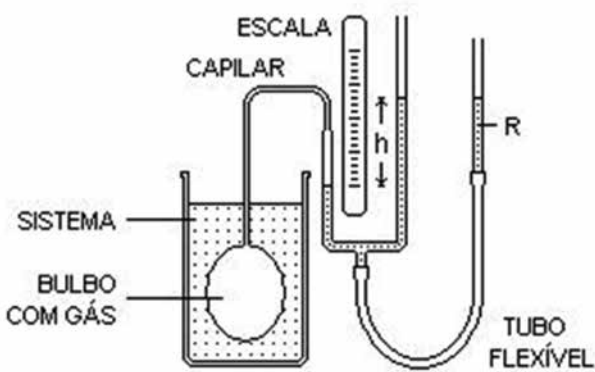
Medem a temperatura através das ondas eletromagnéticas. Usados a uma grande distância e sem contato.

3.1.6 Pirômetro óptico



Emite radiação térmica e relaciona-a com a temperatura para efetuar a medição de temperatura do corpo. Utilizado para medir a temperatura do fogo (plasma).

3.1.7 Termômetros de gás



O termômetro de gás ou de volume constante, mede a temperatura pela variação do volume e da pressão de um gás. É constituído por um bulbo ligado por um tubo capilar de um manômetro. O bulbo é preenchido com um gás de modo que o volume no bulbo permanece constante. A pressão do gás no bulbo pode ser obtida através da medição da diferença de nível, nos dois braços do manômetro. Esses termômetros devido a sua precisão, são muitas vezes utilizados para calibrar outros termômetros.

Substância termométrica

Substância utilizada no termômetro para indicar a temperatura.

Ex.: Mercúrio, álcool, tolueno, fio de platina, etc.

Propriedade termométrica

Propriedade física da substância termométrica que permite indicar a temperatura.

Ex.: dilatação, cor, resistência, radiação, etc.

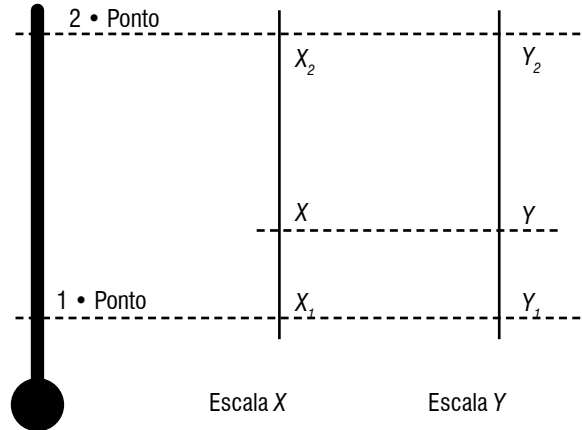
Pontos fixos

Estados térmicos bem definidos utilizados como referência na calibração dos termômetros.

Ex.: ponto de fusão, ponto de ebulição, ponto triplo, etc.

4. Escalas termométricas

A escala Celsius é a mais utilizada no Brasil, entretanto, muitos países não a utilizam. Devido a esse fato, surge a necessidade de se estabelecer uma relação de correspondência entre essas. Para isso, partimos dos pontos fixos dessas, estabelecendo uma correspondência física, ou seja, o mesmo grau de agitação molecular corresponde a mesma temperatura nas duas escalas, ainda que seus valores numéricos sejam diferentes. Para isso, vejamos como se dá tal correspondência em escalas quaisquer:

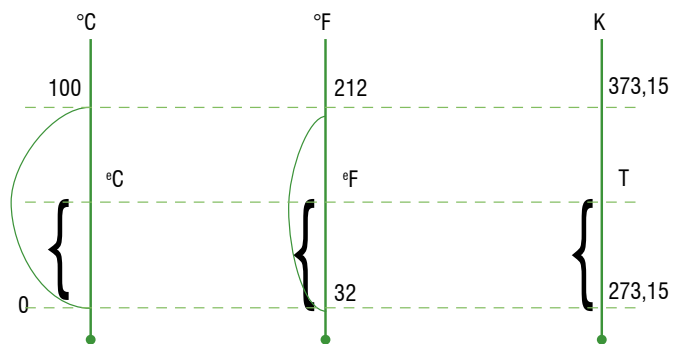


Para realizarmos uma correspondência entre escalas, basta realizar uma interpolação linear entre as temperaturas em diferentes escalas, ou seja, as razões entre segmentos equivalentes nas duas escalas é igual, de maneira que:

$$\frac{X - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y_1}$$

Onde X_1, X_2, Y_1 e Y_2 são os pontos fixos nas escalas X e Y, respectivamente.

Nas escalas utilizadas habitualmente, conhecemos os pontos fixos, portanto:



Realizando a interpolação:

$$\frac{C - 0}{100 - 0} = \frac{F - 32}{212 - 32} = \frac{K - 273,15}{373,15 - 273,15}$$

Simplificando:

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9} = \frac{K - 273}{5}$$

5. Escala absoluta Kelvin

Depois de James Prescott Joule ter determinado o equivalente mecânico do calor, Lorde Kelvin abordou o problema de um ponto de vista completamente diferente, e em 1848 inventou uma escala de temperatura absoluta que não dependia das propriedades da substância e era baseada somente nas leis fundamentais da termodinâmica. Ele baseou-se no princípio de que sua escala fosse construída com o zero em $-273,15^{\circ}\text{C}$ ($-459,67^{\circ}\text{F}$) fazendo uma extrapolação numérica utilizando um termômetro a gás.

O zero absoluto não pode ser atingido, porém é possível chegar a temperaturas muito próximas dele através do uso de refrigeradores criogênicos, e desmagnetização adiabática nuclear. O uso de resfriamento

a laser já produziu temperaturas na ordem de bilionésimos de Kelvin. Em temperaturas extremamente baixas, nas vizinhanças do zero absoluto, a matéria exibe muitas propriedades extraordinárias, incluindo a supercondutividade (quando a matéria não exibe resistência elétrica), a superfluidez (quando a viscosidade de um fluido é zero) e a Condensação de Bose-Einstein.

Até 2004, a temperatura mais baixa obtida para um condensado Bose-Einstein era de 450 pK, ou 0,0000000045 K, obtida por Wolfgang Ketterle e colegas do MIT. A mais baixa temperatura já obtida foi de 100 pK, durante uma experiência de ordenação magnética nuclear em 1999 no Laboratório de Baixas Temperaturas da Universidade de Tecnologia de Helsinque.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Mediu-se a temperatura de um corpo com dois termômetros: um graduado na escala Celsius e outro, na escala Fahrenheit. Verificou-se que as indicações nas duas escalas eram iguais em valor absoluto. Um possível valor para a temperatura do corpo, na escala Celsius, é

- (A) -25. (D) 11,4.
 (B) -11,4. (E) 40.
 (C) 6,0.

Solução: Letra D.

Utilizaremos a equação termométrica das escalas Celsius e Fahrenheit:

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9} \Rightarrow F = \frac{9C}{5} + 32$$

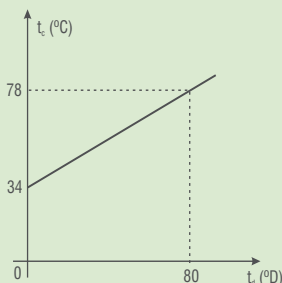
Do enunciado temos:

$$|C| = |F|$$

$$|C| = \left| \frac{9C}{5} + 32 \right| \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C = \frac{9C}{5} + 32 \Rightarrow 5C = 9C + 160 \Rightarrow C = -40 \\ -C = \frac{9C}{5} + 32 \Rightarrow -5C = 9C + 160 \Rightarrow C = 11,4 \end{cases}$$

02 Um cientista criou uma escala termométrica D que adota como pontos fixos o ponto de ebulição do álcool (78°C) e o ponto de ebulição do éter (34°C). O gráfico a seguir relaciona esta escala D com a escala Celsius.

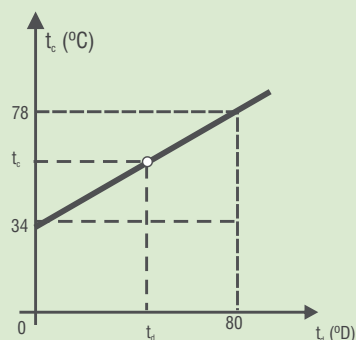


A temperatura de ebulição da água vale, em $^{\circ}\text{D}$:

- (A) 44. (D) 120.
 (B) 86. (E) 160.
 (C) 112.

Solução: Letra D.

Resolveremos por semelhança de triângulos. Na figura a seguir escolhemos um ponto qualquer do gráfico. Através dele identificamos dois triângulos semelhantes.



Fazendo a proporção dos lados homólogos temos:

$$\frac{t_c - 34}{78 - 34} = \frac{t_d}{80}$$

Para o ponto de ebulição da água $t_c = 100^{\circ}\text{C}$

$$\frac{100 - 34}{78 - 34} = \frac{t_d}{80} \Rightarrow t_d = 120$$

03 Ao nível do mar, mediante os termômetros, um graduado da escala Celsius e outro, na escala Fahrenheit, determinamos a temperatura de certa massa de água líquida. A diferença entre as leituras dos dois termômetros é 100. Qual a temperatura dessa massa de água na escala Kelvin?

Solução:

Utilizaremos a equação termométrica das escalas Celsius e Fahrenheit.

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9} \Rightarrow F = \frac{9C}{5} + 32$$

Como a água está líquida, a temperatura em Fahrenheit será maior que a Celsius, logo, do enunciado temos que: $F - C = 100$

$$\text{Substituindo temos: } \frac{9C}{5} + 32 - C = 100 \Rightarrow C = 85$$

Da relação entre Celsius e Kelvin temos:

$$K = C + 273$$

$$K = 358 \text{ K}$$

04 Em uma escala termométrica arbitrária A, a temperatura de fusão do gelo sob pressão normal é 20 A e a temperatura de 70 A equivale a 176, na escala Fahrenheit. Nestas condições, a temperatura de 40 C equivale, na escala A, a:

- (A) 45.
- (B) 40.
- (C) 35.
- (D) 30.
- (E) 25.

Solução: Letra A.

Podemos determinar a função termométrica entre a escala A e a Fahrenheit:

$$\frac{A - 20}{70 - 20} = \frac{F - 32}{176 - 32}$$

Para calcular o valor na escala A de 40°C, devemos primeiramente transformá-lo em °F:

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9} \rightarrow \frac{40}{5} = \frac{F - 32}{9} \rightarrow F = 104$$

Substituindo na função acima teremos:

$$\frac{A - 20}{70 - 20} = \frac{104 - 32}{176 - 32} \rightarrow A = 45$$

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 (AFA) Um termômetro mal graduado assinala, nos pontos fixos usuais, respectivamente, -1°C e 101°C. A temperatura na qual o termômetro **não** precisa de correção é:

- (A) 49.
- (B) 50.
- (C) 51.
- (D) 52.

02 (ITA) Um pesquisador achou conveniente construir uma escala termométrica (escala P) com base nas temperaturas de fusão e ebulição do álcool etílico, tomadas como pontos zero e cem da sua escala. Acontece que na escala Celsius aqueles dois pontos externos da escala do pesquisador têm valores -118°C e 78°C. Ao usar o seu termômetro para medir a temperatura de uma pessoa com febre, o pesquisador encontrou 80 graus P. Calcule a temperatura da pessoa doente em graus Celsius (°C).

03 Um termômetro graduado em uma escala X indica 10°X para o ponto de gelo e 90°X para o ponto de vapor. Quando o termômetro construído com a tal escala X indica 25°X, a temperatura em °C será igual a:

- (A) 9,51.
- (B) 18,75.
- (C) 25,51.
- (D) 32,75.

04 (ITA) Para medir a febre de pacientes, um estudante de medicina criou sua própria escala linear de temperaturas. Nessa nova escala, os valores de 0 (zero) e 10 (dez) correspondem respectivamente a 37°C e 40°C. A temperatura de mesmo valor numérico em ambas escalas é aproximadamente:

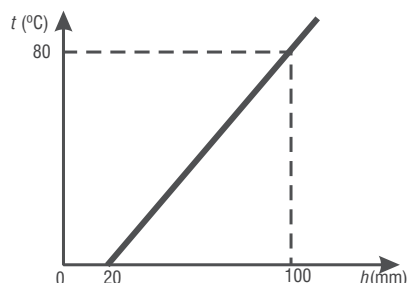
- (A) 52,9°C.
- (B) 28,5°C.
- (C) 74,3°C.
- (D) - 8,5°C.
- (E) - 28,5°C.

05 Pode-se medir a temperatura com um termômetro de mercúrio. Neste, a grandeza termométrica é o comprimento / de uma coluna capilar, medida a partir de uma origem comum. Verifica-se que $l = 2,34$ cm quando o termômetro está em equilíbrio térmico com o gelo em fusão, e $l = 12,34$ cm quando o equilíbrio térmico é com a água em ebulição (em um ambiente em que a pressão atmosférica é de 1 atm).

Calcule:

- (A) o comprimento da coluna de mercúrio, quando a temperatura é $\theta = 25$ °C;
- (B) a temperatura do ambiente, quando $l = 8,84$ cm.

06 O gráfico a seguir indica a temperatura t e a altura h da coluna de mercúrio registradas em um termômetro:



Qual é a equação termométrica desse termômetro?

07 Nos automóveis com motor refrigerado a água, utiliza-se um termômetro que opera com tensão de vapor, isto é, a pressão exercida pelo vapor de água determina o valor da temperatura desse líquido. Para temperaturas entre 45° e 130°, pode-se admitir que vale a seguinte relação: $\theta_c = k \cdot p - 39$, em que p é a pressão de vapor expressa na unidade atmosfera(atm).

Usando o enunciado e seus conhecimentos de física, determine:

- (A) o valor da constante k , para uma temperatura de 89°C para a água a pressão de vapor vale 1,28 atm;
- (B) o valor da temperatura da água quando a pressão de vapor registrar 1,20 atm;
- (C) a pressão de vapor da água quando a água estiver a 101°C;
- (D) o intervalo de pressão do vapor para o qual a equação é válida.

08 (UFMS) Através de experimentos, biólogos observaram que a taxa de canto de grilos de uma determinada espécie estava relacionada com a temperatura ambiente de uma maneira que poderia ser considerada linear. Experiências mostraram que, a uma temperatura de 21 °C, os grilos cantavam, em média, 120 vezes por minuto; e, a uma temperatura de 26 °C, os grilos cantavam, em média, 180 vezes por minuto. Considerando T a temperatura em graus Celsius e n o número de vezes que os grilos cantavam por minuto, podemos representar a relação entre T e n pelo gráfico abaixo.

Supondo que os grilos estivessem cantando, em média, 156 vezes por minuto, de acordo com o modelo sugerido nesta questão, estima-se que a temperatura deveria ser igual a:

- (A) 21,5°C .
- (B) 22°C .
- (C) 23°C .
- (D) 24°C .
- (E) 25,5°C .

09 (UFF) Um turista brasileiro, ao desembarcar no aeroporto de Chicago, observou que o valor da temperatura lá indicado, em °F, era um quinto do valor correspondente em °C. O valor observado foi:

- (A) - 2 °F
- (B) 2 °F
- (C) 4 °F
- (D) 0 °F
- (E) - 4 °F

10 (UNIFESP) Quando se mede a temperatura do corpo humano com um termômetro clínico de mercúrio em vidro, procura-se colocar o bulbo do termômetro em contato direto com regiões mais próximas do interior do corpo e manter o termômetro assim durante algum tempo, antes de fazer a leitura.

Esses dois procedimentos são necessários porque:

- (A) o equilíbrio térmico só é possível quando há contato direto entre dois corpos e porque demanda sempre algum tempo para que a troca de calor entre o corpo humano e o termômetro se efetive.
- (B) é preciso reduzir a interferência da pele, órgão que regula a temperatura interna do corpo, e porque demanda sempre algum tempo para que a troca de calor entre o corpo humano e o termômetro se efetive.
- (C) o equilíbrio térmico só é possível quando há contato direto entre dois corpos e porque é preciso evitar a interferência do calor específico médio do corpo humano.
- (D) é preciso reduzir a interferência da pele, órgão que regula a temperatura interna do corpo, e porque o calor específico médio do corpo humano é muito menor que o do mercúrio e do vidro.
- (E) o equilíbrio térmico só é possível quando há contato direto entre dois corpos e porque é preciso reduzir a interferência da pele, órgão que regula a temperatura interna do corpo.

11 (ITA SP) Para medir a febre de pacientes, um estudante de medicina criou sua própria escala linear de temperatura. Nessa nova escala, os valores de 0 (zero) a 10 (dez) correspondem respectivamente a 37°C e 40°C. A temperatura de mesmo valor numérico em ambas escalas é aproximadamente

- (A) 52,9 °C
- (B) 28,5 °C
- (C) 74,3 °C
- (D) -8,5 °C
- (E) -28,5 °C

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

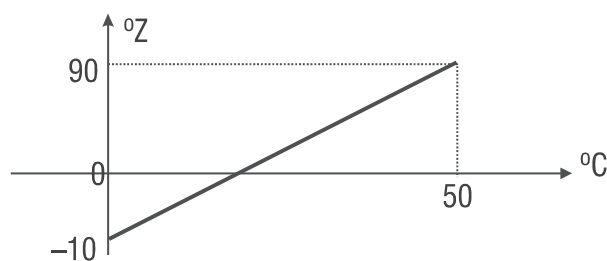
01 (ESPCEX) Um cientista dispõe de um termômetro de mercúrio com a escala totalmente ilegível. Desejando medir a temperatura de uma substância X com o termômetro, ele adotou o seguinte procedimento: sob a condição de pressão normal (1 atm), mergulhou o termômetro na água em ebulição e observou que a coluna de mercúrio atingiu o comprimento de 10 cm; posteriormente, colocando o termômetro em gelo fundente, o comprimento da coluna de mercúrio passou a ser de 2 cm. Após esse procedimento, ele colocou o termômetro em contato com a substância X e encontrou o comprimento de 5,2 cm para a coluna de mercúrio. Com base nessas informações, a temperatura da substância X medida pelo cientista, em graus Celsius, é de:

- (A) 65°C.
- (B) 52°C.
- (C) 48°C.
- (D) 40°C.
- (E) 32°C.

02 (UFPA) Em um certo instante, a temperatura de um corpo, medida na escala Kelvin, foi de 300 K. Após decorrido um certo tempo, mediu-se a temperatura desse mesmo corpo, e o termômetro indicou 68°F. Qual foi a variação de temperatura sofrida pelo corpo, medida na escala Celsius?

03 Dois termômetros de mercúrio, um graduado na escala Celsius e o outro na Fahrenheit, são mergulhados em um mesmo líquido. Após o equilíbrio térmico, nota-se que os valores numéricos indicados, se somados, são superados em 60 unidades pelo somatório das indicações nos pontos do gelo e do vapor dessas escalas (Celsius e Fahrenheit). Quanto marca cada termômetro?

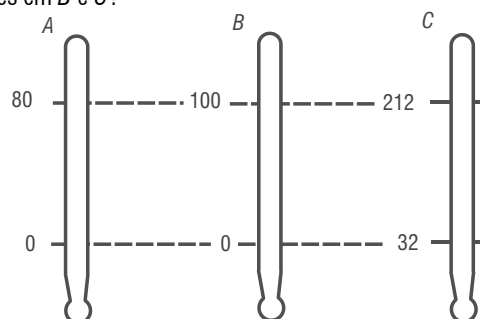
04 (ESPCEX) Comparando-se a escala Z com a escala C (Celsius) de dois termômetros, obteve-se o gráfico abaixo, que mostra a correspondência entre essas duas escalas. Quando o termômetro graduado em °C estiver registrando 90, o termômetro graduado em °Z estará registrando:



- (A) 100.
- (B) 120.
- (C) 150.
- (D) 170.
- (E) 200.

05 Uma escala termométrica X foi definida tomando-se o ponto de ebulição de uma substância, cuja temperatura é de 127°C, como 100°X, e o zero absoluto como -100°X. A temperatura de 20°X corresponderá, na escala Kelvin, a que valor?

06 A figura mostra três termômetros cujas escalas se relacionam de acordo com a ilustração abaixo. Colocando-os em um mesmo meio, se o termômetro A indicar 60°A, qual será a razão entre as correspondentes indicações em B e C?



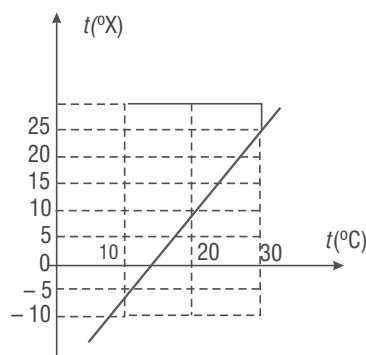
07 Dois termômetros, o primeiro graduado na escala Celsius e o segundo em uma nova escala recentemente criada e ainda sem nome, foram usados para se medir as temperaturas dos líquidos contidos em dois recipientes. Ao serem utilizados, o termômetro graduado na nova escala registrou um valor duas vezes maior que o termômetro graduado na escala Celsius no primeiro recipiente, e três vezes no segundo recipiente (mais quente). Se as diferenças de temperatura observadas nos dois líquidos foram de 50 graus na escala Celsius e de 200 graus na nova escala, a temperatura do ponto de gelo nesta nova escala é de:

- (A) 100°N.
- (B) 50°N.
- (C) 0°N.
- (D) – 50° N.
- (E) –100°N.

08 Gradua-se um termômetro, tomando-se para pontos fixos o de ebulição do álcool, suposto 80°C, e o de ebulição da água. No ponto de ebulição do álcool marca-se 0 grau e no da água marca-se 100 graus. A temperatura na escala Celsius que corresponde a 70° dessa nova escala é:

- (A) 70.
- (B) 94.
- (C) –50.
- (D) 100.

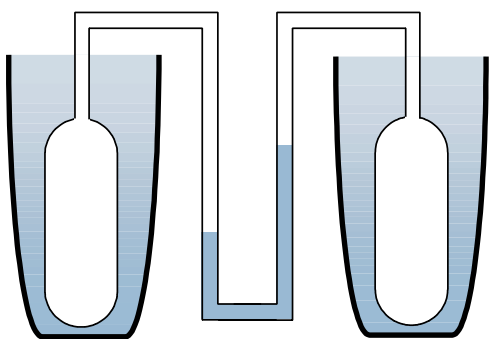
09 (UEL) O gráfico indicado a seguir representa a relação entre a temperatura média em uma escala X e a mesma temperatura medida na escala Celsius.



Para a variação de 1,0°C, que intervalo vamos observar na escala X ?

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Um termômetro de gás consiste em dois bulbos, cada um colocado em um recipiente com água. A diferença de pressão entre os dois bulbos é medida por um manômetro de mercúrio, como mostra a figura. O volume de gás nos dois bulbos é mantido constante, usando reservatórios apropriados, que não aparecem na figura. Quando os dois recipientes estão à temperatura do ponto triplo da água, a diferença de pressão indicada pelo manômetro é zero. Quando um dos recipientes está na temperatura do ponto triplo (T_{triplo}) e o outro na do ponto de ebulição da água, o manômetro indica 120 mm de Hg. Finalmente, o manômetro indica 90,0 mm de Hg, quando um dos recipientes está à temperatura do ponto triplo e o outro está a uma temperatura desconhecida. Qual é a temperatura absoluta desconhecida?



02 (OBF) Ao se construir uma escala termométrica arbitrária X, verificou-se que a temperatura de -40°X coincide com a da antiga escala de temperatura Réaumur, que adota como pontos fixos 0°R e 80°R . Verificou-se ainda que a temperatura de -75°X coincide com a da escala Celsius. Determine na escala X a leitura de 0°C e a leitura de 80°R .

03 Termistor é um equipamento semicondutor com uma resistência elétrica dependente da temperatura, comumente usado em termômetros clínicos e para detectar superaquecimentos em equipamentos eletrônicos. Em uma faixa limitada de temperatura, a resistência na temperatura T é dada por $R(T) = R_a \exp[B(1/T - 1/T_a)]$, em que R_a é a resistência na temperatura T_a e B uma constante que depende do semicondutor específico usado. Para um tipo de termistor, $B = 4689 \text{ K}$ e a resistência a 273 K é de 10^4 ohms. Que temperatura estará o termistor medindo quando sua resistência for de 100 ohms? Dado: $\log(e) = 0,43$.

(Obs.: A notação $\exp(a)$ significa e^a , em que e é a base natural (número de Euler) e a é um expoente qualquer.

04 (UFSE) Um termômetro que mede a temperatura ambiente indica sempre 2°C acima da temperatura correta, e outro que mede a temperatura de um líquido indica 3°C abaixo da temperatura correta. Se o líquido está a 5°C acima da temperatura ambiente, a indicação dos termômetros defeituosos, em graus Celsius, pode ser:

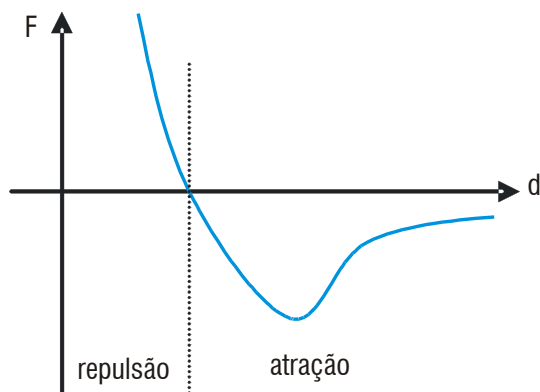
- (A) 18 e 16.
- (B) 18 e 18.
- (C) 18 e 20.
- (D) 18 e 23.
- (E) 18 e 28.

05 (PUCCAMP) Dois termômetros, um Celsius correto e um Fahrenheit incorreto, são colocados dentro de um mesmo líquido. Se o termômetro Celsius acusar 40°C e o Fahrenheit, $109,2^{\circ}\text{F}$, o erro percentual cometido na medida pelo termômetro Fahrenheit é de:

- (A) 5,0%.
- (B) 5,2%.
- (C) 8,4%.
- (D) 72%.
- (E) 104%.

1. Introdução

Sabemos que a temperatura é uma medida de agitação molecular. Logo, se aumentarmos, por exemplo, a temperatura de um corpo, a agitação de suas moléculas aumentará, com isso elas se afastarão, fazendo com que aquele corpo ocupe um espaço maior. Na verdade, o que acontece é que as moléculas se afastam mais do que se aproximam, pois a força de repulsão aumenta a uma taxa maior que a de atração. (Veja gráfico a seguir.)



A dilatação térmica é o fenômeno que um corpo apresenta ao variar suas dimensões geométricas quando sua temperatura se modifica, sendo, inclusive, esse o fenômeno usado para a construção de termômetros de coluna líquida.

Dependendo da quantidade de dimensões variantes, classificamos a dilatação térmica em linear, superficial ou volumétrica.

- (A) **Dilatação linear:** apenas uma dimensão varia. Por exemplo: uma barra de ferro cujo comprimento aumenta quando aquecida.
- (B) **Dilatação superficial:** apenas duas dimensões variam. Lembrando que duas dimensões podem representar uma área, pode-se dizer que a dilatação superficial provoca uma variação de uma área. Por exemplo: uma chapa de aço que tem sua área aumentada quando aquecida.
- (C) **Dilatação volumétrica:** as três dimensões do corpo variam. Lembrando que três dimensões podem representar um volume, pode-se dizer que a dilatação volumétrica provoca uma variação de um volume. Por exemplo: um bloco de cobre que tem seu volume aumentado quando aquecido.

Obs.:

- A rigor, toda dilatação tem caráter volumétrico. No entanto, há casos em que alguma dimensão é tão maior que outra que a dilatação da segunda é desprezível face da primeira, caracterizando, assim, a dilatação linear (apenas uma dilatação é considerável) e a superficial (apenas duas são consideráveis).
- O oposto à dilatação térmica é a contração térmica. Quando um corpo sofre um decréscimo de temperatura, suas dimensões se contraem.

2. Dilatação linear



$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T$$

em que:

ΔL → variação do comprimento ($\Delta L = L - L_0$)

L_0 → comprimento inicial

L → comprimento final ($L = L_0 + \Delta L$)

α → coeficiente de dilatação linear

ΔT → variação de temperatura ($\Delta T = T - T_0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{Fe} = 13 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ \alpha_{Cu} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ \alpha_{vidro} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \end{array} \right.$$

Podemos também obter uma expressão para o comprimento final L:

$$\Delta L = L - L_0 = L_0 \alpha \Delta T$$

$$L = L_0 + L_0 \alpha \Delta T$$

$$L = L_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

3. Dilatação superficial



$$\Delta A = A_0 \beta \Delta T$$

em que:

ΔA → variação da área ($\Delta A = A - A_0$)

A_0 → área inicial

A → área final ($A = A_0 + \Delta A$)

β → coeficiente de dilatação superficial

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{Fe} = 26 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ \beta_{Cu} = 32 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ \beta_{vidro} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \end{array} \right.$$

$\Delta T \rightarrow$ variação de temperatura ($\Delta T = T - T_0$)

Podemos também obter uma expressão para a área final A:

$$\Delta A = A - A_0 = A_0 \beta \Delta T$$

$$A = A_0 + A_0 \beta \Delta T$$

$$A = A_0 (1 + \beta \Delta T)$$

4. Dilatação volumétrica



$$\Delta V = V_0 \gamma \Delta T$$

em que:

$\Delta V \rightarrow$ variação do volume ($\Delta V = V - V_0$)

$V_0 \rightarrow$ volume inicial

$V \rightarrow$ volume final ($V = V_0 + \Delta V$)

$\gamma \rightarrow$ coeficiente de dilatação volumétrica

$\Delta T \rightarrow$ variação de temperatura ($\Delta T = T - T_0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\text{Fe}} = 39 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ \gamma_{\text{Cu}} = 48 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ \gamma_{\text{vidro}} = 24 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \end{array} \right.$$

Podemos também obter uma expressão para o volume final V:

$$\Delta V = V - V_0 = V_0 \gamma \Delta T$$

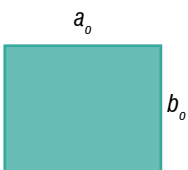
$$V = V_0 + V_0 \gamma \Delta T$$

$$V = V_0 (1 + \gamma \Delta T)$$

5. Relação entre os coeficientes

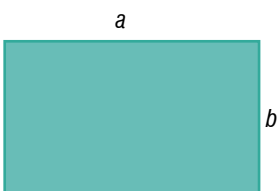
α , β e γ

Seja uma placa de dimensões a_0 e b_0 .



Sua área inicial é $A_0 = a_0 b_0$. (i)

Ao sofrer uma variação de temperatura ΔT as dimensões ficam a e b

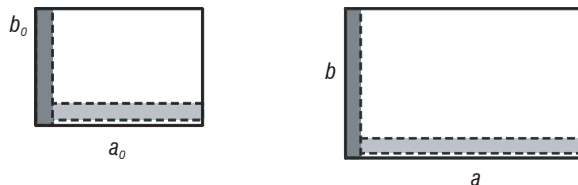


Sua área final é $A = ab$. (ii)

Aplicando-se a dilatação superficial temos:

$$A = A_0 (1 + \beta \Delta T) \quad \text{(iii)}$$

Tomando-se um filete da placa de largura muito pequena nas direções vertical e horizontal:



Aplicando-se a dilatação linear nestes filetes temos:

$$a = a_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

$$b = b_0 (1 + \alpha \Delta T) \quad \text{(iv)}$$

Substituindo as equações (iii) e (iv) na equação (ii) temos:

$$A_0 (1 + \beta \Delta T) = a_0 (1 + \alpha \Delta T) b_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

Substituindo a equação (i) e simplificando

$$1 + \beta \Delta T = (1 + \alpha \Delta T)(1 + \alpha \Delta T)$$

$$1 + \beta \Delta T = 1 + 2\alpha \Delta T + \alpha^2 \Delta T^2$$

$$\beta = 2\alpha + \alpha^2 \Delta T$$

Como os coeficientes são da ordem de 10^{-6} podemos desprezar o 2º termo da 2ª parcela e assim obtemos a relação entre α e β .

$$\beta = 2\alpha$$

Utilizando o mesmo artifício na dilatação de um sólido de dimensões a_0 , b_0 e c_0 chegamos à relação entre α e γ :

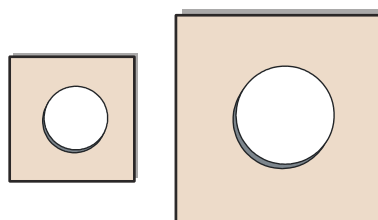
$$\gamma = 3\alpha$$

Resumindo:

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{3}$$

6. Comportamento dos espaços vazios

Verifica-se experimentalmente que os furos de chapas ou buracos em sólidos, como, por exemplo, o espaço de dentro de um copo, comportam-se como se este espaço fosse feito do próprio material. Ou seja, ao se aplicar a dilatação volumétrica em uma chapa com um furo, este furo irá aumentar de tamanho como se fosse feito do material da chapa.



No caso de um copo, por exemplo, utiliza-se seu volume interno (parte vazia) como parâmetro para dilatação, visto que este é muito maior que o volume de vidro.

7. Dilatação de líquidos

Nos líquidos, como foi dito anteriormente, aplicamos, em geral, a dilatação volumétrica. Porém, como os líquidos estão sempre acondicionados em recipientes, e, estes também dilatam, deve-se ficar atento para não se esquecer de considerar a sua dilatação quando pertinente.

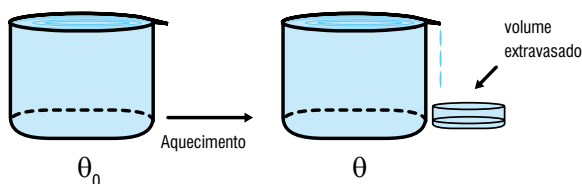
Um caso bastante comum é quando temos um recipiente completamente cheio de um líquido, cujo coeficiente é maior que o do recipiente. Nesse caso, ocorrerá um derramamento do líquido.

Experimentalmente, surge daí um novo coeficiente de dilatação volumétrico, o APARENTE.

Esse coeficiente representa apenas a porção de líquido que derrama e está relacionado com os dois coeficientes do experimento (do líquido e do recipiente).

No exemplo abaixo, podemos desenvolver essas relações.

Um recipiente de volume V_0 , à uma temperatura θ_0 , é aquecido até uma temperatura θ . Verifica-se um derramamento do líquido (volume extravasado).



Esse volume extravasado chamamos de $\Delta V_{\text{aparente}}$ e pode ser calculado pela diferença entre a dilatação do líquido e do recipiente:

$$\Delta V_{\text{aparente}} = \Delta V_{\text{líquido}} - \Delta V_{\text{recipiente}}$$

Aplicando as fórmulas de variação de volume, temos:

$$V_0 \cdot \gamma_{\text{aparente}} \cdot \Delta\theta = V_0 \cdot \gamma_{\text{líquido}} \cdot \Delta\theta - V_0 \cdot \gamma_{\text{recipiente}} \cdot \Delta\theta$$

Dividindo a expressão acima por $V_0 \cdot \Delta\theta$, temos:

$$\gamma_{\text{aparente}} = \gamma_{\text{líquido}} - \gamma_{\text{recipiente}}$$

Atenção: A expressão acima só é válida quando os volumes iniciais são iguais.

8. Variação da massa específica de uma substância

→ massa específica ou densidade absoluta: $\rho = \frac{m}{V}$

Seja um corpo feito de uma substância cuja massa específica é ρ_0 . Isto significa que se este corpo tem um volume inicial V_0 sua massa m será dada por:

$$m = \rho_0 V_0$$

Após uma variação de temperatura ΔT , seu volume será

$$V = V_0(1 + \gamma\Delta T)$$

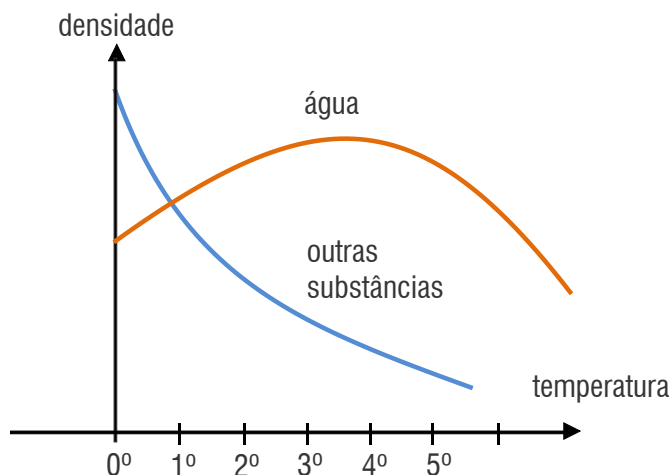
Como a massa não varia,

$$\rho_0 V_0 = \rho V = \rho V_0(1 + \gamma\Delta T)$$

A nova massa específica desta substância será

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma\Delta T}$$

9. Comportamento anômalo da água



Conforme vimos anteriormente, um aumento na temperatura causa, nas substâncias, uma diminuição da sua densidade. Porém, a água tem comportamento diferente na faixa de temperatura que vai de 0°C até 4°C. Verifique no gráfico anterior.

Este fenômeno ocorre devido à quebra das chamadas “pontes de hidrogênio”. Esse tipo de dilatação anormal explica por que um lago congela apenas na superfície, e, como o gelo é um isolante térmico, a vida animal e vegetal é preservada.

10. Simplificações úteis

Como α é da ordem de $10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ e ΔT geralmente da ordem de $10^2 \text{ } ^\circ\text{C}$, é possível fazermos simplificações no cálculo de equações de dilatação que são compatíveis com os erros cometidos nas medidas do coeficiente.

Portanto, temos:

$$(A) (1 + \alpha\Delta T) \cdot (1 + \alpha\Delta T) = 1 + 2\alpha\Delta T$$

$$(B) (1 + \alpha\Delta T)^n = 1 + n\alpha\Delta T$$

$$(C) (1 + \alpha\Delta T)/(1 + \alpha'\Delta T) = 1 + \alpha\Delta T - \alpha'\Delta T$$

Exemplo: em um problema qualquer, recai-se na seguinte conta:

$$(1 + 0,000020 \cdot 150)/1,000020 \cdot 50$$

O melhor a fazer nesse caso é usar a 3ª simplificação, pois:

$$1 + 0,000020 \cdot (150 - 50) = 1,0020$$

Se fizessemos pelo método “normal”:

$$1,0030/1,0010 = 1,001998$$

Perceba que a simplificação que fizemos conduz a um resultado compatível com erros e algoritmos significativos.

11. Lâminas bimetálicas

Ao unirmos duas lâminas feitas de materiais de coeficientes de dilatação diferentes, teremos algo como mostra o esquema abaixo:



Ao aquecermos esse sistema, teremos que uma das lâminas se dilatará mais do que a outra. Isto porque se analisarmos a equação da dilatação linear

$$L = L_0(1 + \alpha\Delta T)$$

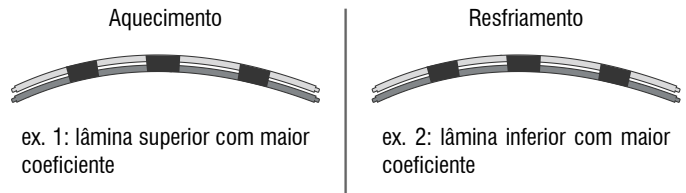
veremos que L depende apenas de L_0 , α e ΔT . Como o comprimento inicial é o mesmo (as lâminas tinham o mesmo tamanho) e a variação de temperatura é a mesma para ambas, terá maior L a lâmina que tiver maior α .

Mas, pelo fato de elas estarem presas, a tendência do sistema será curvar-se, e a direção da curva se dá com as seguintes análises:

- A lâmina que se dilata mais terá L maior; conseqüentemente, terá um

raio maior.

- A lâmina que se dilata menos terá L menor; conseqüentemente, terá um raio menor.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Uma esfera maciça de raio 3 m (113 m^3) feita de ferro foi colocada em um forno inicialmente a 20°C . Aquece-se o forno até uma temperatura de 220°C .

Determine:

- o novo raio da esfera;
- o novo volume da esfera.

Dado: $\alpha_{\text{Fe}} = 13 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

Solução:

Para o cálculo do novo raio aplicamos a expressão da dilatação linear: $\Delta L = L_0 \alpha \Delta T$.

Na qual L será aqui representado pelo raio, assim:

$$\Delta R = R_0 \alpha \Delta T = 3.13 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 0,0078 \text{ m.}$$

Logo, $R = 3 + 0,0078 = 3,0078 \text{ m.}$

Poderíamos também aplicar a expressão do comprimento (raio) final:

$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta T) = 3(1 + 13 \cdot 10^{-6} \cdot 200) = 3,0078 \text{ m}$$

Podemos realizar o cálculo do novo volume de duas formas. A primeira (não recomendada) seria aplicar fórmula do volume de uma esfera

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$V = \frac{4}{3} \pi 3,0078^3 \cong 113,9 \text{ m}^3$$

A segunda (mais recomendada) seria usando o conhecimento de que o coeficiente de dilatação volumétrico é, aproximadamente, o triplo do linear ($\gamma = 3\alpha$).

$$V = 113(1 + 3 \cdot 13 \cdot 10^{-6} \cdot 200) = 113,8 \text{ m}^3$$

Assinale a alternativa que apresenta um procedimento que não permite esse encaixe.

- (A) Resfriar apenas o eixo. (C) Resfriar o eixo e o anel.
- (B) Aquecer apenas o anel. (D) Aquecer o eixo e o anel.

À temperatura ambiente, o diâmetro do eixo é maior que o do orifício do anel. Sabe-se que o coeficiente de dilatação térmica do latão é maior que o do aço. Diante disso, são sugeridos a Jpão alguns procedimentos, descritos nas alternativas a seguir, para encaixar o eixo no anel.

Solução:

Como o diâmetro do eixo era maior que o furo do anel, para encaixar o eixo no furo do anel, podemos basicamente:

- diminuir o diâmetro do eixo resfriando-o;
- aumentar o diâmetro do furo do anel aquecendo-o;

Além da figura, uma informação importante é que o coeficiente do latão é maior que o do aço. Neste caso, o diâmetro do furo do anel aumenta mais que o do eixo quando aquecido, assim como, diminui mais quando resfriado. Podemos, assim, aquecer os dois juntos. O diâmetro do furo do anel ultrapassará o do eixo.

Logo, a única opção que não permite o encaixe seria resfriar os dois juntos, pois, o diâmetro do furo do anel, continuaria a ficar menor que o do eixo.

05 Em um relógio, o pêndulo é uma barra metálica, projetada para que seu período seja igual a 1s. Verifica-se que, no inverno, quando a temperatura média é de 10°C , o relógio adianta, em média 55s por semana; no verão, quando a temperatura média é 30°C , o relógio atrasa, em média 1 minuto por semana.

- (A) Calcule o coeficiente de dilatação linear do metal do pêndulo.
- (B) A que temperatura o relógio funcionará com precisão?

Solução:

Precisaremos da expressão do período de um pêndulo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Onde vemos a relação entre T e L.

Vale ressaltar que:

- O relógio adianta quando T diminui (logo L diminui por resfriamento).
- O relógio atrasa quando T aumenta (logo L aumenta por aquecimento).

Uma dica para esses tipos de problema é multiplicar a variação relativa do período pelo intervalo de tempo em que foi feita a medição. Assim, temos que o atraso ou o adianto do relógio será dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T_0} \cdot \Delta t &= \frac{2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} - 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{g}}}{2\pi \sqrt{\frac{L_0}{g}}} \cdot \Delta t = \left(\sqrt{\frac{L}{L_0}} - 1 \right) \Delta t \\ &= (\sqrt{1 + \alpha \Delta T} - 1) \Delta t \end{aligned}$$

Aqui usamos a aproximação dada anteriormente em simplificações úteis:

$$\frac{\Delta T}{T_0} \cdot \Delta t \cong \frac{\alpha \Delta T}{2} \Delta t$$

Nesse problema, para calcular primeiramente o coeficiente de dilatação, aplicaremos a expressão acima para uma variação de temperatura de 10°C a 30°C, produzindo um atraso total de $(55 + 60) = 115$ segundos.

Assim:

$$115 \cong \frac{\alpha \cdot 20}{2} \cdot 7.24.3600 \rightarrow \alpha = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{C}^{-1}$$

Para determinar a temperatura na qual o relógio é preciso, aplicaremos a mesma expressão para uma variação de temperatura de T_{preciso} até 30°C, produzindo um atraso total de 55 segundos.

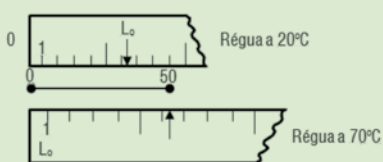
$$60 \cong \frac{1,9 \cdot 10^{-5} \cdot (30 - T_{\text{preciso}})}{2} \cdot 7.24.3600 \rightarrow T_{\text{preciso}} = 19,6^\circ\text{C}$$

Outra solução interessante seria notar que a relação entre atraso ou adianto e a variação de temperatura é direta, assim podemos resolver através da proporção:

$$\frac{60}{30 - T_{\text{preciso}}} = \frac{115}{30 - 10} \rightarrow T_{\text{preciso}} = 19,6^\circ$$

06 Uma régua feita de certo material cujo coeficiente de dilatação é $2 \cdot 10^{-4} \text{C}^{-1}$ mede corretamente a distância entre 2 pontos que é 50 cm quando utilizada a 20°C.

Ao medir esta mesma distância a uma temperatura de 70°C, que valor encontramos? De quanto foi o erro relativo?



Solução:

Perceba nessas figuras que a medida utilizando a régua dilatada (70°C) será menor que a correta (20°C).

Para aplicar a fórmula de dilatação, neste caso, devemos interpretar (vide figura) que um valor denominado L_0 na régua a 20°C terá, ao dilatar até 70°C, exatamente 50 cm (L_{final}). Assim:

$$50 = L_0 (1 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot 50)$$

$$L_0 = 49,5 \text{ cm}$$

Uma dica nesses problemas é determinar a nova unidade da régua dilatada, isto é, onde a régua dilatada mostrar 1 unidade, vemos (compare nas figuras) que essa unidade medida com a régua correta será maior.

$$u' = 1 \cdot (1 + \alpha \Delta T) = 1 + 2 \cdot 10^{-4} (50) = 1,01 \text{ cm}$$

A relação entre as medidas é dada por:

$$(\text{medida correta}) = (\text{medida errada}) \times u'$$

Assim a medida errada será dada por:

$$d = \frac{50}{1,01} = 49,5 \text{ cm}$$

07 Um frasco de vidro, cujo volume é de 300 cm³ a 10°C, está completamente cheio de um certo líquido. Quando se aquece o conjunto a uma temperatura de 140°C, transbordam 2 cm³ do líquido. Sendo o coeficiente de dilatação volumétrica do frasco igual a 0,00027/°C, determine:

- (A) O coeficiente de dilatação volumétrica aparente do líquido
- (B) O coeficiente de dilatação volumétrica real do líquido

Solução:

(A) A dilatação denominada aparente é o volume que transborda. Assim:

$$\Delta V_{\text{aparente}} = V_0 \cdot \gamma_{\text{aparente}} \cdot \Delta T$$

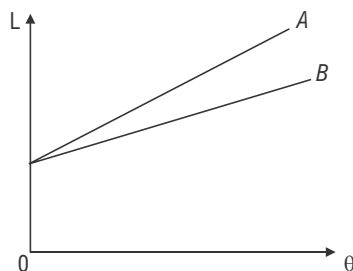
$$\gamma_{\text{aparente}} = \frac{\Delta V_{\text{aparente}}}{V_0 \cdot \Delta T} = \frac{2}{300 \cdot 130} = 5,1 \cdot 10^{-5} \text{C}^{-1}$$

(B) Para calcular o coeficiente real do líquido usaremos a expressão demonstrada anteriormente: $\gamma_{\text{líquido}} = \gamma_{\text{aparente}} + \gamma_{\text{recipiente}}$

$$\gamma_{\text{líquido}} = 5,1 \cdot 10^{-5} + 27 \cdot 10^{-5} = 32,1 \cdot 10^{-5} \text{C}^{-1}$$

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 (UFU) O gráfico a seguir representa o comprimento L , em função da temperatura θ , de dois fios metálicos finos A e B .

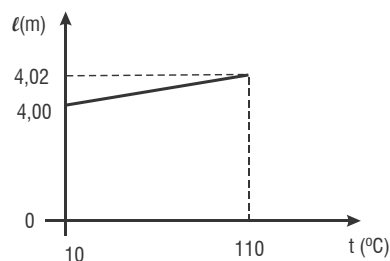


Com base nessas informações, é correto afirmar que:

- (A) os coeficientes de dilatação lineares dos fios A e B são iguais.
- (B) o coeficiente de dilatação linear do fio B é maior que o do fio A .
- (C) o coeficiente de dilatação linear do fio A é maior que o do fio B .
- (D) os comprimentos dos dois fios em $\theta = 0$ são diferentes.

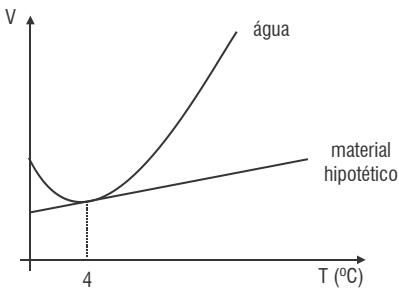
02 (UEL) Uma barra metálica, inicialmente à temperatura de 20°C, é aquecida até 260°C e sofre uma dilatação igual a 0,6% do seu comprimento inicial. Qual o coeficiente de dilatação linear médio do metal, nesse intervalo de temperatura?

03 O gráfico a seguir representa o comprimento (ℓ) de um fio em função de sua temperatura (t):



Qual o coeficiente de dilatação linear do material de que é feito o fio?

04 (UFPEL) A água, substância fundamental para a vida no planeta, apresenta uma grande quantidade de comportamentos anômalos. Suponha que um recipiente, feito com um determinado material hipotético, se encontre completamente cheio de água a 4°C. De acordo com o gráfico e seus conhecimentos, é correto afirmar que:



- (A) apenas a diminuição de temperatura fará com que a água transborde.
- (B) tanto o aumento da temperatura quanto sua diminuição não provocarão o transbordamento da água.
- (C) qualquer variação de temperatura fará com que a água transborde.
- (D) a água transbordará apenas para temperaturas negativas.
- (E) a água não transbordará com um aumento de temperatura, somente se o calor específico da substância for menor que o da água.

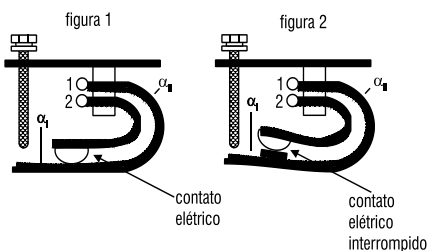
05 Um comerciante comprou 10.000 L de álcool em um dia em que a temperatura era 12°C. Para obter um lucro extra de 2 %, resolveu esperar um dia em que a temperatura era θ , para o engarrafamento. Sabendo que o coeficiente de dilatação volumétrica do álcool é de $1 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, determine essa temperatura θ .

06 (CEFET) Um recipiente de 200 cm³ de capacidade, feito de um material de coeficiente de dilatação volumétrica de $100 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, contém 180 cm³ de um líquido de coeficiente de dilatação cúbica de $1000 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. A temperatura do sistema é de 20°C. Qual a temperatura-limite de aquecimento do líquido sem que haja transbordamento?

07 A densidade absoluta de um material a 20°C é 0,819 g/cm³ e seu coeficiente de dilatação volumétrica vale $5 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. A que temperatura devemos levar esse corpo, para que sua densidade absoluta torne-se igual a 0,780 g/cm³?

08 (UFF) Nos ferros elétricos automáticos, a temperatura de funcionamento, que é previamente regulada por um parafuso, é controlada por um termostato constituído de duas lâminas bimetálicas de igual composição.

Os dois metais que formam cada uma das lâminas têm coeficientes de dilatação α_1 – o mais interno – e α_2 . As duas lâminas estão encurvadas e dispostas em contato elétrico, uma no interior da outra, como indicam as figuras a seguir. A corrente, suposta contínua, entra pelo ponto 1 e sai pelo ponto 2, conforme a figura 1, aquecendo a resistência. À medida que a temperatura aumenta, as lâminas vão se encurvando, devido à dilatação dos metais, sem interromper o contato. Quando a temperatura desejada é alcançada, uma das lâminas é detida pelo parafuso, enquanto a outra continua encurvando-se, interrompendo o contato entre elas, conforme a figura 2.



Com relação à temperatura do ferro regulada pelo parafuso e aos coeficientes de dilatação dos metais das lâminas, é correto afirmar que, quanto mais apertado o parafuso:

- (A) menor será a temperatura de funcionamento e $\alpha_1 > \alpha_2$.
- (B) maior será a temperatura de funcionamento e $\alpha_1 < \alpha_2$.
- (C) maior será a temperatura de funcionamento e $\alpha_1 > \alpha_2$.
- (D) menor será a temperatura de funcionamento e $\alpha_1 < \alpha_2$.
- (E) menor será a temperatura de funcionamento e $\alpha_1 = \alpha_2$.

09 (VUNESP-SP) A dilatação térmica dos sólidos é um fenômeno importante em diversas aplicações de engenharia, como construções de pontes, prédios e estradas de ferro. Considere o caso dos trilhos de trem serem de aço, cujo coeficiente de dilatação é $\alpha = 11 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Se a 10°C o comprimento de um trilho é de 30 m, de quanto aumentaria o seu comprimento se a temperatura aumentasse para 40°C?

- (A) $11 \cdot 10^{-4}$ m.
- (B) $33 \cdot 10^{-4}$ m.
- (C) $99 \cdot 10^{-4}$ m.
- (D) $132 \cdot 10^{-4}$ m.
- (E) $165 \cdot 10^{-4}$ m.

10 Um paralelepípedo de alumínio ($\alpha_{Al} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) tem arestas que, a 0°C, medem 5 cm, 40 cm e 30 cm. De quanto aumenta seu volume ao ser aquecido à temperatura de 100°C?

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 A diferença entre os comprimentos de duas barras metálicas retilíneas a 0°C é de 60 cm. O comprimento de cada uma delas, nessa mesma temperatura, a fim de que a diferença permaneça constante e independente da temperatura, será em cm:

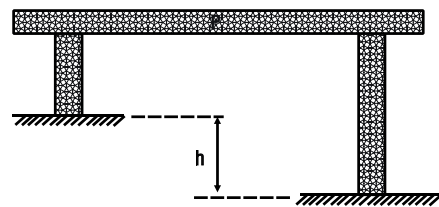
Obs: Os coeficientes de dilatação linear dos metais constituintes das barras são:

$\alpha_1 = 1,6 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$; $\alpha_2 = 2,4 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

- (A) 60 e 120.
- (B) 80 e 140.
- (C) 120 e 180.
- (D) 180 e 240.

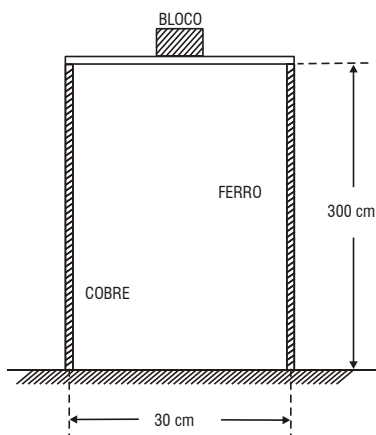
02 (UECE) Duas barras, uma de zinco e outra de estanho, têm o mesmo comprimento a 0°C, e a 100°C seus comprimentos diferem 1 mm. Os coeficientes de dilatação linear do zinco e do estanho, no intervalo da temperatura considerado, são, respectivamente, $26 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ e $22 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Quais os comprimentos das barras a 0°C?

03 Uma plataforma P foi apoiada em duas colunas, conforme a figura a seguir. Devido a um desnível do terreno, para manter a plataforma sempre horizontal para qualquer temperatura, foi preciso fazer uma das colunas de concreto e outra de ferro. Qual o valor do desnível h, sabendo que a maior coluna é de concreto e mede 7,8 m a 0°C?



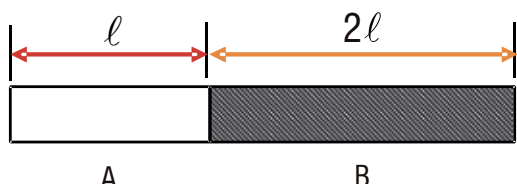
Dados: $\alpha_{\text{concreto}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; $\alpha_{\text{ferro}} = 13 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

04 A figura mostra um bloco apoiado inicialmente sobre uma plataforma horizontal que está apoiada sobre duas barras, uma de cobre e outra de ferro, cujos coeficientes de dilatação linear são, respectivamente, $16 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ e $13 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. O coeficiente de atrito estático do bloco com a superfície é de 0,003. A variação de temperatura necessária para que o bloco inicie o deslizamento sobre a plataforma é:



- (A) 100°C . (D) 120°C .
 (B) 180°C . (E) 200°C .
 (C) 150°C .

05 (UEL) A barra da figura é composta de dois segmentos: um de comprimento l e coeficiente de dilatação linear α_A e outro de comprimento $2l$ e coeficiente de dilatação linear α_B . Pode-se afirmar que o coeficiente de dilatação linear dessa barra, α , é igual a:

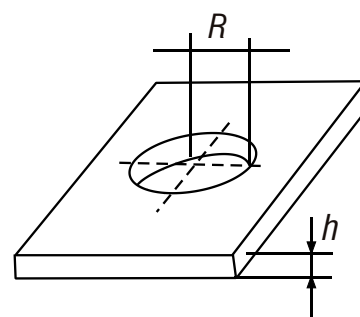


- (A) $\frac{\alpha_a + \alpha_b}{2}$. (D) $\alpha_a + 2\alpha_b$.
 (B) $\frac{2\alpha_a + \alpha_b}{3}$. (E) $3(\alpha_a + \alpha_b)$.
 (C) $\frac{\alpha_a + 2\alpha_b}{3}$.

06 Um relógio de pêndulo feito de invar é preciso a 20°C . Se o relógio for usado em um clima cuja temperatura média é de 30°C , qual a correção (aproximadamente) necessária no fim de 30 dias do início da contagem? (Dado: $\alpha_{\text{invar}} = 0,7 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$)

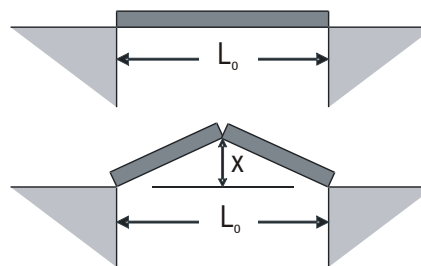
07 Uma régua de latão, de coeficiente de dilatação linear igual a $2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, foi graduada corretamente a 20°C . Ao ser aquecida, atingiu uma temperatura θ , na qual as medidas apresentam um erro de 0,1%. Qual é essa temperatura θ ?

08 (ITA) Uma chapa de metal de espessura h , volume V_0 e coeficiente de dilatação linear $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ tem um furo de raio R_0 de fora a fora. A razão V/V_0 do novo volume da peça em relação ao original quando a temperatura aumentar de 10°C será:



- (A) $10 \pi R_0^2 h \alpha / V_0$
 (B) $1 + 1,7 \times 10^{-12} R_0 / h$
 (C) $1 + 1,4 \times 10^{-8}$
 (D) $1 + 3,6 \times 10^{-4}$
 (E) $1 + 1,2 \times 10^{-4}$

09 Uma barra com uma rachadura no centro entorta para cima com um pequeno aumento de temperatura de $\theta^\circ\text{C}$. Sendo L_0 o comprimento inicial da barra e α o seu coeficiente de dilatação linear, determine x . (Considere $x \ll L_0$)



10 Uma barra de metal de $30,0 \text{ cm}$ de comprimento sofre uma dilatação de $0,075 \text{ cm}$, quando sua temperatura sobe de 0°C para 100°C . Outra barra de um metal diferente, de mesmo comprimento, dilata-se $0,045 \text{ cm}$, sob as mesmas condições. Uma terceira, também de $30,0 \text{ cm}$ de comprimento, é feita de dois pedaços dos metais acima, colocados em linha, e se expande $0,065 \text{ cm}$ entre 0°C e 100°C . Ache o comprimento de cada parte da barra composta.

11 (ITA) Uma ampola de vidro está totalmente cheia com certa massa m_0 de líquido a 0°C . Aquecendo-se o sistema a $\theta^\circ\text{C}$, resta na ampola só a massa m do líquido. O vidro tem coeficiente de dilatação k , sendo o do líquido γ . A partir de m_0, m, k, γ , calcule $\theta \cdot \alpha$.

12 (ITA) Um bulbo de vidro cujo coeficiente de dilatação linear é $3 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ está ligado a um capilar do mesmo material. À temperatura de $-10,0 \text{ }^\circ\text{C}$ a área da seção do capilar é $3,0 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2$ e todo o mercúrio cujo coeficiente de dilatação volumétrica é $180 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ocupa o volume total do bulbo, que a esta temperatura é $0,500 \text{ cm}^3$. O comprimento da coluna de mercúrio a $90,0 \text{ }^\circ\text{C}$ será:

- (A) 270 mm .
 (B) 540 mm .
 (C) 285 mm .
 (D) 300 mm .
 (E) 257 mm .

13 Um anel de cobre ($\alpha = 20 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) tem raio interno igual a 5 cm a $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Determine até qual temperatura devemos aquecê-lo, de modo que esse anel possa ser introduzido num cilindro com base de área igual a $79,285 \text{ cm}^2$. Considere $\pi \approx 3,14$.

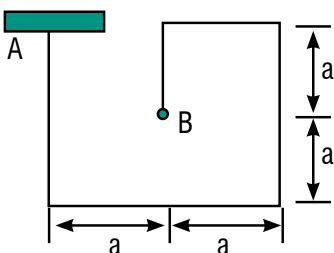
14 (MACKENZIE) A massa específica de um sólido é $10,00\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ a 100°C e $10,03\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ a 32°F . O coeficiente de dilatação linear do sólido é igual a:

- (A) $5,0 \cdot 10^{-6}^\circ\text{C}^{-1}$. (D) $20 \cdot 10^{-6}^\circ\text{C}^{-1}$.
 (B) $10 \cdot 10^{-6}^\circ\text{C}^{-1}$. (E) $30 \cdot 10^{-6}^\circ\text{C}^{-1}$.
 (C) $15 \cdot 10^{-6}^\circ\text{C}^{-1}$.

15 (UNIRIO) Um industrial propôs construir termômetros comuns de vidro, para medir temperaturas ambientes entre 1°C e 40°C , substituindo o mercúrio por água destilada. Cristóvão, um físico, se opôs, justificando que as leituras no termômetro não seriam confiáveis, porque:

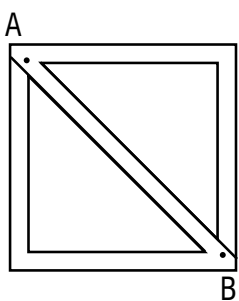
- (A) a perda de calor por radiação é grande.
 (B) o coeficiente de dilatação da água é constante no intervalo de 0°C a 100°C .
 (C) o coeficiente de dilatação da água entre 0°C e 4°C é negativo.
 (D) o calor específico do vidro é maior que o da água.
 (E) há necessidade de um tubo capilar de altura aproximadamente 13 vezes maior do que o exigido pelo mercúrio.

16 (Uema) Um arame de aço, dobrado conforme a figura, está engastado no teto, no ponto A. Aumentando a sua temperatura de maneira homogênea, a extremidade B terá um deslocamento que será mais bem representado por qual dos vetores?



- (A) ↑ (D) ↓
 (B) ↘ (E) ←
 (C) →

17 (FGV-SP) Um serralheiro monta, com o mesmo tipo de vergalhão de ferro, a armação esquematizada.



A barra transversal que liga os pontos A e B não exerce forças sobre esses pontos. Se a temperatura da armação for aumentada, a barra transversal:

- (A) continua não exercendo forças sobre os pontos A e B.
 (B) empurrará os pontos A e B, pois ficará $\sqrt{2}$ vezes maior que o novo tamanho que deveria assumir.
 (C) empurrará os pontos A e B, pois ficará $L\alpha \Delta t$ vezes maior que o novo tamanho que deveria assumir.
 (D) tracionará os pontos A e B, pois ficará $\sqrt{2}$ vezes menor que o novo tamanho que deveria assumir.
 (E) tracionará os pontos A e B, pois ficará $L\alpha \Delta t$ vezes menor que o novo tamanho que deveria assumir.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 Três bastões retos, 1, 2 e 3, com iguais comprimentos, feitos de materiais de coeficientes de dilatação linear α_1 , α_2 e α_3 , respectivamente, todos a uma mesma temperatura T_0 , formam um triângulo equilátero. A que temperatura o ângulo oposto ao bastão 3 será θ ? Considere que ΔT é da ordem de 10^2 °C e que α_1 , α_2 e α_3 são todos da ordem de $10^{-5}/^\circ\text{C}$.

02 Uma barra mede exatamente 20,05 cm, medidos com uma régua de aço a 20°C . Colocamos a barra e a régua em um forno a 270°C e, nestas condições, medimos a barra com régua, obtendo 20,11 cm. Qual o coeficiente de dilatação da barra? (coeficiente de dilatação linear do aço: $11 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$).

03 (PENSI) Uma régua foi calibrada a 0°C . Quando utilizada, numa temperatura $\theta > 0$, para medir uma certa distância, verificou-se que havia um erro de 15% nesta leitura. Sendo α o coeficiente de dilatação linear do material que constitui a régua, responda:

- (A) o erro foi para mais ou para menos?
 (B) se $\alpha = 2 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, calcule θ .

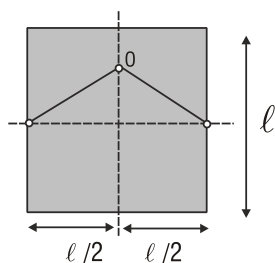
04 (Saraeva) Duas lâminas, uma de latão e outra de bronze, de igual espessura $a = 0,2$ mm, estão presas entre si por seus extremos de forma que à temperatura $T_1 = 293$ K formam uma lâmina plana. Qual será o raio de curvatura da lâmina a $T_2 = 393$ K? Coeficientes de dilatação linear: $\alpha_{\text{latão}} = 1,1 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ e $\alpha_{\text{bronze}} = 2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

05 (ITA) Um relógio de pêndulo, construído de um material de coeficiente de dilatação linear α , foi calibrado a uma temperatura de 0°C para marcar um segundo exato ao pé de uma torre de altura h . Elevando-se o relógio até o alto da torre observa-se um certo atraso, mesmo mantendo-se a temperatura constante. Considerando R o raio da Terra, L o comprimento do pêndulo a 0°C e que o relógio permaneça ao pé da torre, então a temperatura para a qual se obtém o mesmo atraso é dada pela relação:

- (A) $2h / \alpha R$.
 (B) $h(2R + h) / \alpha R^2$.
 (C) $[(R + h)^2 - LR] / \alpha LR$.
 (D) $R(2h + R) / \alpha (R + h)^2$.
 (E) $(2R + h) / \alpha R$.

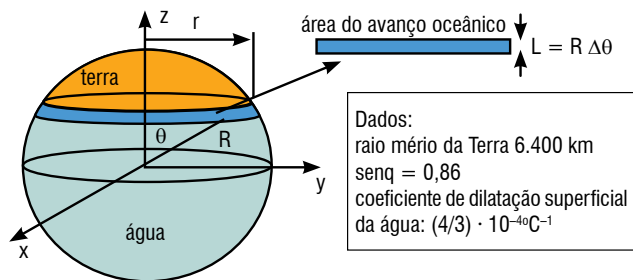
06 Quatro hastes de ferro, de comprimentos iguais a 20 cm, articulados nas extremidades, formam um losango ABCD. Deseja-se ligar os vértices A e C mediante uma barra de zinco de comprimento x , tal que a distância entre os vértices B e D seja constante, independentemente da temperatura. Os coeficientes de dilatação linear do ferro e do zinco são, respectivamente, $12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ e $29 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Qual é o valor de x ?

07 (ITA) Um quadro quadrado de lado l e massa m , feito de um material de coeficiente de dilatação superficial β , é pendurado no pino O por uma corda inextensível, de massa desprezível, com as extremidades fixadas no meio das arestas laterais do quadro, conforme a figura. A força de tração máxima que a corda pode suportar é F . A seguir, o quadro é submetido a uma variação de temperatura ΔT , dilatando. Considerando desprezível a variação no comprimento da corda devida à dilatação, podemos afirmar que o comprimento mínimo da corda para que o quadro possa ser pendurado com segurança é dado por:



- (A) $2lF\sqrt{\beta\Delta T} / mg$.
- (B) $2lF(1 + \beta\Delta T) / mg$.
- (C) $2lF(1 + \beta\Delta T) / \sqrt{(4F^2 - m^2g^2)}$.
- (D) $2lF\sqrt{(1 + \beta\Delta T)} / 2F - mg$.
- (E) $2lF\sqrt{(1 + \beta\Delta T)} / (4F^2 - m^2g^2)$.

08 (UFG-GO-010) Têm-se atribuído o avanço dos oceanos sobre a costa terrestre ao aquecimento global. Um modelo para estimar a contribuição da dilatação térmica é considerar apenas a dilatação superficial da água dos oceanos, onde toda a superfície terrestre está agrupada numa calota de área igual a 25% da superfície do planeta e o restante é ocupada pelos oceanos, conforme ilustra a figura.



De acordo com o exposto, calcule a variação de temperatura dos oceanos responsável por um avanço médio de $L = 6,4$ m sobre superfície terrestre.

RASCUNHO

1. Noções iniciais

A calorimetria analisa as trocas de calor entre os corpos e as suas consequências. Lembrando que calor é energia térmica em trânsito, poderemos, futuramente, estabelecer princípios gerais para a calorimetria baseados nesse fato.

A quantidade de calor (Q) representa a quantidade de energia que é trocada entre corpos a diferentes temperaturas quando entre eles se estabelece uma transmissão de calor; por exemplo, quando colocamos em contato uma pedra de gelo a 0°C e um volume qualquer de água líquida a 20°C . Um fato importante que se deve notar de imediato é que só há transferência de calor quando os corpos estão a temperaturas diferentes. Não haveria troca de calor entre gelo a 0°C e água a 0°C se estes fossem postos em contato. Exploraremos mais essa ideia ainda neste capítulo.

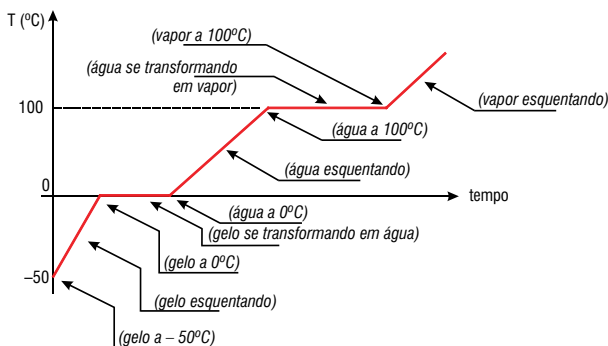
Por ser energia, Q deve ser expresso em unidades de energia. As mais comuns são:

- Joule (J) – É a unidade S.I. para energia;
- Caloria (cal);
- Quilocaloria (kcal ou Cal) = 1.000 cal.

Obs.:

$$1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$$

Quando um corpo troca calor, suas moléculas podem se modificar energeticamente de duas formas: alterando sua energia cinética ou alterando sua energia potencial. A energia cinética das moléculas será alterada quando for verificado que o calor trocado modificou a temperatura do corpo. Já a energia potencial dessas moléculas será alterada quando for verificado que o calor trocado modificou o estado de agregação dessas moléculas – em outras palavras, quando o corpo mudar de fase. Cada um desses efeitos (mudança de temperatura e mudança de fase) ocorre em uma faixa de temperatura específica do corpo que troca calor. Por exemplo, analisemos o comportamento de uma massa de água ao longo do tempo enquanto esta recebe calor e os efeitos que essa troca de calor lhe provoca; veja o gráfico esboçado abaixo:



Percebamos que uma mudança de fase não ocorre sempre com aumento de temperatura e vice-versa. Assim, estudam-se cada um desses “tipos” de troca de calor separadamente. Definem-se, portanto, CALOR SENSÍVEL (aquele que provoca uma variação de temperatura) e CALOR LATENTE (aquele que provoca uma mudança de fase).

2. Propagação do calor

Já vimos que calor é um tipo de energia que passa de um corpo para outro quando estes estão a diferentes temperaturas. Vamos analisar agora como o calor pode ser transmitido. O calor pode ser transmitido de três modos distintos: por condução, por convecção e por irradiação. Estudaremos cada um desses modos de propagação separadamente.

2.1 Por condução

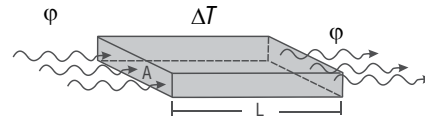
Na condução, a transferência de calor é feita de molécula a molécula sem que elas sejam transportadas.

Suponha, por exemplo, uma barra de ferro. Por um processo qualquer, as extremidades desta barra são postas a diferentes temperaturas, o que provocará passagem de calor da extremidade a uma temperatura maior para a extremidade de temperatura menor, passando ao longo da barra.



O calor passa de ponto a ponto em gradiente. Chega um instante em que a temperatura de cada seção mantém-se constante (regime estacionário). No regime estacionário, o fluxo de calor (ou seja, a quantidade de calor que atravessa a barra em um instante de tempo) é constante. Podemos calcular o fluxo de calor ϕ que atravessa um condutor maciço de área de secção transversal A e comprimento L , quando a diferença de temperatura entre suas extremidades é ΔT . Experimentalmente, observamos que:

$$\phi = \frac{k \cdot A \cdot \Delta T}{L}$$



O fator k da fórmula é chamado “coeficiente de condutibilidade térmica”, característica do material que constitui o condutor. Sua unidade usual é $\text{cal/s}\cdot\text{cm}\cdot^\circ\text{C}$; no S.I.: $\text{J/s}\cdot\text{m}\cdot\text{K}$. Quanto maior o k de um material, melhor condutor de calor ele é. Quanto mais próximo de 0 é o k , melhor isolante é o material.

Lembremos também que, por definição, fluxo de calor é a razão entre uma quantidade Q de calor que atravessa uma região e o intervalo de tempo Δt correspondente:

$$\phi = \frac{Q}{\Delta t}$$

2.2 Por convecção

Na convecção, a transferência de calor também se faz de molécula a molécula, mas, simultaneamente, ocorre transporte de matéria: partículas frias se deslocam para regiões mais quentes e partículas quentes para regiões mais frias. Por exemplo, quando aquecemos água em um recipiente, verifica-se nesta corrente de água as diferentes temperaturas que se deslocam no recipiente, transportando o calor. Observa-se que a convecção só se verifica nos fluidos, já que as moléculas de sólidos são muito coesas.

Ex.: brisa marítima e brisa terrestre, funcionamento do ar condicionado.

2.3 Por irradiação

Processo de propagação do calor no qual a energia térmica passa de um corpo para outro por meio de ondas eletromagnéticas. É o único processo de propagação de calor que pode ocorrer no vácuo.

Ex.: Energia solar, parede interna de vidro espelhado de uma garrafa térmica para evitar a propagação por irradiação.

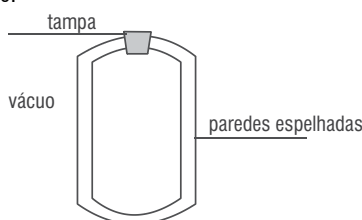
Obs.:

Garrafas térmicas

É impossível evitar a transferência de calor de um corpo para outro, ou seja, não existe sistema 100% termicamente isolado, embora possa se diminuir bastante o fluxo de calor entre eles.

Nesse aspecto, temos como exemplo prático as garrafas térmicas, cuja função é atenuar as trocas de calor entre um corpo e o ambiente externo. Elas servem tanto para manter um corpo quente a maior temperatura que o ambiente, quanto para manter um corpo frio a menor temperatura que o ambiente, ambos por um intervalo de tempo maior.

Também chamada de “vaso de Dewar”, um esquema geral de uma garrafa térmica é:



Consiste em duas paredes separadas por vácuo, a fim de se evitar entre elas condução e convecção. A tampa impede o contato com o ar externo, evitando troca de calor por convecção. Geralmente feita de material isolante, para também evitar a condução de calor. As paredes espelhadas evitam a troca de calor por irradiação, já que refletem boa parte da energia irradiada.

3. Trocas de calor

Calor sensível

É a quantidade de calor que um corpo recebe ou cede tendo como consequência a variação de sua temperatura.

Equação fundamental da calorimetria:

$$Q = m c \Delta T$$

Em que:

Q → quantidade de calor sensível

m → massa do corpo que varia a temperatura

c → calor específico da substância que constitui o corpo

$$c_{Ac} = 0,219 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$c_{\text{água}} = 1,000 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$c_{\text{gelo}} = 0,550 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$c_{\text{vapor}} = 0,480 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$$

ΔT → variação de temperatura

Capacidade térmica – C

É a quantidade de calor que um corpo precisa receber ou ceder para que sua temperatura varie de um grau.

$$Q = C \Delta T$$

Obs.:

A capacidade térmica de um corpo de massa m e constituído de um material de calor específico c pode ser determinada pelo produto destas duas características físicas.

$$C = m c$$

3.1 Equivalente em água de um corpo

É a massa de água (m_{eq}) que possui a mesma capacidade térmica do corpo.

$$(m c)_{\text{água}} = (m c)_{\text{corpo}}$$

Observação:

O equivalente pode ser em relação a outra substância qualquer no lugar da água.

3.2 Calorímetro

Recipiente utilizado para experiências de trocas de calor entre dois ou mais corpos. São normalmente adiabáticos, isto é, não trocam calor com o meio exterior. Podem participar, ou não, das trocas de calor.

- Calorímetro que participa das trocas de calor: possui capacidade térmica → C_{cal}
- Calorímetro que não participa das trocas de calor: possui capacidade térmica desprezível → $C_{cal} = 0$

3.2 Calor Latente

É a quantidade de calor que um corpo recebe ou cede tendo como consequência sua mudança de estado.

$$Q = m L$$

Em que:

Q → quantidade de calor latente

m → massa do corpo que muda de fase

L → calor específico latente da substância que constitui o corpo

Obs.: É importante se o calor latente será positivo ou negativo, ou seja, se o corpo cede ou recebe calor; como nos exemplos abaixo

Ex.: calor específico latente da água

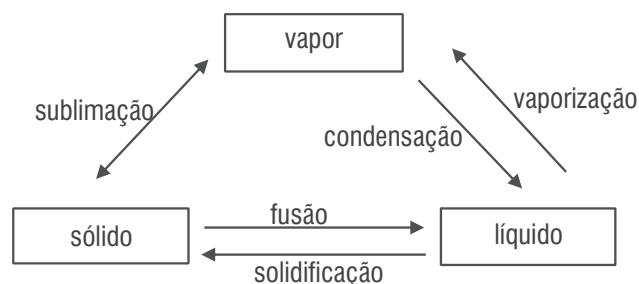
→ calor específico latente de fusão: $L_f = 80 \text{ cal/g}$

→ calor específico latente de solidificação: $L_s = -80 \text{ cal/g}$

→ calor específico latente de vaporização: $L_v = 540 \text{ cal/g}$

→ calor específico latente de condensação: $L_c = -540 \text{ cal/g}$

Recordemos as mudanças de fase de uma substância observando o esquema abaixo:



4. Lei zero da termodinâmica

Equação geral das trocas de calor: Se dois ou mais corpos, que trocam entre si apenas calor, constituem um sistema isolado (ou seja, não trocam calor com o que está fora desse sistema), a soma da quantidade total de calor cedido com a quantidade total de calor recebido é nula (princípio da conservação de energia).

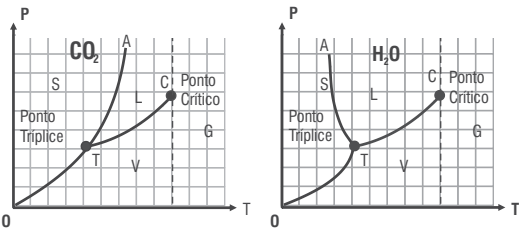
$$Q_{\text{cedido}} + Q_{\text{recebido}} = 0 \text{ ou } \sum Q = 0$$

Obs.:

- Calor recebido por um corpo é sempre positivo ($Q > 0$)
- Calor cedido por um corpo é sempre negativo ($Q < 0$)

5. Diagrama de fases

Um diagrama de fases é um gráfico que representa as curvas de fusão, vaporização e sublimação, associando essas transformações a variáveis de estado da substância, geralmente a pressão e a temperatura.



Nomes das curvas

OT → curva de sublimação; TA → curva de fusão; TC → curva de vaporização

Ponto triplice (ponto triplo): Pressão e temperatura na qual coexistem os três estados da substância.

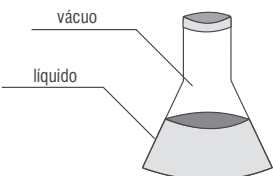
Substância	Temperatura (K)	Pressão (10 ⁵ Pa)
Hidrogênio	13,84	0,0704
Oxigênio	54,36	0,00152
Dióxido de carbono	216,55	5,17
Água	273,16	0,00610

Ponto Crítico: Temperatura e pressão acima das quais as fases líquida e vapor não podem mais coexistir, isto é, mesmo variando a pressão ou a temperatura a substância não muda mais de estado. Acima desta temperatura e pressão o estado é chamado de **gasoso**.

Substância	Temperatura (K)	Pressão (10 ⁵ Pa)
Hidrogênio	33,3	13,00
Oxigênio	154,8	50,8
Dióxido de Carbono	304,2	73,9
Água	647,4	221,2

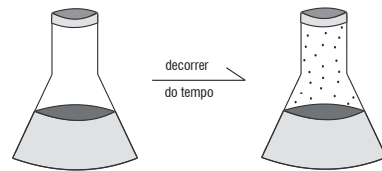
6. Pressão de vapor (pressão máxima de vapor)

Suponha um frasco tampado que contém um líquido qualquer. Inicialmente, sobre esse líquido, há vácuo:



Após a contagem do tempo, observaremos que algumas partículas do líquido vaporizam-se, começando a preencher o espaço que antes era vácuo. Esse vapor exerce uma pressão nas paredes do recipiente e no próprio líquido, que é a pressão de vapor.

Observaremos que, inicialmente, a quantidade de partículas vaporizadas (e, conseqüentemente, a pressão de vapor) aumenta com o tempo. Mas, simultaneamente com esse aumento de pressão, outro fato ocorre: partículas de vapor, ao colidir com a superfície do líquido, podem perder energia e voltar à fase líquida. Esse número de colisões aumenta com o número de partículas na fase de vapor. Isso significa que, embora sempre haja partículas de líquido se vaporizando, também haverá partículas de vapor se condensando. Haverá um instante em que essas duas velocidades de mudança de fase se igualarão, havendo um equilíbrio dinâmico. Nesse instante, a quantidade de vapor é máxima e constante; essa massa de vapor exerce a chamada "pressão máxima de vapor".



A pressão de vapor de uma substância é função apenas da temperatura e não do volume.

Pressão de vapor-d'água

T (°C)	Pressão (mmHg)	T (°C)	Pressão (mmHg)	T (°C)	Pressão (mmHg)
-15	1,436	24	22,377	115	1267,98
-13	1,691	26	25,209	120	1489,14
-11	1,987	28	28,349	125	1740,93
-9	2,326	30	31,824	130	2026,16
-7	2,715	35	42,175	135	2347,26
-5	3,163	40	55,324	140	2710,92
-3	3,673	45	71,88	145	3116,76
-1	4,258	50	92,51	150	3570,48
0	4,579	55	118,04	155	4075,88
2	5,294	60	149,38	160	4636,00
4	6,101	65	187,54	165	5256,16
6	7,013	70	233,70	170	5940,92
8	8,045	75	289,10	175	6694,08
10	9,209	80	355,10	180	7520,20
12	10,518	85	433,60	185	8423,84
14	11,987	90	525,76	190	9413,36
16	13,634	95	633,90	195	10488,76
18	15,477	100	760,00	200	11659,16
20	17,535	105	906,07	205	12929,12
22	19,827	110	1074,56	210	14305,48

Obs.:

Um líquido entra em ebulição quando sua pressão de vapor se iguala à pressão atmosférica. Por isso, a água ferve a 100°C ao nível do mar, porém ferve a temperaturas menores quando a altitude aumenta (menor pressão).

7. Umidade

O ar atmosférico é uma mistura de gases contendo cerca de 78% de nitrogênio, 21% de oxigênio e pequenas quantidades de dióxido de carbono, vapor-d'água e outros gases. A massa de vapor-d'água por unidade de volume chama-se **umidade absoluta**.

A pressão total exercida pela atmosfera é a soma das exercidas por seus componentes gasosos, ou seja, das suas pressões parciais. A razão entre a pressão parcial e a máxima de vapor é denominada **umidade relativa**.

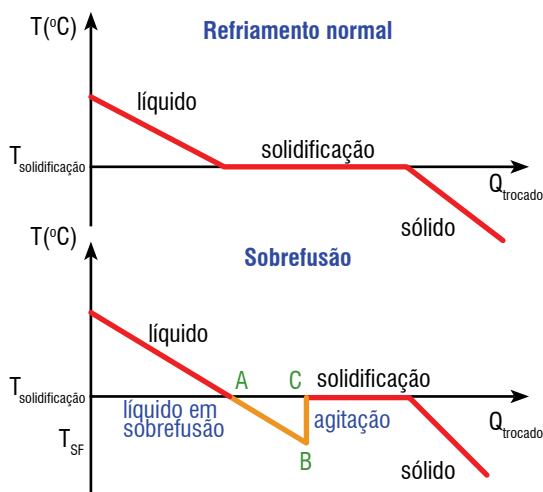
$$\text{umidade relativa (\%)} = 100 \cdot \frac{\text{pressão parcial de vapor}}{\text{pressão máxima de vapor}}$$

Quando a pressão parcial se iguala à pressão máxima, dizemos que o vapor está saturado e a umidade relativa será de 100% e não haverá evaporação. Se a pressão parcial ultrapassar a máxima, haverá condensação, diminuindo a pressão parcial até se igualar a máxima daquela temperatura. Este é o processo pelo qual se formam as nuvens, o nevoeiro e as chuvas.

$$\text{unidade absoluta} = \frac{m_{\text{vapor}}}{\text{volume}} = \frac{PM}{RT}$$

Obs.: Ponto de orvalho é a temperatura em que o vapor-d'água se torna saturado. A evaporação torna-se maior quanto menor for a pressão parcial de vapor ou quanto maior for a pressão máxima de vapor.

7.1 Sobrefusão



Sob certas condições os líquidos podem atingir temperaturas abaixo da de solidificação ainda, aparentemente em equilíbrio, no estado líquido. Este equilíbrio é denominado metaestável (a passagem para sólido é muito lenta).

Uma simples vibração ou introdução de uma porção sólida provoca uma rápida solidificação parcial ou total da substância. O gráfico anterior ilustra este fenômeno.

No intervalo de tempo da solidificação uma parte do líquido libera uma quantidade de calor suficiente para o aquecimento de todo o sistema que volta à temperatura de solidificação, sem a interferência do meio externo.

$$Q_{\text{aquecimento}} = M_{\text{total}} \cdot c_{\text{liq}} \cdot (T_{\text{fusão}} - T_{\text{sobr}}) = m_{\text{solidificada}} L_{\text{fusão}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 Um cozinheiro quer comprar uma panela que esquite rápida e uniformemente. Ele deve procurar uma panela feita de um material que tenha:

- (A) alto calor específico e alta condutividade térmica.
- (B) alto calor específico e baixa condutividade térmica.
- (C) baixo calor específico e alta condutividade térmica.
- (D) baixo calor específico e baixa condutividade térmica.

Solução:

Quanto maior o calor específico de um material, maior a capacidade térmica de um corpo feito desse material, logo maior será a retenção de calor desse corpo. Desejamos, então, a fim de fabricarmos uma panela que esquite rapidamente o seu conteúdo, um material de baixo calor específico, para que a panela não retenha o calor. Quanto maior a condutividade térmica de um corpo, maior será a propagação de calor através deste. Desejamos, então, para essa panela, um material de alta condutividade térmica.

A alternativa correta é, portanto, a C.

02 Um galpão possui 300 m² de paredes laterais, laje, janelas e portas. O coeficiente de condutibilidade térmica média deste conjunto é $k = 0,50$ W/m °C; a espessura média é $x = 0,20$ m. No inverno, deseja-se manter constante, em 20°C, a diferença de temperatura do ar no interior e no exterior do galpão, durante o período de um mês. Considere $4 \text{ J} = 1 \text{ cal}$. Qual o custo mensal para manter constante a temperatura do ambiente interno através de lâmpadas acesas, considerando que 1 MWh de energia elétrica custa R\$ 120,00?

Solução:

Aplicando-se a Lei de Fourier temos:

$$\Phi = \frac{0,5 \cdot 300 \cdot 20}{0,2} = 15.000 \text{ W} = 0,015 \text{ MW}$$

Durante 1 mês = $30 \cdot 24$ horas = 720 h

A energia consumida será $E = 0,015 \cdot 720 = 10,8$ MWh

Assim o custo será de R\$ 120,00 · 10,8 = R\$ 1.296,00

03 Um grupo de amigos se reúne para fazer um churrasco. Levam um recipiente térmico adiabático contendo uma quantidade de gelo a -4°C e 60 latas com 350 mL de refrigerante, cada uma. As latas são de alumínio e quando foram colocadas no recipiente estavam a uma temperatura de 22°C. Considere que a densidade e o calor específico do refrigerante sejam, aproximadamente, iguais aos da água. Sabendo-se que, no equilíbrio térmico, a temperatura no interior do recipiente adiabático é 2°C, calcule:

- (A) a quantidade de calor cedida pelas latas e pelo refrigerante;
- (B) a massa de gelo, em quilogramas, que foi colocada no recipiente.

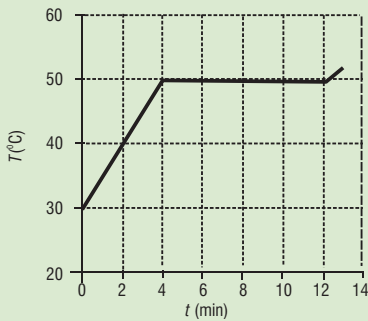
Dados:

calor específico do gelo $c(g) = 0,50$ cal/g°C ; calor específico da água $c(a) = 1,0$ cal/g°C ; calor específico do alumínio $c(Al) = 0,22$ cal/g°C;
calor latente de fusão do gelo $L = 80$ cal/g; massa de alumínio em cada lata $m(\text{lata}) = 30$ g; densidade da água $\rho(a) = 1,0$ g/cm³

Solução:

(A) $Q_{ref} = 60 \cdot 350 \cdot 1 \cdot (-20) = -420.000 \text{ cal}$
 $Q_{Al} = 60 \cdot 30 \cdot 0,22 \cdot (-20) = -7920 \text{ cal}$
 (B) Lei Zero: $Q_{gelo} + Q_{fusão} + Q_{água} + Q_{ref} + Q_{Al} = 0$
 $m \cdot 0,5 \cdot 4 + m \cdot 80 + m \cdot 1 \cdot 2 - 427.920 = 0 \Rightarrow m = 5,1 \text{ kg}$

04 Um corpo, de calor latente de fusão igual a 16 cal/g, inicialmente no estado sólido, é aquecido sob a potência constante de uma fonte de calor. O gráfico seguinte representa a variação da temperatura com o tempo. Admitindo-se que o corpo absorva energia de maneira constante ao longo de todo o processo, determine o calor específico do sólido.



Solução:

De 0 a 4 min o sólido se aquece absorvendo um calor: $Q_1 = m \cdot c \cdot \Delta T$
 De 4 a 12 min o sólido se liquefaz absorvendo um calor: $Q_2 = m \cdot L$
 Como a potência é constante:
 $\frac{Q_1}{\Delta t_1} = \frac{Q_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{m \cdot c \cdot \Delta T}{\Delta t_1} = \frac{m \cdot L}{\Delta t_2}$
 $c = \frac{L \cdot \Delta t_1}{\Delta T \cdot \Delta t_2} = \frac{16 \cdot 4}{20 \cdot 8} = 0,4 \text{ cal}$

05 Três líquidos distintos são mantidos a $T_1 = 15^\circ\text{C}$, $T_2 = 20^\circ\text{C}$ e $T_3 = 25^\circ\text{C}$. Misturando os dois primeiros na razão 1 : 1, em massa, obtém-se uma temperatura de equilíbrio de 18°C . Procedendo da mesma forma com os líquidos 2 e 3 ter-se-ia uma temperatura final de 24°C . Determine a temperatura de equilíbrio se o primeiro e o terceiro líquidos forem misturados na razão 3 : 1 em massa.

Solução:

Aplicando-se a Lei Zero para a primeira experiência:
 $\Sigma Q = 0 \rightarrow Q_1 + Q_2 = 0 \rightarrow m \cdot c_1 \cdot (18 - 15) + m \cdot c_2 \cdot (18 - 20) = 0 \rightarrow 3c_1 = 2 \cdot c_2$
 Aplicando-se a Lei Zero para a segunda experiência:
 $\Sigma Q = 0 \rightarrow Q_1 + Q_2 = 0 \rightarrow m \cdot c_2 \cdot (24 - 20) + m \cdot c_3 \cdot (24 - 25) = 0 \rightarrow 4c_2 = c_3$
 Aplicando-se a Lei Zero para a terceira experiência:
 $\Sigma Q = 0 \rightarrow Q_1 + Q_2 = 0 \rightarrow 3m \cdot c_1 \cdot (T_{eq} - 15) + m \cdot c_3 \cdot (T_{eq} - 25) = 0$
 Colocando os calores específicos em função de c_2 temos:
 $3m \cdot (2c_2/3) \cdot (T_{eq} - 15) + m \cdot 4c_2 \cdot (T_{eq} - 25) = 0$
 $2(T_{eq} - 15) + 4(T_{eq} - 25) = 0$
 $T_{eq} = 65/3^\circ\text{C}$

06 Em um calorímetro são colocadas duas substâncias: gelo e ferro. O gelo está a uma temperatura de -5°C e o ferro a uma temperatura de 120°C . Considerando a massa de ferro com 100 g calcule a temperatura de equilíbrio e as fases envolvidas para as seguintes massas de gelo:

- a. 100 g.
- b. 20 g.

Dados:

$C_{gelo} = c_{vapor} = 0,5 \text{ cal/g}^\circ\text{C};$
 $C_{água} = 1,0 \text{ cal/g}^\circ\text{C}; c_{ferro} = 0,2 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$
 $L_{fusão} = 80 \text{ cal/g}; L_{ebulição} = 540 \text{ cal/g}$

Solução:

a. Como não sabemos em que fase da água ocorrerá o equilíbrio, faremos alguns cálculos preliminares.
 – aquecimento do gelo até 0°C : $Q = 100 \cdot 0,5 \cdot 5 = 250 \text{ cal}$
 – fusão total do gelo: $Q = 100 \cdot 80 = 8.000 \text{ cal}$
 – resfriamento do ferro até 0°C : $Q = 100 \cdot 0,2 \cdot (-120) = -2.400 \text{ cal}$
 Note que o calor liberado pelo ferro é capaz de aquecer o gelo mas não é capaz de fundi-lo totalmente. Tiramos a conclusão que o equilíbrio ocorrerá ao longo do processo de fusão, logo a 0°C .

Podemos calcular a massa de gelo que fundiu aplicando a Lei Zero com três trocas de calor: aquecimento do gelo (Q_1), fusão parcial do gelo (Q_2) e resfriamento do ferro (Q_3).
 $\Sigma Q = 0 \rightarrow Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \rightarrow 250 + m \cdot 80 + (-2400) = 0 \rightarrow m = 26,875 \text{ g}.$

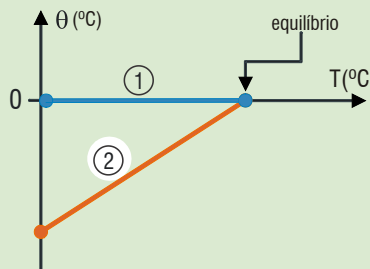
b. Agora, refazendo os cálculos preliminares temos:
 – aquecimento do gelo até 0°C : $Q = 20 \cdot 0,5 \cdot 5 = 50 \text{ cal}$
 – fusão total do gelo: $Q = 20 \cdot 80 = 1600 \text{ cal}$
 Veja que o calor liberado pelo ferro (2400 cal) supera o total absorvido pelo gelo (1.650 cal)!

Para determinar este ponto de equilíbrio aplicamos a Lei Zero com quatro trocas de calor: aquecimento do gelo (Q_1), fusão total do gelo (Q_2), aquecimento da água (Q_3) e resfriamento do ferro (Q_4).
 $\Sigma Q = 0 \rightarrow Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0 \rightarrow 50 + 1600 + 20 \cdot 1 \cdot (T_{eq} - 0) + 100 \cdot 0,2 \cdot (T_{eq} - 120) = 0$
 $T_{eq} = 18,75^\circ\text{C}$

07 Um cubo de gelo com massa 67 g e a -15°C é colocado em um recipiente contendo água a 0°C . Depois de um certo tempo, estando a água e o gelo a 0°C , verifica-se que uma pequena quantidade de gelo se formou e se agregou ao cubo. Considere o calor específico do gelo 2.090 J/(kg · °C) e o calor de fusão $33,5 \cdot 10^4 \text{ J/kg}$. Calcule a massa total de gelo no recipiente, supondo que não houve troca de calor com o meio exterior.

Solução:

Observa-se no texto que certamente houve mudança de estado, neste caso, solidificação da água, enquanto o gelo tem sua temperatura aumentada até atingir o equilíbrio com a água (0°C).



Lei Zero: $Q_1 + Q_2 = 0$
 $m \cdot (-33,5 \cdot 10^4) + 67 \cdot 10^{-3} \cdot 2090 \cdot 15 = 0$
 $m = 0,0627 \text{ kg} = 62,7 \text{ g}$
 A massa de gelo no final será de:
 $M = 67 + 62,7 = 129,7 \text{ g}$

Atenção: Note que o calor latente de solidificação é negativo. É o valor simétrico do calor latente de fusão.

08 (UNIFESP) Sobrefusão é o fenômeno em que um líquido permanece nesse estado a uma temperatura inferior à de solidificação, para a correspondente pressão. Esse fenômeno pode ocorrer quando um líquido cede calor lentamente, sem que sofra agitação. Agitado, parte do líquido solidifica, liberando calor para o restante, até que o equilíbrio térmico seja atingido à temperatura de solidificação para a respectiva pressão. Considere uma massa de 100 g de água em sobrefusão à temperatura de -10°C e pressão 1atm, o calor específico da água de $1 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$ e o calor latente da solidificação da água de -80 cal/g . A massa de água que sofrerá solidificação se o líquido for agitado será:

- (A) 8,7 g (D) 50,0 g
(B) 10,0 g (E) 60,3 g
(C) 12,5 g

Solução: Letra C.

Aplicando a Lei zero da termodinâmica onde o calor recebido por toda massa e o calor perdido para solidificar parte dela, temos:

$$M \cdot c \cdot \Delta T + m \cdot L = 0$$

$$100 \cdot 1 \cdot [0 - (-10)] + m(-80) = 0$$

$$m = \frac{100 \cdot 1 \cdot 10}{80} = 12,5 \text{ g}$$

09 Tomando como base a tabela de pressão máxima de vapor d'água, determine:

- (A) a umidade relativa em um dia que a temperatura está 20°C e a pressão parcial de vapor $14,554 \text{ mmHg}$;
(B) a temperatura de orvalho sabendo que a umidade está 90% e a temperatura 18°C ;
(C) a quantidade de vapor em uma sala de 100 m^3 a uma temperatura de 40°C e umidade relativa de 70%.

Solução:

$$(A) u = \frac{14,554}{17,535} = 0,83 = 83\%$$

(B) Da tabela temos $p_{\text{máx}}(18^{\circ}\text{C}) = 15,477 \text{ mmHg}$

Daí podemos determinar a pressão parcial de vapor pela umidade relativa:

$$p_{\text{parcial}} = 0,9 \cdot 15,477 = 13,929 \text{ mmHg}$$

Como este valor não consta na tabela, teremos que aplicar uma interpolação linear:

$$\frac{T - 16}{18 - 16} = \frac{13,929 - 13,634}{15,477 - 13,634} \rightarrow T = 16,32^{\circ}\text{C}$$

(C) Calcular a umidade relativa da sala primeiramente:

$$U = 0,7 \cdot 55,324 = 38,727 \text{ mmHg}$$

Agora podemos calcular a umidade absoluta:

$$U = \frac{38,727 \cdot 18}{62,3 \cdot (40 + 273)} = 0,0357 \text{ g/L}$$

Como a sala possui $100 \text{ m}^3 = 100 \cdot 10^3 \text{ L}$ chegamos a a massa de vapor presente na sala: $m = 0,0357 \cdot 10^5 \text{ g} = 3,57 \text{ kg}$

10 Em um escritório de dimensões $10 \times 5 \times 3$ (em metros) a temperatura é de 22°C e a umidade relativa 60%. Se um balde com água for jogado no chão dessa sala, qual o volume de água evaporará?

Solução:

A partir da expressão de umidade absoluta, podemos obter uma expressão para a massa de vapor num ambiente em função da pressão parcial:

$$U = \frac{P_{\text{parcial}} \cdot M}{R \cdot T} \rightarrow m = U \cdot V = \frac{P_{\text{parcial}} \cdot M \cdot V}{R \cdot T}$$

Note que para a massa de vapor mudar a pressão parcial terá que mudar. Assim reescrevemos essa expressão em função dessas variações:

$$\Delta m = \frac{\Delta P_{\text{parcial}} \cdot M \cdot V}{R \cdot T}$$

A variação da pressão parcial ocorrerá até que a umidade atinja a saturação (100%). Neste caso a pressão parcial que era de 60% da pressão máxima, passará a valer 100% da pressão máxima, variando 40%, logo:

$$\Delta P_{\text{parcial}} = 0,4 \cdot 19,827 = 7,9308 \text{ mmHg}$$

Substituindo temos:

$$\Delta m = \frac{7,9308 \cdot 18 \cdot 150 \cdot 10^3}{62,3 \cdot 295} = 1165 \text{ g}$$

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

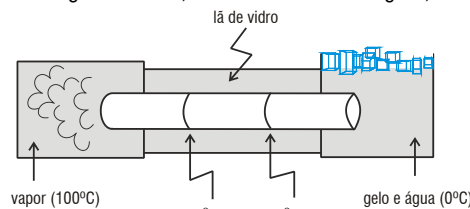
01 (UNITAU) Em um dia quente você estaciona o carro em um trecho descoberto e sob um sol causticante. Sai e fecha todos os vidros. Quando volta, nota que "o carro parece um forno". Esse fato se dá porque:

- (A) o vidro é transparente à luz solar e opaco ao calor.
(B) o vidro é transparente apenas às radiações infravermelhas.
(C) o vidro é transparente e deixa a luz entrar.
(D) o vidro não deixa a luz de dentro brilhar fora.
(E) n.d.a.

02 Calor de combustão é a quantidade de calor liberada na queima de uma unidade de massa do combustível. O calor de combustão do gás de cozinha é de 6.000 kcal/kg . Quantos litros de água à temperatura de 20°C podem ser aquecidos até 100°C com um bujão de gás de 13 kg ? Despreze perdas de calor.

Dado: calor específico sensível da água = $1,0 \text{ kcal/kg}^{\circ}\text{C}$.

03 (PUC) Três barras cilíndricas idênticas em comprimento e seção são ligadas formando uma única barra, cujas extremidades são mantidas a 0°C e 100°C . A partir da extremidade mais quente, as condutividades térmicas dos materiais das barras valem k , $k/2$ e $k/5$. Supondo-se que, em volta das barras, exista um isolamento de lã de vidro e desprezando quaisquer perdas de calor, a razão θ_2/θ_1 , entre as temperaturas nas junções onde uma barra é ligada à outra, conforme mostra a figura, é:



- (A) 1,5. (C) 1,2.
(B) 1,4. (D) 1,6.

04 (UNICAMP) Em um aquário de 10 ℓ, completamente cheio de água, encontra-se um pequeno aquecedor de 60 W. Sabendo que em 25 minutos a temperatura da água aumentou de 2,0°C determine:

- (A) que quantidade de energia foi absorvida pela água;
 - (B) que fração da energia fornecida pelo aquecedor foi perdida para o exterior.
- (Dados: calor específico da água = 1,0 cal/g°C; 1,0 cal = 4,0 J)

05 Qual a massa de vapor a 100°C que deve ser misturada a 500 g de gelo a 0 °C, num recipiente termicamente isolado, para produzir água a 50°C?

$$c_{\text{água}} = 1 \text{ cal/g} \cdot \text{°C}; L_{\text{solidificação}} = 80 \text{ cal/g};$$

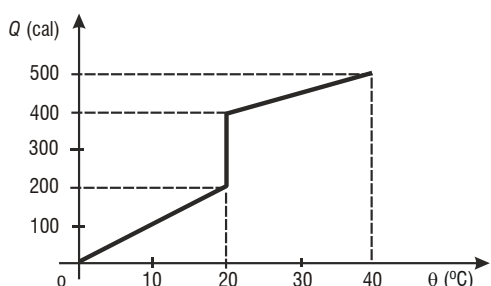
$$L_{\text{vaporização}} = 540 \text{ cal/g}$$

06 Um corpo que está a temperatura de 110°C é colocado no interior de 200 g de água a 20°C. Após atingido o equilíbrio térmico, a 38°C, o corpo é retirado e introduzido no interior de 100 g de água a 62°C. Desprezando as eventuais perdas de calor e sabendo que o calor específico sensível da água vale 1 cal/g°C, qual a temperatura final do equilíbrio térmico?

07 (UCS) Três amostras de um mesmo líquido, cujas temperaturas iniciais são 40°C, 70°C e 100°C, são misturadas em um calorímetro. As massas das amostras são iguais entre si. Supondo que as trocas de calor ocorrem somente entre as amostras do líquido, qual a temperatura de equilíbrio da mistura, em graus Celsius?

08 Num recipiente de capacidade térmica desprezível encontramos um líquido a 20°C. Misturando-se 600 g de água a 80°C com esse líquido, obtemos uma temperatura de equilíbrio térmico igual a 60°C. Qual o equivalente em água desse líquido?

09 O gráfico mostra a quantidade de calor, Q, absorvida por um corpo de 20,0 g de massa, inicialmente no estado sólido, em função da temperatura θ:



Determine:

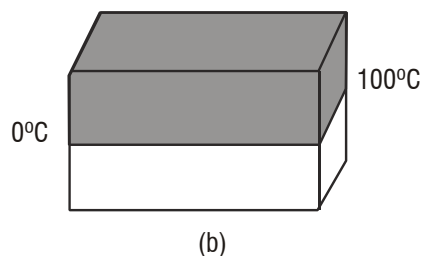
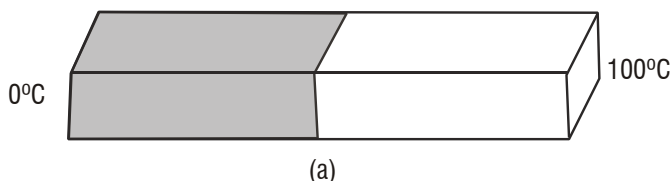
- (A) a capacidade térmica do corpo, no estado sólido.
- (B) o calor específico sensível da substância do corpo, no estado sólido.
- (C) a temperatura de fusão da substância que compõe o corpo.

10 Um bloco de gelo de 4,0 kg de massa que está a uma temperatura de -10,0°C é colocado em um calorímetro (recipiente isolado de capacidade térmica desprezível) contendo 5,0 kg de água à temperatura de 40,0°C. Qual a quantidade de gelo que sobra sem derreter?

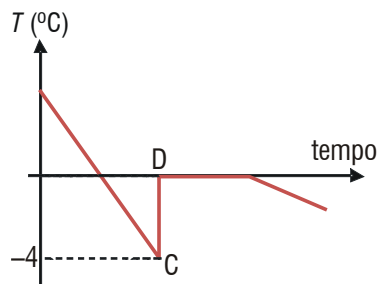
Dados: Calor específico sensível da água = 1,0 kcal/kg °C; calor específico sensível do gelo = 0,5 kcal/kg °C; calor específico latente de fusão do gelo = 80 Kcal/Kg.

11 Em um calorímetro ideal misturam-se 200 g de gelo a 0°C com 200 g de água a 40°C. O calor de fusão do gelo é de 80 cal/g. Qual a temperatura de equilíbrio térmico e qual a massa de gelo que se funde?

12 Duas barras quadradas idênticas de metal são soldadas pelas extremidades (fig.a). Suponha que haja um fluxo horizontal de 10 cal através das barras em 2 min. Quanto tempo seria necessário para manter este fluxo de calor se elas fossem soldadas conforme a figura b?



13 O gráfico a seguir mostra a curva de resfriamento de 100 g de água, em um processo lento e sem agitação:



Sendo o calor latente de fusão do gelo igual a 80 cal/g, qual a massa de água que se solidifica no trecho CD ?

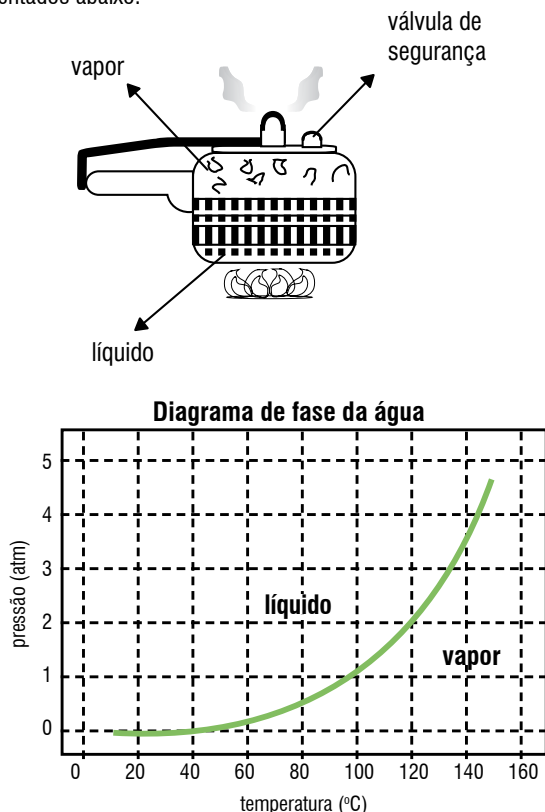
14 (UFPA) Para o fósforo, a temperatura de fusão é de 44°C; o calor específico no estado líquido, de 0,2 cal/g°C; e o calor latente de fusão, de 5 cal/g. Uma certa massa de fósforo é mantida em sobrefusão a 30°C. Num certo instante verifica-se uma solidificação brusca. Que percentagem do total de massa do fósforo se solidifica?

15 Colocando água gelada no interior de um copo de vidro seco, observa-se com o passar do tempo a formação de gotículas de água na parede externa do copo. Isso se deve ao fato de que:

- (A) a água gelada atravessa a parede do copo.
- (B) as gotas d'água sobem pela parede interna do copo alcançando a parede externa, onde se depositam.
- (C) a água fria cria microfissuras na parede do copo de vidro pelas quais a água passa para fora.
- (D) o vapor d'água presente na atmosfera se condensa.
- (E) o copo é de vidro.

16 (ENEM) A panela de pressão permite que os alimentos sejam cozidos em água muito mais rapidamente do que em panelas convencionais. Sua tampa possui uma borracha de vedação que não deixa o vapor escapar, a não ser através de um orifício central sobre o qual assenta um peso que controla a pressão. Quando em uso, desenvolve-se uma pressão elevada no seu interior. Para a sua operação segura, é necessário observar a limpeza do orifício central e a existência de uma válvula de segurança, normalmente situada na tampa.

O esquema da panela de pressão e um diagrama de fase da água são apresentados abaixo.



A vantagem do uso de panela de pressão é a rapidez para o cozimento de alimentos e isso se deve:

- (A) à pressão no seu interior, que é igual à pressão externa.
- (B) à temperatura de seu interior, que está acima da temperatura de ebulição da água no local.
- (C) à quantidade de calor adicional que é transferida à panela.
- (D) à quantidade de vapor que está sendo liberada pela válvula.
- (E) à espessura da sua parede, que é maior que a das panelas comuns.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 (AFA) Um estudante, querendo determinar o equivalente em água de um calorímetro, colocou em seu interior 250 g de água fria e, aguardando um certo tempo, verificou que o conjunto alcançou o equilíbrio térmico a uma temperatura de 20°C. Em seguida, acrescentou ao mesmo 300 g de água morna, a 45°C. Fechando rapidamente o aparelho, esperou até que o equilíbrio térmico fosse refeito; verificando, então, que a temperatura final era de 30°C. Baseando-se nesses dados, o equivalente em água do calorímetro vale, em gramas:

- (A) 400.
- (B) 300.
- (C) 200.
- (D) 100.

02 (AFA) Para intervalos de temperaturas entre 5°C e 50°C, o calor específico (c) de uma determinada substância varia com a temperatura (t) de acordo com a equação $c = t/60 + 2/15$, em que c é dado em cal/g°C e t em °C. A quantidade de calor necessária para aquecer 60 g desta substância de 10°C até 22°C é:

- (A) 350 cal.
- (B) 120 cal.
- (C) 480 cal.
- (D) 288 cal.

03 Colocam-se 100 g de gelo a -10 °C em um calorímetro contendo 10 g de água a 40°C cujo calor específico é igual a 1 cal/g°C. Sendo o calor latente de fusão do gelo igual a 80 cal/g, o calor específico sensível da água no estado sólido 0,5 cal/g°C, no estado líquido 1,0 cal/g°C e desprezando as perdas de calor, no equilíbrio térmico, descubra o que o calorímetro conterá na situação de equilíbrio térmico.

04 O calor específico de um corpo de massa $m = 200$ g varia com a temperatura conforme a equação: $c = 0,005\theta + 0,2$ (calor específico em cal/g°C e θ temperatura em °C). Determine:

- (A) calor específico médio entre as temperaturas 20°C e 60°C;
- (B) a quantidade de calor que se deve fornecer ao corpo para elevar sua temperatura de 20°C a 60°C.

05 (ITA) Colaborando com a campanha de economia de energia, um grupo de escoteiros construiu um fogão solar, consistindo de um espelho de alumínio curvado que foca a energia térmica incidente sobre uma placa coletora. O espelho tem um diâmetro efetivo de 1,00 m e 70% da radiação solar incidente é aproveitada para de fato aquecer uma certa quantidade de água. Sabemos ainda que o fogão solar demora 18,4 minutos para aquecer 1,00 L de água desde a temperatura de 20°C até 100°C, e que $4,186 \cdot 10^3$ J é a energia necessária para elevar a temperatura de 1,00 L de água de 1,000 K. Com base nos dados, estime a intensidade irradiada pelo Sol na superfície da Terra, em W/m². Justifique.

06 (Fuvest) Tem-se certa quantidade de uma bebida dentro de um copo a 30°C. O sistema tem capacidade térmica de 91 cal/°C. Dentro do copo coloca-se uma pedra de gelo de 20 g a 0°C, no interior de um invólucro metálico de capacidade térmica de 2,0 cal/°C. Despreze trocas de calor com o ambiente.

- (A) Estabelecido o equilíbrio térmico, qual a temperatura final?
- (B) Qual a quantidade mínima de gelo que se deveria dispor para baixar a temperatura da bebida a 0°C?

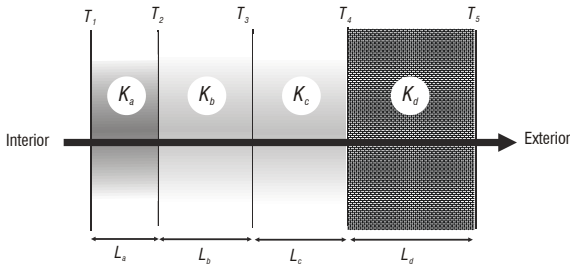
Dado: calor específico latente de fusão do gelo = 80 cal/g.

07 (PENSI) De uma caldeira a 120°C flui para um recipiente adiabático 20 g de vapor-d'água superaquecido. Em um depósito de um líquido refrigerante mantido a -10 °C são retirados 100g de gelo e imediatamente colocados no recipiente. Determine a temperatura de equilíbrio dentro do recipiente.

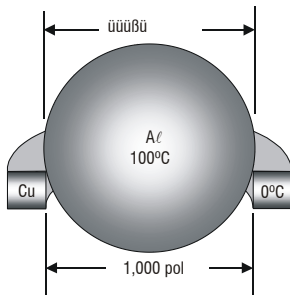
Dados:

- calor específico sensível do gelo: 0,5 cal/g°C;
- calor específico sensível da água: 1,0 cal/g°C;
- calor específico sensível do vapor: 0,5 cal/g°C
- calor latente de fusão: 80 cal/g;
- calor latente de condensação: 540 cal/g.

08 A figura a seguir mostra uma seção de um muro feito de pinho branco de espessura L_a e tijolo de espessura $L_d (=2,0 \times L_a)$, com duas placas internas de material desconhecido com idênticas espessuras e condutividades térmicas. A condutividade térmica do pinho branco é k_a e a do tijolo, $k_d (=5,0 k_a)$. A área da superfície do muro é desconhecida. A condução de calor através do muro atingiu um estado estacionário, com as únicas temperaturas de interface conhecidas, sendo $T_1 = 25^\circ\text{C}$, $T_2 = 20^\circ\text{C}$ e $T_5 = -10^\circ\text{C}$. Calcule a temperatura de interface T_4 e T_3 .



09 Um anel de cobre de 20,0 g tem um diâmetro de exatamente 1 polegada à temperatura de $0,000^\circ\text{C}$. Uma esfera de alumínio têm um diâmetro de exatamente 1,00200 pol à temperatura de 100°C . A esfera é colocada em cima do anel e permite-se que os dois encontrem seu equilíbrio térmico, sem ser perdido calor para o ambiente. A esfera passa exatamente pelo anel na temperatura de equilíbrio. Qual a massa da esfera?
(Dados: calor específico do cobre: $0,0923 \text{ cal/g}\cdot\text{K}$; calor específico do alumínio: $0,215 \text{ cal/g}\cdot\text{K}$; coeficiente de dilatação linear do cobre: $17 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; coeficiente de dilatação linear do alumínio: $23 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$)



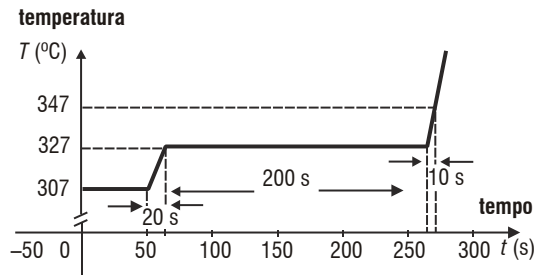
10
(A) Qual a umidade relativa em um dia em que a temperatura é de 20°C e o ponto de orvalho é 5°C ?
(B) Qual a pressão parcial do vapor-d'água na atmosfera em pascal?
(C) Qual a umidade absoluta em gramas por metro cúbico?

Dados: pressão de vapor a 20°C : $17,5 \text{ mmHg}$; pressão de vapor a 5°C : $6,51 \text{ mmHg}$; densidade do mercúrio: $13,6 \text{ g/cm}^3$; gravidade: 10 m/s^2 .

11 Uma panela com água é colocada em um quarto fechado, cujo volume é de 60 m^3 , à temperatura de 27°C e umidade relativa de 60%.
(A) Quantos gramas de água vão evaporar?
(B) Qual a umidade absoluta em kg/m^3 ?
(C) Se a temperatura do quarto sofrer um aumento de 1°C , quantos gramas a mais de água se evaporam?

12 (ITA) Um termômetro em uma sala de $8,0 \times 5,0 \times 4,0 \text{ m}$ indica 22°C , e um higrômetro indica que a umidade relativa é de 40%. Qual é a massa de vapor de água na sala, se sabemos que a essa temperatura o ar saturado contém $19,33 \text{ g}$ de água por metro cúbico?

13 (Fuvest) Um recipiente de paredes finas contém 100 g de uma liga metálica. O gráfico representa a temperatura T da liga em função do tempo t .



Até o instante $t = 50 \text{ s}$, a liga recebe de um aquecedor a potência $P_0 = 30 \text{ W}$ e, a partir desse instante, passa a receber a potência $P_1 = 43 \text{ W}$. A temperatura de fusão da liga é 327°C e a de ebulição é superior a 1.500°C . Na situação considerada a liga perde calor para o ambiente a uma taxa constante. Avalie:

- (A) a quantidade de calor perdida pela liga, a cada segundo, em J.
- (B) a energia (em J) necessária para fundir 1 g da liga.
- (C) a energia (em J) necessária para elevar, de 1°C , a temperatura de 1 g da liga no estado líquido.
- (D) a energia (em J) necessária para elevar, de 1°C , a temperatura de 1 g da liga no estado sólido.

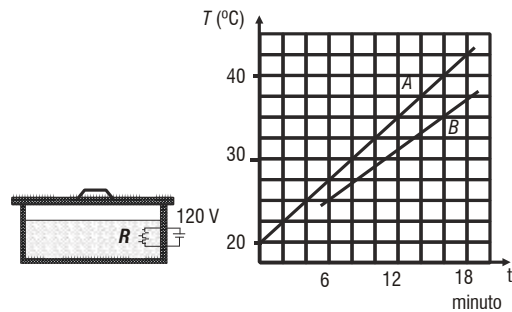
14 Soldam-se as extremidades de três barras de latão, aço e cobre, formando um objeto com a forma de Y. A área da seção reta de cada barra é de 2 cm^2 . A extremidade da barra de cobre é mantida a 100°C e as de latão e aço a 0°C . Supor que não haja perdas de calor pelas superfícies das barras, cujos comprimentos são: cobre 46 cm; latão 13 cm e aço 12 cm. Qual a temperatura do ponto de união das três barras?

Dados: condutibilidade térmica:
aço = $50,2 \text{ J/m}\cdot\text{s}\cdot^\circ\text{C}$; cobre = $385 \text{ J/m}\cdot\text{s}\cdot^\circ\text{C}$; latão = $109 \text{ J/m}\cdot\text{s}\cdot^\circ\text{C}$.

15 Um sistema de ar condicionado aumenta, por segundo, a umidade relativa de $0,5 \text{ m}^3$ de ar, de 30%, para 65%. Qual a massa de água necessária ao sistema, por hora, se a temperatura é de 20°C ?

Dado: pressão máxima de vapor a 20°C : $17,5 \text{ mmHg}$.

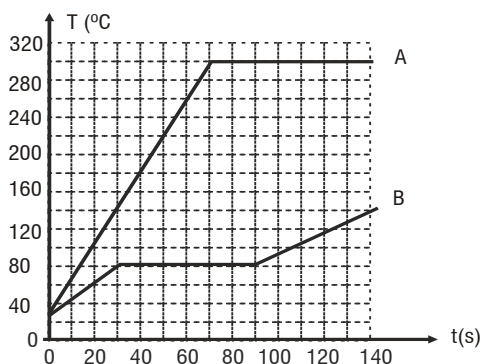
16 (Fuvest) Uma experiência é realizada para estimar o calor específico de um bloco de material desconhecido, de massa $m_B = 5,4 \text{ kg}$. Em recipiente de isopor, uma quantidade de água é aquecida por uma resistência elétrica $R = 40 \Omega$, ligada a uma fonte de 120 V , conforme a figura. Nessas condições, e com os devidos cuidados experimentais é medida a variação da temperatura T da água, em função do tempo t , obtendo-se a reta A do gráfico. A seguir, repete-se a experiência desde o início, desta vez colocando o bloco imerso dentro d'água, obtendo-se a reta B do gráfico.



Dado: $c = 4 \text{ J/g}^\circ\text{C}$, para a água

- (A) Estime a massa M , em kg, da água colocada no recipiente.
 (B) Estime o calor específico c_B do bloco, explicitando claramente as unidades utilizadas.

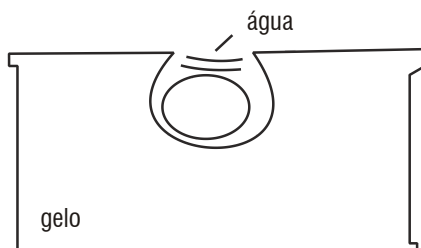
17 (Fuvest) As curvas A e B na figura representam a variação de temperatura (T) em função do tempo (t) de duas substâncias A e B , quando 50 g de cada uma é aquecida separadamente, a partir da temperatura inicial de 20°C , na fase sólida, recebendo calor numa taxa constante de 20 cal/s . Considere agora um experimento em que 50 g de cada uma das substâncias são colocadas em contato térmico num recipiente termicamente isolado, com a substância A na temperatura inicial $T_A = 280^\circ\text{C}$ e a substância B na temperatura inicial $T_B = 20^\circ\text{C}$.



- (A) Determine o valor do calor latente de fusão L_B da substância B .
 (B) Determine a temperatura de equilíbrio do conjunto no final do experimento.
 (C) Se a temperatura final corresponder à mudança da fase de uma das substâncias, determine a quantidade da mesma em cada uma das fases.

18 (UFRN) Em um calorímetro ideal, há 98 g de água à temperatura de 0°C . Dois cubinhos metálicos são introduzidos no calorímetro. Um deles tem massa 8,0 g, calor específico $0,25 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$ e está à temperatura de 400°C . O outro tem 10 g de massa, calor específico $0,20 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$ e está à temperatura de 100°C . Posteriormente, esse último cubinho é retirado do calorímetro e verifica-se, nesse instante, que sua temperatura é 50°C . Calcule a temperatura final de equilíbrio da água e do cubinho que permanece no calorímetro.

19 (ITA) Numa cavidade de 5 cm^3 feita num bloco de gelo, introduz-se uma esfera homogênea de cobre de 30 g aquecida a 100°C , conforme o esquema a seguir. Sabendo-se que o calor latente de fusão do gelo é de 80 cal/g , que o calor específico do cobre é de $0,096 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$ e que a massa específica do gelo é de $0,92 \text{ g/cm}^3$ O volume total da cavidade é igual a:



- (A) $8,9 \text{ cm}^3$.
 (B) $3,9 \text{ cm}^3$.
 (C) $39,0 \text{ cm}^3$.
 (D) $8,5 \text{ cm}^3$.
 (E) $7,4 \text{ cm}^3$.

20 Uma barra de gelo de 50 g de massa a -20°C é colocada em contato, em um calorímetro real, com 20 g de H_2O a 15°C . Sabe-se que o calor específico do gelo é $0,5 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$, o da água é $1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$ e o calor latente de fusão da água é 80 cal/g . Sabe-se também que 10% do calor da fonte quente é perdido através do calorímetro para o meio ambiente. No equilíbrio térmico, quais as temperaturas e as massas envolvidas?

21 Em uma panela de água fervente, em 1 segundo 5 g de água viram vapor. Considere que o calor é transmitido à água somente através do fundo da panela. Desprezando a perda de calor pelas paredes da panela e pela superfície da água ao meio ambiente, determine a temperatura da superfície do fundo da panela em contato com o aquecedor. A área do fundo da panela é 400 cm^2 , sua espessura, 4 mm e o coeficiente de condutibilidade térmica, $44 \text{ J/s.m}^\circ\text{C}$. Calcule também o fluxo térmico nesse processo.

Dados: 1 cal = 4J e calor latente de vaporização de 540 cal/g .

22 (IME) Considere um calorímetro no qual existe uma certa massa de líquido. Para aquecer o conjunto líquido – calorímetro de 30°C para 60°C são necessárias Q_1 joules. Por outro lado, Q_2 joules elevam de 40°C para 80°C o calorímetro juntamente com o triplo da massa do líquido.

- (A) Determine a capacidade térmica do calorímetro nas seguintes situações:
 $Q_1 = 2.000 \text{ J}$, $Q_2 = 4.000 \text{ J}$.
 $Q_1 = 2.000 \text{ J}$, $Q_2 = 7.992 \text{ J}$.
 (B) Com base nesses dados, em qual das duas situações a influência do material do calorímetro pode ser desconsiderada? Justifique sua conclusão.

23 (ITA) Um fogareiro é capaz de fornecer 250 calorias por segundo. Colocando-se sobre o fogareiro uma chaleira de alumínio de massa 500 g, tendo no seu interior 1,2 Kg de água à temperatura ambiente de 25°C , a água começará a ferver após 10 minutos de aquecimento. Admitindo-se que a água ferve a 100°C e que o calor específico da chaleira de alumínio é $0,23 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$ e o da água $1,0 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$, pode-se afirmar que:

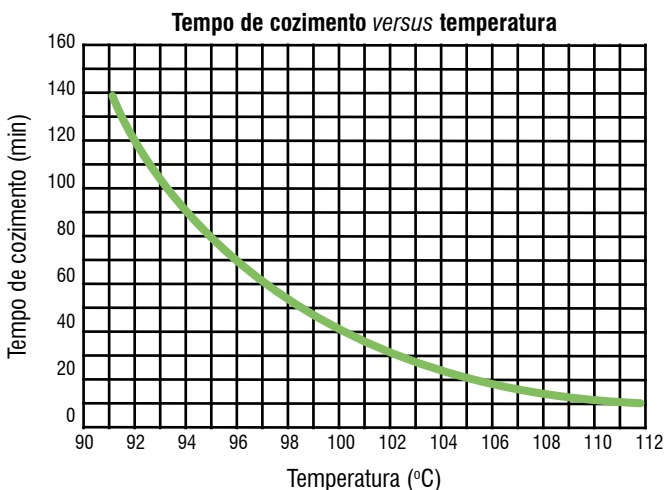
- (A) toda a energia fornecida pelo fogareiro é consumida no aquecimento da chaleira com água, levando a água à ebulição.
 (B) somente uma fração inferior a 30% da energia fornecida pela chama é gasta no aquecimento da chaleira com água, levando a água a ebulição.
 (C) uma fração entre 30% a 40% da energia fornecida pelo fogareiro é perdida.
 (D) 50% da energia fornecida pelo fogareiro é perdida.
 (E) A relação entre a energia consumida no aquecimento da chaleira com água e a energia fornecida pelo fogão em 10 minutos situa-se entre 0,70 e 0,90.

24 (ITA) Um vaporizador contínuo possui um bico pelo qual entra água a 20°C , de tal maneira que o nível de água no vaporizador permanece constante. O vaporizador utiliza 800 W de potência, consumida no aquecimento da água até 100°C e na sua vaporização a 100°C . A vazão de água pelo bico é:

Dados: Calor específico da água = $4,18 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$;
 Massa específica da água = $1,0 \text{ g/cm}^3$;
 Calor latente de vaporização da água = $2,26 \cdot 10^3 \text{ kJ/kg}$.

- (A) 0,31 mL/s.
 (B) 0,35 mL/s.
 (C) 2,4 mL/s.
 (D) 3,1 mL/s.
 (E) 3,5 mL/s

25 O gráfico a seguir fornece o tempo de cozimento, em água fervente, de uma massa m de feijão em função da temperatura.



Sabe-se que a temperatura de ebulição da água, em uma panela sem tampa, é função da pressão atmosférica local. Na tabela abaixo, encontramos a temperatura de ebulição da água em diferentes pressões. Ao nível do mar (altitude zero), a pressão atmosférica vale 76 cm Hg e ela diminui 1,0 cm Hg para cada 100 metros que aumentamos a altitude.

Temperatura de ebulição da água em função da pressão	
pressão em cm Hg	60 64 68 72 76 80 84 88 92 96 100 104 108
temperatura em °C	94 95 97 98 100 102 103 105 106 108 109 110 111

Analise as afirmações.

- I. Ao nível do mar, essa massa m de feijão irá demorar 40 minutos para o seu cozimento.
- II. O Mar Morto encontra-se aproximadamente 400 metros abaixo do nível dos mares (altitude -400 m). Nesse local, o mesmo feijão demoraria 30 minutos para o seu cozimento.
- III. O tempo de cozimento desse feijão seria de 1,0 hora num local de altitude aproximadamente igual a 1,0 km.
- IV. Se esse feijão estivesse no interior de uma panela de pressão fechada, cuja válvula mantém a pressão interna a 1,42 atm (1,0 atm equivale a 76 cm Hg), independentemente do local, o tempo de cozimento seria de aproximadamente 10 minutos.

É(são) verdadeiras):

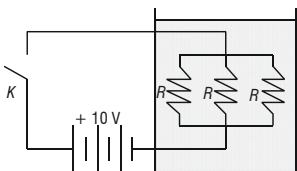
- (A) somente I. (D) somente II, III e IV.
 (B) somente I e III. (E) I, II, III e IV.
 (C) somente I, II e IV.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 (IME) Um projétil de liga de chumbo de 10 g é disparado de uma arma com velocidade de 600 m/s e atinge um bloco de aço rígido, deformando-se. Considere que, após o impacto, nenhum calor é transferido do projétil para o bloco. Calcule a temperatura do projétil depois do impacto. Dados:

- * Temperatura inicial do projétil: 27°C;
- * Temperatura de fusão da liga: 327°C;
- * Calor de fusão da liga: 20.000 J/Kg;
- * Calor específico da liga no estado sólido: 120 J/Kg°C;
- * Calor específico da liga no estado líquido: 124 J/Kg°C.

02 (IME) A figura representa um aquecedor elétrico composto de um recipiente suposto adiabático e de um circuito cujas três resistências R são iguais. Uma massa de 100 g de gelo a -10°C são transformadas em água a 65°C , decorridos 10 minutos e 27 segundos após o fechamento da chave K .



Determine:

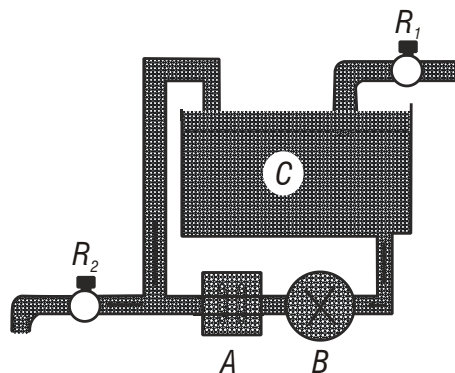
- (A) o valor da resistência R .
 (B) o tempo em que se processaria a evolução citada se um dos resistores estivesse rompido.

Dados:

- Calor específico do gelo 0,5 cal/g°C
 Calor latente de fusão..... 80 cal/g
 Nota: Despreze a capacidade térmica do recipiente. 1 cal = 4,18 J

03 (UFRJ) Em um calorímetro de capacidade térmica desprezível que contém 60 g de gelo a 0°C , injeta-se vapor-d'água a 100°C , ambos sob pressão normal. Quando se restabelece o equilíbrio térmico, há apenas 45 g de água no calorímetro. O calor de fusão do gelo é 80 cal/g, o calor de condensação do vapor-d'água é 540 cal/g e o calor específico da água é 1,0 cal/g °C. Calcule a massa do vapor d'água injetado.

04 (Fuvest) Uma caixa-d'água C , com capacidade de 100 litros, é alimentada, através do registro R_1 , com água fria a 15°C , tendo uma vazão regulada para manter sempre constante o nível de água na caixa. Uma bomba B retira 3 L/min de água da caixa e os faz passar por um aquecedor elétrico A (inicialmente desligado). Ao ligar-se o aquecedor, a água é fornecida, à razão de 2 L/min, através do registro R_2 , para uso externo, enquanto o restante da água aquecida retorna à caixa para não desperdiçar energia. No momento em que o aquecedor, que fornece uma potência constante, começa a funcionar, a água, que entra nele a 15°C , sai a 25°C . A partir desse momento, a temperatura da água na caixa passa então a aumentar, estabilizando-se depois de algumas horas. Desprezando perdas térmicas, determine, após o sistema passar a ter temperaturas estáveis na caixa e na saída para o usuário externo:



Dado: $1 \text{ cal} = 4 \text{ J}$

- (A) a quantidade de calor Q , em J, fornecida a cada minuto pelo aquecedor;
- (B) a temperatura final T_2 , em $^{\circ}\text{C}$, da água que sai pelo registro R_2 para uso externo.
- (C) a temperatura final T_c , em $^{\circ}\text{C}$, da água na caixa.

05 (UNICAMP) Um escritório tem dimensões iguais a $5 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ e possui paredes bem isoladas. Inicialmente a temperatura no interior do escritório é de 25°C . Chegam então as 4 pessoas que nele trabalham, e cada uma liga seu microcomputador. Tanto uma pessoa como um microcomputador dissipam em média 100 W cada na forma de calor. O aparelho de ar condicionado instalado tem a capacidade de diminuir em 5°C a temperatura do escritório em meia hora, com as pessoas presentes e os micros ligados. A eficiência do aparelho é de 50% . Considere o calor específico do ar igual a $1.000 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$ e sua densidade igual a $1,2 \text{ kg/m}^3$.

- (A) Determine a potência elétrica consumida pelo aparelho de ar condicionado.
- (B) O aparelho de ar condicionado é acionado automaticamente quando a temperatura do ambiente atinge 27°C , abaixando-a para 25°C . Quanto tempo depois da chegada das pessoas no escritório o aparelho é acionado?

06 (OFF) Uma geladeira de 280 litros de volume interno é aberta, em média, 20 vezes num dia. Durante o intervalo de tempo em que a geladeira permanece aberta, toda a massa de ar contida em seu interior é espontaneamente substituída por parte do ar existente no local onde ela se encontra. A variação de temperatura que a massa de ar sofre no interior da geladeira, a cada vez que a porta é aberta e fechada, é de 25°C . A densidade média e o calor específico do ar são dados por $d = 0,0012 \text{ g/cm}^3$ e $c = 0,24 \text{ cal/g}^{\circ}\text{C}$, respectivamente, com $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$.

- (A) Qual é o processo responsável pela movimentação do ar do interior para o exterior da geladeira e vice-versa? Explique a sua resposta.
- (B) Quantos quilowatts-hora são retirados pela geladeira do ar durante o período de um mês?

07 (Fuvest) Um pesquisador estuda a troca de calor entre um bloco de ferro e certa quantidade de uma substância desconhecida, dentro de um calorímetro de capacidade térmica desprezível (ver figura 1). Em sucessivas experiências, ele coloca no calorímetro a substância desconhecida, sempre no estado sólido à temperatura $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$, e o bloco de ferro,

a várias temperaturas iniciais T , medindo em cada caso a temperatura final de equilíbrio térmico T_e . O gráfico da figura 2 representa o resultado das experiências. A razão das massas do bloco de ferro e da substância desconhecida é $m_f/m_s = 0,8$. Considere o valor do calor específico do ferro igual a $0,1 \text{ cal/(g}^{\circ}\text{C)}$. A partir destas informações, determine para a substância desconhecida:

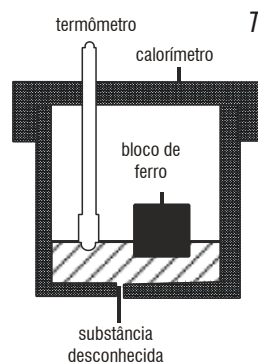


FIGURA 1

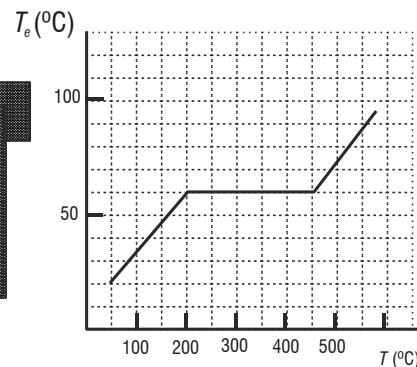


FIGURA 2

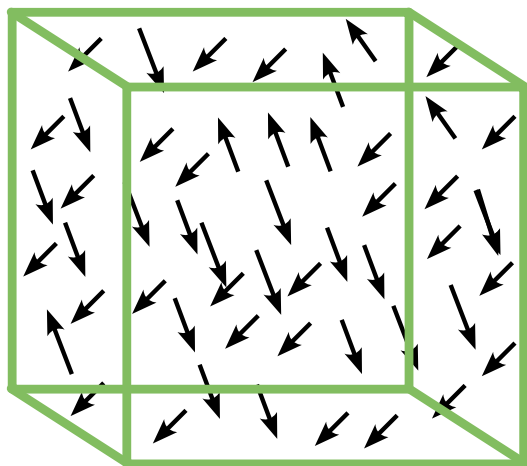
- (A) a temperatura de fusão, $T_{\text{fusão}}$.
- (B) o calor específico, c_s , na fase sólida.
- (C) o calor latente de fusão L .

08 Uma massa m de água e um bloco metálico de massa M são aquecidos em um laboratório durante um intervalo de tempo Δt , ambos sofrendo a mesma variação de temperatura $\Delta\theta$. Usando-se a mesma fonte térmica, com a mesma potência, dentro de um elevador em queda livre, a mesma água precisou de um intervalo de tempo Δt_A e o mesmo bloco metálico precisou de um intervalo de tempo Δt_B para sofrerem a mesma variação de temperatura $\Delta\theta$. Se as demais condições não se alteraram, é verdade que:

- (A) $\Delta t = \Delta t_B < \Delta t_A$.
- (B) $\Delta t < \Delta t_A = \Delta t_B$.
- (C) $\Delta t > \Delta t_A = \Delta t_B$.
- (D) $\Delta t = \Delta t_A = \Delta t_B$.
- (E) $\Delta t < \Delta t_A < \Delta t_B$.

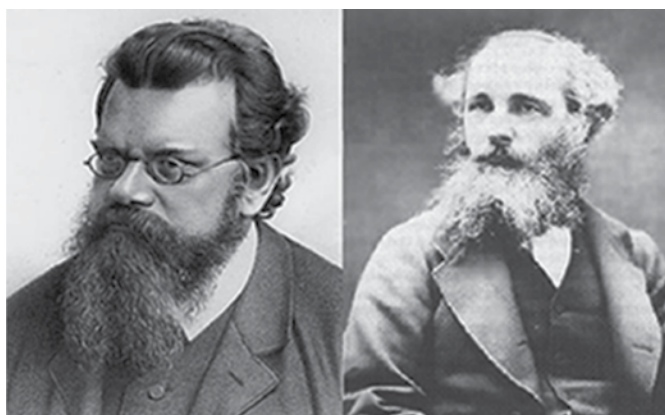
RASCUNHO

1. Definição de gás ideal ou perfeito



A teoria cinética dos gases aceita o fato de as leis da Mecânica Newtoniana serem aplicadas ao movimento molecular e supõe as seguintes hipóteses para um modelo microscópico de gás denominado ideal:

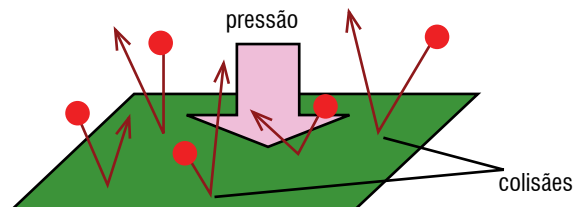
- Uma porção de gás perfeito é constituída por um grande número de moléculas em movimento caótico (todas as direções são igualmente prováveis);
- As moléculas não exercem força umas sobre as outras, somente durante as colisões;
- As colisões entre as moléculas ou entre elas e as paredes do recipiente que contém o gás são perfeitamente elásticas (conservam energia e quantidade de movimento) e de duração desprezível;
- Entre colisões sucessivas, o movimento das moléculas é retilíneo e uniforme. Isto equivale a desprezar as forças de interação gravitacional e intermoleculares;
- As moléculas são consideradas pontos materiais; isto é, suas dimensões são desprezíveis se comparadas aos espaços intermoleculares e à distância que percorrem entre colisões sucessivas.



Os físicos Boltzmann e Maxwell foram os principais responsáveis pela teoria cinética dos gases.

2. Pressão de um gás

A pressão que um gás exerce nas paredes internas de um recipiente é igual a um terço do produto da massa específica pelo quadrado da velocidade média das suas partículas.



$$p = \frac{1}{3} \rho v^2$$

em que $\rho = m/V$

3. Energia interna (cinética) de um gás monoatômico

A energia interna de um gás é a soma das energias cinéticas de suas moléculas, ela é dada por:

$$U = E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Da definição de pressão, temos:

$$p = \frac{1}{3} \rho v^2 = \frac{1}{3} \frac{m}{V} v^2 \rightarrow m v^2 = 3 p V$$

Em vista da equação de Clapeyron:

$$U = \frac{3}{2} p V = \frac{3}{2} n R T$$

Observação

Para gases diatômicos $U = \frac{5}{2} n R T$, e para poliatômicos, $U = 3 n R T$

4. Velocidade média das moléculas

Igualando as expressões de energia cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} n R T$$

em que n é o número de mols do gás, dado por $n = m/M$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} \frac{m}{M} R T$$

Obtemos então:

$$v = \sqrt{\frac{3 R T}{M}}$$

5. Energia cinética média por molécula

$$e_c = \frac{E_c}{N} = \frac{3nRT}{2N} = \frac{3nRT}{2nN_A} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T$$

Podemos agora obter também a energia cinética média de cada molécula, dividindo a energia cinética total da moléculas pelo número de moléculas $N = n.N_A$

em que o quociente $\frac{R}{N_A}$ é denominado constante de Boltzmann (k)

$$k = 1,38.10^{-23} \text{ J/K}$$

Assim, podemos escrever a expressão que demonstra que a temperatura só depende da energia cinética das moléculas de um gás perfeito

$$e_c = \frac{3}{2} kT$$

6. Variação da energia interna de um gás monoatômico

A energia interna de um gás é função apenas do número de mols e da temperatura. Assim, para uma certa massa de gás monoatômico, a variação de energia interna será dada pela expressão:

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T$$

Observações

→ Para gases diatômicos $\Delta U = \frac{5}{2} nR\Delta T$, e para poliatômicos, $\Delta U = 3nR\Delta T$

→ Em qualquer processo que a temperatura final for igual à inicial, a variação de energia interna é nula.

$$\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0$$

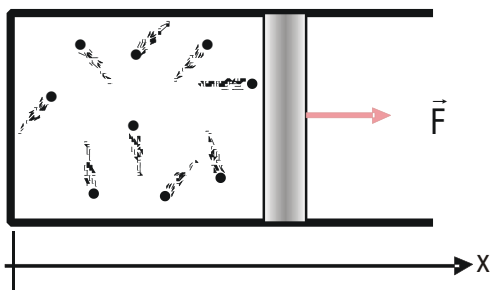
Isso implica dizer que a variação da energia interna não depende do processo.

7. Trabalho realizado por um gás

Seja um recipiente formado por um cilindro e um êmbulo móvel de área A contendo um gás ideal. Os choques das partículas no êmbulo resultam em uma força, cujo módulo é dado pela expressão abaixo:

$$F = pA ; \text{ em que } p \text{ é a pressão exercida pelo gás.}$$

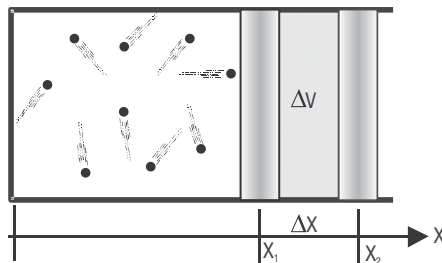
Da definição de trabalho, podemos obter a expressão para o trabalho realizado pelo gás: $\tau = \int F \cdot dx = \int p \cdot A \cdot dx$



7.1 Trabalho em um processo isobárico

Quando a pressão é constante, podemos simplificar a expressão do trabalho realizado pelo gás:

$$\tau = \int_{x_1}^{x_2} p \cdot A \cdot dx = pA \int_{x_1}^{x_2} dx = p \cdot A \cdot \Delta x$$



Na figura, observa-se que o produto $A \cdot \Delta x$ representa a variação de volume ΔV sofrida pelo gás. Assim chegamos na fórmula do trabalho de um gás em um processo isobárico:

$$\tau = p \cdot \Delta V$$

Juntamente com a equação de Clapeyron, obtemos outra expressão

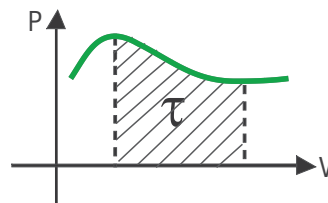
$$\tau = n \cdot R \cdot \Delta T$$

• expansão $\rightarrow \Delta V > 0 \rightarrow \tau > 0$

• contração $\rightarrow \Delta V < 0 \rightarrow \tau < 0$

7.2 Trabalho em um processo qualquer

Quando a pressão não é constante (processos isobáricos), o trabalho realizado pelo gás pode ser calculado através do gráfico $P \times V$.



7.3 Troca de calor de um gás

Em virtude do gás ideal não mudar de fase, o calor trocado por um gás será um calor sensível, dado por:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

Sabemos que a massa m de um gás pode ser calculada pelo número de mols: $m = n \cdot M$

$$\text{Substituindo, temos: } Q = n \cdot M \cdot c \cdot \Delta T$$

O produto $M \cdot c$ é denominado calor específico molar (C). Assim, a expressão para as trocas de calor dos gases ideais será:

$$Q = n \cdot C \cdot \Delta T$$

• gás recebe calor $\rightarrow Q > 0$

• gás cede calor $\rightarrow Q < 0$

Obs.:

Os valores específicos c e C variam de acordo com o tipo de transformação:
 $c_v \rightarrow$ calor específico a volume constante
 $C_v \rightarrow$ calor específico molar a volume constante
 $c_p \rightarrow$ calor específico à pressão constante
 $C_p \rightarrow$ calor específico molar à pressão constante

8. 1ª Lei Termodinâmica

A variação da energia interna (ΔU) entre dois estados quaisquer de equilíbrio pode ser determinada pela diferença algébrica do calor (Q) e do trabalho (τ).

$$\Delta U = Q - \tau$$

8.1 Transformação isotérmica (Lei de Boyle)

$$\Delta U = 0 \rightarrow Q = \tau$$

- gás recebe calor ($Q > 0$) \Leftrightarrow expansão ($\tau > 0$)
- gás cede calor ($Q < 0$) \Leftrightarrow contração ($\tau < 0$)

$$Q = \tau = \int p \cdot dV = \int \frac{n \cdot R \cdot T}{V} dV = n \cdot R \cdot T \int \frac{dV}{V} = n \cdot R \cdot T (\ln V - \ln V_0) = n \cdot R \cdot T \ln \frac{V}{V_0}$$

8.2 Transformações isovolumétrica, isocórica ou isométrica (Lei de Charles)

$$\tau = 0 \rightarrow \Delta U = Q_v$$

- gás recebe calor ($Q > 0$) \Leftrightarrow aumento de temperatura ($\Delta T > 0$)
- gás cede calor ($Q < 0$) \Leftrightarrow diminuição de temperatura ($\Delta T < 0$)

$$\Delta U = Q_v = n \cdot C_v \cdot \Delta T$$

8.3 Transformação isobárica (Lei de Charles e Gay Lussac)

$$\left. \begin{aligned} \tau &= p \cdot \Delta V \\ Q_p &= n \cdot C_p \cdot \Delta T \end{aligned} \right\} \Delta U = n \cdot C_p \cdot \Delta T - p \cdot \Delta V$$

Utilizando a outra equação do trabalho realizado pelo gás obtemos:

$$\Delta U = n \cdot C_p \cdot \Delta T - p \cdot \Delta V = n \cdot C_p \cdot \Delta T - n \cdot R \cdot \Delta T$$

$$\Delta U = n \cdot \Delta T (C_p - R)$$

8.4 Transformação adiabática

$$Q = 0 \rightarrow \Delta U = -\tau$$

- expansão ($\tau > 0$) \Leftrightarrow diminuição de temperatura ($\Delta T < 0$)
- contração ($\tau < 0$) \Leftrightarrow aumento de temperatura ($\Delta T > 0$)

Equação de Poisson: $P \cdot V^\gamma = cte$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{gás monoatômico } \gamma \cong 1,7(5/3) \\ \text{gás diatômico } \gamma \cong 1,4(7/5) \\ \text{gás poliatômico } \gamma \cong 1,3(4/3) \end{array} \right.$

em que $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ expoente de poisson

$$\tau = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} c \cdot V^{-\gamma} dV = c \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV = \frac{cV_2^{1-\gamma} - cV_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Como $P \cdot V^\gamma = cte$, temos:

$$p_1 = cV_1^{-\gamma} \text{ e } p_2 = cV_2^{-\gamma}; \text{ assim, } \tau = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{nR(T_1 - T_2)}{\gamma - 1} = \frac{nR\Delta T}{1 - \gamma}$$

9. Relação de Mayer

Seja ACB um processo termodinâmico composto por uma isobárica e por uma isovolumétrica. Como os estados A e B pertencem a uma mesma isoterma $\rightarrow \Delta U_{ACB} = 0$.

$$\Delta U_{ACB} = \Delta U_{AC} + \Delta U_{CB}$$

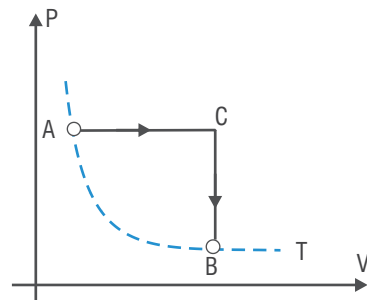
Pela primeira lei termodinâmica: $0 = (Q_{AC} - \tau_{AC}) + (Q_{CB} - \tau_{CB})$

$$0 = (n \cdot C_p \cdot \Delta T_{AC} - n \cdot R \cdot \Delta T_{AC}) + (n \cdot C_v \cdot \Delta T_{CB} - 0)$$

$$\text{Como } \Delta T_{AC} = -\Delta T_{CB} \rightarrow n \cdot C_p \cdot \Delta T_{AC} - n \cdot R \cdot \Delta T_{AC} = -n \cdot C_v \cdot \Delta T_{AC}$$

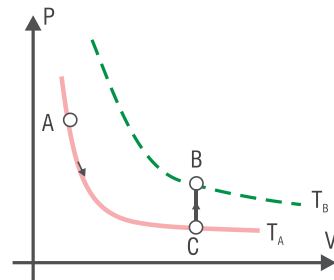
Eliminando os fatores comuns: $C_p - R = -C_v$, temos então:

$$C_p - C_v = R$$



10. Variação da energia interna em um processo qualquer

Suponha um processo termodinâmico qualquer AB. Como a variação da energia interna não depende do processo, podemos imaginar, por exemplo, um caminho ACB composto por uma isotérmica (AC) e uma isovolumétrica (CB), como mostra a figura abaixo:



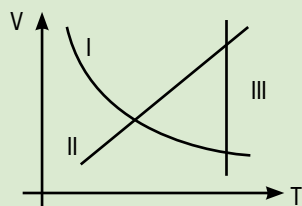
$$\Delta U_{AB} = \Delta U_{AC} + \Delta U_{CB} = 0 + (Q_{CB} - \tau_{CB}) = 0 + (n \cdot C_v \cdot \Delta T - 0) = n \cdot C_v \cdot \Delta T$$

Logo, em qualquer processo termodinâmico a variação da energia interna poderá ser dada por:

$$\Delta U = n \cdot C_v \cdot \Delta T$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 (UFG-2007) Transformações termodinâmicas, realizadas sobre um gás de número de mols constante que obedece à lei geral dos gases ideais, são mostradas na figura abaixo.



As transformações I, II e III são, respectivamente,

- (A) adiabática, isobárica e isotérmica.
- (B) isobárica, adiabática e isotérmica.
- (C) isotérmica, isobárica e adiabática.
- (D) adiabática, isotérmica e isobárica.
- (E) isotérmica, adiabática e isobárica.

Solução: Letra A.

Comece pelo gráfico mais fácil. Neste caso é o de número III. Por ser uma linha vertical, nota-se que a temperatura não varia, somente o volume. Logo, é ISOTÉRMICO.

Depois o gráfico II é também bastante utilizado. Nele vemos que existe uma relação linear ($y = a \cdot x$) entre o volume e a temperatura. Pela equação de Clapeyron podemos identificar esta relação:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \rightarrow V = \frac{n \cdot R}{P} T$$

Neste caso, trata-se de uma transformação ISOBÁRICA.

Olhe só! Neste momento já temos a resposta!

Analisando, ainda assim, o Gráfico I, vemos que a relação não é linear. Isto significa que tanto volume, como temperatura e pressão estarão variando. Não resta outra opção a não ser a transformação ADIABÁTICA. Podemos obter esta relação (hiperbólica) partindo da relação entre P e V na adiabática:

$$P \cdot V^\gamma = c$$

Para que relacionemos apenas V e T para demonstrar aquela relação, substituiremos P através da equação de Clapeyron:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \rightarrow P = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \rightarrow P \cdot V^\gamma = c$$

$$\frac{n \cdot R \cdot T}{V} \cdot V^\gamma = c \rightarrow V^{\gamma-1} \cdot T = c'$$

02 Nos manuais de utilização de um automóvel, recomenda-se que os pneus sejam calibrados a cada 15 dias e à temperatura ambiente, apresentando, inclusive, sugestão de intervalos de pressão para cada carga. Em uma região com temperatura ambiente de 30°C, os pneus atingem 120°C após duas horas de viagem. Considerando o ar como um gás ideal e desprezando a variação de volume do pneu, o aumento percentual de pressão será da ordem de:

- (A) 20%.
- (B) 30%.
- (C) 40%.
- (D) 200%.
- (E) 300%.

Solução: Letra B.

Muita atenção sempre nas unidades!

Neste problema a temperatura é dada em Celsius, porém, como utilizaremos a equação de Clapeyron na forma de transformações gasosas $\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$, devemos transformar **sempre** para escala absoluta. Assim, teremos a seguinte relação:

$$\frac{P_1}{303} = \frac{P_2}{393} \rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{393}{303} = 1,297 = 129,7\%$$

Logo, o aumento percentual foi de aproximadamente 30%.

03 Um gás ideal sofre uma expansão adiabática. Podemos afirmar que:

- (A) a temperatura e o volume aumentam.
- (B) a pressão e a temperatura aumentam.
- (C) a temperatura e a energia interna aumentam.
- (D) a temperatura e o calor são constantes.
- (E) a energia interna e a pressão diminuem.

Solução: Letra E.

Do ponto de vista da 1ª Lei Termodinâmica temos:

$$\Delta U = Q - \tau \rightarrow \Delta U = 0 - \tau$$

Como trata-se de uma expansão (volume aumenta) sabemos que o trabalho é positivo. Assim a variação de energia interna (que representa a variação de temperatura) será negativa ($\Delta U = -\tau$).

Concluimos que a temperatura diminui.

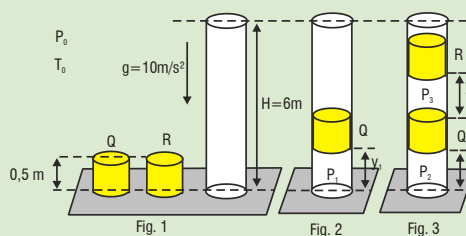
Como em uma adiabática sabemos que $P \cdot V^\gamma = c$.

Logo, se o volume aumenta a pressão tem que diminuir.

Resumindo:

- Volume \rightarrow aumenta
- Temperatura e energia interna \rightarrow diminuem
- Pressão \rightarrow diminui

04



Na figura 1 estão representados um tubo vertical, com a extremidade superior aberta, e dois cilindros maciços Q e R. A altura do tubo é $H = 6,0$ m e a área de sua seção transversal interna é $S = 0,010$ m². Os cilindros Q e R têm massa $M = 50$ kg e altura $h = 0,5$ m, cada um. Eles se encaixam perfeitamente no tubo, podendo nele escorregar sem atrito, mantendo uma vedação perfeita. Inicialmente, o cilindro Q é inserido no tubo. Após ele ter atingido a posição de equilíbrio y_1 , indicada na figura 2, o cilindro R é inserido no tubo. Os dois cilindros se deslocam então para as posições de equilíbrio indicadas na figura 3. A parede do tubo é tão boa condutora de calor que durante todo o processo a temperatura dentro do tubo pode ser considerada constante e igual à temperatura ambiente T_0 . Sendo a pressão atmosférica $P_0 = 10^5$ Pa (1 Pa = 1 N/m²), nas condições do experimento, determine:

- (A) a altura de equilíbrio inicial y_1 do cilindro Q;
 (B) a pressão P_2 do gás aprisionado pelo cilindro Q e a altura de equilíbrio final y_2 do cilindro Q, na situação da Fig.3;
 (C) a distância y_3 entre os dois cilindros, na situação da Fig.3.

Solução:

(A) Equilíbrio do cilindro Q:

$$Mg + F_{atm} = F_{1ar} = p_{1ar} S \Rightarrow$$

$$p_{1ar} = \frac{50 \cdot 10 + 10^5 \cdot 0,01}{0,01} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Transformação gasosa:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow$$

$$10^5 \cdot 0,01 \cdot 6 = 1,5 \cdot 10^5 \cdot 0,01 \cdot y_1 \Rightarrow y_1 = 4 \text{ m}$$

(B) Equilíbrio do cilindro Q e R:

$$2Mg + F_{atm} = F_{2ar} = P_{2ar} S \Rightarrow$$

$$P_{2ar} = \frac{100 \cdot 10 + 10^5 \cdot 0,01}{0,01} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

(C) Cálculo de y_2 :

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow 10^5 \cdot 0,01 \cdot 6 = 2 \cdot 10^5 \cdot 0,01 \cdot y_2 \Rightarrow$$

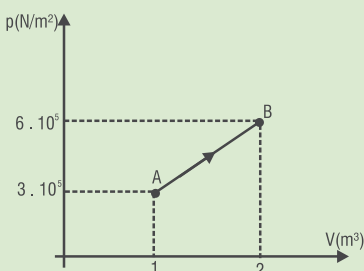
$$y_2 = 3 \text{ m}$$

Transformação gasosa:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow$$

$$10^5 \cdot 0,01 \cdot (6 - 3 - 0,5) = 5 \cdot 10^5 \cdot 0,01 \cdot y_3 \Rightarrow y_3 = 0,5 \text{ m}$$

05 O gráfico abaixo ilustra uma transformação: 100 moles de gás ideal monoatômico recebem do meio exterior uma quantidade de calor de 1.800.000 J. Dado: $R = 8,32 \text{ J/mol.K}$.



Determine:

- (A) o trabalho realizado pelo gás;
 (B) a variação da energia interna do gás;
 (C) a temperatura do gás no estado A.

Solução:

(A) O trabalho realizado pelo gás é dado pela área do trapézio sob a curva do gráfico; logo:

$$\tau = \frac{(3 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^5) \cdot (2 - 1)}{2}$$

$$\tau = \frac{(9 \cdot 10^5) \cdot 1}{2} = 4,5 \cdot 10^5 \text{ J}$$

(B) Pela 1ª lei da termodinâmica, temos que:

$$Q = \tau + \Delta U$$

Então, substituindo os valores, temos:

$$18 \cdot 10^5 = 4,5 \cdot 10^5 + \Delta U$$

$$\Delta U = 18 \cdot 10^5 - 4,5 \cdot 10^5$$

$$\Delta U = 13,5 \cdot 10^5 \text{ J}$$

(C) Pela equação de Clapeyron:

$$pV = nRT$$

Lembrando que:

$$n = 100 \text{ moles}$$

$$R = 8,31 \text{ J/mol.K}$$

E pela leitura do gráfico:

$$p = 300.000 \text{ N/m}^2$$

$$V = 1 \text{ m}^3$$

Aplicando na fórmula:

$$3 \cdot 10^5 \cdot 1 = 100 \cdot 8,31 \cdot T$$

$$T = \frac{3 \cdot 10^5}{831} = 361 \text{ K}$$

06 Um certo gás, cuja massa vale 140 g, ocupa um volume de 41 litros, sobre pressão de 2,9 atmosferas, à temperatura de 17°C. O número de Avogadro vale $6,02 \cdot 10^{23}$ e a constante universal dos gases perfeitos é $R = 0,082 \text{ atm l/mol K}$. Nestas condições, qual é, aproximadamente, o número de moléculas contidas no gás? E a massa molar?

Solução:

$$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT} = \frac{2,9 \times 41}{0,082 \times (17 + 273)}$$

$$n = 5 \text{ mols}$$

$$N = n \times N_A = 5 \times 6,02 \cdot 10^{23} \approx 3 \cdot 10^{24} \text{ moléculas}$$

$$n = \frac{m}{M} \Rightarrow M = \frac{m}{n} = \frac{140}{5} = 28 \text{ g}$$

07 Certa quantidade de oxigênio tem massa específica de 0,07 g/cm³ sob pressão de 700 mmHg. Determine a pressão desse oxigênio para que a sua massa específica aumente para 0,09 g/cm³ à mesma temperatura.

Solução:

Por se tratar de uma transformação gasosa, temos:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$$

Para fazer com que esta expressão contemple a densidade, devemos fazer duas substituições:

$$n = m/M \text{ e } d = m/V$$

$$\frac{P_1 V_1}{\frac{m_1}{M} T_1} = \frac{P_2 V_2}{\frac{m_2}{M} T_2} \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{m_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{m_2 T_2}$$

$$\frac{P_1}{\frac{m_1}{V_1} T_1} = \frac{P_2}{\frac{m_2}{V_2} T_2} \Rightarrow \frac{P_1}{d_1 T_1} = \frac{P_2}{d_2 T_2}$$

Substituindo pelos dados do problema:

$$\frac{700}{0,077} = \frac{P_2}{0,097} \Rightarrow P_2 = \frac{700 \times 0,09}{0,07}$$

$$P_2 = 900 \text{ mmHg}$$

08 Um gás monoatômico ($M = 10 \text{ g}$) está a uma temperatura de 400 K em um recipiente de 3 L . Ao receber calor de uma fonte térmica, sofre uma expansão isobárica e tem sua temperatura aumentada em 30% . Sendo a massa do gás de $0,3 \text{ g}$ e seu calor específico a pressão constante de $2050 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$, calcule:

- (A) o volume final o gás;
 - (B) a pressão do gás;
 - (C) o trabalho realizado;
 - (D) o calor recebido pelo gás;
 - (E) a variação de energia interna.
- (Dado: $R = 0,082 \text{ atmL/molK}$)

Solução:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{3}{400} = \frac{V_2}{400 \cdot 1,3}$$

$$V_2 = 3 \cdot 1,3 = 3,9 \text{ L}$$

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow P = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{0,3}{10} \cdot 0,082 \cdot 400$$

$$P = 0,328 \text{ atm}$$

$$\tau = P \cdot \Delta V = 0,328 \cdot (3,9 - 3) = 0,2952 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T = 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot 2,05 \cdot 10^3 \cdot (520 - 400)$$

$$Q = 73,8 \text{ J}$$

$$\Delta U = \frac{3}{2} n \cdot R \cdot \Delta T = \frac{3}{2} \cdot 0,03 \cdot 0,082 \cdot (520 - 400)$$

$$\Delta U = 0,4428 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

Observação

Para transformar a unidade de energia de $[\text{atm} \cdot \text{L}]$ para $[\text{J}]$, devemos multiplicar por 100. Assim, teremos:

$$\tau = 29,52 \text{ J}$$

$$\Delta U = 44,28 \text{ J}$$

Note que o calor é a soma do trabalho realizado e da variação de energia interna.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 As moléculas de hidrogênio, em um recipiente, têm a mesma velocidade quadrática média que as moléculas de nitrogênio, de outro recipiente. É correto afirmar, comparando-se os dois gases, que:

- (A) o nitrogênio apresenta maior temperatura.
- (B) o nitrogênio apresenta menor pressão.
- (C) ambos apresentam mesma pressão.
- (D) ambos apresentam mesma temperatura.
- (E) ambos apresentam mesmo volume.

02 Um gás é mantido sob pressão constante. Se a temperatura e o volume aumentam:

- I. o número de choques por cm^2 de parede deve aumentar.
- II. a distância média entre as moléculas aumenta.
- III. a energia cinética média das moléculas não sofre alteração.

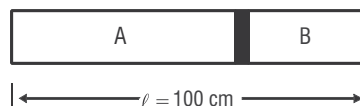
Quais são as afirmativas verdadeiras (**V**) e quais são as falsas (**F**)?

03 Se aumentarmos a temperatura do gás contido em um recipiente fechado e isolado:

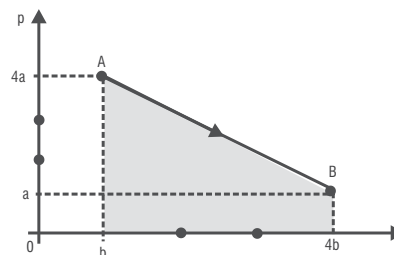
- (A) a energia cinética média das partículas aumentará.
- (B) a pressão aumentará e a energia cinética média das partículas diminuirá.
- (C) a energia cinética média não se alterará e a pressão aumentará.
- (D) a energia cinética média e a pressão permanecerão constantes.
- (E) nada do que foi dito ocorrerá.

04 Em um recipiente hermeticamente fechado, encontramos nitrogênio à temperatura de 0°C . Sendo o mol do referido gás igual a 28 g , qual o valor da velocidade média das suas partículas? (Dado: $R = 8,31 \text{ J/mol K}$.)

05 Um tubo fechado nas extremidades tem um pistão móvel em seu interior, que o divide em duas regiões. A seção transversal do tubo é constante. Na região **A** existe 1 mol de hidrogênio a 300 K , enquanto na região **B** existem 2 mols de nitrogênio a 600 K . Determine a posição de equilíbrio do pistão.

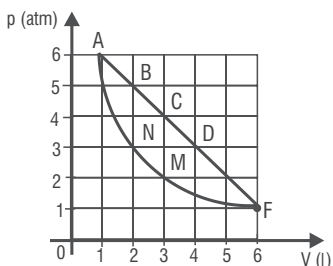


06 O gráfico a seguir representa a pressão em função do volume para 1 mol de um gás perfeito. O gás vai do estado A para o estado B, segundo a transformação indicada no gráfico. Assinale a opção correta:



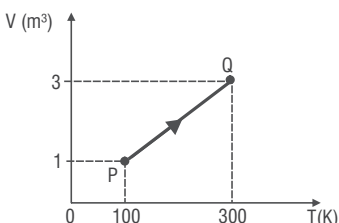
- (A) A transformação indicada é isotérmica.
- (B) A área assinalada na figura mede a variação de energia interna do gás.
- (C) Na transformação de **A** para **B** o gás recebe um calor **Q**, realiza um trabalho **W**, de modo que $|\mathbf{Q}| = |\mathbf{W}|$.
- (D) A transformação de **A** para **B** é adiabática porque não houve acréscimo de energia interna do gás.
- (E) A área assinalada na figura **NÃO** pode ser usada para se medir o calor recebido pelo gás.

07 Um gás ideal vai de um estado **A** a um estado **F** através da transformação **ABCDF** e retorna ao estado **A** através da transformação **FMNA**, conforme a figura. Assinale a afirmação correta:



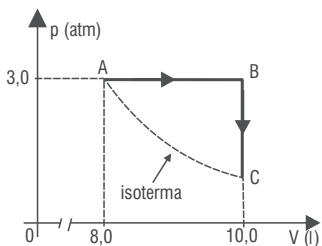
- (A) A transformação **ABCDF** é isométrica.
- (B) A temperatura do gás em **M** é menor do que em **N**.
- (C) As temperaturas em **C** e **D** são iguais.
- (D) A transformação **FMNA** é isobárica.
- (E) Como o gás volta ao estado inicial **A**, o trabalho realizado é nulo.

08 Uma amostra de gás perfeito sofre uma transformação isobárica sob pressão de 60 N/m^2 , como ilustra o diagrama. Admita que, na transformação, o gás recebe uma quantidade de calor igual a 300 J .



Qual foi a variação de energia interna do gás?

09 Um mol de gás ideal sofre a transformação $A \rightarrow B \rightarrow C$ indicada no diagrama pressão \times volume da figura:



- a. Qual a temperatura do gás no estado **A**?
- b. Qual é o trabalho realizado pelo gás na expansão $A \rightarrow B$?
- c. Qual é a temperatura do gás no estado **C**?

(Dado: R (constante dos gases) = $0,082 \text{ atm l/mol K} = 8,3 \text{ J/mol K}$.)

10 Considere uma mistura de gases H_2 e N_2 em equilíbrio térmico. Sobre a energia cinética média e sobre a velocidade média das moléculas de cada gás, pode-se concluir que:

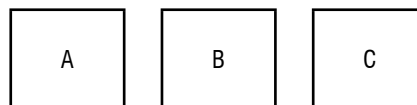
- (A) as moléculas de N_2 e H_2 têm a mesma energia cinética média e a mesma velocidade média.
- (B) ambas têm a mesma velocidade média, mas as moléculas de N_2 têm maior energia cinética média.

- (C) ambas têm a mesma velocidade média, mas as moléculas de H_2 têm maior energia cinética média.
- (D) ambas têm a mesma energia cinética média, mas as moléculas de N_2 têm maior velocidade média.
- (E) ambas têm a mesma energia cinética média, mas as moléculas de H_2 têm maior velocidade média.

11 Sejam o recipiente (1), contendo 1 mol de H_2 (massa molecular $M = 2$) e o recipiente (2) contendo 1 mol de He (massa atômica $M = 4$) ocupando o mesmo volume, ambos mantidos a mesma pressão. Assinale a alternativa correta:

- (A) A temperatura do gás no recipiente 1 é menor que a temperatura do gás no recipiente 2.
- (B) A temperatura do gás no recipiente 1 é maior que a temperatura do gás no recipiente 2.
- (C) A energia cinética média por molécula do recipiente 1 é maior que a do recipiente 2.
- (D) O valor médio da velocidade das moléculas no recipiente 1 é menor que o valor médio da velocidade das moléculas no recipiente 2.
- (E) O valor médio da velocidade das moléculas no recipiente 1 é maior que o valor médio da velocidade das moléculas no recipiente 2.

12 (UFCE) A figura abaixo mostra 3 caixas fechadas **A**, **B** e **C**, contendo, respectivamente, os gases: oxigênio, nitrogênio e oxigênio. O volume de **A** é igual ao volume de **B** e é o dobro do volume de **C**. Os gases se comportam como ideais e estão todos em equilíbrio, a uma mesma temperatura.



Sobre a energia cinética, \bar{K} , das moléculas em cada uma das caixas, podemos afirmar que:

- (A) $\bar{K}_A = \bar{K}_C < \bar{K}_B$
- (B) $\bar{K}_A = \bar{K}_C > \bar{K}_B$
- (C) $\bar{K}_A = \bar{K}_B < \bar{K}_C$
- (D) $\bar{K}_A = \bar{K}_B = \bar{K}_C$
- (E) $\bar{K}_C < \bar{K}_A < \bar{K}_B$

13 A primeira coluna descreve uma transformação sofrida pelo gás; a segunda contém a denominação utilizada para indicar essa transformação.

- (A) O gás realiza trabalho e sua energia interna não varia.
- (B) O gás tem sua energia interna aumentada e não troca trabalho com o meio externo.
- (C) O gás não troca calor com o meio externo, mas sua temperatura aumenta.
- (D) O gás recebe trabalho e sua energia interna não varia.

- (1) Compressão isotérmica.
- (2) Compressão adiabática.
- (3) Aquecimento isométrico.
- (4) Expansão isotérmica.

Em qual das alternativas as associações estão corretas?

- (A) A-1, B-2, C-3 e D-4.
- (B) A-4, B-2, C-1 e D-3.
- (C) A-4, B-3, C-2 e D-1.
- (D) A-3, B-1, C-4 e D-2.
- (E) A-2, B-4, C-1 e D-4.

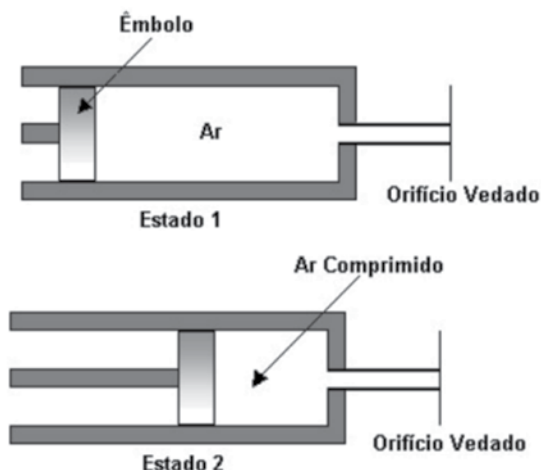
14 (ENEM) Considere as afirmações:

- I. Calor e trabalho são formas de transferência de energia entre corpos.
- II. Calor é medido necessariamente em calorias, enquanto trabalho é somente medido em joules.
- III. Dez calorias valem aproximadamente 42 joules.

Pode-se afirmar que apenas:

- (A) I é correta.
- (B) II é correta.
- (C) III é correta.
- (D) I e II são corretas.
- (E) I e III são corretas.

15 Uma bomba de encher pneus de bicicleta é acionada rapidamente, tendo a extremidade de saída do ar vedada. Consequentemente, o ar é comprimido, indo do estado 1 para o estado 2, conforme mostram as figuras a seguir.



Nessas condições, é correto afirmar que a transformação termodinâmica verificada na passagem do estado 1 para o estado 2 aproxima-se mais de uma:

- (A) isotérmica, porque a temperatura do ar não se altera.
- (B) adiabática, porque praticamente não há troca de calor do ar com o meio exterior.
- (C) isobárica, porque a pressão do ar não se altera.
- (D) isométrica, porque o volume do ar se mantém.

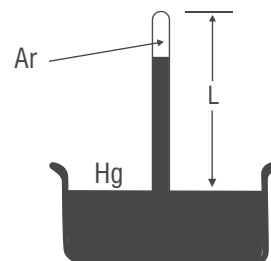
EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Um recipiente contém água (densidade de 10^3 Kg/m^3) a 27°C com superfície submetida a uma pressão de 1 atm. Na superfície do líquido flutua um balão dilatável, de volume interno 1ℓ , cheio de um gás suposto perfeito. Qual a profundidade a que deve ser levado o balão para que seu volume interno passe a $0,8 \ell$, considerando que não há diferença de temperatura entre a superfície do líquido e o ponto considerado?

(Dados: $1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

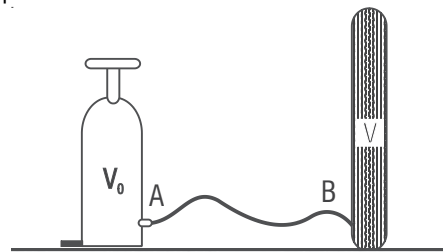
02 Um barômetro de mercúrio, com escala graduada em mmHg, fornece leituras erradas da pressão atmosférica, pelo fato de conter um pouco de ar na parte superior do tubo. Em um local onde o valor da pressão é de 759 mmHg, o barômetro indica 754 mmHg; em outro local onde o

valor real é de 744 mmHg, ele indica 742 mmHg. Considere que o ar e o mercúrio estão sempre em equilíbrio térmico e que as medições foram feitas à mesma temperatura (aproximadamente a 20°C). Qual é, em mm, o valor do comprimento L do tubo?



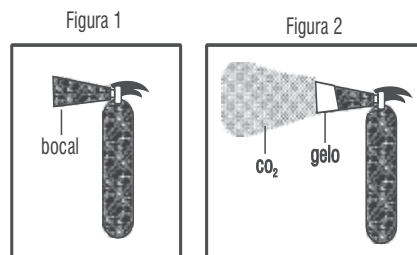
(Despreze a pressão de vapor do mercúrio na parte superior do tubo.)

03 Na figura, temos uma bomba de bicicleta, com que se pretende encher uma câmara de ar de volume V . **A** e **B** são válvulas que impedem a passagem do ar em sentido inverso. A operação se faz isotermicamente e o volume da bomba descomprimida (à pressão atmosférica P_0) é V_0 . Inicialmente, a câmara está completamente vazia. Após N compressões da bomba, a pressão da câmara será:



- (A) $P_0 \left(1 + N \frac{V}{V_0} \right)$.
- (B) $N P_0$
- (C) $\frac{N P_0 V}{V_0}$.
- (D) $\frac{N P_0 V_0}{V}$.
- (E) $\frac{N P_0 (V + V_0)}{V_0}$.

04 Importante para o combate a incêndios de categorias B e C, o extintor de CO_2 (Figura 1) é nada mais que um recipiente resistente à pressão interna, capaz de armazenar gás CO_2 na forma líquida. Uma alavanca em forma de gatilho expõe o conteúdo do extintor à pressão atmosférica, e o CO_2 é violentamente expelido pelo bocal, na forma de gás (Figura 2). Durante sua utilização, verifica-se o surgimento de cristais de gelo sobre o plástico do bocal, resultantes da condensação e rápida solidificação da umidade do ar ambiente.



- a. Em termos da termodinâmica, dê o nome da transformação sofrida pelo CO_2 ao passar pelo bocal e descreva o processo que associa o uso do extintor com a queda de temperatura ocorrida no bocal.
- b. O que deveria ser garantido para que um gás ideal realizasse o mesmo tipo de transformação, em um processo bastante lento?

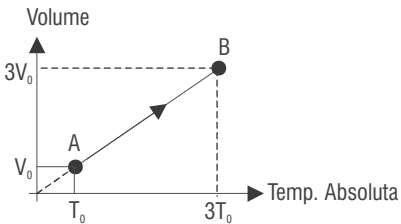
05 Uma cesta portando uma pessoa deve ser suspensa por meio de balões, sendo cada qual inflado com 1 m^3 de hélio na temperatura local (27°C). Cada balão vazio com seus apetrechos pesa $1,0 \text{ N}$. São dadas a massa atômica do oxigênio $A(\text{O}) = 16$, a do nitrogênio $A(\text{N}) = 14$, a do hélio $A(\text{He}) = 4$ e a constante dos gases $R = 0,082 \text{ atm } \ell \text{ mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Considerando que o conjunto pessoa e cesta pesa 1000 N e que a atmosfera é composta de 30% de O_2 e 70% de N_2 , determine o número mínimo de balões necessários.

06 A massa de $2,0 \text{ g}$ de ar, inicialmente a 17°C e $1,64 \text{ atm}$, é aquecida a pressão constante até que seu volume inicial seja triplicado. Determinar:

- a. o trabalho realizado;
- b. o calor cedido ao ar;
- c. a variação de energia interna do ar.

Dados: $R = 0,082 \text{ atm } \ell/\text{gmol}$;
 $K; C_p = 0,24 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$;
 $\text{MM do ar} = 29, 1 \text{ cal} \cong 4,0\text{J}, 1 \text{ kgf} \cong 10\text{N}$.

07 Um mol de um gás ideal é submetido ao processo apresentado na figura abaixo, passando o gás do estado A ao estado B . Calcule a variação de energia interna ($U = U_B - U_A$) do gás e a razão $r = Q/W$, em que Q e W são respectivamente o calor absorvido e o trabalho realizado pelo gás.



- (A) $U = 2(C_p + R)T_0; r = \frac{C_p}{R}$.
- (B) $U = 2(C_p - R)T_0; r = \frac{C_p}{R} + 1$.
- (C) $U = 2(C_p - R)T_0; r = \frac{C_p}{R}$.
- (D) $U = 2C_pT_0; r = \frac{C_p}{R} - 1$.
- (E) N.R.A.

Observação

C_p é a capacidade térmica molar do gás e R a constante dos gases perfeitos.

08 Um gás ideal, inicialmente à pressão P_0 passa por uma expansão livre (adiabática, sem a realização de trabalho externo) até que o seu volume final seja de $3,00$ vezes o seu volume inicial. (A) Qual a pressão do gás, após a expansão livre? (B) O gás é então lenta e adiabaticamente comprimido de volta ao seu volume original. A pressão após a compressão é $(3,00)^{1/3}P_0$. Determine se o gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico.

09 Dentro de um recipiente de paredes rígidas e indeformáveis, provido de válvula, há 80 g de um gás ideal comprimido na temperatura ambiente e na pressão absoluta de 8 atmosferas. Abre-se a válvula e deixa-se sair gás até que a pressão no interior do recipiente seja a pressão atmosférica, quando então a válvula é novamente fechada. Considerando-se que o gás no interior do recipiente tenha sofrido um processo adiabático reversível e que a razão C_p/C_v seja $1,5$, qual é, em grama, a massa de gás que saiu do recipiente?

- (A) 10. (D) 70.
 (B) 20. (E) 80
 (C) 60.

10 Considere 4 moles de um gás ideal, inicialmente a 2°C de temperatura e $8,20 \text{ atm}$ de pressão, que se submete ao seguinte ciclo de transformações:

- I. Compressão isotérmica, cedendo 860 J de calor, até o volume de 10 L ;
 II. Aquecimento isobárico até a temperatura de 57°C ;
 III. Despressurização isovolumétrica até a pressão de $8,20 \text{ atm}$;
 IV. Resfriamento isobárico até retornar às condições iniciais.

- a. Represente este ciclo, em um gráfico p (atm) $\times V$ (litros), indicando os valores de p, V e T ao final de cada uma das transformações dadas acima.
 b. Calcule o trabalho, em joules, realizado pelo gás no ciclo.
 c. Calcule o calor, em joules, absorvido pelo gás no ciclo.
 d. Calcule a potência, em watts, de um motor que realiza 10 destes ciclos por segundo.

Dados: R (constante dos gases) = $0,082 \text{ atm} \cdot \text{L}/\text{mol} \cdot \text{K}$; $1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$;
 $0^\circ\text{C} = 273\text{K}$

11 Um reservatório indeformável contém um gás perfeito na temperatura de 27°C e à pressão de 12 atmosferas. A pressão máxima admissível no reservatório é de 15 atmosferas. A quantidade máxima de calor que pode então ser fornecida a cada grama de gás, em calorias, é aproximadamente:

Dados:

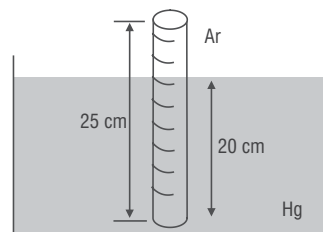
Relação entre os calores específicos do gás: $\frac{C_p}{C_v} = 1,4$.

Constante Universal dos gases perfeitos: $R = 2,0 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$.

Massa molecular do gás: $M = 37$.

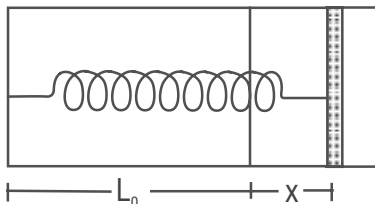
- (A) 10. (D) 4.
 (B) 8. (E) 2.
 (C) 6.

12 Na figura, uma pipeta cilíndrica de 25 cm de altura, com ambas as extremidades abertas, tem 20 cm mergulhados em um recipiente com mercúrio. Com sua extremidade superior tapada, em seguida a pipeta é retirada lentamente do recipiente.



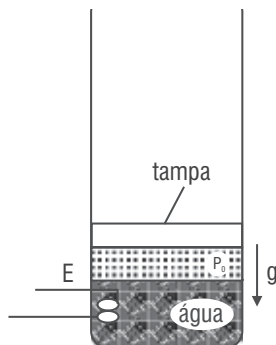
Considerando uma pressão atmosférica de 75 cmHg , calcule a altura da coluna de mercúrio remanescente no interior da pipeta.

13 Um mol de gás perfeito está contido em um cilindro de seção S fechado por um pistão móvel, ligado a uma mola de constante elástica k . Inicialmente, o gás está na pressão atmosférica P_0 e temperatura T_0 , e o comprimento do trecho do cilindro ocupado pelo gás é L_0 , com a mola não estando deformada. O sistema gás-mola é aquecido e o pistão se desloca de uma distância x . Denotando a constante de gás por R , a nova temperatura do gás é:



- (A) $T_0 + \frac{\text{cal}}{\text{mol}\cdot\text{K}} (P_0 S + k L_0)$
- (B) $T_0 + \frac{L_0}{R} (P_0 S + k x)$
- (C) $T_0 + \frac{x}{R} (P_0 S + k x)$
- (D) $T_0 + k \frac{x}{R} (L_0 + x)$
- (E) $T_0 + \frac{x}{R} (P_0 S + k L_0 + k x)$

14



Um recipiente cilíndrico contém 1,5 L (litro) de água à temperatura de 40°C. Uma tampa, colocada sobre a superfície da água, veda o líquido e pode se deslocar verticalmente sem atrito. Um aquecedor elétrico E , de 1800 W, fornece calor à água. O sistema está isolado termicamente de forma que o calor fornecido à água não se transfere ao recipiente. Devido ao peso da tampa e à pressão atmosférica externa, a pressão sobre a superfície da água permanece com o valor $P_0 = 1,00 \times 10^5$ Pa. Ligando-se o aquecedor, a água esquenta até atingir, depois de um intervalo de tempo t_A , a temperatura de ebulição (100°C). A seguir a água passa a evaporar, preenchendo a região entre a superfície da água e a tampa, até que, depois de mais um intervalo de tempo t_B , o aquecedor é desligado. Neste processo, 0,27 mol de água passou ao estado de vapor.

Note/Adote $1\text{Pa} = 1\text{ pascal} = 1\text{N/m}^2$.
 Massa de 1 mol de água: 18 gramas.
 Massa específica da água: 1,0 kg/L.
 Calor específico da água: 4.000 J/(°C . kg).

Na temperatura de 100°C e à pressão de $1,00 \times 10^5$ Pa, 1 mol de vapor de água ocupa 30 L e o calor de vaporização da água vale 40.000 J/mol. Determine:

- a. o intervalo de tempo t_A , em segundos, necessário para levar a água até a ebulição.
- b. o intervalo de tempo t_B , em segundos, necessário para evaporar 0,27 mol de água.
- c. o trabalho W , em joules, realizado pelo vapor de água durante o processo de ebulição.

15 Um balão esférico de raio 3 metros deve ser inflado com um gás ideal proveniente de um cilindro. Admitindo que o processo ocorra isotermicamente, que o balão esteja inicialmente vazio e que a pressão final do conjunto cilindro-balão seja a atmosférica, determine:

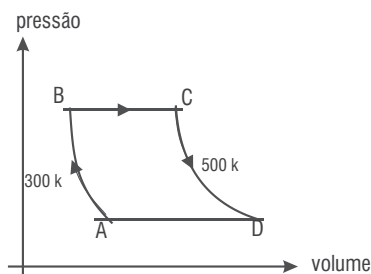
- a. o trabalho realizado contra a atmosfera durante o processo;
- b. o volume do cilindro.

Dados:
 pressão atmosférica: 1 kgf/cm²;
 pressão inicial do cilindro: 125 kgf/cm²;
 $\pi = 3,1$.

16 Um recipiente cilíndrico vertical é fechado por meio de um pistão, com 8,00 kg de massa e 60,0 cm² de área, que se move sem atrito. Um gás ideal, contido no cilindro, é aquecido de 30°C a 100°C, fazendo o pistão subir 20,0 cm. Nesta posição, o pistão é fixado, enquanto o gás é resfriado até sua temperatura inicial.

Considere que o pistão e o cilindro encontram-se expostos à pressão atmosférica. Sendo Q_1 o calor adicionado ao gás durante o processo de aquecimento e Q_2 , o calor retirado durante o resfriamento, assinale a opção correta que indica a diferença $Q_1 - Q_2$.

- (A) 136 J.
- (B) 120 J.
- (C) 100 J.
- (D) 16 J.
- (E) 0 J.



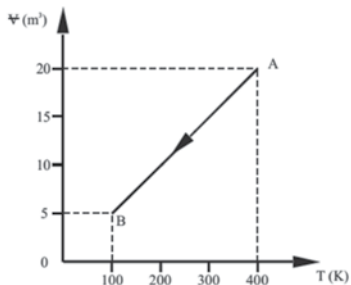
17 Um gás ideal realiza o ciclo termodinâmico constituído por duas isotermas, AB e CD , e duas isóbaras, BC e DA , ilustradas na figura abaixo. As temperaturas correspondentes às isotermas AB e CD valem 300 K e 500 K, respectivamente.

- a. Indique se o módulo Q_a do calor absorvido na transformação BC é maior, igual ou menor do que o módulo Q_c do calor cedido na transformação DA . Justifique a sua resposta.
- b. Calcule a variação da energia interna nesse ciclo.

18 Um gás perfeito ocupa o volume de 8 litros sob pressão de 2 atm. Após uma transformação adiabática, o volume do gás passou para 2 litros. Sendo o expoente de Poisson $\gamma = 1.5$, a nova pressão do gás será:

- (A) 8 atm (D) 64 atm
 (B) 16 atm (E) NRA
 (C) 32 atm

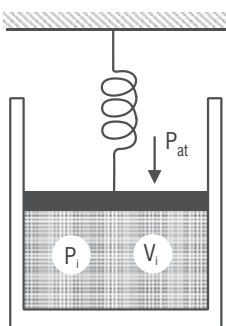
19 Sob pressão constante de 20 N/m², um gás ideal evolui do estado A para o estado B, cedendo, durante o processo 750 J de calor para o ambiente. Determine o trabalho realizado sobre o gás no processo e a variação de energia interna sofrida pelo gás:



- (A) - 300J e 450J (D) 300J e - 450J
 (B) - 300J e - 450J (E) NRA
 (C) 300J e 450J

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 A figura mostra um recipiente, com êmbolo, contendo um volume inicial V_i de gás ideal, inicialmente sob uma pressão P_i igual à pressão atmosférica, $P(at)$. Uma mola não deformada é fixada no êmbolo e em um anteparo fixo. Em seguida, de algum modo é fornecida ao gás uma certa quantidade de calor Q . Sabendo que a energia interna do gás é $U = (3/2) PV$, a constante da mola é k e a área da seção transversal do recipiente é A , determine a variação do comprimento da mola em função dos parâmetros intervenientes. Despreze os atritos e considere o êmbolo sem massa, bem como sendo adiabáticas as paredes que confinam o gás.



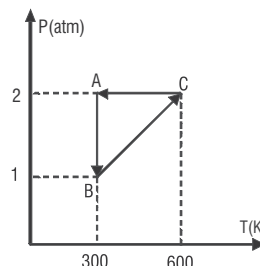
02 Um mol de um gás ideal encontra-se inicialmente em um estado A, em que a temperatura é T_1 e a pressão, P_0 . Ele sofre, então, uma expansão isobárica até um segundo estado B, em que a temperatura assume um valor T_2 e, desse estado, sofre uma expansão isotérmica até ter um volume V_0 (estado C). Posteriormente, sofre uma transformação isocórica até voltar a ter a temperatura inicial T_1 (estado D) e finalmente o gás sofre uma compressão isotérmica até retornar ao estado inicial A.

- a. Represente o ciclo termodinâmico no diagrama PV.
 b. Calcule o trabalho total associado a esse ciclo em função de P_0, V_0, T_1 e T_2 .

03 Um volume de 1 litro de H₂ (para o qual $\gamma = 7/5$), à pressão de 1 atm e temperatura de 27°C, é comprimido adiabaticamente até o volume de 0,5 L e depois resfriado, a volume constante, até voltar à pressão inicial. Finalmente, por expansão isobárica, volta à situação inicial.

- a. Represente o ciclo no diagrama PV.
 b. Calcule o trabalho total realizado.
 c. Calcule ΔV e Q para cada etapa.

04 Um mol de um gás ideal, partindo das CNTP sofre: (i) uma compressão isotérmica até um volume de 5 L, seguida de (ii) uma expansão adiabática até retornar ao volume inicial, atingindo uma pressão final de 0,55 atm.

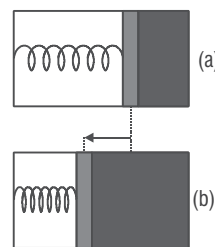


- a. Calcule P ao final da etapa (i) e T ao fim de (ii);
 b. Calcule C_p e C_v para este gás.
 c. Calcule a variação total de energia interna.
 d. Calcule o trabalho total realizado.

05 0,1 mol de um gás ideal com $C_v = 3/2 R$ faz o ciclo mostrado na figura em $P - T$.

- a. Represente o diagrama $P - V$ associado aos processos;
 b. Calcule o trabalho, o calor e a variação da energia interna para cada um dos trechos do ciclo.

(Dê as suas respostas em função de R .)



06 Uma parte de um cilindro está preenchida com um mol de um gás ideal monoatômico a uma pressão P_0 e temperatura T_0 . Um êmbolo de massa desprezível separa o gás da outra seção do cilindro, na qual há vácuo e uma mola em seu comprimento natural presa ao êmbolo e à parede oposta do cilindro, como mostra a figura (a). O sistema está termicamente isolado e o êmbolo, inicialmente fixo, é então solto, deslocando-se vagarosamente até passar pela posição de equilíbrio, em que a sua aceleração é nula e o volume ocupado pelo gás é o dobro do original, conforme mostra a figura (b). Desprezando os atritos, determine a temperatura do gás na posição de equilíbrio em função da sua temperatura inicial.

1. Introdução

Neste capítulo, iremos apresentar e distinguir os dois tipos de grandezas que estudamos em Física, citando alguns exemplos delas. Além disso, será introduzido o conceito de vetor, bem como suas diferentes formas de representação, operações e aplicações em diversos problemas de Física.

2. Grandezas físicas

Em Física, trabalhamos com o objetivo de realizar medições de dois tipos de grandezas físicas: as **escalares** e as **vetoriais**.

As grandezas físicas escalares são caracterizadas por um número real e uma unidade de medida.

Ex.: tempo, massa, energia, temperatura.

Por sua vez, as grandezas físicas vetoriais ficam definidas por um número real positivo (módulo, norma ou intensidade), uma direção e um sentido, além de uma unidade de medida.

Ex.: velocidade, força, deslocamento, impulso.

Assim, para representarmos as grandezas vetoriais, utilizaremos os **vetores**, que são entes matemáticos que possuem:

- módulo: comprimento do vetor;
- direção: horizontal, vertical;
- sentido: para a direita, para a esquerda, para cima, para baixo.

3. Classificação

De acordo com a sua aplicação, um vetor pode ser classificado em:

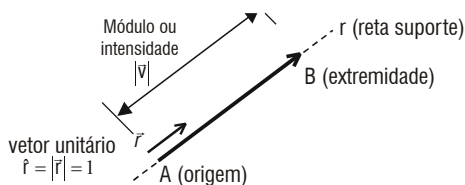
- **vetores fixos (ou aplicados):** possuem seu ponto de aplicação bem definido (ponto material).
Ex.: força aplicada em um ponto material;
- **vetores livres:** podem ser deslocados paralelamente a si mesmos, ou seja, deslocam-se livremente pelo espaço.
Ex.: momento (torque) de uma força aplicada em um corpo extenso;
- **vetores deslizantes:** podem mover-se ao longo da reta suporte.
Ex.: força aplicada em corpos rígidos.

4. Representação

O vetor sempre é representado através de um segmento de reta orientado entre dois pontos (origem e extremidade), sendo que o comprimento do segmento está relacionado à intensidade do vetor, enquanto que a ponta da seta fornece o seu sentido. Ele é denominado através de uma pequena seta para direita colocada em cima da letra que o representa.

4.1 Geométrica

O vetor é esboçado através de um segmento de reta orientado, construído sobre uma reta suporte que está associada à direção do vetor.

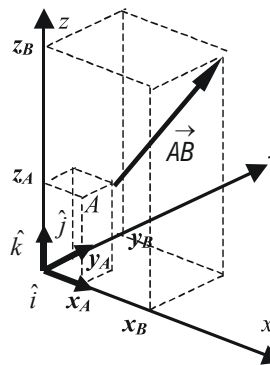


$$\vec{v} = \overline{AB} = B - A$$

Obs.: Dois vetores são iguais quando possuem mesmo módulo, direção e sentido.

4.2 Cartesiana

O vetor será representado através de coordenadas cartesianas, oriundas da subtração do ponto extremidade pelo ponto origem.



$$\vec{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

4.3 Algébrica

Neste caso, iremos trabalhar com os vetores unitários \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} para os eixos x , y e z , respectivamente.

O vetor unitário tem módulo igual a 1.

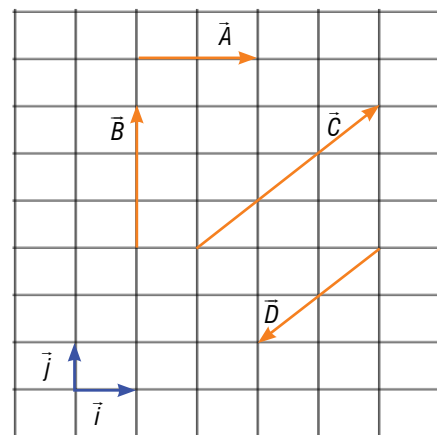
$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

No exemplo anterior, teríamos a seguinte representação:

$$\vec{v} = \overline{AB} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k} = x_o\hat{i} + y_o\hat{j} + z_o\hat{k}$$

$$\text{módulo: } |\vec{v}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Vejamos um novo exemplo, com os vetores representados na figura abaixo:



Repare que o vetor \vec{A} tem componente apenas no eixo x e o tamanho do vetor é de 2 “quadrados”, ou 2 unidades do módulo do vetor unitário.

$$\vec{A} = 2\hat{i}$$

O vetor \vec{B} também apresenta uma única componente (vertical) com tamanho de 3 unidades.

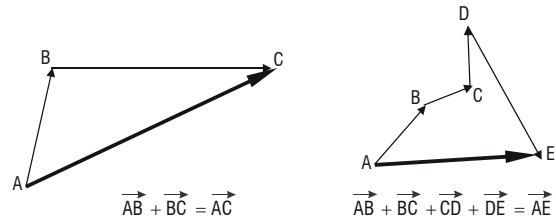
$$\vec{B} = 3\hat{j}$$

Os vetores \vec{C} e \vec{D} possuem componentes nos eixos x e y e suas representações são:

$$\vec{C} = 3\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\vec{D} = -2\hat{i} - 2\hat{j}$$

O sinal negativo nos vetores unitários de \vec{D} indicam sentidos opostos ao referencial adotado para os eixos x e y .

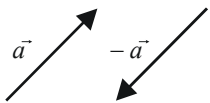


5. Vetores opostos

São vetores que possuem a mesma intensidade e direção, porém **sentidos opostos**.

O sinal negativo implica que há uma oposição dos sentidos dos vetores.

Ex.: Forças de ação e reação – 3ª Lei de Newton $\rightarrow \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

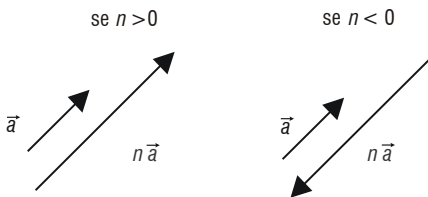


6. Operações com vetores

6.1 Multiplicação por um escalar real

$$\vec{m} = n \cdot \vec{a}, n \in \mathfrak{R}$$

Ex.: 2ª Lei de Newton $\rightarrow \vec{F}_r = m \cdot \vec{a}$



6.2 Adição

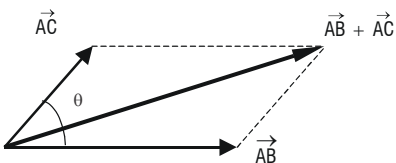
Regra do paralelogramo

Utilizada apenas para a soma de dois vetores aplicados no mesmo ponto.

Ex: Duas forças aplicadas em um ponto material

A ideia é construir um paralelogramo usando os dois vetores aplicados (origens coincidentes) como lados deste quadrilátero. Desta forma, o vetor soma será o segmento de reta orientado construído sobre a diagonal do paralelogramo, tendo como origem o ponto de aplicação dos vetores originais.

$$|\vec{AB} + \vec{AC}| = \sqrt{|\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 + 2 \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos\theta}$$



Regra do polígono

Pode ser usada para a soma de 2 ou mais vetores quaisquer.

Os vetores que serão somados são desenhados sequencialmente (a ordem não interfere no resultado final), com a origem de um na extremidade do antecessor. O vetor soma será construído a partir da origem do 1º vetor representado até a extremidade do último vetor desenhado, fechando-se assim um polígono.

Obs.: Quando os vetores formam um polígono fechado a soma é nula, e vice-versa, isto é, quando a soma de 3 ou mais vetores é nula estes deverão formar um polígono fechado, ligando cada extremidade a cada origem.

Soma algébrica

O vetor soma será obtido através da soma algébrica das coordenadas cartesianas dos vetores que serão adicionados.

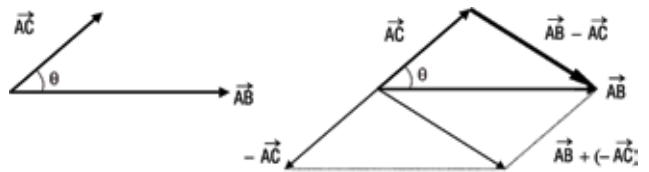
Sejam: $\vec{AB} = u_1\hat{i} + v_1\hat{j} + w_1\hat{k}$ e $\vec{AC} = u_2\hat{i} + v_2\hat{j} + w_2\hat{k}$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = (u_1 + u_2)\hat{i} + (v_1 + v_2)\hat{j} + (w_1 + w_2)\hat{k}$$

6.3 Subtração

Neste caso, podemos observar que a subtração de dois vetores corresponde a soma do primeiro vetor com o vetor oposto ao segundo.

Ex.: Velocidade relativa $\rightarrow \vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$;



Subtração algébrica

O vetor diferença será obtido através da subtração algébrica das coordenadas cartesianas dos vetores que serão adicionados.

Sejam: $\vec{AB} = u_1\hat{i} + v_1\hat{j} + w_1\hat{k}$ e $\vec{AC} = u_2\hat{i} + v_2\hat{j} + w_2\hat{k}$

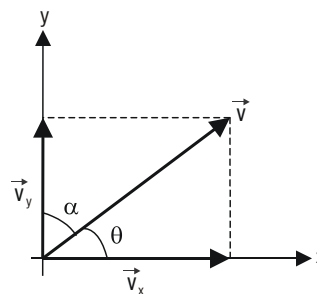
$$\vec{AB} - \vec{AC} = (u_1 - u_2)\hat{i} + (v_1 - v_2)\hat{j} + (w_1 - w_2)\hat{k}$$

6.4 Projeção ortogonal

O objetivo é decompor um vetor em projeções ortogonais sobre eixos coordenados.

Ex.: Componentes de uma força.

O vetor \vec{v} é projetado sobre os eixos ortogonais, traçando-se, inicialmente, perpendiculares a esses eixos, conduzidas da extremidade do vetor \vec{v} . As projeções \vec{v}_x e \vec{v}_y são denominadas componentes ortogonais ou componentes cartesianas de \vec{v} .



$$|\vec{v}_x| = |\vec{v}| \cos\theta = |\vec{v}| \sin\alpha$$

$$|\vec{v}_y| = |\vec{v}| \sin\theta = |\vec{v}| \cos\alpha$$

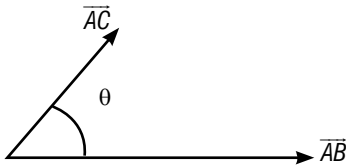
Logo,

$$\vec{v} = \vec{v}_x \hat{i} + \vec{v}_y \hat{j}$$

6.5. Produto escalar

É o número real que representa o produto de dois vetores.

Ex.: Trabalho mecânico $\rightarrow \tau = \vec{F} \cdot \vec{\Delta S}$



$$x = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos\theta$$

Repare que o produto escalar x pode ser interpretado como o produto do módulo de um vetor ($|\vec{AB}|$) pelo módulo da projeção de outro ($|\vec{AC}| \cdot \cos\theta$) na reta suporte do primeiro.

Portanto, se dois vetores são ortogonais, o produto escalar entre eles será nulo.

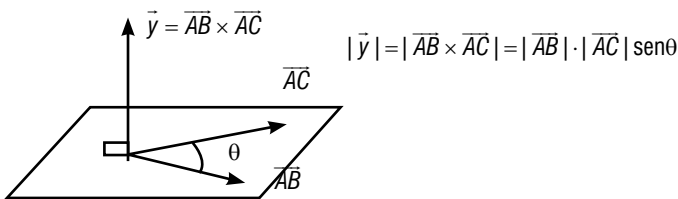
Podemos também efetuar o produto escalar realizando a soma dos produtos das componentes dos vetores, conforme o exemplo abaixo.

Sejam: $\vec{AB} = u_1\hat{i} + v_1\hat{j} + w_1\hat{k}$ e $\vec{AC} = u_2\hat{i} + v_2\hat{j} + w_2\hat{k}$
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (u_1 \cdot u_2) + (v_1 \cdot v_2) + (w_1 \cdot w_2)$

6.6 Produto vetorial

É o vetor que representa o produto de dois vetores. O vetor resultante é perpendicular ao plano formado pelos dois vetores iniciais, ou seja, o produto vetorial é um vetor perpendicular simultaneamente aos dois vetores originais.

Ex: Momento de uma força em relação a um ponto $\rightarrow \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$



Desta forma, podemos observar que dois vetores paralelos possuem produto vetorial nulo.

Além disso, uma outra forma de se efetuar o produto vetorial é através do uso de determinante, conforme o exemplo que se segue.

Sejam: $\vec{AB} = u_1\hat{i} + v_1\hat{j} + w_1\hat{k}$ e $\vec{AC} = u_2\hat{i} + v_2\hat{j} + w_2\hat{k}$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

$$= (v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2)\hat{i} + (w_1 \cdot u_2 - u_1 \cdot w_2)\hat{j} + (u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2)\hat{k}$$

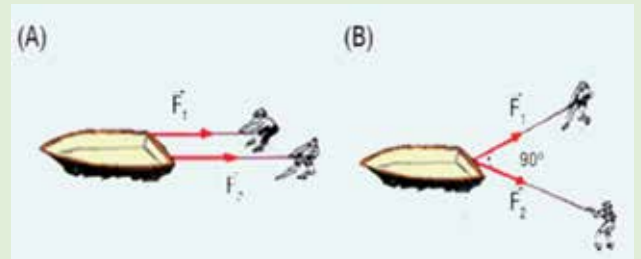
7. Vetores unitários

Vetores unitários são aqueles que têm módulo (comprimento) igual a uma unidade de medida. Para se obter um vetor de módulo 1 na direção que passa por dois pontos A e B, basta dividir o vetor \vec{AB} pelo seu módulo.

$$\hat{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 (PUC-SP) Os esquemas abaixo mostram um barco retirado de um rio por dois homens. Em (A) são usadas cordas que transmitem ao barco forças paralelas de intensidades F_1 e F_2 . Em (B) são usadas cordas inclinadas de 90° que transmitem ao barco forças de intensidades iguais às anteriores.



Sabe-se que, no caso (A), a força resultante transmitida ao barco tem intensidade 70 kgf e que, no caso (B), tem intensidade de 50 kgf. Nessas condições, determine os esforços desenvolvidos pelos dois homens.

Solução:

Na situação A, os dois vetores estão na mesma direção e sentido, portanto somamos os seus módulos e a resultante é 70 kgf.

$$F_1 + F_2 = 70 \rightarrow F_1 = 70 - F_2 \quad (i)$$

Na situação B, os dois vetores são perpendiculares e sua soma é:

$$F_1^2 + F_2^2 = 50^2 \quad (ii)$$

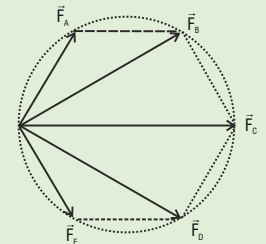
Substituindo (i) em (ii), temos:

$$(70 - F_2)^2 + F_2^2 = 50^2$$

Resolvendo a equação acima, encontramos:

$$F_1 = 30 \text{ kgf e } F_2 = 40 \text{ kgf ou } F_1 = 40 \text{ kgf e } F_2 = 30 \text{ kgf}$$

02 A figura mostra 5 forças representadas por vetores de origem comum, dirigindo-se aos vértices de um hexágono regular. Sendo 10 N o módulo da força \vec{F}_C , a intensidade da resultante dessas 5 forças é:



- (A) 50 N.
- (B) 45 N.
- (C) 40 N.
- (D) 35 N.
- (E) 30 N.

Solução:

Letra E.

Podemos notar que:

- (I) $\vec{F}_B + \vec{F}_E = \vec{F}_C$
- (II) $\vec{F}_D + \vec{F}_A = \vec{F}_C$

Assim, a resultante \vec{R} das 5 forças será: $\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_E = 3 \cdot \vec{F}_C$
 $|\vec{R}| = 3 \cdot |\vec{F}_C| \rightarrow |\vec{R}| = 3 \cdot 10 \text{ (N)} \rightarrow |\vec{R}| = 30 \text{ N}$

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

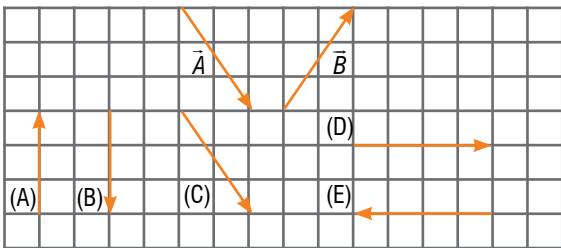
01 (FESP) Em um corpo estão aplicadas apenas duas forças de intensidades 12 N e 8,0 N. Uma possível intensidade da resultante será:

- (A) 22 N.
- (B) 3,0 N.
- (C) 10 N.
- (D) zero.
- (E) 21 N.

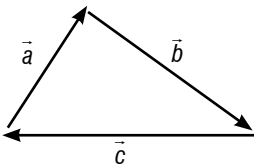
02 Em um plano α , temos dois vetores, \vec{A} e \vec{B} , de mesma origem, formando um ângulo θ . Se os módulos de \vec{A} e \vec{B} são respectivamente iguais a $3u$ e $4u$, determine o módulo do vetor soma em cada um dos casos seguintes:

- (A) $\theta = 0^\circ$.
- (B) $\theta = 90^\circ$.
- (C) $\theta = 180^\circ$.
- (D) $\theta = 60^\circ$.

03 Dados os vetores \vec{A} e \vec{B} , a melhor representação para o vetor $\vec{A} + \vec{B}$ é:



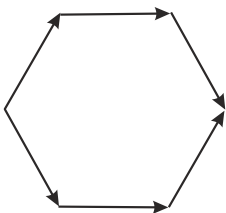
04 Na figura, temos três vetores coplanares formando uma linha poligonal fechada.



A respeito, vale a relação:

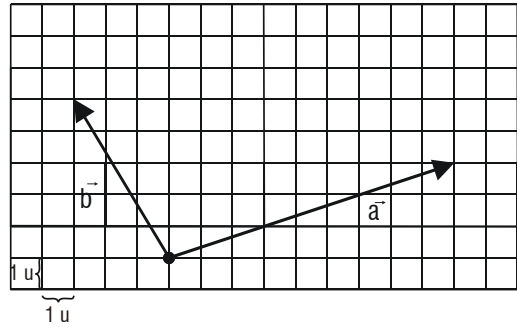
- (A) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
- (B) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$
- (C) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$
- (D) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$
- (E) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$

05 (MACKENZIE-SP) Com seis vetores de módulo iguais a $8u$, construiu-se o hexágono regular a seguir. O módulo do vetor resultante desses 6 vetores é:



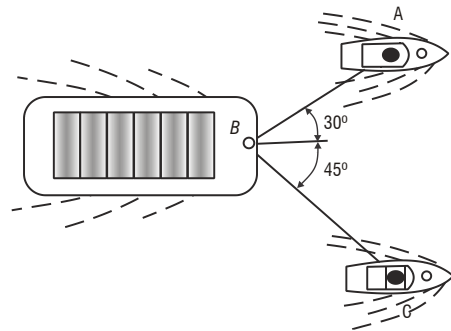
- (A) $40u$.
- (B) $32u$.
- (C) $24u$.
- (D) $16u$.
- (E) zero.

06 No plano quadriculado a seguir estão representados dois vetores \vec{a} e \vec{b} :



Qual o módulo da soma desses vetores?

07 A barcaça B é puxada por dois rebocadores A e C. A tração no cabo AB é 20 kN e a resultante das duas forças aplicadas em B é dirigida ao longo do eixo da barcaça.



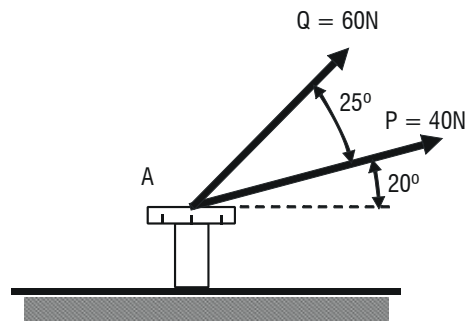
Determine a tração no cabo BC e a intensidade da resultante das duas forças aplicadas em B.

08 A soma de dois vetores perpendiculares entre si tem módulo igual a $\sqrt{20}$. Se o módulo de um deles é o dobro do módulo do outro, qual o módulo do maior?

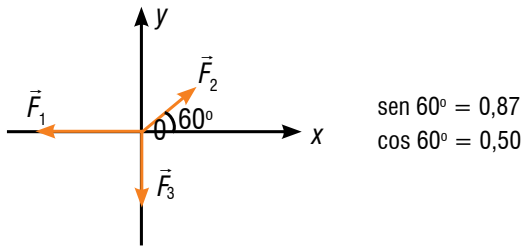
09 Duas forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 estão aplicadas sobre uma partícula de modo que a força resultante é perpendicular a \vec{F}_1 . Se $|\vec{F}_1| = x$ e $|\vec{F}_2| = 2x$, qual o ângulo entre \vec{F}_1 e \vec{F}_2 ?

10 (Beer & Johnston) As duas forças P e Q agem sobre um parafuso A. Determinar o módulo da resultante.

Dado: $\cos 155^\circ \cong -0,9$.



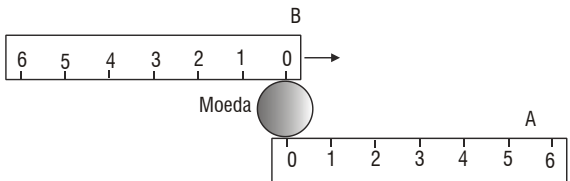
11 (ACAFE) Os módulos das forças representadas na figura são $F_1 = 30\text{ N}$, $F_2 = 20\text{ N}$ e $F_3 = 10\text{ N}$. Determine o módulo da força resultante:



- (A) 14,2 N.
- (B) 18,6 N.
- (C) 25,0 N.
- (D) 21,3 N.
- (E) 28,1 N.

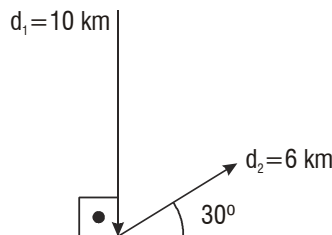
EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 (PUC-MG) A figura mostra uma montagem em que uma moeda rola sobre a régua A, partindo da posição mostrada na figura, “empurrada” pela régua B, sem que haja deslizamento dela em relação a qualquer uma das régua. Quando a moeda estiver na posição “2 cm” em relação à régua A, a régua B terá percorrido, em relação à mesma régua A:



- (A) 2 cm.
- (B) 1 cm.
- (C) 4 cm.
- (D) 6 cm.
- (E) 3 cm.

02 (UNESP-SP) Um caminhoneiro efetuou duas entregas de mercadorias e, para isso, seguiu o itinerário indicado pelos vetores deslocamentos d_1 e d_2 ilustrados na figura. Para a primeira entrega, ele deslocou-se 10 km e para a segunda entrega, percorreu uma distância de 6 km. Ao final da segunda entrega, a distância a que o caminhoneiro se encontra do ponto de partida é:



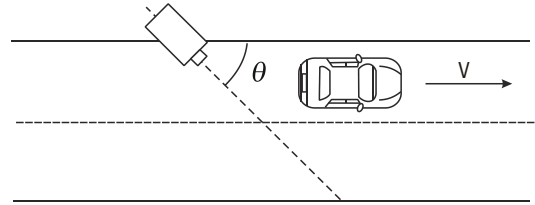
- (A) 4 km.
- (B) 8 km.
- (C) $2\sqrt{19}$ km.
- (D) $8\sqrt{3}$ km.
- (E) 16 km.

03 (UERJ) Pardal é a denominação popular do dispositivo óptico-eletrônico utilizado para fotografar veículos que superam um determinado limite estabelecido de velocidade V .

Em um trecho retilíneo de uma estrada, um pardal é colocado formando um ângulo θ com a direção da velocidade do carro, como indica a figura a seguir.

Suponha que o pardal tenha sido calibrado para registrar velocidades superiores a V , quando o ângulo $\theta = 0^\circ$.

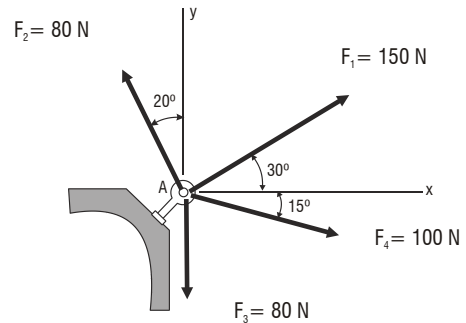
A velocidade v do veículo, que acarretará o registro da infração pelo pardal, com relação à velocidade padrão V , será de:



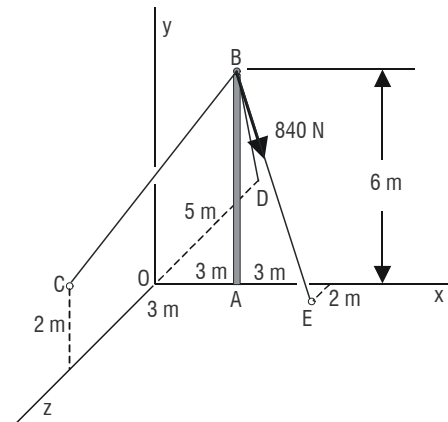
- (A) $V \text{ sen } \theta$.
- (B) $V \text{ cos } \theta$.
- (C) $\frac{V}{\text{sen } \theta}$.
- (D) $\frac{V}{\text{cos } \theta}$.

04 (Beer & Johnston) Quatro forças são exercidas sobre o parafuso A. Determine o módulo da resultante das forças sobre o parafuso.

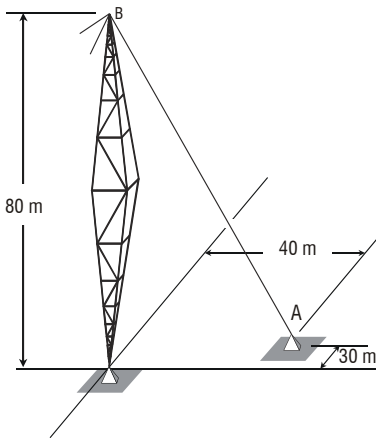
Dados: $\text{sen } 20^\circ \cong 0,34$; $\text{cos } 20^\circ \cong 0,94$; $\text{sen } 15^\circ \cong 0,26$; $\text{cos } 15^\circ \cong 0,97$; $\text{cos } 30^\circ \cong 0,87$.



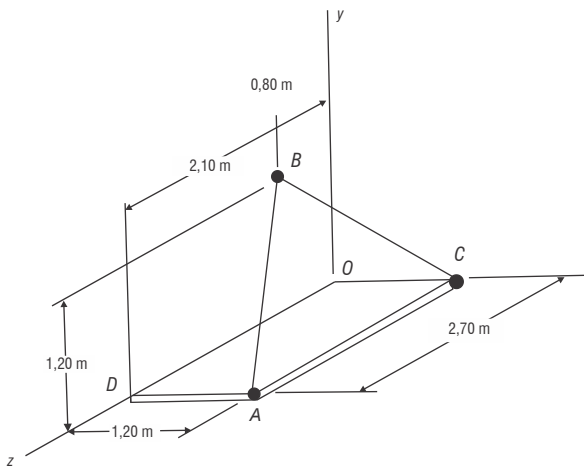
05 (Beer & Johnston) Um poste AB, de 6 m de comprimento, é sustentado por três cabos, como está ilustrado. Determine as componentes cartesianas da tração do cabo BE no ponto B. A tração T no cabo BE é de 840 N.



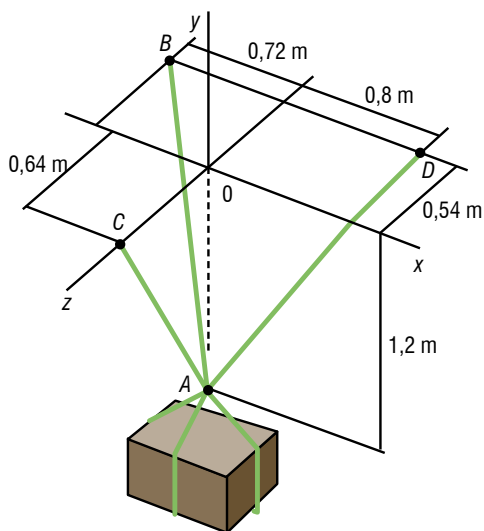
06 (Beer & Johnston) O cabo de sustentação de uma torre está ancorado por meio de um parafuso em A. A tração no cabo é de 2.500 N. Determine as componentes F_x , F_y e F_z da força que atua sobre o parafuso.



07 (Beer & Johnston) Sabendo que a tração no cabo AB é 2250 N, determine as componentes da força exercida sobre a placa em A.



08 (Beer & Johnston) Uma caixa está suspensa por três cabos, como ilustrado. Determine o peso P da caixa sabendo que a tração no cabo AB é de 3 kN.



EXERCÍCIOS NÍVEL 3

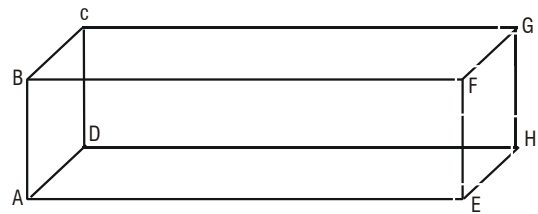
01 O vetor horário das posições ocupadas por uma nave espacial é dado pela expressão abaixo:

$$\vec{S}(t) = (2 + t - t^2)\hat{i} + (2t - 1)\hat{j} + \hat{k} \quad (s \rightarrow m; t \rightarrow s)$$

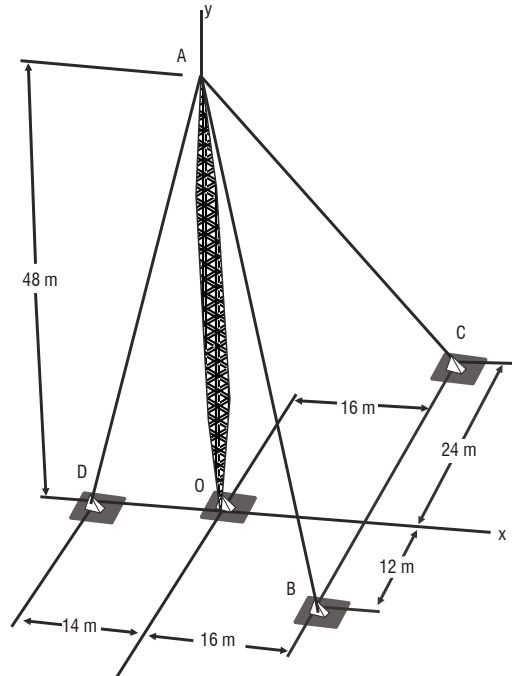
Determine:

- o módulo do vetor posição inicial;
- o vetor velocidade média entre os instantes $t = 1$ s e $t = 2$ s;
- o vetor horário das velocidades;
- a função e o gráfico da trajetória.

02 No paralelepípedo da figura abaixo ABCD é um quadrado de lado a e a aresta maior mede $4a$. Uma mosca pousada no ponto médio da diagonal EG voa até seu alimento que está na diagonal principal AG do paralelepípedo em um ponto que dista a do vértice A. Determine o módulo do vetor deslocamento da mosca.

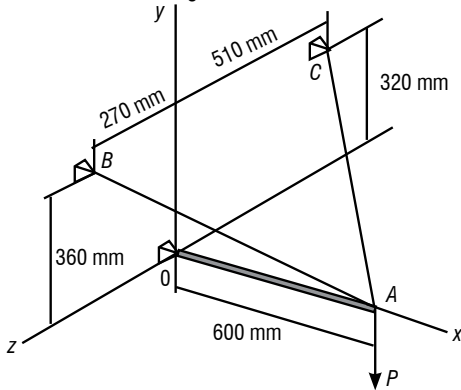


03 (Beer & Johnston) Responda de acordo com a figura abaixo:

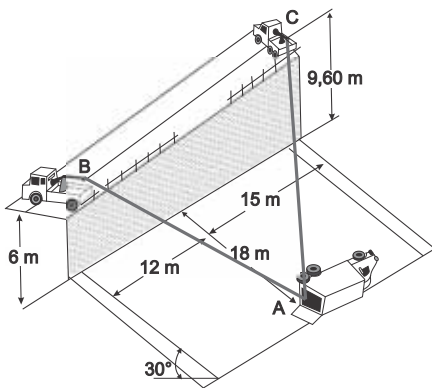


Sabendo que a tração em AB é 39 kN, determine os valores requeridos para a tração em AC e AD de tal forma que a resultante das três forças aplicadas em A seja vertical.

04 (Beer & Johnston) À barra OA é aplicada uma carga P . Sabendo que a tração no cabo AB é de 850 N e que a resultante da carga P e das forças aplicadas pelos cabos em A deve ter a direção de AO , determine a tração no cabo AC e o módulo da carga de P .

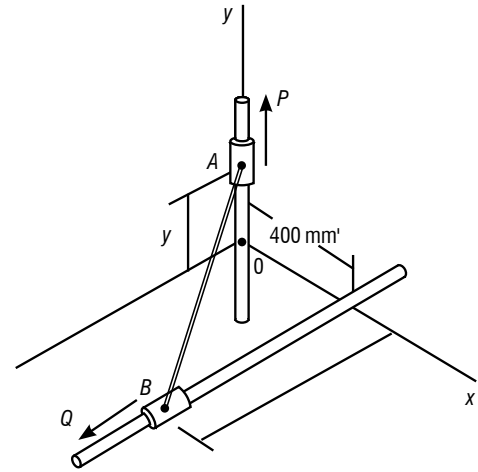


05 (Beer & Johnston) A fim de remover um caminhão acidentado, dois cabos são atados ao caminhão em A , e puxados por dois guinchos B e C , como é ilustrado. Determine o módulo da resultante das forças exercidas sobre o caminhão pelos dois cabos, sabendo-se que a tração no cabo AB é de 10 kN e no cabo AC é de $7,5\text{ kN}$.



06 (Beer & Johnston) Os cursores A e B são conectados por um fio de 1 m de comprimento e podem deslizar livremente sobre hastes sem atrito. Se uma força P é aplicada em A e causa movimento uniforme, determine:

- a tração no fio quando $y = 300\text{ mm}$;
- a intensidade da força necessária para manter em equilíbrio o sistema.



RASCUNHO

1. Introdução

Neste capítulo iremos apresentar o conceito de carga elétrica (positiva e negativa), descobrindo sua origem através de uma análise microscópica e estendendo até uma visão macro sobre a carga de um corpo qualquer.

A partir daí, poderemos distinguir os estados de eletrização de um corpo (neutro ou eletrizado), analisando os princípios da atração e repulsão dos corpos e da conservação total da carga. Através da Lei de Coulomb, será possível medir a força de atração ou repulsão de duas cargas puntiformes.

Além disso, iremos caracterizar e diferenciar corpos condutores de isolantes, permitindo assim entender o motivo pelo qual usamos borracha para encapar um fio metálico ou o porquê de a parte externa do soquete para lâmpada ser feita de cerâmica e a interna feita de metal.

Por fim apresentaremos os diversos processos de eletrização (atrito, contato e indução), o que possibilitará o entendimento de um eletroscópio de folhas ou da experiência de uma caneta, assim que atritada com os fios de cabelo, atrair pequenos pedaços de papel.

2. Carga elétrica

A carga elétrica é uma propriedade eletromagnética que certas partículas elementares possuem. Tal propriedade está diretamente relacionada com o poder de atração e repulsão dessas partículas. Tais cargas podem ser positivas ou negativas.

Sabemos que a matéria é constituída basicamente de elétrons, prótons e nêutrons. Os nêutrons possuem carga elétrica nula e os prótons e elétrons possuem carga elétrica elementar, representada por e , respectivamente positiva e negativa. A determinação da carga elementar foi feita pelo físico Robert Milikan, que analisou o comportamento de gotículas de água eletrizadas submetidas à ação simultânea das forças gravitacional e elétrica.

CARGA DO PRÓTON $\rightarrow q_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

CARGA DO ELÉTRON $\rightarrow q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Obs.: Carga elétrica elementar: menor carga possível.

Quantidade de carga elétrica: símbolo $\rightarrow Q$

UNIDADE NO SI: [C] ; COULOMB

A quantidade de carga elétrica de um corpo será dada pela diferença entre o número de prótons (n_p) e elétrons (n_e) multiplicada pela carga elementar e ($1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$). Portanto, a carga elétrica de um corpo é sempre um múltiplo inteiro da carga elementar.

$$Q = (n_p - n_e) \cdot e$$

Cargas elétricas e símbolos de algumas partículas elementares

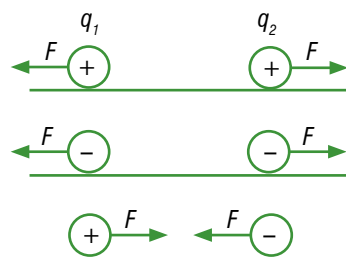
nome	carga elétrica		símbolo
próton	$+ 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$+e$	p^+
elétron	$- 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$-e$	e^-
antipróton	$- 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$-e$	p^-
pósitron	$+ 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$+e$	e^+

Assim, dizemos que um corpo está eletrizado quando há um desequilíbrio entre seu número de prótons e de elétrons. Se um corpo tiver o mesmo número de prótons e elétrons, será considerado não eletrizado ou neutro.

3. Princípios da eletrostática

3.1 Lei de Du Fay – Princípios da atração e repulsão

“Corpos eletrizados com carga elétrica de mesmo sinal se repelem, e com sinais opostos se atraem.”



3.2 Princípio da conservação das cargas elétricas

Em um sistema eletricamente isolado, a soma algébrica das cargas elétricas positivas e negativas é constante. Ou seja, não há aumento ou redução da carga elétrica de um sistema fechado.

$$\sum Q_{inicial} = \sum Q_{final}$$

Ex.: Dois corpos A e B que trocaram cargas elétricas



$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B$$

4. Lei de Coulomb

As forças de interação entre duas partículas eletrizadas possuem intensidades iguais diretamente proporcionais ao produto do módulo das cargas de cada partícula e inversamente proporcionais ao quadrado da distância entre elas. A direção das forças é determinada pela reta que une as cargas e o sentido obedecerá o 1º princípio da eletrostática.

A força de interação ainda dependerá do meio, segundo a seguinte expressão:

$$|\vec{F}| = \frac{k \cdot |Q_1| \cdot |Q_2|}{d^2}$$

Em que:

k → constante eletrostática do meio

Q_1 e Q_2 → carga de cada partícula

d → distância entre as partículas

A constante k depende do meio em que as cargas elétricas se encontram, e é definida no SI por:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

Em que:

ϵ → constante de permissividade absoluta do meio

para o vácuo: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$

logo, $k_0 = 9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$

Obs.: Permissividade relativa: é a razão entre a permissividade de um meio e o vácuo; por exemplo:

$\epsilon_{\text{PORCELANA}} = 5,31 \cdot 10^{-11} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ → permissividade absoluta da porcelana

$\epsilon_R = 6,0$ → permissividade relativa da porcelana

Podemos agora obter outra expressão, não muito comum, para a Lei de Coulomb:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{d^2}$$

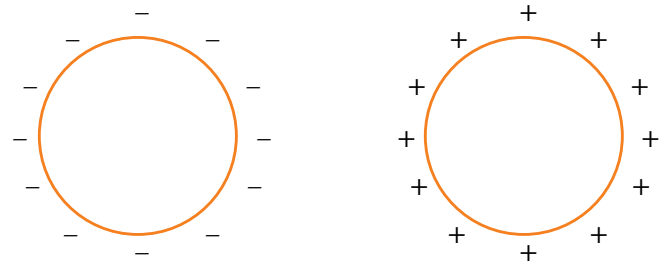
ATENÇÃO: Ficar muito atento às unidades na ocasião de aplicar a Lei de Coulomb, principalmente quanto à unidade da distância (d), que deve estar em metros, quando o valor da constante for: $K = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$.

5. Condutores e isolantes

5.1 Condutores

São materiais que permitem facilmente o movimento de partículas portadoras de cargas elétricas.

Ex.: metais, grafite, gases ionizados e soluções eletrolíticas.

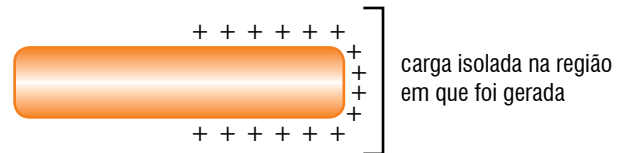


Nos condutores eletrizados, as cargas elétricas em excesso se localizam na superfície externa do corpo, pois tais cargas em excesso possuem o mesmo sinal e se repelem, ficando assim o mais distante umas das outras (na superfície do condutor)

5.2 Isolantes (dielétricos)

São materiais nos quais os portadores de cargas elétricas não apresentam grande mobilidade.

Ex.: ar, água, borracha, vidro, plástico, madeira.



Nos isolantes eletrizados, os portadores de cargas em excesso ficam concentrados na região onde foram gerados.

6. Eletrização

A eletrização significa dar carga elétrica a um corpo neutro. Assim, se um corpo neutro tem seus elétrons livres retirados, ele passa a ser um corpo eletrizado positivamente (falta de elétrons). Da mesma forma, se um corpo neutro recebe elétrons livres, ele se torna um corpo eletrizado negativamente (excesso de elétrons).

Existem três maneiras distintas de se eletrizar um corpo neutro: por atrito, por contato ou por indução eletrostática.

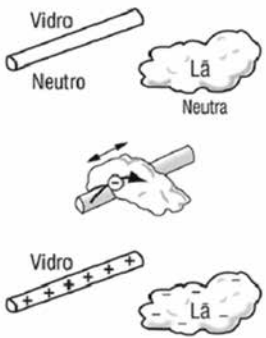
6.1 Por atrito

Frequentemente, ao atritarmos (esfregarmos) um corpo em outro, os dois corpos que, inicialmente, não apresentavam manifestações elétricas, passam a apresentá-las. Você já deve ter observado isto quando penteia os cabelos e depois o pente passa a atraí-los ou quando tira uma blusa de lã, após usá-la o dia todo, e verifica que a mesma atrai os seus pelos.

Ao atritarmos um corpo em outro, estamos forçando um movimento migratório de elétrons de um corpo para outro. Após este movimento das cargas elétricas, um dos corpos ficará com excesso de elétrons (carregado negativamente) e o outro com falta de elétrons (carregado positivamente).

Para se determinar qual corpo irá adquirir carga positiva ou negativa, devemos consultar a série triboelétrica, construída empiricamente pelos físicos. Na figura a seguir, o corpo posicionado mais abaixo tem maior tendência a se tornar negativo após o atrito.

Ex.:



SÉRIE TRIBOELÉTRICA	
-	PELE DE COELHO
	VIDRO
	MICA
	LÃ
	SEDA
	ÂMBAR
	EBONITE

Se o sistema estiver isolado eletricamente, a quantidade de carga adquirida por ambos os corpos deve obedecer o princípio da conservação das cargas elétricas.

No início, como $Q_{\text{VIDRO}} = 0$ e $Q_{\text{LÃ}} = 0$, a carga total é zero. Após a eletrização a carga total também deve ser nula, portanto:

$$Q'_{\text{VIDRO}} + Q'_{\text{LÃ}} = 0 \rightarrow |Q'_{\text{VIDRO}}| = |Q'_{\text{LÃ}}|$$

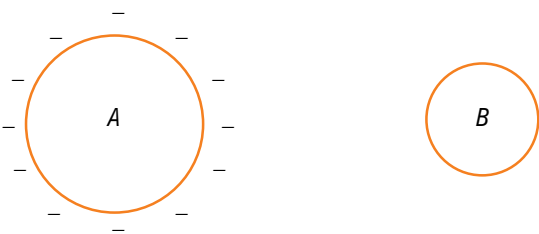
Ou seja, as cargas têm o mesmo módulo, mas com sinais contrários.

6.2 Por contato

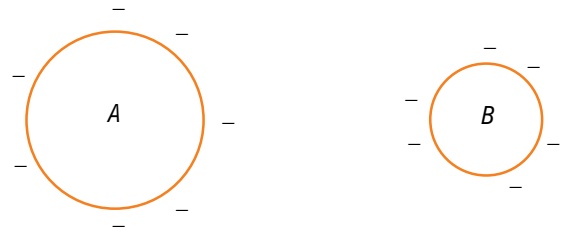
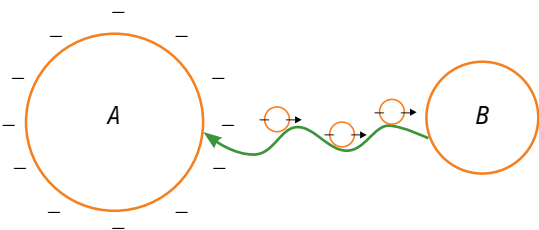
Quando dois ou mais corpos são colocados em contato, estando um deles ao menos eletrizado, observa-se uma redistribuição de cargas elétricas, obedecendo ao princípio de conservação das cargas elétricas.

A proporção de cargas em cada corpo irá depender da forma, das dimensões e do meio. Este item será estudado no capítulo de condutores elétricos, no qual será introduzido o conceito de capacidade eletrostática ou capacitância.

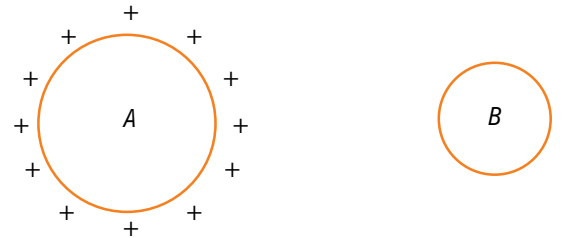
Considere um corpo A eletrizado negativamente e um corpo B neutro.



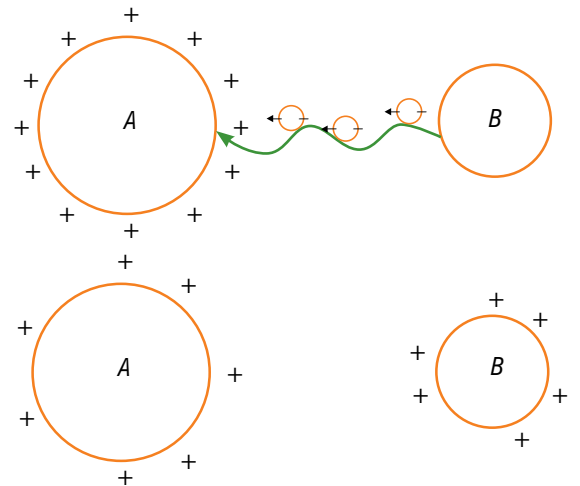
Após o contato entre os corpos, parte dos elétrons livres de A migram para B, deixando-o eletrizado negativamente.



O mesmo processo ocorre quando o corpo A estiver carregado positivamente.



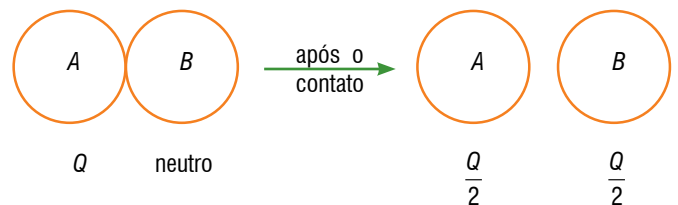
Nesse caso, elétrons migram do corpo B para o corpo A. Como o corpo B perdeu elétrons e estava neutro, eletriza-se positivamente.

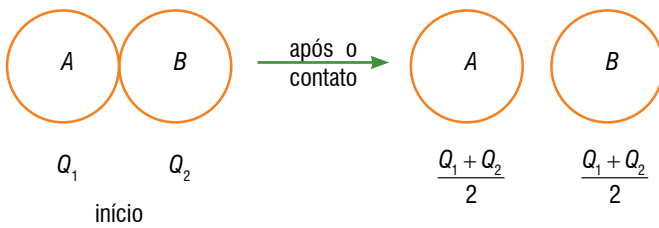


Por enquanto, iremos resolver problemas para o caso particular de condutores idênticos em contato, obedecendo o 2º princípio da eletrostática (conservação total de cargas). Neste caso, tais corpos adquirem a mesma carga final após o equilíbrio.

$$Q_{\text{final}} = \frac{\sum Q_{\text{início}}}{n^{\circ} \text{ de corpos em contato}}$$

Ex.:

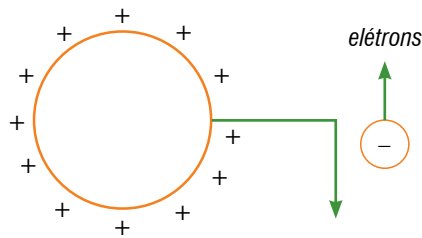




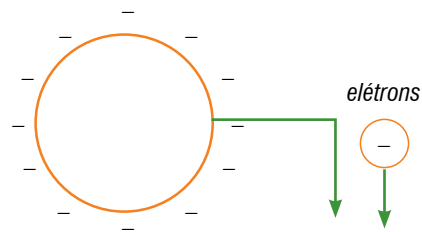
6.3 Fio terra

A Terra é um grande condutor com dimensões muito superiores a qualquer corpo. Assim, num sistema isolado, quando ligamos um corpo eletrizado à Terra, esta irá descarregá-lo até que ele fique neutro novamente.

Portanto, se o corpo estiver carregado positivamente, a Terra cede elétrons para o corpo até neutralizá-lo.



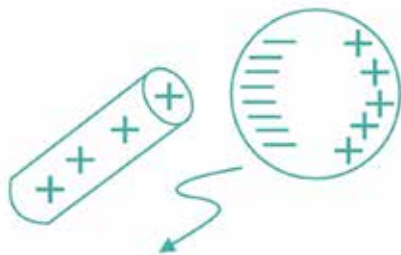
Se o corpo estiver carregado negativamente, os elétrons em excesso escoam para a Terra até neutralizá-lo.



6.4 Por indução eletrostática

As cargas elétricas de um condutor são redistribuídas devido à aproximação (sem contato) de outro corpo carregado. Consegue-se com este processo que a carga final do condutor a ser eletrizado seja induzido de sinal oposto àquela do corpo carregado (indutor). O processo é feito do seguinte modo:

I. Aproxima-se o corpo carregado do condutor neutro.



As cargas elétricas se redistribuem por atração (1ª princípio da eletrostática).

II. “Descarrega-se”¹ o corpo induzido por meio de um condutor ligado à terra².

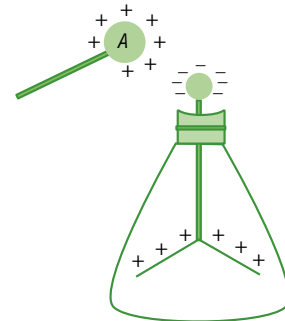


III. O corpo fica finalmente carregado com carga oposta.



Eletroscópio de folhas

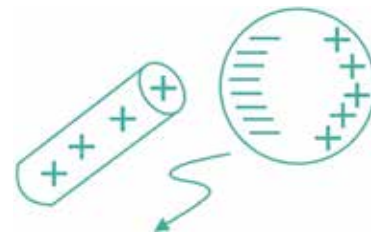
Um eletroscópio é formado por duas folhas metálicas ligadas a um cabo e a uma esfera de metal. Quando um corpo A carregado se aproxima da esfera, induz a mesma carga nas lâminas, que se repelem.



7. Atração entre corpos eletrizados e corpos neutros

Vimos anteriormente que corpos com cargas opostas se atraem e corpos com cargas de mesmo sinal se repelem. E se, por exemplo, aproximarmos um corpo carregado de um corpo neutro? Se utilizássemos a Lei de Coulomb, a resposta natural seria: Zero! Afinal, uma das cargas é nula. Porém, nesse caso, a situação física é um pouco mais complicada. Veja o que ocorre quando aproximamos um corpo positivo de um corpo neutro:

(A) Devido à indução, os elétrons se redistribuem no corpo neutro e ele acaba tendo a seguinte configuração:



¹ Descarregar, neste caso, significa anular a carga elétrica daquela região. No exemplo esta descarga é feita pelo envio de elétrons da Terra para o corpo.

² Ligação terra (aterramento) – será explicado no capítulo de Potencial Elétrico.

(B) Note que a “região negativa” do corpo neutro está mais próxima do corpo positivo do que a “região positiva” do corpo neutro. Como a distância é menor, a força de atração é maior entre as cargas de sinais opostos do que a força de repulsão entre as cargas de sinais iguais.



(C) Com isso, uma carga positiva acaba atraindo um corpo neutro, devido à indução.

Obs.: Se aproximássemos uma carga negativa de uma carga neutra, aconteceria exatamente a mesma coisa, ou seja, a carga neutra seria atraída pela carga negativa. Resumindo, pode-se dizer que, devido à indução eletrostática, partículas carregadas de qualquer espécie também são capazes de atrair partículas neutras.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01 (Mackenzie-SP) Três pequenas esferas de cobre, idênticas, são utilizadas numa experiência de Eletrostática. A primeira, denominada A, está inicialmente eletrizada com carga $Q_A = +2,40 \text{ nC}$; a segunda, denominada B, não está eletrizada, e a terceira, denominada C, está inicialmente eletrizada com carga $Q_C = -4,80 \text{ nC}$. Em dado instante, são colocadas em contato entre si as esferas A e B. Após atingido o equilíbrio eletrostático, A e B são separadas uma da outra e, então, são postas em contato as esferas B e C. Ao se atingir o equilíbrio eletrostático entre B e C, qual a situação da carga e a quantidade de cargas da esfera C?

Solução:

Como temos três esferas idênticas, as cargas das esferas após o contato serão iguais e terão o valor da média aritmética das cargas iniciais. Desta forma, teremos:

1º contato (esferas A e B)

$$Q = \frac{Q_A + Q_B}{2} \Rightarrow Q'_A = Q'_B = \frac{(+2,40 \text{ nC}) + 0}{2} = 1,20 \text{ nC}$$

2º contato (esferas B e C)

$$Q = \frac{Q'_B + Q_C}{2} \Rightarrow Q''_B = Q'_C = \frac{(+1,20 \text{ nC}) + (-4,80 \text{ nC})}{2} = -1,80 \text{ nC}$$

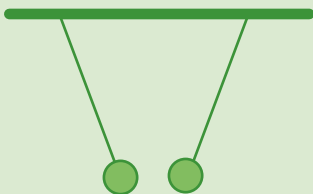
Portanto, a esfera C perdeu, após o contato com B, uma carga elétrica igual a:

$$\Delta Q_C = (-4,80 \text{ nC}) - (-1,80 \text{ nC}) \Rightarrow \Delta Q_C = -3,00 \text{ nC}$$

$$\Delta Q_C = -n \cdot e \Rightarrow -3,00 \cdot 10^{-9} = n \cdot (-1,60) \cdot 10^{-19}$$

$$n = 1,875 \cdot 10^{10} \text{ elétrons cedidos}$$

02 Em um experimento realizado em sala de aula, um professor de Física mostrou duas pequenas esferas metálicas idênticas, suspensas por fios isolantes, em uma situação de atração.



Na tentativa de explicar esse fenômeno, cinco alunos fizeram os seguintes comentários:

Maria – Uma das esferas pode estar eletrizada positivamente e a outra, negativamente.

José – Uma esfera pode estar eletrizada positivamente e a outra, neutra. Roberto – O que estamos observando é simplesmente uma atração gravitacional entre as esferas.

Marisa – Essas esferas só podem estar funcionando como ímãs.

Celine – Uma esfera pode estar eletrizada negativamente e a outra, neutra.

Fizeram comentários corretos os alunos:

- (A) Marisa, Celine e Roberto.
- (B) Roberto, Maria e José.
- (C) Celine, José e Maria.
- (D) José, Roberto e Maria.
- (E) Marisa e Roberto.

Solução: Letra C.

A atração entre as esferas pode ocorrer quando elas estão eletrizadas com cargas elétricas de sinais opostos ou quando uma delas estiver eletrizada e a outra estiver neutra. Neste último caso, a esfera neutra sofre separação de alguns de cargas positivas e negativas (indução).

03 (UEL-PR) A força de repulsão entre duas cargas elétricas puntiformes, que estão a 20 cm uma da outra, é 0,030 N. Esta força aumentará para 0,060 N se a distância entre as cargas for alterada para:

- (A) 5,0 cm.
- (B) 10 cm.
- (C) 14 cm.
- (D) 28 cm.
- (E) 40 cm.

Solução: Letra C.

a força de repulsão entre duas cargas puntiformes é dada pela expressão

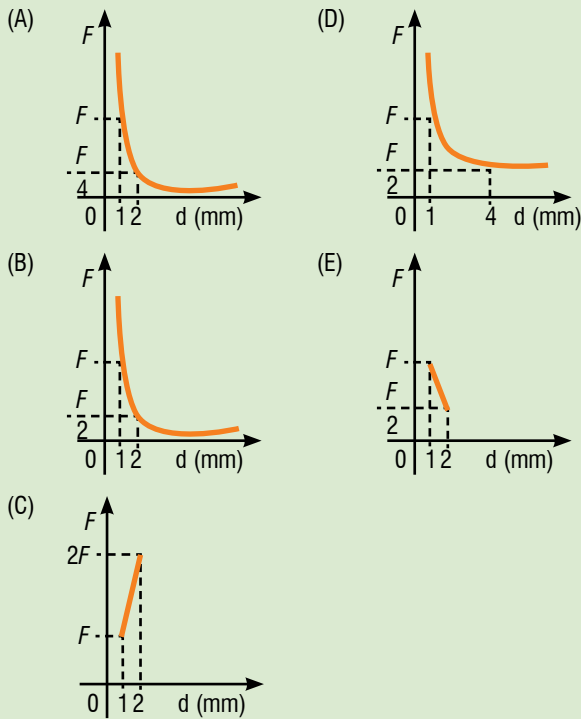
da lei de Coulomb: $|\vec{F}| = \frac{k \cdot |Q_1| \cdot |Q_2|}{d^2}$

Na situação 1, temos: $0,030 = \frac{k \cdot |Q_1| \cdot |Q_2|}{20^2}$

Na situação 2, temos: $0,060 = \frac{k \cdot |Q_1| \cdot |Q_2|}{x^2}$

Dividindo as 2 equações, temos: $\frac{x^2}{20^2} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 10\sqrt{2} \text{ cm} \cong 14 \text{ cm}$

04 (Mackenzie-SP) Dois pequenos corpos, idênticos, estão eletrizados com cargas de 1,00 nC cada um. Quando estão à distância de 1,00 mm um do outro, a intensidade da força de interação eletrostática entre eles é F. Fazendo-se variar a distância entre esses corpos, a intensidade da força de interação eletrostática também varia. O gráfico que melhor representa a intensidade dessa força, em função da distância entre os corpos, é:



Solução: Letra A.

Pela Lei de Coulomb:

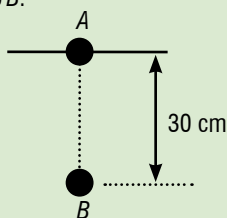
$$F = \frac{k \cdot |Q_1| \cdot |Q_2|}{d^2}$$

Quando dobrarmos a distância, teremos:

$$F' = \frac{k \cdot |Q_1| \cdot |Q_2|}{(2d)^2} = \frac{k \cdot |Q_1| \cdot |Q_2|}{4d^2} = \frac{F}{4}$$

Podemos observar que, pela Lei de Coulomb, a força elétrica é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as cargas. Assim, esta função é representada graficamente através de uma hipérbole cúbica.

05 (Mackenzie-SP) Um corpúsculo fixo em *A*, eletrizado com carga elétrica $q_A = 5\mu\text{C}$, equilibra no vácuo o corpúsculo *B* eletrizado com carga $q_B = -4\mu\text{C}$, como mostra a figura. Se $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$, determine a massa do corpúsculo *B*.

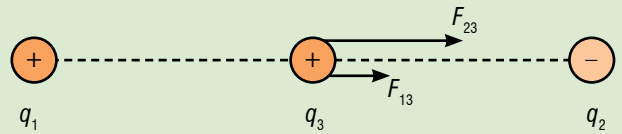


Solução:

O corpúsculo *B* está sujeito a duas forças: força peso e força elétrica de atração do corpo *A*. Por se tratar de uma situação de equilíbrio, temos:

$$P = f_e \Rightarrow m \cdot g = \frac{k \cdot |Q_A| \cdot |Q_B|}{d^2} \Rightarrow m \cdot 10 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{0,3^2} \Rightarrow m = 0,2 \text{ kg}$$

06 Duas cargas pontiformes $q_1 = +2\mu\text{C}$ e $q_2 = -6\mu\text{C}$ estão fixas e separadas por uma distância de 600 mm no vácuo. Uma terceira carga $q_3 = 3\mu\text{C}$ é colocada no ponto médio do segmento que une as cargas. Qual o módulo da força elétrica que atua sobre a carga q_3 ? Dados: constante eletrostática do vácuo $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$



- (A) 1,2 N.
- (B) 2,4 N.
- (C) 3,6 N.
- (D) $1,2 \cdot 10^{-3}$ N
- (E) $3,6 \cdot 10^{-3}$ N.

Solução: Letra B.

A carga 3 é colocada no ponto médio entre a carga 1 e 2, portanto, a distância entre 1 e 3 e 2 e 3 será de 300 mm = $3 \cdot 10^{-1}$ m. Considere a carga 1 localizada à esquerda e a carga 2, à direita. A força que 1 exerce em 3 está para a direita (repulsão entre cargas de mesmo sinal) e a força que a carga 2 exerce na carga 3 está para a direita também. A força resultante sobre a partícula 3 está para a direita.

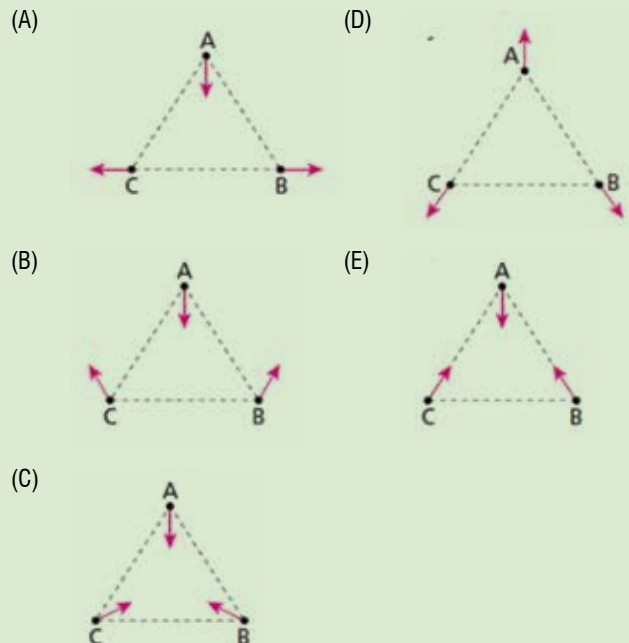
$$F_R = F_{13} + F_{23}$$

$$F_{13} = \frac{k \cdot |q_1| \cdot |q_3|}{d_{13}^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^{-1})^2} = 0,6 \text{ N}$$

$$F_{23} = \frac{k \cdot |q_2| \cdot |q_3|}{d_{23}^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^{-1})^2} = 1,8 \text{ N}$$

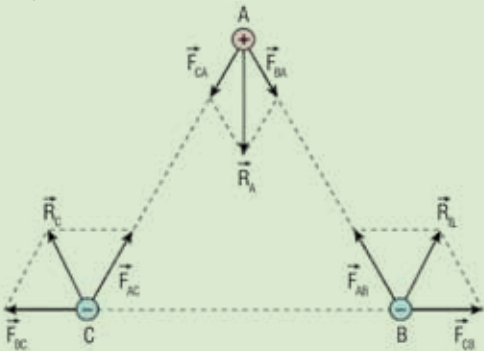
Logo: $F_R = 2,4 \text{ N}$.

07 (Fuvest-SP) Três pequenas esferas carregadas com cargas de mesmo módulo, sendo **A** positiva e **B** e **C** negativas, estão presas nos vértices de um triângulo equilátero. No instante em que elas são soltas simultaneamente, a direção e o sentido de suas acelerações serão mais bem representados pelo esquema:



Solução: Letra B.

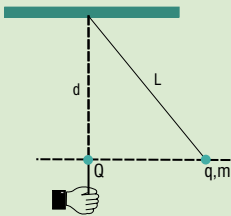
Representado as forças de interação eletrostática entre as partículas eletrizadas, teremos:



Pela 2ª Lei de Newton, o sentido da aceleração será igual ao da força resultante em cada partícula.

08 (UFG-GO) Em uma experiência rudimentar para se medir a carga eletrostática de pequenas bolinhas de plástico carregadas positivamente, pendura-se a bolinha, cuja carga se quer medir, em um fio de seda de 5 cm de comprimento e massa desprezível. Aproxima-se, ao longo da vertical, uma outra bolinha com carga de valor conhecido $Q = 10 \text{ nC}$, até que as duas ocupem a mesma linha horizontal, como mostra a figura. Sabendo-se que a distância medida da carga Q até o ponto de fixação do fio de seda é de 4 cm e que a massa da bolinha é de 0,4 g, qual será o valor da carga desconhecida?

Dados: $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ $g = 10 \text{ m/s}^2$ $L = 5 \text{ cm}$ $d = 4 \text{ cm}$
 $m = 0,4 \text{ g}$ $Q = 10 \text{ nC}$



Solução:

A bolinha está sujeita a três forças: peso, tração e força elétrica. Para que se tenha uma situação de equilíbrio, essa força elétrica deverá ser necessariamente de repulsão. Portanto, o sinal da carga desconhecida é positivo. Representando as três forças citadas acima e decompondo a tração nas direções horizontal e vertical, verificamos que:

$$T_x = F_e \text{ (I)} \quad \text{e} \quad T_y = P \text{ (II)}$$

Chamaremos de θ o ângulo formado entre a vertical e o fio.

$$\text{Assim, } T_x = T \cdot \sin \theta \text{ e } T_y = T \cdot \cos \theta$$

$$\text{Dividindo a equação II pela equação I: } \tan \theta = \frac{F_e}{P} \text{ (III)}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo da figura, obtemos a distância x entre as duas cargas:

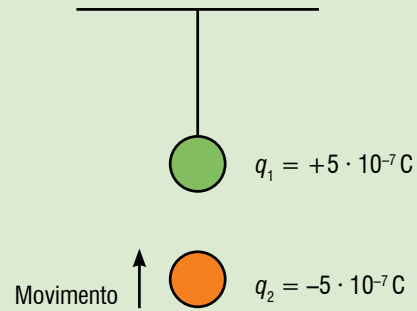
$$L^2 = x^2 + d^2 \Rightarrow x = 3 \text{ cm.}$$

Portanto, na equação III temos:

$$\frac{x}{d} = \frac{k \cdot |Q| \cdot |q|}{m \cdot g} \Rightarrow |q| = \frac{m \cdot g \cdot x^3}{k \cdot |Q| \cdot d} = \frac{(0,4 \cdot 10^{-3}) \cdot 10 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^3}{(9 \cdot 10^9) \cdot (10 \cdot 10^{-9}) \cdot (4 \cdot 10^{-2})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = 3 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 30 \text{ nC}$$

09 (Unicamp-SP) Uma pequena esfera isolante, de massa igual a $5 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$ e carregada com uma carga positiva de $5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$, está presa ao teto por um fio de seda. Uma segunda esfera com carga negativa de $-5 \cdot 10^{-7} \text{ C}$, movendo-se na direção vertical, é aproximada da primeira. Considere $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$.



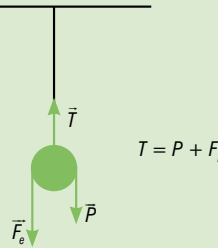
- Calcule a força eletrostática entre as duas esferas quando a distância entre os seus centros é de 0,5 m.
- Para uma distância de $5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ entre os centros, o fio de seda se rompe. Determine a tração máxima suportada pelo fio.

Solução:

a. Lei de Coulomb

$$F_E = \frac{k \cdot |q_1| \cdot |q_2|}{d_{12}^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{(5 \cdot 10^{-1})^2} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

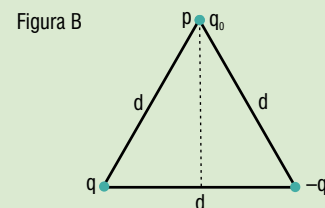
b.



$$T = m \cdot g + \frac{k \cdot |q_1| \cdot |q_2|}{d_{12}^2} = (5 \cdot 10^{-2} \cdot 10) + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{(5 \cdot 10^{-2})^2}$$

$$T = 1,4 \text{ N.}$$

10 (UFRJ) Duas cargas, q e $-q$, são mantidas fixas a uma distância d uma da outra. Uma terceira carga, q_0 é colocada no ponto médio entre as duas primeiras, como ilustra a figura A. Nessa situação, o módulo da força eletrostática resultante sobre a carga q_0 vale F_A . A carga q_0 é então afastada dessa posição ao longo da mediatriz entre as duas outras até atingir o ponto P, onde é fixada, como ilustra a figura B. Agora, as três cargas estão nos vértices de um triângulo equilátero. Nessa situação, o módulo da força eletrostática resultante sobre a carga q_0 vale F_B . Calcule a razão F_A / F_B .



Solução:

Na posição inicial, independentemente do seu sinal, a carga s sofrerá duas forças elétricas de mesmo sentido.

$$F_1 = \frac{k \cdot |q| \cdot |q_0|}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 4 \cdot \frac{k \cdot q \cdot q_0}{d^2} \text{ e } F_2 = \frac{k \cdot |-q| \cdot |q_0|}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 4 \cdot \frac{k \cdot q \cdot q_0}{d^2}$$

Assim, $F_A = F_1 + F_2 \Rightarrow F_A = 8 \frac{k \cdot q \cdot q_0}{d^2}$

Na posição final, novamente independente do seu sinal, a carga q_0 sofrerá duas forças elétricas que formarão um ângulo de 120° .

$$F_B^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos 120^\circ$$

Da mesma forma que aconteceu no primeiro caso, perceberemos que F_1 e F_2 terão o mesmo módulo, uma vez que as cargas que influenciam q_0 têm o mesmo módulo e estão à mesma distância de q_0 . $F_1 = F_2 = \frac{k \cdot |q| \cdot |q_0|}{d^2}$
Obtendo a resultante:

$$F_B^2 = F_1^2 + F_1^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = F_1^2 \Rightarrow F_B = F_1 = \frac{k \cdot q \cdot q_0}{d^2}$$

Portanto, $\frac{F_A}{F_B} = 8$.

EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 (UNESP-SP) De acordo com o modelo atômico atual, os prótons e nêutrons não são mais considerados partículas elementares. Eles seriam formados de três partículas ainda menores, os quarks. Admite-se a existência de 12 quarks na natureza, mas só dois tipos formam os prótons e nêutrons, o quark up (u), de carga elétrica positiva, igual a $2/3$ do valor da carga do elétron, e o quark down (d), de carga elétrica negativa, igual a $1/3$ do valor da carga do elétron. A partir dessas informações, assinale a alternativa que apresenta corretamente a composição do próton e do nêutron.

(I) Próton. (II) Nêutron

- (A) (I) d, d, d, (II) u, u, u.
- (B) (I) d, d, u, (II) u, u, d.
- (C) (I) d, u, u, (II) u, d, d.
- (D) (I) u, u, u, (II) d, d, d.
- (E) (I) d, d, d, (II) d, d, d.

02 (CESGRANRIO-RJ) Um pedaço de cobre eletricamente isolado contém $2 \cdot 10^{22}$ elétrons livres, sendo a carga de cada um igual a $1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Para que o metal adquira uma carga de $3,2 \cdot 10^{-9}$ C, será preciso remover, desses elétrons livres, um em cada:

- (A) 10^4 .
- (B) 10^8 .
- (C) 10^{12} .
- (D) 10^{16} .
- (E) 10^{20} .

03 (UEL-PR) Campos eletrizados ocorrem naturalmente no nosso cotidiano. Um exemplo disso é o fato de algumas vezes levarmos pequenos choques elétricos ao encostarmos em automóveis. Tais choques são devidos ao fato de estarem os automóveis eletricamente carregados. Sobre a natureza dos corpos (eletrizados ou neutros), considere as afirmativas a seguir:

- I. Se um corpo está eletrizado, então o número de cargas elétricas negativas e positivas não é o mesmo.
- II. Se um corpo tem cargas elétricas, então está eletrizado.
- III. Um corpo neutro é aquele que não tem cargas elétricas.
- IV. Ao serem atritados, dois corpos neutros, de materiais diferentes, tornam-se eletrizados com cargas opostas, devido ao princípio de conservação das cargas elétricas.
- V. Na eletrização por indução, é possível obter corpos eletrizados com quantidades diferentes de cargas.

Sobre as afirmativas acima, assinale a alternativa correta:

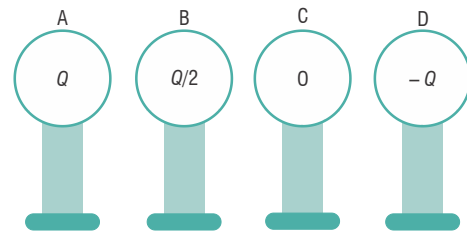
- (A) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
- (B) Apenas as afirmativas I, IV e V são verdadeiras.
- (C) Apenas as afirmativas I e IV são verdadeiras.
- (D) Apenas as afirmativas II, IV e V são verdadeiras.
- (E) Apenas as afirmativas II, III e V são verdadeiras.

04 (UFSCAR) Atritando vidro com lã, o vidro se eletriza com carga positiva e a lã com carga negativa. Atritando algodão com enxofre, o algodão adquire carga positiva e o enxofre, negativa. Porém, se o algodão for atritado com lã, o algodão adquire carga negativa e a lã, positiva. Quando atritado com algodão e quando atritado com enxofre, o vidro adquire, respectivamente, carga elétrica:

- (A) positiva e positiva.
- (B) positiva e negativa.
- (C) negativa e positiva.
- (D) negativa e negativa.
- (E) negativa e nula.

05 Três pequenas esferas metálicas A , B e C idênticas estão eletrizadas com cargas $+3q$, $-2q$ e $+5q$, respectivamente. Determine a carga de cada uma após um contato simultâneo entre as três.

06 (PUC - SP) Considere quatro esferas metálicas idênticas, separadas e apoiadas em suportes isolantes. Inicialmente as esferas apresentam as seguintes cargas: $Q_A = Q$, $Q_B = Q/2$, $Q_C = 0$ (neutra) e $Q_D = -Q$. Faz-se, então, a seguinte sequência de contatos entre as esferas:



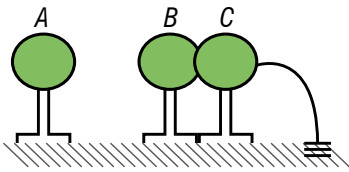
- I. contato entre as esferas A e B e esferas C e D . Após os respectivos contatos, as esferas são novamente separadas;
- II. a seguir, faz-se o contato apenas entre as esferas C e B . Após o contato, as esferas são novamente separadas;

III. finalmente, faz-se o contato apenas entre as esferas A e C. Após o contato, as esferas são separadas. Pede-se a carga final na esfera C, após as sequências de contatos descritas.

- (A) $\frac{7Q}{8}$ (D) $-\frac{Q}{4}$
 (B) Q (E) $\frac{7Q}{16}$
 (C) $-\frac{Q}{2}$

07 Três pequenas esferas condutoras M, N e P idênticas estão eletrizadas com cargas $+6q$, $+q$ e $-4q$, respectivamente. Uma quarta esfera Z, igual às anteriores, encontra-se neutra. Determine a carga elétrica adquirida pela esfera Z, após contatos sucessivos com M, N e P, nessa ordem.

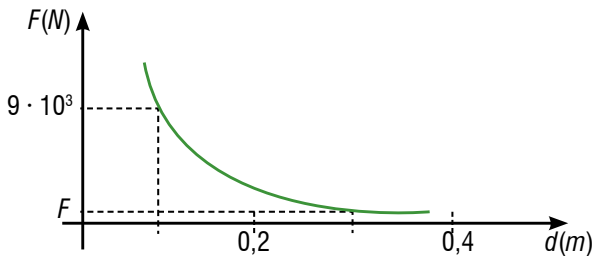
08 (FUVEST-SP) Três esferas metálicas iguais, A, B e C, estão apoiadas em suportes isolantes, tendo a esfera A carga elétrica negativa. Próximas a ela, as esferas B e C estão em contato entre si, sendo que C está ligada à terra por um fio condutor, como na figura:



A partir dessa configuração, o fio é retirado e, em seguida, a esfera A é levada para muito longe. Finalmente, as esferas B e C são afastadas uma da outra. Após esses procedimentos, as cargas das três esferas satisfazem as relações:

- | | | |
|---------------|-----------|-------------|
| (A) $Q_A < 0$ | $Q_B > 0$ | $Q_C > 0$. |
| (B) $Q_A < 0$ | $Q_B = 0$ | $Q_C = 0$. |
| (C) $Q_A = 0$ | $Q_B < 0$ | $Q_C < 0$. |
| (D) $Q_A > 0$ | $Q_B > 0$ | $Q_C = 0$. |
| (E) $Q_A > 0$ | $Q_B < 0$ | $Q_C > 0$. |

09 (UFTM) O gráfico mostra como varia a força de repulsão entre duas cargas elétricas, idênticas e puntiformes, em função da distância entre elas.



Considerando a constante eletrostática do meio como $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ determine:

- o valor da força F;
- o módulo das cargas elétricas.

10 Duas cargas puntiformes $q_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ e $q_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ estão separadas de 1 m no vácuo. Sendo $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ a constante eletrostática do vácuo, qual a intensidade da força de interação entre elas?

11 Duas cargas elétricas, puntiformes, positivas e iguais, estão situadas no vácuo a 3 m de distância. Sabendo que a força de repulsão mútua entre elas tem intensidade de $36 \cdot 10^9 \text{ N}$, determine qual será a nova intensidade de repulsão se duplicarmos a distância entre elas.
 Dado: $K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$.

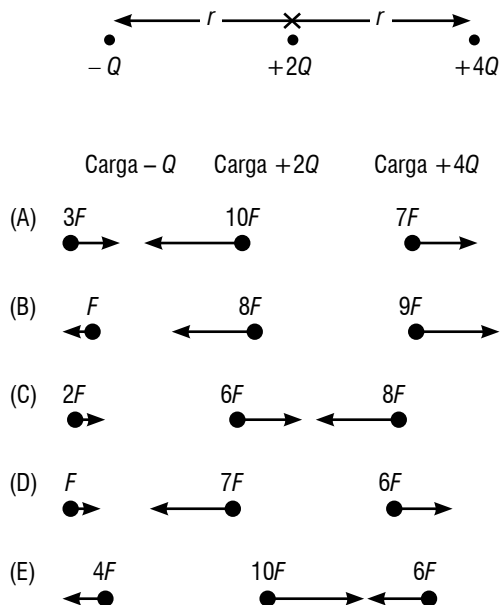
12 (UEL-PR) Duas esferas idênticas com cargas elétricas $+5,0 \cdot 10^6 \text{ C}$ e $-1,0 \cdot 10^6 \text{ C}$, a uma distância D uma da outra, se atraem mutuamente. Por meio de uma pinça isolante foram colocadas em contato e, a seguir, afastadas a uma nova distância d, tal que a força de repulsão entre elas tenha o mesmo módulo da força de atração inicial. Para essa situação, a relação D/d vale:

- (A) $\sqrt{(4/5)}$.
 (B) $\sqrt{(5/4)}$.
 (C) $\sqrt{2}$.
 (D) 2.
 (E) $2\sqrt{2}$.

13 Duas cargas puntiformes $q_1 = q_2 = -1 \mu\text{C}$ são fixadas nos pontos O e A de abscissas $x_0 = 0$ e $x_A = 1 \text{ m}$, respectivamente. Uma terceira carga puntiforme $q_3 = +1 \mu\text{C}$ é abandonada, em repouso, num ponto P de abscissa x, tal que $0 < x < 1 \text{ m}$. Abstraindo-se das ações gravitacionais, a carga q_3 permanecerá em repouso no ponto P, se sua abscissa x for igual a que valor?

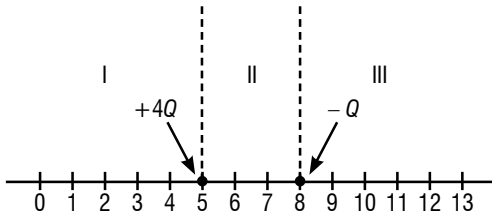
14 (FAAP-SP) Duas cargas q_1 e q_2 , de mesmo sinal, estão fixas sobre uma reta e distantes de 4 m. Entre q_1 e q_2 é colocada outra carga q_3 distante de 1 m de q_1 . Sabendo que $q_1 = 5 \mu\text{C}$ e que q_3 permanece em equilíbrio, determine o valor de q_2 .

15 (UFF-RJ) Considere o valor F como sendo o módulo da força eletrostática entre duas cargas puntiformes, no vácuo, cada uma com intensidade Q e separadas por uma distância r. A figura abaixo mostra três cargas, no vácuo, de valores $-Q$, $+2Q$ e $+4Q$. A primeira e a segunda, bem como a segunda e a terceira, estão separadas por uma distância r. A alternativa que representa a força eletrostática resultante que atua em cada carga é:



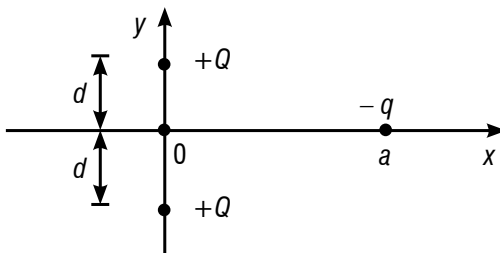
16 Um aluno, ao realizar um experimento de Eletrostática, usou sete pequenas esferas metálicas idênticas. Uma delas estava eletrizada com carga q e as demais eram neutras. Determine a carga da esfera inicialmente eletrizada, após sucessivos contatos com todas as esferas disponíveis.

17 (UERJ) Duas partículas de cargas $+4Q$ e $-Q$ Coulombs estão localizadas sobre uma linha, dividida em três regiões I, II e III, conforme a figura abaixo. Observe que as distâncias entre os pontos são todas iguais.



- Indique a região em que uma partícula positivamente carregada ($+Q$ coulomb) pode ficar em equilíbrio.
- Determine esse ponto de equilíbrio.

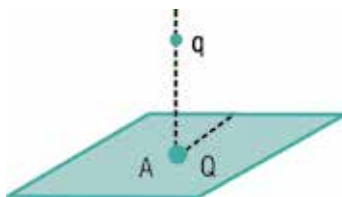
18 (UNICAMP-SP) Considere o sistema de cargas na figura. As cargas $+Q$ estão fixas e a carga $-q$ pode mover-se somente sobre o eixo x :



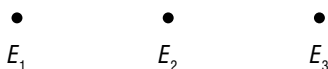
Solta-se a carga $-q$, inicialmente em repouso, em $x = a$.

- Em que ponto do eixo x a velocidade de $-q$ é máxima?
- Em que ponto(s) do eixo x a velocidade de $-q$ é nula?

19 A carga Q de $10 \mu\text{C}$ fixa no ponto A do plano horizontal equilibra a carga q de $1 \mu\text{C}$ e massa de 1 grama que se encontra na vertical que passa por A . Considere o meio como sendo o vácuo e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$. Qual a distância entre essas cargas?



20 (UERJ) Três pequenas esferas metálicas, E_1 , E_2 e E_3 , eletricamente carregadas e isoladas, estão alinhadas, em posições fixas, sendo E_2 equidistante de E_1 e E_3 . Seus raios possuem o mesmo valor, que é muito menor que as distâncias entre elas, como mostra a figura:



As cargas elétricas das esferas têm, respectivamente, os seguintes valores:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 20 \mu\text{C} \\ Q_2 &= -4 \mu\text{C} \\ Q_3 &= 1 \mu\text{C} \end{aligned}$$

Admita que, em um determinado instante, E_1 e E_2 são conectadas por um fio metálico; após alguns segundos, a conexão é desfeita. Nessa nova configuração, determine as cargas elétricas de E_1 e E_2 e apresente um esquema com a direção e o sentido da força resultante sobre E_3 .

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Uma relação (R) é dita transitiva se:

$$A \xrightarrow{R} B \text{ e } B \xrightarrow{R} C, \text{ então } A \xrightarrow{R} C$$

Assim, por exemplo, a relação “equilíbrio térmico” entre sistemas físicos é transitiva, uma vez que, de acordo com a Lei Zero da Termodinâmica, se um sistema A está em equilíbrio térmico com outro sistema B e se B está em equilíbrio térmico com um terceiro sistema C , então o sistema A está em equilíbrio térmico com o sistema C .

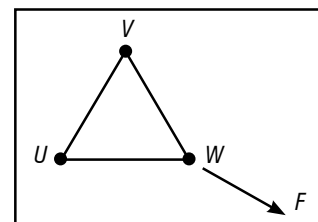
Verifique se as seguintes relações entre corpos carregados são transitivas:

- Repulsão elétrica;
- Atração elétrica.

Justifique sua resposta.

02 Seja A uma esfera condutora de carga elétrica Q . Tomam-se N neutras idênticas a A e isoladas umas das outras e realiza-se a seguinte operação: toca-se A com a 1ª esfera neutra, depois toca-se A com a segunda e assim sucessivamente. Se, ao final da operação, a carga da esfera A é $2^{(18-4N)}$ vezes a carga inicial de A , quantas esferas foram tocadas por A ?

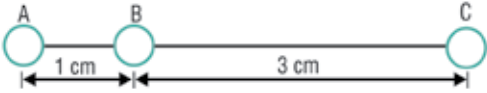
03 (ITA 97/98) Três cargas elétricas puntiformes estão nos vértices U , V e W de um triângulo equilátero. Suponha-se que a soma das cargas é nula e que a força sobre a carga localizada no vértice W é perpendicular à reta UV e aponta para fora do triângulo, como mostra a figura. Conclui-se que:



- as cargas localizadas em U e V são de sinais contrários e de valores absolutos iguais.
- as cargas localizadas nos pontos U e V têm valores absolutos diferentes e sinais contrários.
- as cargas localizadas nos pontos U , V e W têm mesmo valor absoluto, com uma de sinal diferente das demais.
- as cargas localizadas nos pontos U , V e W têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.
- a configuração descrita é fisicamente impossível.

04 (FUVEST-SP) A uma distância d uma da outra, encontram-se duas esferinhas metálicas idênticas, de dimensões desprezíveis, com cargas $-Q$ e $+9Q$. Elas são postas em contato e, em seguida, colocadas à distância $2d$. Qual a razão entre os módulos das forças que atuam nas esferas após o contato e antes do contato?

05 (FUVEST-SP) Três objetos com cargas elétricas idênticas estão alinhados como mostra a figura. O objeto C exerce sobre B uma força igual a $3,0 \cdot 10^{-6}$ N.

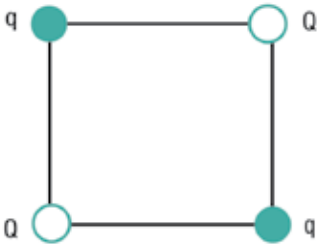


Qual a intensidade da força elétrica resultante dos efeitos de A e C sobre B ?

06 (UNB-DF) Duas cargas q_1 e q_2 , de mesmo sinal, estão fixas sobre o eixo Ox , com q_1 na origem e q_2 em $x_2 = +D$. Uma terceira carga, de sinal e valor desconhecidos, quando colocada em $x_3 = D/4$, permanece em equilíbrio. Calcule a razão q_2/q_1 .

07 Duas esferas iguais, eletrizadas, atraem-se com determinada força F , quando separadas pela distância r . Em seguida são postas em contato e depois recolocadas à mesma distância r , dessa última posição repelem-se com a força $F/4$. Determine a relação q/q' , entre as cargas iniciais das esferas.

08 (UFPE) Quatro cargas elétricas puntiformes, de intensidades Q e q , estão fixas nos vértices de um quadrado, conforme indicado na figura.

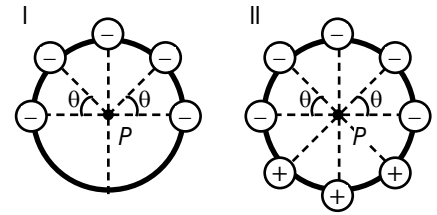


Determine a razão Q/q para que a força sobre cada uma das cargas Q seja nula:

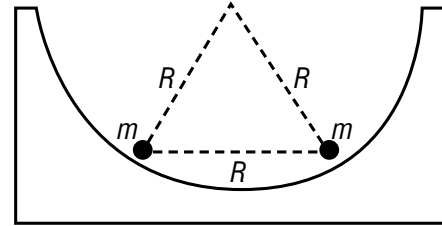
- (A) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.
- (B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (C) $-\sqrt{2}$.
- (D) $-2\sqrt{2}$.
- (E) $-4\sqrt{2}$.

09 (FUVEST-SP) Pequenas esferas, carregadas com cargas elétricas negativas de mesmo módulo Q , estão dispostas sobre um anel isolante e circular, como indicado na figura I. A intensidade da força elétrica que age sobre uma carga de prova negativa, colocada no centro do anel (ponto P), é F_1 . Se forem acrescentadas sobre o anel três outras cargas de mesmo módulo Q , mas positivas, como na figura II, a intensidade da força elétrica no ponto P passará a ser:

- (A) zero.
- (B) $(1/2)F_1$.
- (C) $(3/4)F_1$.
- (D) F_1 .
- (E) $2F_1$.



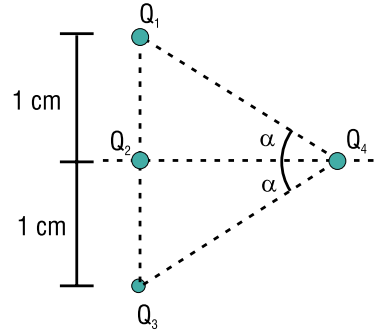
10 (Saraeva) Dois corpos idênticos possuem cada um massa m e carga elétrica q . Quando colocados sobre uma semiesfera de raio R com paredes isolantes e sem atrito, os corpos se movem e, na posição de equilíbrio, a distância entre eles é igual a R . Sabendo que a constante eletrostática do meio em questão é K , determine a carga de cada corpo.



11 (IME 83/84) Um sistema de cargas elétricas puntiformes é constituído de quatro pequenas esferas, de peso desprezível, dispostas na forma mostrada na figura, dotadas das seguintes cargas elétricas:

$$q_1 = q_3 = 4 \times 10^{-11} \text{ coulombs}$$

$$q_2 = q_4 = -10^{-10} \text{ coulombs}$$

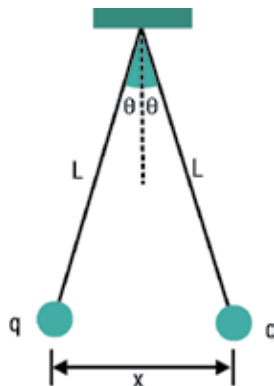


Determine o valor do ângulo α , diferente de zero, de posicionamento da esfera de carga q_4 , de modo que a força atuante nessa carga seja nula.

12 Duas esferas condutoras, idênticas e muito pequenas, de mesma massa $m = 0,30$ g, encontram-se no vácuo, suspensas por meio de dois fios leves, isolantes, de comprimentos iguais $L = 1,0$ m e presos a um mesmo ponto de suspensão O . Estando as esferas separadas, eletriza-se uma delas com carga Q , mantendo-se a outra neutra. Em seguida, elas são colocadas em contato e depois abandonadas, verificando-se que na posição de equilíbrio a distância que as separa é $d = 1,2$ m. Determine a carga Q . Dados: $Q > 0$; $K_0 = 9,0 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.

13 (UFG-GO) Duas esferas idênticas são suspensas por fios de comprimento ℓ , com os pontos de suspensão separados por 2ℓ . Os fios são isolantes, inextensíveis e de massas desprezíveis. Quando as esferas estão carregadas com cargas Q de mesmo sinal, os fios fazem um ângulo de 30° com a vertical. Descarregando as esferas e carregando-as com cargas q de sinais opostos, os fios formam novamente um ângulo de 30° com a vertical. De acordo com as informações apresentadas, calcule o módulo da razão Q/q .

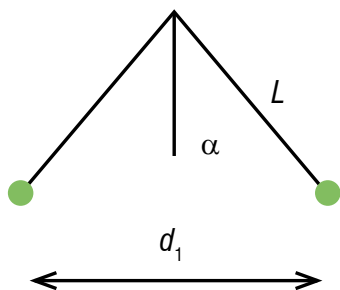
14 Duas pequenas bolas condutoras idênticas, de massa m e carga q , estão suspensas por fios isolantes de comprimento ℓ , como mostra a figura abaixo. Suponha θ tão pequeno que $\tan\theta$ possa ser substituída por $\sin\theta$ com erro desprezível. Mostre que, no equilíbrio, $x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{1/3}$, em que x é a separação entre as bolas.



15 (ITA 92/93) Duas esferas condutoras, de massa m , bem pequenas, estão igualmente carregadas. Elas estão suspensas num mesmo ponto por dois fios de seda, de massas desprezíveis e de comprimentos iguais a L . As cargas das esferas são tais que elas estarão em equilíbrio quando a distância entre elas for igual a a ($a < L$). Num instante posterior, uma das esferas é descarregada. Qual será a nova distância b ($b < L$) entre as esferas quando, após se tocarem, o equilíbrio entre elas for novamente restabelecido?

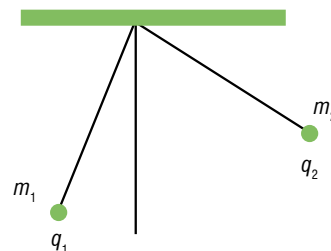
- (A) $b = \frac{a}{2}$.
- (B) $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- (C) $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- (D) $b = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$.
- (E) $b = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$.

16 (ITA 00/01) Duas partículas têm massas iguais a m e cargas a Q . Devido a sua interação eletrostática, elas sofrem uma força F quando estão separadas de uma distância d . Em seguida, essas partículas são penduradas, a partir de um mesmo ponto, por fios de comprimento L e ficam equilibradas quando a distância entre elas é d_1 . A cotangente do ângulo α que cada fio forma com a vertical, em função de m, g, d, d_1, F e L , é:



- (A) $mg d_1 / (F d)$
- (B) $mg L d_1 / (F d^2)$
- (C) $mg d_1^2 / (F d^2)$
- (D) $mg d_1^2 / (F d_1^2)$
- (E) $(F d^2) / (mg d_1^2)$

17 (OBF 2004) Na figura abaixo, estão representadas duas partículas de massas m_1 e m_2 , carregadas, respectivamente, com cargas q_1 e q_2 e suspensas de um mesmo ponto por fios de iguais comprimentos e massas desprezíveis.

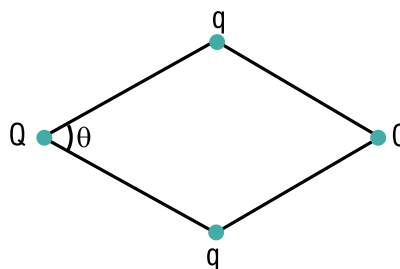


Pode-se concluir que:

- (A) $q_1 q_2 < 0$ e $m_1 < m_2$.
- (B) $q_1 q_2 > 0$ e $|q_1| < |q_2|$.
- (C) $q_1 q_2 < 0$ e $m_1 |q_1| > m_2 |q_2|$.
- (D) $q_1 q_2 > 0$ e $|q_1| > |q_2|$.
- (E) $q_1 q_2 > 0$ e $m_1 > m_2$.

18 Quatro cargas positivas q, Q, q, Q estão ligadas por quatro fios, cada um com comprimento L . Sabe-se que $Q = 8q$. Determine o ângulo θ . Despreze a gravidade.

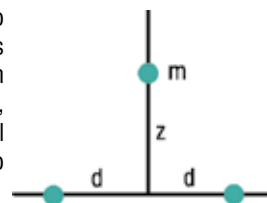
Observação: K – constante eletrostática.



- (A) $\theta = 30^\circ$.
- (B) $\theta = 2 \arctan(1/4)$.
- (C) $\theta = 2 \arctan(4)$.
- (D) $\theta = 4 \arctan(2)$.
- (E) $\theta = 4 \arctan(1/3)$.

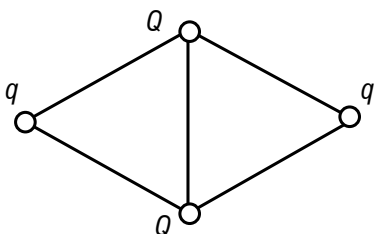
19 (UFU-MG) Duas cargas $+q$ estão fixas sobre uma barra isolante e distam entre si uma distância $2d$. Uma outra barra isolante é fixada perpendicularmente à primeira no ponto médio entre essas duas cargas. O sistema é colocado de modo que esta última haste fica apontada para cima. Uma terceira esfera pequena, de massa m e carga $+3q$, furada é atravessada pela haste vertical de maneira a poder deslizar sem atrito ao longo desta, como mostra a figura a seguir.

A distância de equilíbrio da massa m ao longo do eixo vertical é z . Com base nessas informações, o valor da massa m em questão pode ser escrito em função de d, z, g e k , em que g é a aceleração gravitacional e k , a constante eletrostática. A expressão para a massa m será dada por:



- (A) $m = \frac{kq^2 z}{(d^2 + z^2)^{3/2}}$
- (B) $m = \frac{6kq^2 z}{g(d^2 + z^2)^{3/2}}$
- (C) $m = \frac{6kq^2 z}{g(d^2 + z^2)^2}$
- (D) $m = \frac{6kq^2 z}{g(d^2 + z^2)^3}$

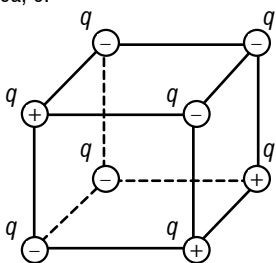
20 Quatro cargas q , Q , q e Q , de mesmo sinal, estão unidas mediante cinco fios (não condutores) de comprimento ℓ da maneira mostrada na figura ($Q > q$). Determine a força no fio que une as cargas Q .



21 (PUC-SP) Em cada um dos vértices de uma caixa cúbica de aresta ℓ foram fixadas cargas elétricas de módulo q cujos sinais estão indicados na figura.

Seja k a constante eletrostática do meio, o módulo da força elétrica que atua sobre uma carga pontual de módulo $2q$, colocada no ponto de encontro das diagonais da caixa cúbica, é:

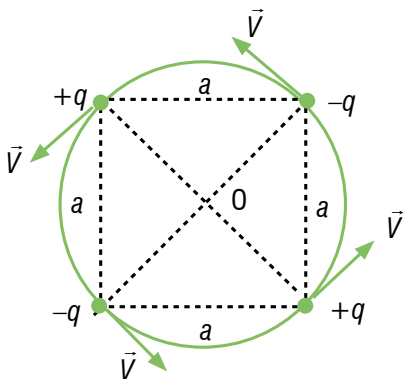
- (A) $4 kq^2/3 \ell^2$.
- (B) $8 kq^2/3 \ell^2$.
- (C) $16 kq^2/3 \ell^2$.
- (D) $8 kq^2/\ell^2$.
- (E) $4 kq^2/\ell^2$.



22 Nos vértices de um triângulo isósceles existem três cargas pontiformes fixas e iguais entre si. Calcular a relação entre a base b e a altura h relativa à base para que qualquer carga colocada no ponto médio da altura fique em equilíbrio sob a ação das forças elétricas.

Obs.: A base é o lado diferente no triângulo.

23 (FUVEST-SP) Quatro pequenas esferas de massa m estão carregadas com carga de mesmo valor absoluto q , sendo duas negativas e duas positivas, como mostra a figura. As esferas estão dispostas formando um quadrado de lado a e giram numa trajetória circular de centro O , no plano do quadrado, com velocidade de módulo constante v . Suponha que as únicas forças atuantes sobre as esferas são devidas à interação eletrostática. A constante de permissividade elétrica é ϵ . Todas as grandezas (dadas e solicitadas) estão em unidades SI.

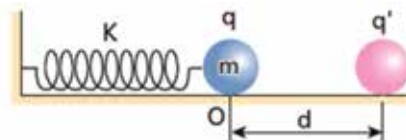


- a. Determine a expressão do módulo da força eletrostática resultante F que atua em cada esfera e indique sua direção.
- b. Determine a expressão do módulo da velocidade tangencial v das esferas.

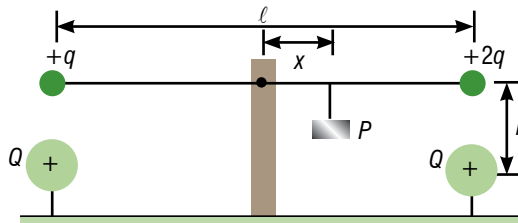
24 (ITA-SP) Uma partícula de massa $M=10,0$ g e carga $q = -2,0 \cdot 10^{-6}$ C é acoplada a uma mola de massa desprezível. Esse conjunto é posto em oscilação e seu período medido é $P = 0,40\pi$ s.

É fixada a seguir uma outra partícula de carga $q' = 0,20 \cdot 10^{-6}$ C a uma distância d da posição de equilíbrio O do sistema massa-mola (ver figura). O conjunto é levado lentamente até a nova posição de equilíbrio, distante $x = 40$ cm da posição de equilíbrio inicial O . Qual o valor de d ? É dado: $K_0 = 9 \cdot 10^9$ N m²/C².

Obs.: Considere as duas cargas pontiformes.



25 (UFU-MG) A figura mostra uma barra isolante, sem massa, de comprimento $\ell = 2$ m, presa por um pino no centro. Nas suas extremidades estão presas cargas positivas q e $2q$, sendo $q = 1 \cdot 10^{-6}$ C. A uma distância $r = 0,3$ m, diretamente abaixo de cada uma dessas cargas, encontra-se afixada uma carga positiva $Q = 4 \cdot 10^{-6}$ C. Considere somente as interações entre as cargas situadas diretamente abaixo uma da outra e $K = 9 \cdot 10^9$ N m²/C². Sabe-se que a reação no pino é nula.

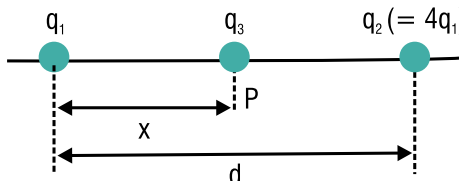


Determine:

- a. o valor do peso P necessário para manter a barra em equilíbrio na horizontal;
- b. a distância x , a partir do pino, em que o peso P deve ser suspenso quando a barra está balanceada, e de que lado do suporte (esquerdo ou direito).

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

01 (FUVEST-SP) Duas cargas pontuais positivas, q_1 e $q_2 = 4q_1$, são fixadas a uma distância d uma da outra. Uma terceira carga negativa q_3 é colocada no ponto P entre q_1 e q_2 , a uma distância X da carga q_1 , conforme mostra a figura.



- a. Calcule o valor de X para que a força sobre a carga q_3 seja nula.
- b. Verifique se existe um valor de q_3 para o qual tanto a carga q_1 como a q_2 permanecem em equilíbrio, nas posições do item a), sem necessidade de nenhuma outra força além das eletrostáticas entre as cargas. Caso exista, calcule este valor de q_3 ; caso não exista, escreva "não existe" e justifique.

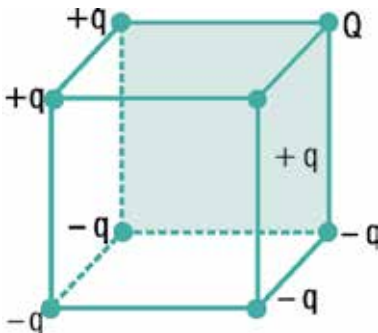
02 (IME 95/96) Uma esfera de plástico, maciça, é eletrizada, ficando com uma densidade de carga superficial $\sigma = + 0,05$ Coulombs/m². Em consequência, se uma carga puntiforme $q = + 1\mu\text{C}$ fosse colocada exteriormente a 3 metros do centro da esfera, sofreria uma repulsão de $0,02\pi$ Newtons. A esfera é descarregada e cai livremente de uma altura de 750 metros, adquirindo ao fim da queda uma energia de $0,009\pi$ Joules. Determine a massa específica do plástico da esfera. Dado: aceleração da gravidade: $g = 10$ m/s².

03 Em um ponto de um plano inclinado que forma 30° com a horizontal, fixamos um corpo B eletrizado com carga $Q = 20\mu\text{C}$. A 30 cm abaixo de B, coloca-se um pequeno corpo A de 20 g de massa, eletrizado com carga q . Seja $g = 10$ m/s² e $K = 9 \cdot 10^9$ Nm²/C².

- Se não existe atrito, para que o corpo A fique em equilíbrio, qual deve ser sua carga elétrica?
- Se existisse atrito e o coeficiente de atrito estático entre o corpo A e o plano inclinado fosse igual a 0,25, qual seria a menor distância entre A e B para não haver movimento do corpo A?

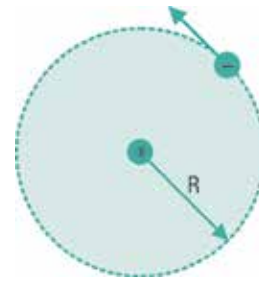
04 Três pêndulos idênticos são pendurados em um mesmo ponto O. O comprimento de cada haste é igual a L e o peso da massa pendular é igual a P. Cada um deles é eletrizado com carga Q, positiva. Na configuração de equilíbrio, a haste de cada pêndulo faz com a vertical, que passa por O, um ângulo θ . Determine o valor de Q em função dos dados do problema. Dado: constante eletrostática do meio = K.

05 Dada a configuração de cargas abaixo, determine a força elétrica resultante em uma carga Q indicada na figura, sabendo que o lado do cubo vale a.



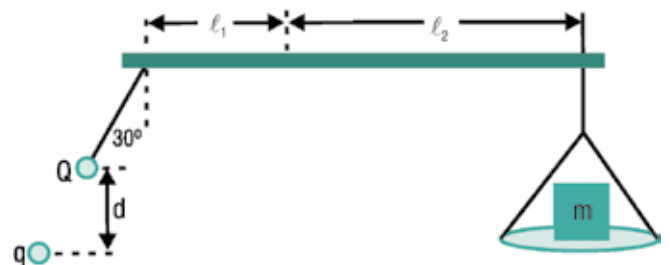
06 Uma pequena partícula carregada está no interior de uma esfera isolante perfeitamente lisa. O diâmetro da esfera é R, a massa da partícula carregada é m e sua carga é q. Qual carga deve ter um outro objeto, fixo no fundo da esfera, para que seja capaz de manter a partícula carregada no extremo superior da esfera em equilíbrio estável? Diz-se que um corpo encontra-se em equilíbrio estável quando, ao sofrer um pequeno deslocamento da sua posição de equilíbrio, a ela retorna logo depois. A constante eletrostática do meio é igual a K.

07 (UFC-CE) Uma partícula com carga positiva +q é fixada em um ponto, atraindo uma outra partícula com carga negativa -q e massa m, que se move em uma trajetória circular de raio R, em torno da carga positiva, com velocidade de módulo constante (veja a figura a seguir). Considere que não há qualquer forma de dissipação de energia, de modo que a conservação da energia mecânica é observada no sistema de cargas. Despreze qualquer efeito da gravidade. A constante eletrostática é igual a k.



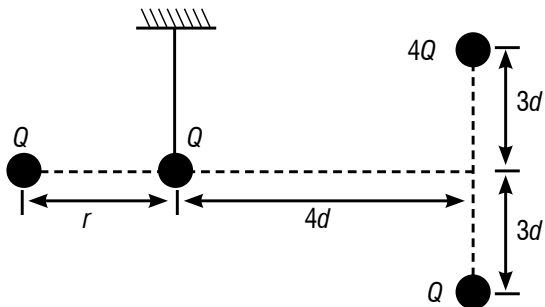
- Determine o módulo da velocidade v com que a carga negativa se move em torno da carga positiva.
- Determine o período do movimento circular da carga negativa em torno da carga positiva.
- Determine a energia total do sistema.
- Considere que o produto da massa da partícula com carga negativa pela sua velocidade e pelo raio da trajetória circular é igual ao produto de um número inteiro por uma constante; ou seja, $mvR = nh$, em que n é o número inteiro ($n = 1, 2, 3, \dots$) e h, a constante. Determine a energia total do sistema em termos de n, h, q e k.
- Determine a frequência do movimento da carga negativa em torno da carga positiva em termos de n, h, q e k.

08 (ITA 09/10) Considere uma balança de braços desiguais, de comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 , conforme mostra a figura. No lado esquerdo encontra-se pendurada uma carga de magnitude Q e massa desprezível, situada a uma certa distância de outra carga, q. No lado direito encontra-se uma massa m sobre um prato de massa desprezível. Considerando as cargas como pontuais e desprezível a massa do prato da direita, o valor de q para equilibrar a massa m é dado por:



- $\frac{-mgl_2d^2}{(k_0Q\ell_1)}$.
- $\frac{-8mg\ell_2d^2}{(k_0Q\ell_1)}$.
- $\frac{-4mg\ell_2d^2}{(3k_0Q\ell_1)}$.
- $\frac{-2mg\ell_2d^2}{\sqrt{3}k_0Q\ell_1}$.
- $\frac{-8mg\ell_2d^2}{(3\sqrt{3}k_0Q\ell_1)}$.

09 O sistema de cargas indicado na figura é composto por três cargas fixas e uma carga pendurada por um fio, todas positivas e de peso desprezível. Para que a carga pendurada fique na direção vertical, pede-se:



- a. calcular:
 - I. a distância r em função de d ;
 - II. a tração no fio;
- b. verificar se a carga pendurada, depois de sofrer uma pequena perturbação em sua posição, permanece estável em uma nova posição ou retorna à posição original;
- c. repetir o item b para o caso de a carga pendurada ser negativa.

10 Uma partícula A com carga elétrica $+Q$ encontra-se fixa ao ponto mais baixo de um aro circular de raio R localizado num plano vertical. Outra partícula B de carga $+Q$ e massa m encontra-se livre para se mover apoiada internamente sobre a superfície lisa desse aro. Sabendo que a gravidade local vale g e a constante eletrostática do meio vale K , determine:

- a. a distância entre as partículas A e B na posição de equilíbrio estático de B ;
- b. a força de contato que o aro circular exerce na partícula B nessa posição.

RASCUNHO

1. Introdução

Neste capítulo, estudaremos o conceito e a representação das linhas de campo elétrico, detalhando os diversos casos para a sua geração.

Iniciaremos estudando o campo elétrico gerado por cargas puntiformes e depois falaremos os casos mais complexos, onde introduziremos o conceito de superfície gaussiana para evitar o uso de cálculo integral nas deduções das fórmulas.

Por fim, veremos a relação que existe entre campo elétrico e força elétrica, estudada no capítulo anterior. Concluiremos que há uma analogia com a relação entre campo e força gravitacionais.

2. Campo elétrico

O campo elétrico é uma propriedade física relativa a pontos do espaço que estão sob a influência de uma carga elétrica fonte, tal que uma carga de prova, ao ser colocada num desses pontos, fica sujeita a uma força de atração ou de repulsão em relação à carga elétrica que gerou o campo (carga fonte). O campo elétrico em um determinado ponto do espaço será representado através de um vetor (grandeza vetorial)

Símbolo $\rightarrow \vec{E}$

Unidade no SI: [N/C] (Newton/Coulomb) ou [V/M] (Volt/metro)

2.1 Campo elétrico gerado por uma partícula carregada

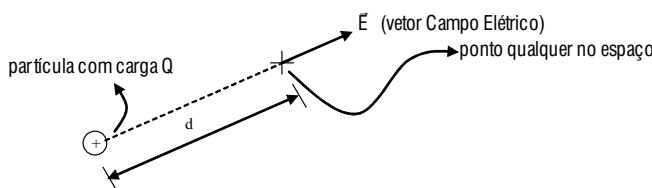
O vetor campo elétrico terá a direção da reta que liga o ponto do espaço à carga geradora do campo. Por sua vez, o módulo do campo elétrico será dado por:

$$|\vec{E}| = \frac{k \cdot |Q|}{d^2}$$

O sentido do vetor campo elétrico dependerá do sinal da carga fonte.

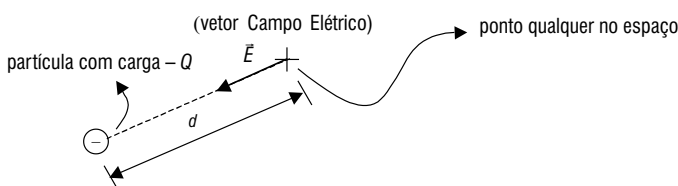
2.1.1 Partícula com carga positiva

O vetor tem sentido de afastamento da carga fonte.



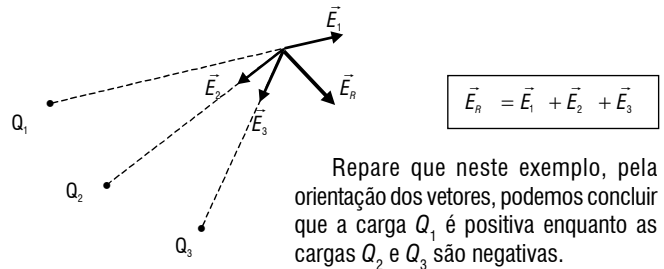
2.1.2 Partícula com carga negativa

O sentido do vetor aponta para a carga fonte.



2.2 Campo elétrico produzido por várias cargas puntiformes

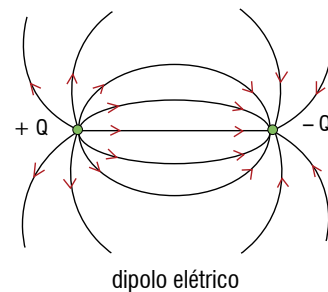
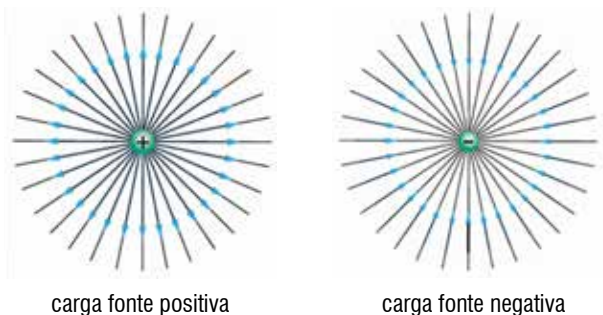
O campo elétrico será dado pela soma vetorial dos campos elétricos gerados por cada carga puntiforme.



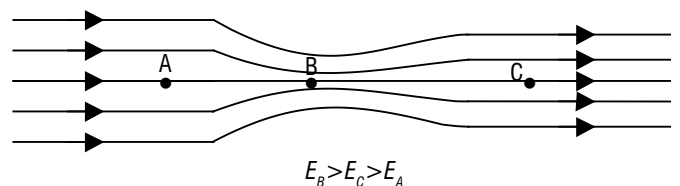
3. Linhas de força

Também conhecidas como linhas de campo, são linhas imaginárias orientadas que auxiliam na visualização dos campos elétricos de uma certa região. A tangente a uma linha de força num dado ponto nos dá a direção e o sentido do vetor campo elétrico \vec{E} neste ponto.

Ex.:



A quantidade de linhas que partem ou chegam a uma determinada carga fonte está diretamente relacionada ao módulo desta carga, ou seja, quanto maior o número de linhas maior será o módulo da carga da partícula. Além disso, quanto mais concentradas as linhas de força estiverem, maior será a intensidade do campo naquela região.



4. Lei de Gauss

O fluxo elétrico total através de uma superfície qualquer (superfície gaussiana) é diretamente proporcional à soma das cargas no interior desta superfície.

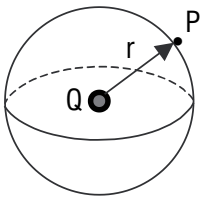
$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi k Q_{\text{interno}}$$

Assim, utiliza-se a Lei de Gauss para determinar a intensidade do campo elétrico num ponto, fazendo passar por este uma superfície fechada. Com o objetivo de facilitar a integração, esta superfície deve ser simétrica ao corpo carregado, para que o campo elétrico seja constante em todos os pontos da gaussiana. Desta forma, determinando-se a superfície gaussiana ideal, teremos:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \int d\vec{A} = 4\pi k Q_{\text{interno}} \Rightarrow E \cdot A_{\text{SG}} = 4\pi k Q_{\text{interno}}$$

4.1 Carga puntiforme Q

Superfície gaussiana: esfera de raio r com centro na carga.



$$E \cdot A_{\text{SG}} = 4\pi k Q_{\text{int}}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_0 Q$$

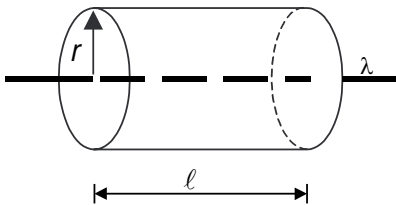
$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

Obs.: Repare que é a mesma fórmula que foi apresentada anteriormente para cargas puntiformes.

4.2 Linha infinita com densidade linear de carga $\lambda = Q/L$

Unidade SI de λ : [C/m]

Superfície gaussiana: casca cilíndrica de raio r .



$$E \cdot A_{\text{SG}} = 4\pi k Q_{\text{int}}$$

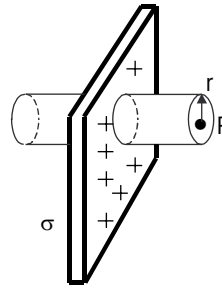
$$E \cdot 2\pi r l = 4\pi k \lambda l$$

$$E = \frac{2k\lambda}{r}$$

4.3 Placa infinita isolante com densidade superficial de carga $\sigma = Q/A$

Unidade no SI de σ : [C/m²]

Superfície gaussiana: casca cilíndrica com tampa de raio r .



$$E \cdot A_{\text{SG}} = 4\pi k Q_{\text{int}}$$

$$E \cdot 2\pi r^2 = 4\pi k \sigma \pi r^2$$

$$E = 2k\pi\sigma$$

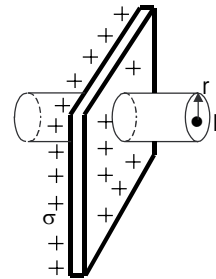
Obs.: Repare que o campo elétrico gerado não depende da distância do ponto à placa (campo elétrico uniforme).

4.4 Placa infinita condutora com densidade superficial de carga $\sigma = Q/A$

Unidade no SI de σ : [C/m²]

Superfície gaussiana: casca cilíndrica com tampa de raio r .

Neste caso, cada face da placa possui densidade σ .



$$E \cdot A_{\text{SG}} = 4\pi k Q_{\text{int}}$$

$$E \cdot 2\pi r^2 = 4\pi k 2\sigma \pi r^2$$

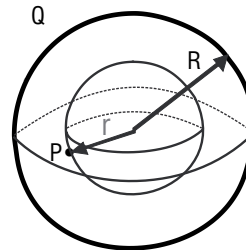
$$E = 4k\pi\sigma$$

Obs.: Novamente o campo elétrico não depende da distância do ponto à placa (campo elétrico uniforme).

4.5 Casca esférica ou esfera condutora maciça de carga Q e raio R

4.5.1 No interior

Superfície gaussiana: esfera de raio r concêntrica.



$$E \cdot A_{\text{SG}} = 4\pi k Q_{\text{int}}$$

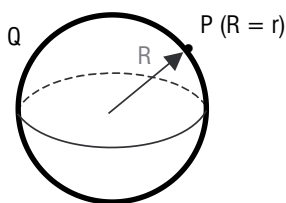
$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k Q$$

$$E = 0$$

Obs.: Lembre que no condutor as cargas ficam localizadas na superfície, por isso $Q_{\text{int}} = 0$.

4.5.2 Na superfície

Superfície gaussiana: esfera de raio r concêntrica.



$$E \cdot A_{SG} = 4\pi k Q_{int}$$

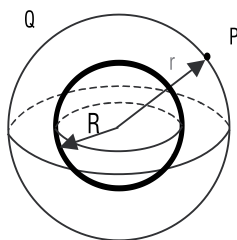
$$E 4\pi R^2 = 4\pi k \frac{Q}{2}$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{k Q}{R^2}$$

Obs.: Neste caso, metade da carga do condutor se localiza na parte interna da superfície e metade na parte externa.

4.5.3 No exterior

Superfície gaussiana: esfera concêntrica de raio r .



$$E \cdot A_{SG} = 4\pi k Q_{int}$$

$$E 4\pi r^2 = 4\pi k Q$$

$$E = \frac{k Q}{r^2}$$

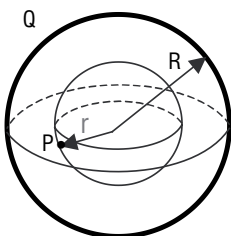
Obs.: Para pontos fora da esfera, podemos considerar o caso análogo ao de uma carga puntiforme localizada no centro da esfera.

4.6 Esfera isolante maciça com dens. volumétrica de carga $\rho = Q/V$ e raio r

Unidade SI de ρ : [C/m³]

4.6.1 No interior

Superfície gaussiana: esfera concêntrica de raio r .



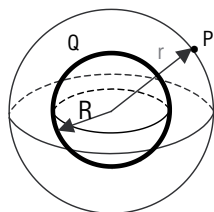
$$E \cdot A_{SG} = 4\pi k Q_{int}$$

$$E 4\pi r^2 = 4\pi k \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$E = \frac{4}{3} k \rho \pi r$$

4.6.2 No exterior (ou na superfície)

Superfície gaussiana: esfera concêntrica de raio r .



$$E \cdot A_{SG} = 4\pi k Q_{int}$$

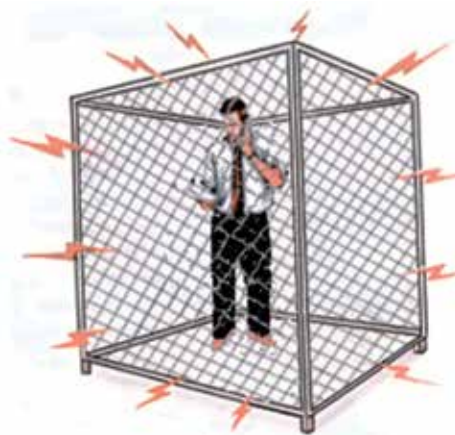
$$E 4\pi r^2 = 4\pi k \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$E = \frac{4}{3} k \rho \pi \frac{R^3}{r^2} = \frac{k Q}{r^2}$$

Obs.: Novamente, podemos observar que, para pontos fora da esfera, o caso é análogo ao do campo gerado por uma carga puntiforme localizada no centro da esfera.

5. Blindagem eletrostática (gaiola de Faraday)

Michael Faraday (1791-1867) construiu uma gaiola metálica que era mantida sobre suportes isolantes e eletrizada negativamente. Mesmo quando Faraday entrava na gaiola, ele não sofria choque, pois o campo elétrico dentro da gaiola é nulo. Faraday demonstrou que os condutores carregados eletrizam-se apenas na sua superfície externa.



O princípio da gaiola de Faraday é bastante usado na proteção de aparelhos eletrônicos contra interferências externas.

Automóveis e aviões também se comportam como uma gaiola de Faraday. Em um dia chuvoso, o melhor lugar para ter proteção contra os raios (exceto os prédios) é dentro de um carro.



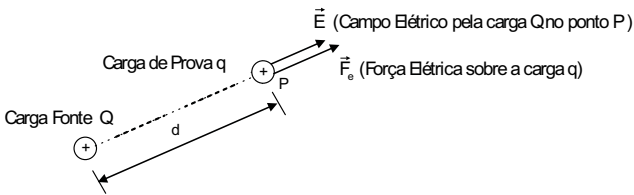
Na figura (a) acima, uma pequena esfera é atraída por um condutor eletrizado negativamente.

Na figura (b), inserimos a pequena esfera dentro de uma gaiola de Faraday e mesmo com o condutor eletrizado negativamente, a esfera não sofre ação da força eletrostática devido à blindagem exercida pela gaiola de Faraday.

6. Força elétrica

Vimos que uma carga puntiforme Q é capaz de gerar campo elétrico em qualquer ponto ao seu redor. Se em um ponto P qualquer do espaço colocarmos uma outra carga puntiforme q , sobre este atuará uma força elétrica de atração ou de repulsão, dependendo do sinal das cargas envolvidas. Desta forma, temos:

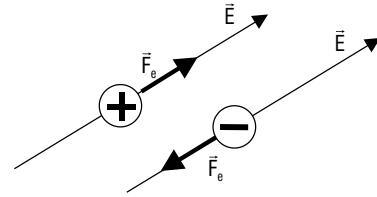
$$|\vec{E}_p| = \frac{k \cdot |Q|}{d^2} \quad |\vec{F}_e| = \frac{k \cdot |Q| \cdot |q|}{d^2}$$



Portanto, observamos que existe uma relação de fato entre o campo e a força elétrica. Assim, quando uma partícula eletrizada for abandonada num ponto onde há influência de um campo elétrico, ela sofrerá uma força elétrica dada por:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

Por se tratar de um produto entre um vetor e um escalar, a força e o campo elétrico possuem sempre mesma direção e o sentido será contrário somente quando a carga for negativa.



Obs.: Nota-se uma semelhança clara entre o campo elétrico e o campo gravitacional, mas neste último a força gravitacional que atua numa massa de prova terá sempre natureza atrativa ($\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

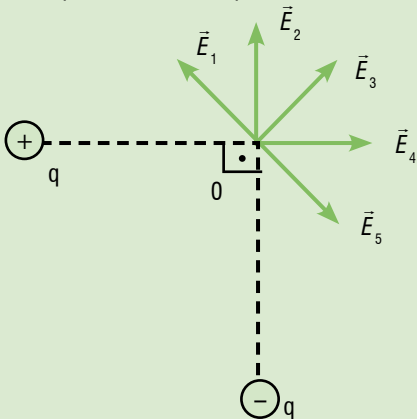
01 (PUC-RJ) Uma carga positiva encontra-se em uma região do espaço onde há um campo elétrico dirigido verticalmente para cima. Podemos afirmar que a força elétrica sobre ela é:

- (A) para cima.
- (B) para baixo.
- (C) horizontal para a direita.
- (D) horizontal para a esquerda.
- (E) nula.

Solução: Letra A.

Como a carga é positiva, a força elétrica sobre ela tem a mesma direção e o sentido do campo elétrico, ou seja, vertical para cima.

02 Duas cargas elétricas de módulos iguais, q , porém de sinais contrários, geram no ponto O um campo elétrico resultante \vec{E} . Qual o vetor que melhor representa esse campo elétrico?

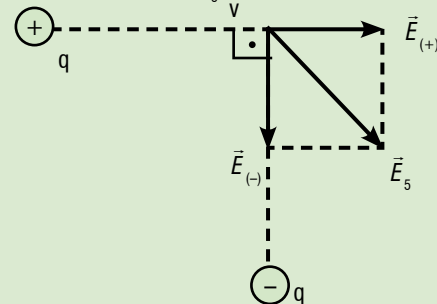


Solução:

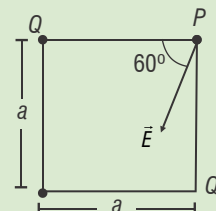
A carga positiva gera um campo “para fora” da carga (\vec{E}_+), ou seja, para a direita, e a carga negativa gera um campo “para dentro” da carga (\vec{E}_-), ou seja, para baixo.

Como as cargas e as distâncias são iguais em módulo, os vetores \vec{E}_+ e \vec{E}_- têm o mesmo módulo.

Portanto, o vetor resultante é o \vec{E}_5 .



03 (UFRJ) Em dois vértices opostos de um quadrado de lado a estão fixas duas cargas puntiformes de valores Q e Q' . Essas cargas geram, em outro vértice P do quadrado, um campo elétrico E , cuja direção e sentido estão especificados na figura a seguir:



Indique os sinais das cargas Q e Q' e calcule o valor da razão Q/Q' .

Solução:

Sabemos que o vetor campo elétrico gerado pela carga Q no ponto P tem direção horizontal, enquanto o campo gerado pela carga Q' é vertical, embora não se possa dizer imediatamente seus sentidos. Desta forma, se fizermos a decomposição do vetor campo elétrico resultante de P nas direções horizontal e vertical, concluímos que:

- a componente horizontal de \vec{E} aponta para a carga Q . Logo, Q é negativa;
- a componente vertical de \vec{E} aponta para a carga Q' . Logo, Q' é negativa.

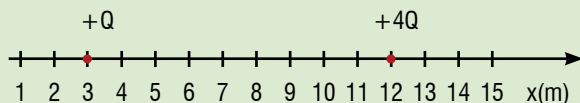
$$E_1 = \frac{k \cdot |Q|}{a^2} = E \cdot \cos 60^\circ \quad (I)$$

$$E_2 = \frac{k \cdot |Q'|}{a^2} = E \cdot \sin 60^\circ \quad (II)$$

Dividindo as duas equações acima, temos:

$$\frac{|Q|}{|Q'|} = \cot 60^\circ \Rightarrow \frac{Q}{Q'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

04 (PUC-RS) Duas cargas elétricas de valores $+Q$ e $+4Q$ estão fixas nas posições 3 e 12 sobre um eixo, como indica a figura.

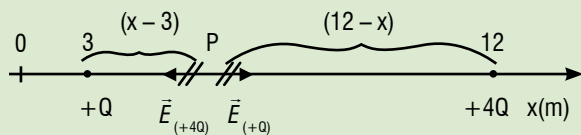


O campo elétrico resultante dessas cargas será nulo na posição:

- (A) 3. (D) 6.
 (B) 4. (E) 7.
 (C) 5.

Solução: Letra D.

As cargas positivas geram um campo “para fora”, como na figura abaixo:



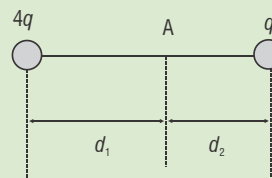
Para o campo elétrico ser nulo, os módulos dos campos elétricos criados por essas duas cargas devem ser iguais.

$$E_{+Q} = E_{+4Q}$$

$$\frac{k \cdot Q}{(x-3)^2} = \frac{k \cdot 4Q}{(12-x)^2}$$

$$x = 6 \text{ m}$$

05 Sabendo-se que o vetor campo elétrico no ponto A é nulo, determine a relação entre d_1 e d_2 .

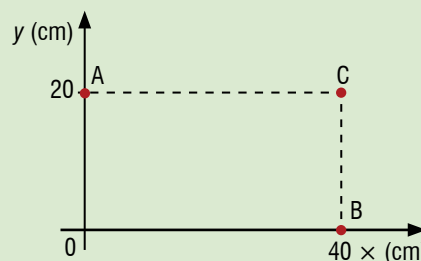


Solução:

Para que o campo elétrico resultante no ponto A seja nulo, os campos elétricos gerados pelas duas cargas pontiformes devem ter sentidos opostos e módulos iguais.

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| \Rightarrow \frac{k \cdot |Q_1|}{d_1^2} = \frac{k \cdot |Q_2|}{d_2^2} \Rightarrow \frac{4q}{d_1^2} = \frac{q}{d_2^2} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = 2$$

06

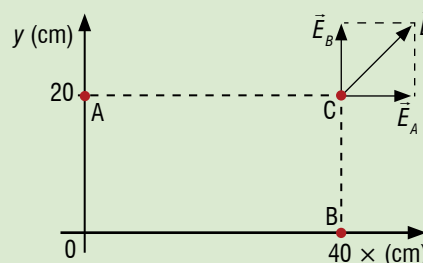


No vácuo ($K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$), colocam-se as cargas $Q_A = 48 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ e $Q_B = 16 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, respectivamente nos pontos A e B representados acima.

O campo elétrico no ponto C tem módulo igual a:

- (A) $60 \cdot 10^5 \text{ N/C}$. (D) $45 \cdot 10^5 \text{ N/C}$.
 (B) $55 \cdot 10^5 \text{ N/C}$. (E) $40 \cdot 10^5 \text{ N/C}$.
 (C) $50 \cdot 10^5 \text{ N/C}$.

Solução: Letra D



Temos que:

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

$$E^2 = E_A^2 + E_B^2$$

$$E_A = \frac{k \cdot |Q_A|}{d_A^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 48 \cdot 10^{-6}}{(40 \cdot 10^{-2})^2} = 27 \cdot 10^{-5} \text{ N/C}$$

$$E_B = \frac{k \cdot |Q_B|}{d_B^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 16 \cdot 10^{-6}}{(20 \cdot 10^{-2})^2} = 36 \cdot 10^{-5} \text{ N/C}$$

Logo, $E = 45 \cdot 10^5 \text{ N/C}$.

07 (PUC-SP) Em uma certa região da Terra, nas proximidades da superfície, a aceleração da gravidade vale 10 m/s^2 , e o campo eletrostático do planeta vale 100 N/C , orientado verticalmente para baixo. Determine o sinal e o valor da carga elétrica que uma bolinha de gude, de massa igual a 50 g , deveria ter para permanecer suspensa em repouso, acima do solo.



Considere o campo elétrico praticamente uniforme no local e despreze qualquer outra força atuando sobre a bolinha.

Solução:

A primeira força que atua na partícula é a força peso, na vertical para baixo. Para que a bolinha fique em equilíbrio, a força eletrostática gerada pelo campo elétrico da Terra deve estar na vertical para cima e ter o mesmo módulo da força peso.

$$F_e = P \rightarrow |q| \cdot E = m \cdot g$$

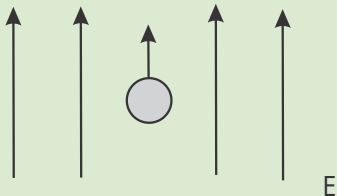
$$|q| \cdot 100 = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 10$$

$$|q| = 5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

Como o campo elétrico da Terra está orientado para baixo e a força eletrostática deve estar para cima, a carga é negativa.

Logo, $q = -5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$

08 (UFPE) Uma gota de óleo, de massa $m = 1 \text{ mg}$ e carga $q = 2 \times 10^{-7} \text{ C}$, é solta em uma região de campo elétrico uniforme E , conforme mostra a figura a seguir. Mesmo sob o efeito da gravidade, a gota move-se para cima, com uma aceleração de 1 m/s^2 . Determine o módulo do campo elétrico. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Solução:

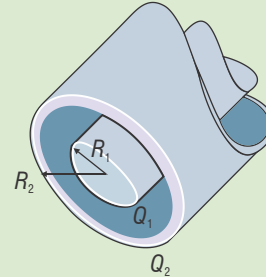
Por possuir carga positiva, a gota sofrerá, além da força peso dirigida para baixo, uma força elétrica no mesmo sentido do campo elétrico. Como o seu movimento é acelerado, temos:

$$F_{\text{RES}} = F_e - P$$

$$m \cdot a = |q| \cdot E - m \cdot g \Rightarrow$$

$$E = \frac{m \cdot (a + g)}{|q|} = \frac{1 \cdot 10^{-6} \cdot (1 + 10)}{2 \cdot 10^{-7}} \Rightarrow E = 55 \text{ N/C}$$

09 Um cilindro condutor muito longo (comprimento L) carregando uma carga total $Q_1 = +q$ é envolvido por uma casca cilíndrica condutora (também de comprimento L) com carga total $Q_2 = -2q$, como é mostrado em seção transversal na figura. Use a lei de Gauss para determinar:



- a distribuição de cargas sobre a casca condutora;
- o campo elétrico nos pontos fora da casca condutora;
- o campo elétrico na região entre o cilindro e a casca;
- o campo elétrico dentro do cilindro.

Solução:

a. as cargas elétricas do cilindro ($+q$) ficam distribuídas em sua superfície externa, uma vez que se trata de um material condutor. Tais cargas irão induzir as cargas da casca cilíndrica.

Desta forma, uma quantidade de carga $-q$ será induzida, ficando assim na parte interna da casca, enquanto o restante das cargas da casca ($-q$ também) ficarão distribuídas na parte externa.

b. Usando a Lei de Gauss para um ponto fora da casca e distando r do centro do sistema, temos:

$$E \cdot A_{\text{SG}} = 4 \cdot \pi \cdot k \cdot |Q_{\text{INT}}|$$

A superfície gaussiana, neste problema, será um cilindro de raio r e comprimento L .

$$E \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot L) = 4 \cdot \pi \cdot k \cdot |-q| \Rightarrow E = \frac{2 \cdot k \cdot q}{r \cdot L} \Rightarrow E = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r \cdot L}$$

(apontando para o centro).

c. usando a lei de Gauss para um ponto na região pedida e distando r do centro do sistema, temos:

$$E \cdot A_{\text{SG}} = 4 \cdot \pi \cdot k \cdot |Q_{\text{INT}}|$$

$$E \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot L) = 4 \cdot \pi \cdot k \cdot |q| \Rightarrow E = \frac{2 \cdot k \cdot q}{r \cdot L} \Rightarrow E = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r \cdot L}$$

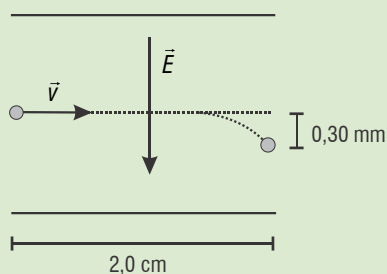
(dirigido para fora)

d. Usando a lei de Gauss para um ponto dentro do cilindro e distando r do centro do sistema, temos:

$$E \cdot A_{\text{SG}} = 4 \cdot \pi \cdot k \cdot |Q_{\text{INT}}|$$

Como a carga interna à superfície gaussiana é nula, temos $E=0$.

10 (ITA) Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho são ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q , e, a seguir, se deslocam no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio igual a $10 \mu\text{m}$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20 \text{ m/s}$ entre placas de comprimento igual a $2,0 \text{ cm}$, no interior das quais existe um campo elétrico vertical uniforme, cujo módulo é $E = 8,0 \times 10^4 \text{ N/C}$ (veja figura). Considerando que a densidade da gota seja de 1.000 kg/m^3 e sabendo que esta sofre um desvio de $0,30 \text{ mm}$ ao atingir o final do percurso, determine o módulo da sua carga elétrica. Considere $\pi = 3$.



Solução:

Notamos que a gota sofre um desvio para baixo graças à existência de um campo elétrico uniforme. Assim, como a força elétrica tem o mesmo sentido do campo, conclui-se que a gota tem carga elétrica positiva.

Além disso, desconsiderando o efeito gravitacional sobre a gota, a única força sofrida por ela será a força elétrica. Portanto, na direção horizontal temos movimento uniforme:

$$x = v_x \cdot t \Rightarrow t = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{20} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Na direção vertical, temos uma situação de queda livre:

$$y = \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot (0,3 \cdot 10^{-3})}{(1 \cdot 10^{-3})^2} = 6 \cdot 10^2 \text{ m/s}^2$$

Ainda na vertical sabemos que: $F_{\text{RES}} = F_E$

$$m \cdot a = |q| \cdot E \Rightarrow |q| = \frac{d \cdot V \cdot a}{E} = \frac{(1 \cdot 10^3) \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (10 \cdot 10^{-6})^3 \cdot 6 \cdot 10^2}{8 \cdot 10^4} \Rightarrow q = 3 \cdot 10^{-14} \text{ C}$$

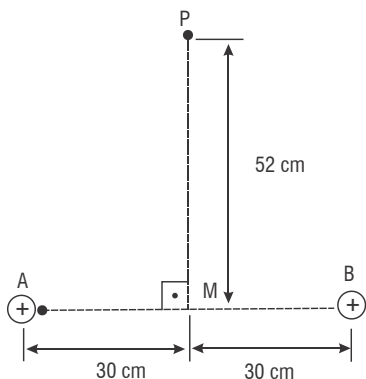
EXERCÍCIOS NÍVEL 1

01 (Mackenzie-SP) A intensidade do campo elétrico num ponto situado a $3,0 \text{ mm}$ de uma carga elétrica puntiforme Q igual a $2,7 \mu\text{C}$ no vácuo ($K_0 = 9,0 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$) é:

- (A) $2,7 \cdot 10^3 \text{ N/C}$.
- (B) $8,1 \cdot 10^3 \text{ N/C}$.
- (C) $2,7 \cdot 10^9 \text{ N/C}$.
- (D) $8,1 \cdot 10^6 \text{ N/C}$.
- (E) $2,7 \cdot 10^9 \text{ N/C}$.

02 Uma partícula com massa de $5,0 \cdot 10^{-7} \text{ g}$ e carga elétrica de $+ 8,0 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ é lançada em um campo elétrico uniforme de intensidade $E = 5,0 \text{ N/C}$. Qual a aceleração que esse campo determina na partícula?

03 Em um meio onde a constante eletrostática vale $9,0 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$, são fixadas duas cargas puntiformes $Q_A = 3,2 \mu\text{C}$ e $Q_B = 2,4 \mu\text{C}$.



Observando a figura, determine a intensidade do campo elétrico resultante no ponto P , localizado na mediatriz do segmento que une as cargas Q_A e Q_B . (Utilize aproximações, se necessário.)

04 Uma esfera condutora possui uma densidade superficial de cargas uniforme de $- 5,00 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Determine a carga existente nessa esfera, sabendo que seu raio é igual a $50,0 \text{ cm}$ (adote $\pi = 3,14$).

05 Em uma certa região do espaço existe um campo elétrico uniforme de intensidade $3,6 \cdot 10^3 \text{ N/C}$. Uma carga elétrica puntiforme de $1,0 \cdot 10^{-5} \text{ C}$, colocada nessa região, sofrerá a ação de uma força de que intensidade?

06 No interior de uma esfera metálica oca, isolada, de raio interno de 60 cm e externo de 80 cm e eletrizada com carga $Q = + 8,0 \mu\text{C}$, é colocada, concentricamente a ela, outra esfera condutora, de 20 cm de raio, eletrizada com carga $q = - 4,0 \mu\text{C}$. Determine o módulo do campo elétrico:

- a. em um ponto A distante 40 cm do centro das esferas;
- b. em um ponto B distante 70 cm do centro das esferas;
- c. em um ponto C , externo à esfera maior, distante 100 cm do centro das esferas;
- d. no ponto C do item anterior, após ligar-se a esfera maior à Terra.

Dado: constante eletrostática do meio $K = 1,0 \cdot 10^{10} \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$.

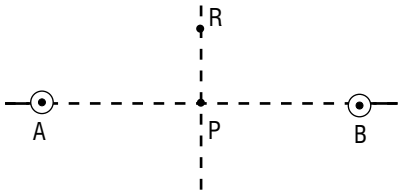
07 Os pontos de uma determinada região do espaço estão sob a ação única de uma carga positiva pontual Q . Sabe-se que em um ponto A , distante 2 m da carga Q , a intensidade do campo elétrico é igual a $1,8 \cdot 10^4 \text{ N/C}$. Determine:

- a. o valor da carga elétrica Q ;
 - b. a intensidade do campo elétrico em um ponto B , situado a 30 cm da carga fonte Q .
- (Dado: constante eletrostática do meio $= 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$.)

08 Uma carga puntiforme de $+3,0 \mu\text{C}$ é colocada em um ponto P de um campo elétrico gerado por uma partícula eletrizada com carga desconhecida Q , ficando sujeita a uma força de atração de módulo 18 N . Sabe-se que o meio é o vácuo ($K_0 = 9,0 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$). Determine:

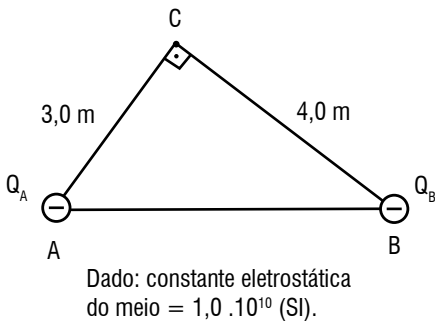
- a intensidade do campo elétrico no ponto P ;
- a carga fonte Q , sabendo que o ponto P está a 30 cm dela.

09 (FUVEST-SP) Há duas pequenas esferas A e B , condutoras, descarregadas e isoladas uma da outra. Seus centros estão distantes entre si de 20 cm . Cerca de $5,0 \cdot 10^6$ elétrons são retirados da esfera A e transferidos para a esfera B . Considere a carga do elétron igual a $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ e a constante eletrostática do meio igual a $9,0 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$.



- Qual o valor do campo elétrico em P ?
- Qual a direção do campo elétrico em um ponto R sobre a mediatriz do segmento AB ?

10 Nos vértices agudos de um triângulo retângulo são colocadas duas partículas eletrizadas, A e B , com cargas $Q_A = -7,2 \mu\text{C}$ e $Q_B = -9,6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. A situação descrita é representada na figura a seguir, em que encontramos os dados complementares. Determine:



- a intensidade do campo elétrico resultante no ponto C ;
- o módulo da força resultante que esse campo aplicaria em uma carga de prova de $+2 \mu\text{C}$, se esta fosse colocada no ponto C .

11 (UFJF-MG) Um pêndulo simples é construído com uma esfera metálica de massa $m = 1,0 \times 10^{-4} \text{ kg}$ carregada com uma carga elétrica de $3,0 \times 10^{-5} \text{ C}$ e um fio isolante de comprimento $\ell = 1,0 \text{ m}$ de massa desprezível. Esse pêndulo oscila com período P em um local em que $g = 10,0 \text{ m/s}^2$. Quando um campo elétrico uniforme e constante \vec{E} é aplicado verticalmente em toda a região do pêndulo, o seu período dobra de valor. A intensidade do campo elétrico \vec{E} é de:

- $6,7 \times 10^3 \text{ N/C}$.
- 42 N/C .
- $6,0 \times 10^{-6} \text{ N/C}$.
- 33 N/C .
- 25 N/C .

12 Uma esfera metálica oca de raio interno igual a 80 cm e raio externo igual a $1,0 \text{ m}$ é eletrizada com carga de $+5,0 \mu\text{C}$. No seu interior, concêntrica a ela, existe uma outra esfera metálica maciça de 40 cm de raio e eletrizada com carga de $-2,0 \mu\text{C}$.

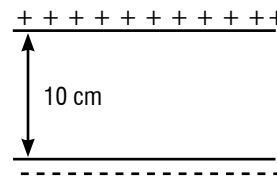
Determine a intensidade do campo elétrico em um ponto P :

- situado a 50 cm do centro das esferas;
- situado a 90 cm do centro das esferas;
- situado a 50 cm do centro das esferas, após ter-se ligado a esfera interna à superfície interna da outra esfera através de um fio condutor.

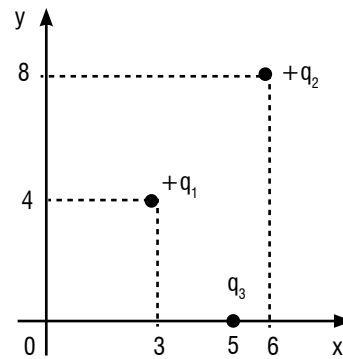
Dado: constante eletrostática do meio $= 1,0 \cdot 10^{10} \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$.

13 Uma placa plana de grandes dimensões é eletrizada uniformemente, ficando com uma densidade superficial de carga igual a $177 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$. Nas proximidades dessa placa, é colocada uma pequena esfera de $2,0 \text{ g}$ de massa e eletrizada com carga positiva q . Determine a carga q , sabendo que a pequena esfera permanece em repouso no local onde foi colocada. Adote, nos cálculos, permissividade absoluta do meio: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ (SI)}$ e aceleração gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

14 (FEI-SP) A figura abaixo mostra duas películas planas de cargas elétricas de sinais opostos, mas de mesma densidade superficial. Um elétron parte do repouso da película negativa e atinge a película oposta em $5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. Calcule a intensidade do campo elétrico. (Dados: $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ e $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.)



15 (ITA) Três cargas, q_1 e q_2 , iguais e positivas, e q_3 , estão dispostas conforme a figura:



Calcule a relação entre q_3 e q_1 , para que o campo elétrico na origem do sistema seja paralelo a y :

- $-5/4$.
- $5\sqrt{2}/8$.
- $-3/4$.
- $4/3$.
- $\sqrt{3}/2$.

16 (ITA) Uma carga q distribui-se uniformemente na superfície de uma esfera condutora, isolada, de raio R . Assinale a opção que apresenta a magnitude do campo elétrico e o potencial elétrico em um ponto situado a uma distância $r = R/3$ do centro da esfera.

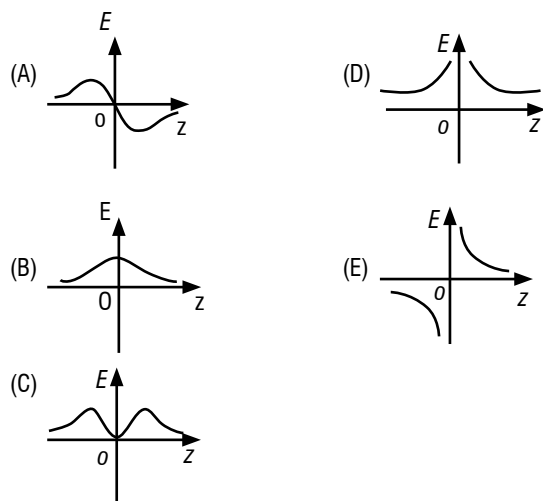
- $E = 0 \text{ V/m}$ e $U = 0 \text{ V}$
- $E = 0 \text{ V/m}$ e $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$.

(C) $E = 0 \text{ V/m}$ e $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{R}$.

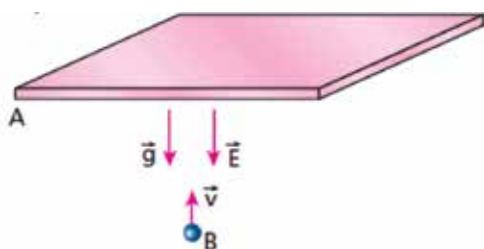
(D) $E = 0 \text{ V/m}$ e $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^2}$.

(E) $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{rq}{R^3}$ e $U = 0 \text{ V}$.

17 Duas partículas fixas no laboratório têm cargas elétricas $+q$ e $-q$, respectivamente. Qual dos gráficos abaixo melhor representa a variação do módulo do campo elétrico produzido por estas cargas, em função da coordenada z , medida ao longo da reta mediatriz do segmento que une as cargas?



18 (UFBA) A figura abaixo representa uma placa condutora A , eletricamente carregada, que gera um campo elétrico uniforme E , de módulo igual a $6 \cdot 10^4 \text{ N/C}$. A bolinha B , de 10 g de massa e carga negativa igual a $-1 \mu\text{C}$, é lançada verticalmente para cima, com velocidade de módulo igual a 6 m/s . Considere que o módulo da aceleração da gravidade local vale 10 m/s^2 , que não há colisão entre a bolinha e a placa, e despreze a resistência do ar. Determine o tempo, em segundos, necessário para a bolinha retornar ao ponto de lançamento.

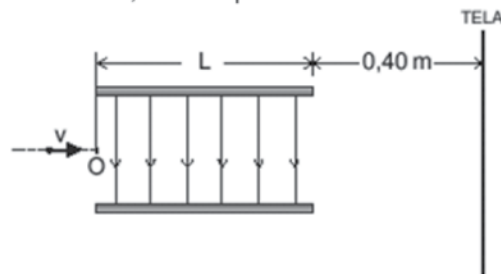


19 (Cesgranrio-RJ) Um sistema tridimensional de coordenadas ortogonais, graduadas em metros, encontra-se em um meio cuja constante eletrostática é $1,3 \cdot 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$. Nesse meio, há apenas três cargas positivas pontiformes Q_1, Q_2 e Q_3 , todas com carga igual a $1,44 \cdot 10^{-4} \text{ C}$. Essas cargas estão fixas, respectivamente, nos pontos $(0,b,c)$, $(a,0,c)$ e $(a,b,0)$. Os números a, b e c ($c < a < b$) são as raízes da equação $x^3 - 19x^2 + 96x - 144 = 0$.

O vetor campo elétrico resultante no ponto (a,b,c) é paralelo ao vetor:

- (A) $(1,5,9)$.
- (B) $(5,9,16)$.
- (C) $(5,12,13)$.
- (D) $(9,16,1)$.
- (E) $(9,1,16)$.

20 (UFF-RJ) A figura representa duas placas metálicas paralelas de largura $L = 1,0 \times 10^{-2} \text{ m}$, entre as quais é criado um campo elétrico uniforme, vertical, perpendicular às placas, dirigido para baixo e de módulo $E = 1,0 \times 10^4 \text{ m}$. Um elétron incide no ponto O , com velocidade horizontal $v = 1,0 \times 10^7 \text{ m/s}$, percorrendo a região entre as placas. Após emergir desta região, o elétron atingirá uma tela vertical situada à distância de $0,40 \text{ m}$ das placas.



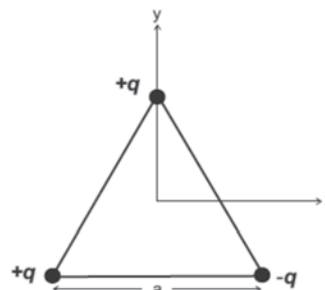
Dados: massa do elétron = $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
 carga do elétron = $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Considerando desprezíveis o campo elétrico na região externa às placas e a ação gravitacional, calcule:

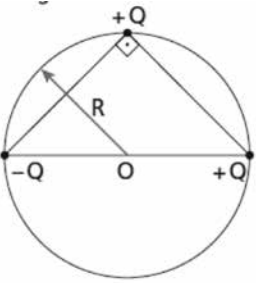
- (A) o módulo da força elétrica que atua no elétron entre as placas;
- (B) o tempo que o elétron leva para emergir da região entre as placas;
- (C) o deslocamento vertical que o elétron sofre ao percorrer sua trajetória na região entre as placas;
- (D) as componentes horizontal e vertical da velocidade do elétron no instante em que ele emerge da região entre as placas;
- (E) o deslocamento vertical que o elétron sofre no seu percurso desde o ponto O até atingir a tela.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Três cargas, $+q, +q$ e $-q$ estão situadas nos vértices de um triângulo equilátero com lados iguais a a , como mostrado na figura. Calcule a magnitude e indique a direção do campo elétrico no centro do triângulo.

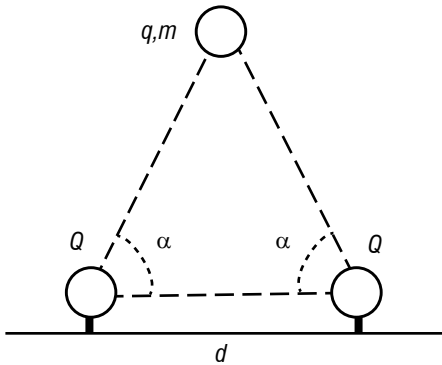


02 (UFG-GO) Nos vértices de um triângulo retângulo isósceles, inscrito numa circunferência de raio R , são colocadas três cargas pontuais, como mostra a figura a seguir.



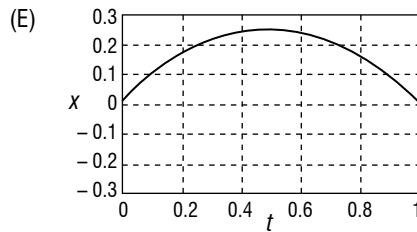
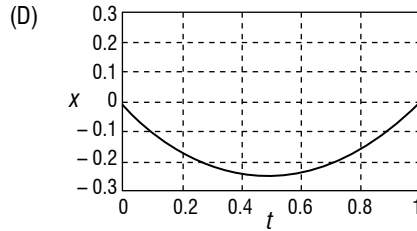
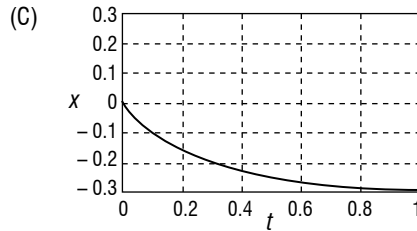
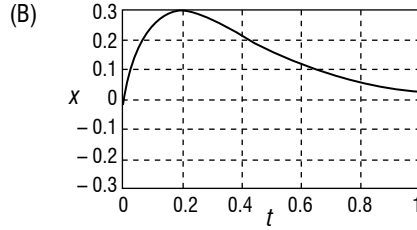
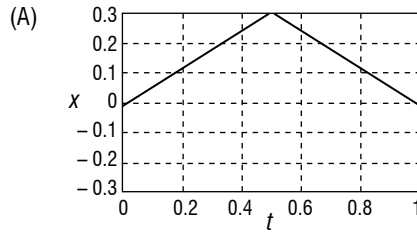
Determine a posição e o valor de uma quarta carga positiva, em termos de Q , que deverá ser colocada sobre a linha da circunferência para que o campo elétrico no centro dela seja nulo.

03 (ITA 96/97) Uma pequena esfera de massa m e carga q , sob a influência da gravidade e da interação eletrostática, encontra-se suspensa por duas cargas Q fixas, colocadas a uma distância d no plano horizontal, como mostrado na figura. Considere que a esfera e as duas cargas fixas estejam no mesmo plano vertical, e que sejam iguais a α os respectivos ângulos entre a horizontal e cada reta passando pelos centros das cargas fixas e da esfera. A massa da esfera é, então:



- (A) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \frac{Q}{d^2} \cdot \frac{(\cos^2 \alpha)}{g}$
- (B) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \frac{Q}{d} \cdot \frac{(\text{sen}\alpha)}{g}$
- (C) $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \frac{Q}{d^2} \cdot \frac{(\cos^2 \alpha)}{g}$
- (D) $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \frac{Q}{d^2} \cdot \frac{(\cos^2 \alpha \text{sen}\alpha)}{g}$
- (E) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \frac{Q}{d^2} \cdot \frac{(\cos^2 \alpha \text{sen}^2 \alpha)}{g}$

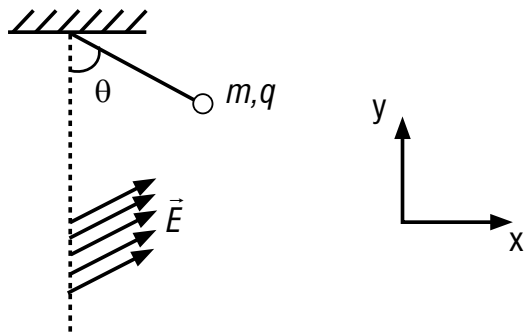
04 (ITA 08/09) Uma partícula carregada negativamente está se movendo na direção $+x$ quando entra em um campo elétrico uniforme atuando nessa mesma direção e sentido. Considerando que sua posição em $t = 0$ s é $x = 0$ m, qual gráfico representa melhor a posição da partícula como função do tempo durante o primeiro segundo?



05 Em uma região do espaço onde existe um campo elétrico uniforme \vec{E} , dois pêndulos simples de massas $m = 0,20$ kg e comprimento ℓ são postos a oscilar. A massa do primeiro pêndulo está carregada com $q_1 = +0,20$ C e a massa do segundo pêndulo, com $q_2 = -0,20$ C. São dados que a aceleração da gravidade local é $g = 10,0$ m/s², que o campo elétrico tem mesma direção e mesmo sentido que \vec{g} e sua intensidade é $|\vec{E}| = 6,0$ V/m. Qual a razão (p_1/p_2) , entre os períodos p_1 e p_2 dos pêndulos 1 e 2?

- (A) 1/4.
- (B) 1/2.
- (C) 1.
- (D) 2.
- (E) 4.

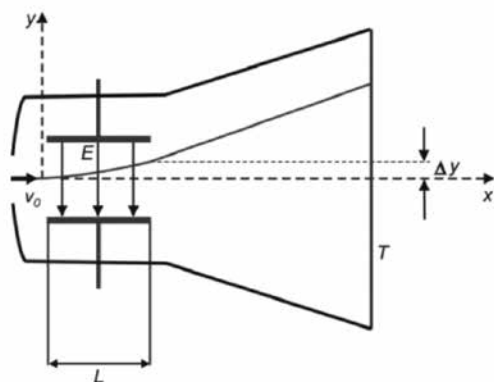
06 Uma esfera homogênea de carga q e massa m de 2 g está suspensa por um fio de massa desprezível em um campo elétrico cujas componentes x e y têm intensidades $E_x = \sqrt{3} \cdot 10^5$ N/C e $E_y = 1 \cdot 10^5$ N/C, respectivamente, como mostra a figura a seguir:



Considerando que a esfera está em equilíbrio para $\theta = 60^\circ$, qual a força de tração no fio?

- (A) $9,80 \cdot 10^{-3}$ N.
- (B) $1,96 \cdot 10^{-2}$ N.
- (C) Nula.
- (D) $1,70 \cdot 10^{-3}$ N.
- (E) $7,17 \cdot 10^{-3}$ N.

07 (Fuvest-SP) Um equipamento, como o esquematizado na figura abaixo, foi utilizado por J.J.Thomson, no final do século XIX, para o estudo de raios catódicos em vácuo. Um feixe fino de elétrons (cada elétron tem massa m e carga $-e$) com velocidade de módulo v_0 , na direção horizontal x , atravessa a região entre um par de placas paralelas, horizontais, de comprimento L . Entre as placas, há um campo elétrico de módulo constante E na direção vertical y . Após saírem da região entre as placas, os elétrons descrevem uma trajetória retilínea até a tela fluorescente T .



Determine:

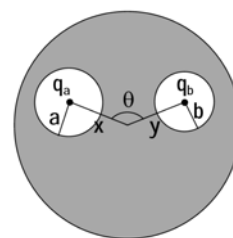
- a. o módulo a da aceleração dos elétrons enquanto estão entre as placas;
- b. o intervalo de tempo Δt que os elétrons permanecem entre as placas;
- c. o desvio Δy na trajetória dos elétrons, na direção vertical, ao final de seu movimento entre as placas;
- d. a componente vertical v_y da velocidade dos elétrons ao saírem da região entre as placas.

Note e adote:
Ignore os efeitos de borda no campo elétrico.
Ignore efeitos gravitacionais.

08 (UFC-CE) Uma partícula de massa m e carga elétrica q é largada do repouso de uma altura $9H$, acima do solo. Do solo até uma altura $h' = 5H$, existe um campo elétrico horizontal de módulo constante E . Considere a gravidade local de módulo constante g , a superfície do solo horizontal e despreze quaisquer efeitos de dissipação de energia. Determine:

- a. o tempo gasto pela partícula para atingir a altura h' ;
- b. o tempo gasto pela partícula para atingir o solo;
- c. o tempo gasto pela partícula sob ação do campo elétrico;
- d. o módulo do deslocamento horizontal da partícula, desde o instante em que a partícula é largada até o instante em que a partícula atinge o solo.

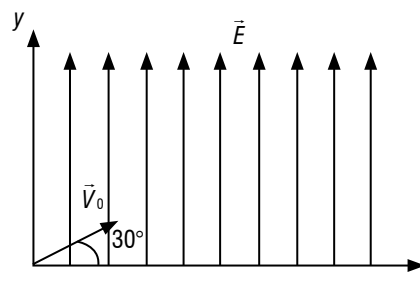
09 (ITA 09/10) Uma esfera condutora de raio R possui no seu interior duas cavidades esféricas, de raio a e b , respectivamente, conforme mostra a figura. No centro de uma cavidade há uma carga pontual q_a e no centro da outra, uma carga também pontual q_b , cada qual distando do centro da esfera condutora de x e y , respectivamente. É correto afirmar que:



- (A) a força entre as cargas q_a e q_b é $k_0 \cdot q_a \cdot q_b / (x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta)$.
- (B) a força entre as cargas q_a e q_b é nula.
- (C) não é possível determinar a força entre as cargas, pois não há dados suficientes.
- (D) se nas proximidades do condutor houvesse uma terceira carga, q_c , esta não sentiria força alguma.
- (E) se nas proximidades do condutor houvesse uma terceira carga, q_c , a força entre q_a e q_b seria alterada.

10 Três cargas positivas iguais a q localizam-se nos vértices de um triângulo equilátero. Os lados do triângulo são iguais a a . Encontre a intensidade do campo no vértice de um tetraedro regular que tenha como base esse triângulo.

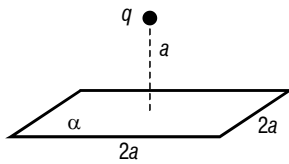
11 (ITA 98/99) No instante $t = 0$ s, um elétron é projetado em um ângulo de 30° em relação ao eixo x , com velocidade v_0 de $4 \cdot 10^5$ m/s, conforme o esquema a seguir.



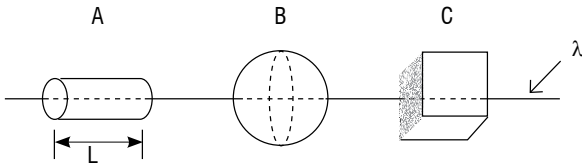
Considerando que o elétron se move num campo elétrico constante $E = 100$ N/C, o tempo que o elétron levará para cruzar novamente o eixo x é de:

- (A) 10 ns.
- (B) 15 ns.
- (C) 23 ns.
- (D) 12 ns.
- (E) 18 ns.

12 (Saraeva) Uma carga puntiforme q foi colocada simetricamente a uma distância a , sobre um plano quadrangular α de aresta $2a$. Determine o fluxo elétrico sobre este plano.



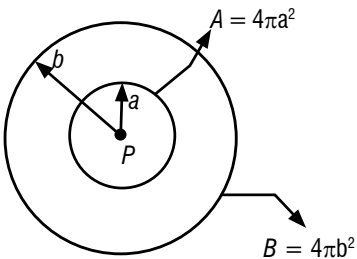
13 (ITA 99/00) Um fio de densidade linear de carga positiva λ atravessa três superfícies fechadas A, B e C, de formas respectivamente cilíndrica, esférica e cúbica, como mostra a figura. Sabe-se que A tem comprimento $L =$ diâmetro de $B =$ comprimento de um lado de C, e que raio da base de A é a metade do raio da esfera B.



Sobre o fluxo do campo elétrico, ϕ , através de cada superfície fechada, pode-se concluir que:

- (A) $\phi_A = \phi_B = \phi_C$
- (B) $\phi_A > \phi_B > \phi_C$
- (C) $\phi_A < \phi_B < \phi_C$
- (D) $\phi_A/2 = \phi_B = \phi_C$
- (E) $\phi_A = 2\phi_B = \phi_C$

14 (ITA 98/99) Uma carga pontual P é mostrada na figura adiante com duas superfícies gaussianas A e B, de raios a e $b=2a$, respectivamente. Sobre o fluxo elétrico que passa pelas superfícies de áreas A e B, pode-se concluir que:



- (A) o fluxo elétrico que atravessa a área B é duas vezes maior que o fluxo que passa pela área A.
- (B) o fluxo elétrico que atravessa a área B é a metade do fluxo que passa pela área A.
- (C) o fluxo elétrico que atravessa a área B é $\frac{1}{4}$ do fluxo que passa pela área A.
- (D) o fluxo elétrico que atravessa a área B é quatro vezes maior que o fluxo que passa pela área A.
- (E) o fluxo elétrico que atravessa a área B é igual ao fluxo que atravessa a área A.

15 Suponha que cargas positivas são distribuídas uniformemente em um volume esférico de raio R , de material isolante, sendo ρ a carga por unidade de volume.

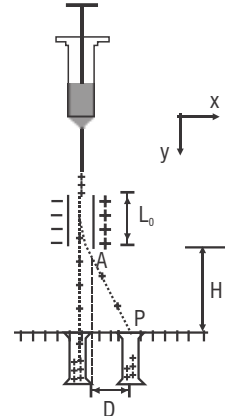
- a. Use a Lei de Gauss para provar que a intensidade do campo elétrico no interior do volume, a uma distância r do centro, é $E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$.
- b. Qual o campo elétrico em um ponto externo, a uma distância r do centro? Expresse sua resposta em termos da carga total q do volume esférico.

- c. Compare as respostas de (A) e (B), quando $r = R$.
- d. Faça um gráfico do módulo de E em função de r , de $r = 0$ a $r = 3R$.

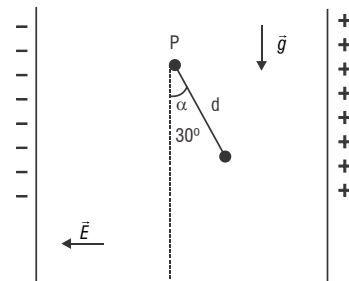
16 (Fuvest-SP) Um selecionador eletrostático de células biológicas produz, a partir da extremidade de um funil, um jato de gotas com velocidade V constante. As gotas, contendo as células que se quer separar, são eletrizadas. As células selecionadas, do tipo K, em gotas de massa M e eletrizadas com carga $-Q$, são desviadas por um campo elétrico uniforme E , criado por duas placas paralelas carregadas, de comprimento L . Essas células são recolhidas no recipiente colocado em P, como na figura.

Para as gotas contendo células do tipo K, utilizando em suas respostas apenas Q, M, E, L, H e V , determine:

- a. a aceleração horizontal A_x dessas gotas, quando elas estão entre as placas;
- b. a componente horizontal V_x da velocidade com que essas gotas saem, no ponto A, da região entre as placas;
- c. a distância D , indicada no esquema, que caracteriza a posição em que essas gotas devem ser recolhidas. (Nas condições dadas, os efeitos gravitacionais podem ser desprezados).



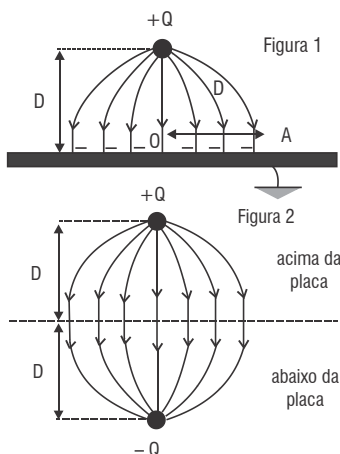
17 (Fuvest-SP) Um pêndulo, constituído de uma pequena esfera, com carga elétrica $q = 2,0 \cdot 10^{-9}C$ e massa $m = 3\sqrt{3} \cdot 10^{-4} kg$, ligada a uma haste eletricamente isolante, de comprimento $d = 0,40 m$, e massa desprezível, é colocado em um campo elétrico constante E ($|E| = 1,5 \cdot 10^6 N/C$). Esse campo é criado por duas placas condutoras verticais, carregadas eletricamente. O pêndulo é solto na posição em que a haste forma um ângulo $\alpha = 30^\circ$ com a vertical (ver figura) e, assim, ele passa a oscilar em torno de uma posição de equilíbrio. São dados $\sin 30^\circ = 1/2$; $\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$; $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$. Na situação apresentada, considerando-se desprezíveis os atritos, determine:



- a. Os valores dos ângulos α_1 , que a haste forma com a vertical, na posição de equilíbrio, e α_2 , que a haste forma com a vertical na posição de máximo deslocamento angular;
- b. A energia cinética K , da esfera, quando ela passa pela posição de equilíbrio.

18 (Fuvest-SP) Uma pequena esfera, com carga elétrica positiva $Q = 1,5 \cdot 10^{-9}C$, está a uma altura $D = 0,05 m$ acima da superfície de uma grande placa condutora, ligada à Terra, induzindo sobre essa superfície cargas negativas, como na figura 1. O conjunto dessas cargas estabelece um campo elétrico que é idêntico, apenas na parte do espaço acima da placa, ao campo gerado por uma carga $+Q$ e uma carga $-Q$, como se fosse uma "imagem" de Q que estivesse colocada na posição representada na figura 2.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3



- Determine a intensidade da força F , em N , que age sobre a carga $+Q$, devida às cargas induzidas na placa.
- Determine a intensidade do campo elétrico E , em V/m , que as cargas negativas induzidas na placa criam no ponto onde se encontra a carga $+Q$.
- Represente, no diagrama da folha de resposta, no ponto A , os vetores campo elétrico E_+ e E_- causados, respectivamente, pela carga $+Q$ e pelas cargas induzidas na placa, bem como o campo resultante, E_A . O ponto A está a uma distância D do ponto O da figura e muito próximo à placa, mas acima dela.
- Determine a intensidade do campo elétrico resultante E_A , em V/m , no ponto A .

19 (UFC-CE) Duas partículas carregadas, uma com massa M e carga $+Q$ e a outra, com massa m e carga $-q$, são colocadas em uma região onde existe um campo elétrico constante e uniforme E . Depois que as partículas são soltas, observa-se que a distância L entre elas permanece constante.

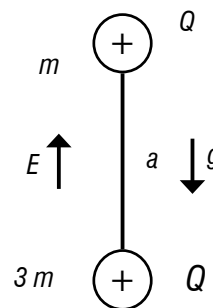
- Considere uma dada orientação para o campo e descreva a configuração das partículas para que L permaneça constante.
- Se $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ache uma expressão para a distância L em função de k, E, q, Q, m e M .

20 (UFRJ) Uma partícula com carga positiva $q = 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ é mantida em repouso diante de uma esfera maciça condutora isolada de raio $0,10 \text{ m}$ e carga total nula. A partícula encontra-se a uma distância de $0,20 \text{ m}$ do centro da esfera, conforme ilustra a figura a seguir. A esfera e as cargas que foram induzidas em sua superfície também se encontram em repouso, isto é, há equilíbrio eletrostático. Sabendo que a constante de proporcionalidade na lei de Coulomb é $k = 9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$, determine o módulo e indique a direção e o sentido:

- do campo elétrico no centro da esfera condutora devido à partícula de carga q ;
- do campo elétrico no centro da esfera condutora devido às cargas induzidas em sua superfície.

01 Considere dois anéis de raio r e carregados com a mesma densidade linear de carga λ (C/m), dispostos coaxialmente, com uma distância $2d$ entre os mesmos. No ponto médio entre os centros dos dois anéis coloca-se uma carga positiva $+q$ com uma massa m , permanecendo em equilíbrio. Nesta condição, a posição da carga $+q$ é alterada de uma distância $x \ll d$ ao longo da reta que passa pelos centros. Sendo a uma constante eletrostática K , mostre que o movimento da carga é harmônico simples. Se $d=r$, calcule o período desse MHS.

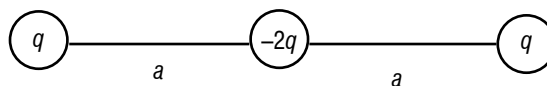
02 (UNESP-SP) Duas pequenas esferas de material plástico, com massas m e $3m$, estão conectadas por um fio de seda inextensível de comprimento a . As esferas estão eletrizadas com cargas iguais a $+Q$, desconhecidas inicialmente. Elas encontram-se no vácuo, em equilíbrio estático, em uma região com campo elétrico uniforme E , vertical, e aceleração da gravidade g , conforme ilustrado na figura. A constante eletrostática do meio é k .



Calcule:

- a carga Q , em termos de g, m e E ;
- a tração no fio, em termos de m, g, a, E e k .

03 Três cargas elétricas, de valores iguais a $q, -2q$ e q estão dispostas conforme a figura abaixo. A distância entre duas cargas consecutivas é a . Calcule o módulo do vetor campo elétrico gerado por essa configuração ao longo da direção que contém as cargas, a uma distância r da carga central, considerando $r \gg a$. A constante eletrostática do meio é K .



04 Nos primeiros anos do século XX, um dos modelos pioneiros para a estrutura do átomo foi proposto pelo físico inglês J. J. Thomson. Segundo seu modelo, um átomo era constituído por uma esfera isolante carregada positivamente com elétrons negativos espalhados no interior de seu volume, tal como passas no interior de um bolo. Considere um átomo constituído por dois elétrons, cada um com carga $-e$, espalhados no interior de uma esfera de raio R com uma carga total $+2e$ espalhada por seu volume. No equilíbrio, cada elétron está a uma distância d do centro do átomo. Calcule esse valor de d em função das outras propriedades do átomo.

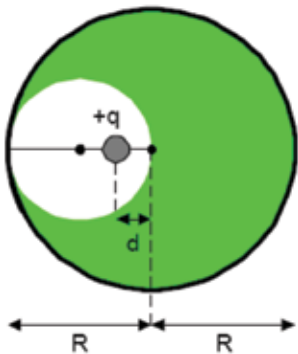
05 Faça o gráfico do campo elétrico produzido por um cilindro isolante muito longo de raio R em função da distância a seu eixo. O cilindro está carregado uniformemente, sendo ρ a densidade volumétrica de carga.

06 (Saraeva) Determinar o período das pequenas oscilações de uma molécula polar em um campo elétrico homogêneo, cuja intensidade é E . A molécula polar pode ser apresentada como um haltere de comprimento λ , nos extremos do qual se encontram massas pontuais iguais m , portadoras de carga $+q$ e $-q$ correspondentemente.

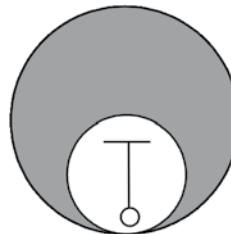
07 Uma carga de $-1 \mu\text{C}$ e massa igual a 10 g é lançada em uma região onde existe um campo elétrico $\vec{E} = 10^5 \hat{z}$ (N/C) com velocidade inicial $\vec{v}_0 = (10^3, 10^3, 10^3) \text{ m/s}$. Determine:

- a. a equação da trajetória $z = z(x, y)$;
- b. o ponto no qual a partícula atinge a altura máxima.

08 Uma esfera maciça isolante de raio R , eletrizada positivamente com densidade volumétrica de cargas $+\rho$, tem em seu interior uma cavidade vazia de diâmetro R . Uma carga puntiforme $+q$ foi posicionada no interior da cavidade a uma distância $d < R/4$ do centro da esfera, num meio de permissividade elétrica ϵ . A intensidade da força elétrica que atuará na carga puntiforme $+q$ será:



09 Em uma esfera isolante de raio R e densidade volumétrica de carga ρ foi feita uma cavidade esférica de diâmetro R que tangencia a esfera isolante. Dentro dessa cavidade é inserido um pêndulo simples carregado eletricamente e seu período se reduz a um terço do que era antes, ao oscilar sujeito apenas ao campo gravitacional. Sabe-se que a massa da esfera pendular é m , a gravidade local é g e a permissividade elétrica no interior da cavidade é ϵ . Qual a carga elétrica da esfera?



Período de um pêndulo simples: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a}}$, onde l é o comprimento do fio e a é a aceleração resultante vertical desconsiderando a ação do fio.

10 Considere uma semicircunferência de raio R com carga ao longo de seu comprimento. No centro dessa semicircunferência uma carga puntiforme q com massa m está em equilíbrio sujeita apenas à força elétrica e ao seu peso. Qual o valor da densidade linear de carga λ da semicircunferência? Considere a gravidade g e a permissividade elétrica do meio ϵ_0 .

RASCUNHO