Inequações

INTRODUÇÃO

Sabemos que uma inequação é uma relação caracterizada pela presença de sinais de desigualdade: >, <, ≥ ou ≤. Vejamos alguns exemplos:

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $x - 3 > 18$.

$x - 3 > 18 \Rightarrow x > 21$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 21\}$

2º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $-2 \leq \frac{x+4}{3} < 8$.

Multiplicando-se todos os termos da inequação por 3, temos:

$-6 \leq x + 4 < 24$

Subtraindo-se 4 de todos os termos, temos:

$-10 \leq x < 20$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 \leq x < 20\}$

3º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Inicialmente, vamos calcular as raízes da função:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4 . 1 . 6 = 1$

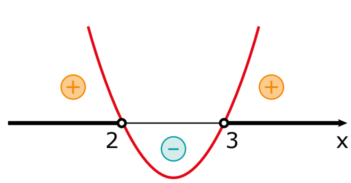
$x = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2$ ou $x_2 = 3$

Representando no gráfico, temos:

- Estudo do sinal

  $y > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ou $x > 3$

  $y < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$



Portanto, o conjunto solução é dado por:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

INEQUAÇÃO PRODUTO

Chamamos de inequação produto a toda inequação na qual o primeiro membro é formado por um produto de funções do primeiro grau e / ou funções do segundo grau, e o segundo membro é nulo.

Exemplos:

1º) $(x - 2).(x - 3) \geq 0$

2º) $(x - 1).(x^2 - 4x + 3) \geq 0$

3º) $(2x^2 - 5x).(2 + x - x^2) < 0$

Para resolver uma inequação produto, devemos estudar o sinal de cada uma das funções que estão sendo multiplicadas. Em seguida, obtemos o resultado analisando os sinais obtidos e utilizando o chamado **quadro de sinais**.

Exemplos:

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 2).(x - 3) \geq 0$.

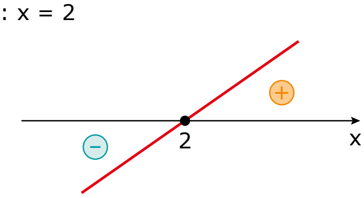
Vamos denotar cada função por y_1 e y_2 e estudar o sinal de cada uma delas.

$\overbrace{(x-2)}^{y_1}.\overbrace{(x-3)}^{y_2} \geq 0$

- Estudo do sinal de y_1

  $y_1 = x - 2$

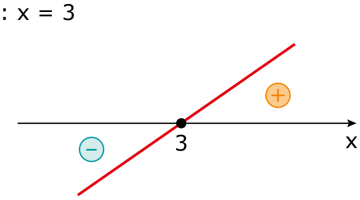
  Raiz: $x = 2$



- Estudo do sinal de y_2

  $y_2 = x - 3$

  Raiz: $x = 3$



- Quadro de sinais

	$x < 2$	2	$2 < x < 3$	3	$x > 3$
y_1	−		+		+
y_2	−		−		+
$y_1.y_2$	+		−		+

Como queremos saber em quais intervalos o produto é positivo ou igual a zero, temos:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$.

OBSERVAÇÃO

As inequações do 2º grau que possuam raízes reais podem ser fatoradas e, portanto, transformadas em inequações produto. Nesse caso, podem ser resolvidas como descrito anteriormente. Por exemplo, a inequação $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ pode ser escrita na forma $(x - 2)(x - 3) \geq 0$ e resolvida com o uso do quadro de sinais.

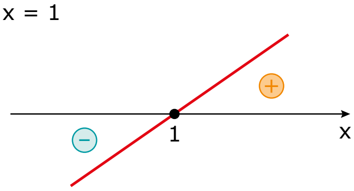
2º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 1).(x^2 - 4x + 3) \geq 0$.

$$\overbrace{(x-1)}^{y_1}.\overbrace{(x^2-4x+3)}^{y_2} \geq 0$$

- Estudo do sinal de y_1

$y_1 = x - 1$

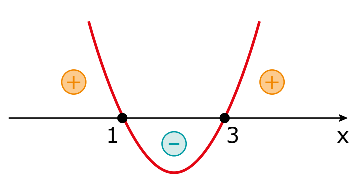
Raiz: $x = 1$



- Estudo do sinal de y_2

$y_2 = x^2 - 4x + 3$

Raízes: $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$



- Quadro de sinais

	$x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$x > 3$
y_1	−		+		+
y_2	+		−		+
$y_1.y_2$	−		−		+

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ ou } x \geq 3\}$.

3º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(2x^2 - 5x).(2 + x - x^2) < 0$.

$$\overbrace{(2x^2-5x)}^{y_1}.\overbrace{(2+x-x^2)}^{y_2} < 0$$

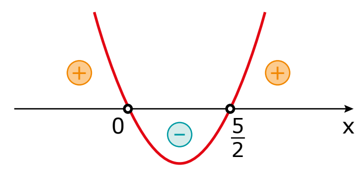
- Estudo do sinal de y_1

$y_1 = 2x^2 - 5x$

Raízes: $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{5}{2}$.

$y_1 > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > \frac{5}{2}$

$y_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{5}{2}$



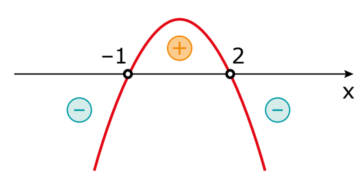
- Estudo do sinal de y_2

$y_2 = 2 + x - x^2$

Raízes: $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$

$y_2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$

$y_2 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 2$



- Quadro de sinais

	$x < -1$	−1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < \frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$x > \frac{5}{2}$
y_1	+		+		−		−		+
y_2	−		+		+		−		−
$y_1.y_2$	−		+		−		+		−

Queremos saber para que valores de **x** temos $y_1.y_2 < 0$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 < x < 2 \text{ ou } x > \frac{5}{2}\right\}$.

INEQUAÇÃO QUOCIENTE

Chamamos de inequação quociente a toda inequação na qual o primeiro membro é formado por uma divisão envolvendo funções do primeiro grau e / ou funções do segundo grau, e o segundo membro é nulo. Convém ressaltar que, como se trata de uma divisão, devemos verificar suas condições de existência, ou seja, o denominador não pode ser nulo.

Exemplos:

1º) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} \leq 0$ **2º)** $\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 6x + 9} \geq 0$

O procedimento para resolução é análogo ao adotado nas inequações produto.

Exemplos:

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} \leq 0$.

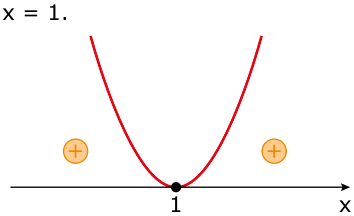
Condição de existência: $x \neq 3$

$$\frac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{y_1}}{\underbrace{x - 3}_{y_2}} \leq 0$$

- Estudo do sinal de y_1

  $y_1 = x^2 - 2x + 1$

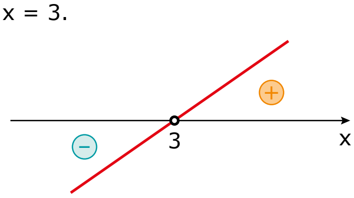
  Raiz: $x = 1$.



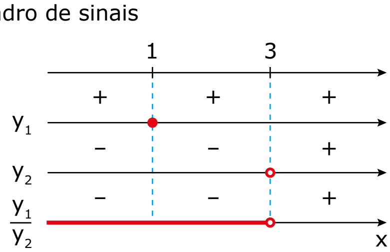
- Estudo do sinal de y_2

  $y_2 = x - 3$

  Raiz: $x = 3$.



- Quadro de sinais



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

2º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 6x + 9} \geq 0$.

$$\frac{\overbrace{x^2 - 2x - 8}^{y_1}}{\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{y_2}} \geq 0$$

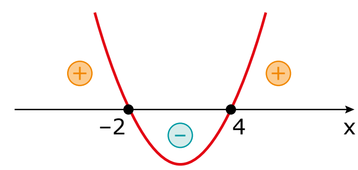
- Estudo do sinal de y_1

  $y_1 = x^2 - 2x - 8$

  $y_1 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ou $x > 4$

  $y_1 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4$

  Raízes: $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$



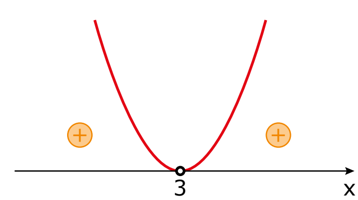
- Estudo do sinal de y_2

  $y_2 = x^2 - 6x + 9$

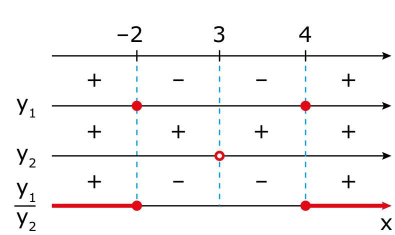
  Condição de existência: $x \neq 3$

  $y_2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

  Raízes: $x = 3$



- Quadro de sinais



Queremos saber para que valores de **x** temos

$\dfrac{y_1}{y_2} \geq 0$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2$ ou $x \geq 4\}$.

MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UERJ–2020) Um número **N**, inteiro e positivo, que satisfaz à inequação $N^2 - 17N + 16 > 0$ é:

A) 2
B) 7
C) 16
D) 17

02. MPJ6
(UFG-GO) Duas empresas **A** e **B** comercializam o mesmo produto. A relação entre o patrimônio **y** e o tempo de atividade em anos **x** de cada empresa é representada, respectivamente, por:

A: $x - 2y + 6 = 0$ e B: $x - 3y + 15 = 0$

Considerando essas relações, o patrimônio da empresa **A** será superior ao patrimônio da empresa **B** a partir de quantos anos?

A) 3 B) 5 C) 9 D) 12 E) 15

03. 9HP3
(PUC Rio) A soma dos valores inteiros que satisfazem a desigualdade $x^2 + 6x \leq -8$ é

A) –9.
B) –6.
C) 0.
D) 4.
E) 9.

04. J2ØL
(PUC Rio) Considere as funções reais $f(x) = x^2 + 4x$ e $g(x) = x$. Qual é o maior inteiro para o qual vale a desigualdade $f(x) < g(x)$?

A) –3
B) –1
C) 0
D) 3
E) 4

05. 9B1M
(IFSP) Um espião de guerra enviou ao seu comando a seguinte mensagem:

$5n + 25 > 5\,500$

$-8n + 3\,501 > 210 - 5n$

O comando sabia que a letra **n** representava o número de foguetes do inimigo. Fazendo os cálculos, é correto afirmar que o total de foguetes que o comando descobriu foi de

A) 3 000 foguetes.
B) 2 192 foguetes.
C) 1 097 foguetes.
D) 1 096 foguetes.
E) 195 foguetes.

06. VZZS
(CEFET-MG–2018) O número de soluções inteiras pertencentes ao conjunto solução da inequação $\frac{(3x-9)}{2} \cdot \frac{(x+6)}{3} < 0$ em $\mathbb{R}$ é

A) 4. B) 6. C) 8. D) 10.

07. L5I5
(PUC Rio) Considere a inequação $\frac{x+1}{-x-5} \leq 0$, com $x \in \mathbb{R}$.

Qual é o conjunto solução da inequação?

A) $(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$
B) $(-\infty, -5) \cup [-1, \infty)$
C) $[0, \infty)$
D) $[-5, \infty)$
E) $(-1, \infty)$

08. GC5V
(UESPI) Em qual dos seguintes intervalos abertos o gráfico da parábola $y = 3x^2 - 4x - 3$ fica abaixo do gráfico da parábola $y = x^2 + 3$?

A) (–1, 4)
B) (0, 5)
C) (–2, 1)
D) (–2, 4)
E) (–1, 3)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. SZA7
(PUC Rio) A soma das soluções da inequação $\frac{-x+3}{2x-1} > 0$ em que **x** pertence ao conjunto dos números naturais é

A) 3. B) 4. C) 5. D) 6. E) 8.

02. (CEFET-MG) O conjunto solução **S**, em $\mathbb{R}$, da inequação $-4.(2x-1).\left(\frac{x}{3}-1\right) > 0$ é

A) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$.
B) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 3\right\}$.
C) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$.
D) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\right\}$.

03. 6GYP
(UFU-MG) Suponha que, para realizar traduções de textos egípcios para um museu brasileiro, um tradutor **X** cobre um valor fixo de R$ 440,00, acrescido de R$ 3,20 por linha traduzida. Por outro lado, um tradutor **Y**, para executar o mesmo trabalho, cobra um fixo de R$ 800,00, mais R$ 2,30 por linha traduzida.

Nessas condições, o número que corresponde à quantidade mínima de linhas a serem traduzidas de modo que o custo seja menor se for realizado pelo tradutor **Y** é

A) um quadrado perfeito.
B) divisível por 5.
C) um número ímpar.
D) divisível por 3.

04. PJTG
(IFCE) O conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação $(5x^2 - 6x - 8)(2 - 2x) < 0$ é

A) $S = \left]-\frac{4}{5}, 2\right[\cup \left]-\infty, 1\right[$.
B) $S = \left]2, +\infty\right[\cup \left]-\frac{4}{5}, 1\right[$.
C) $S = \left]-\frac{4}{5}, 2\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.
D) $S = \left]-\infty, -\frac{4}{5}\right[\cup \left]1, 2\right[$.
E) $S = \left]-\frac{4}{5}, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[$.

05. (CEFET-MG) No conjunto dos números reais, o conjunto solução da inequação $\frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{4} > 1$ é o intervalo:

A) $]-\infty, -3[$

B) $\left]-\infty, -\frac{3}{7}\right[$

C) $\left]\frac{-3}{7}, \infty\right[$

D) $]-3, \infty[$

06. VRQ7

(Unimontes-MG) Em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de $\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2x+1}$ é:

A) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 0 \leq x < 1\right\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$

C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 1\right\}$

D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$

07. GPU7

(UERN) A soma de todos os números inteiros que satisfazem simultaneamente a inequação produto $(3x - 7)(x + 4) < 0$ e a inequação quociente $\frac{2x+1}{5-x} > 0$ é

A) 3.

B) 5.

C) 6.

D) 7.

08. BVY0

(ACAFE-SC) Uma pequena fábrica de tubos de plástico calcula a sua receita em milhares de reais, através da função $R(x) = 3{,}8x$, em que **x** representa o número de tubos vendidos. Sabendo que o custo para a produção do mesmo número de tubos é 40% da receita mais R\$ 570,00. Nessas condições, para evitar prejuízo, o número mínimo de tubos de plástico que devem ser produzidos e vendidos pertence ao intervalo:

A) [240, 248]

B) [248, 260]

C) [252, 258]

D) [255, 260]

09. 6J4Y

(Mackenzie-SP) A função $f(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{x^2+x-2}}$ tem como domínio o conjunto da solução:

A) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq -2 \text{ ou } 1 \leq x < 3\}$

B) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2 \text{ ou } 1 < x \leq 3\}$

C) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2 \text{ ou } 1 \leq x \leq 3\}$

D) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 3\}$

E) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < -1 \text{ ou } 1 < x \leq 3\}$

10. 37ZH

(UNEB-BA) Uma empresa pode gastar, no máximo, R\$ 15 000,00 para comprar 400 unidades de certo material. De determinada marca, o material custa R\$ 25,00 por unidade, e de outra, de melhor qualidade, custa R\$ 45,00 por unidade.

Efetuada a compra, tem-se que a razão entre o número de unidades compradas da melhor marca e o da marca inferior deve ser, no máximo:

A) $\frac{5}{9}$

B) $\frac{3}{5}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{5}{3}$

E) $\frac{9}{5}$

11. (UFJF-MG) Dadas as desigualdades, em $\mathbb{R}$:

I. $3x + 1 < -x + 3 \leq -2x + 5$

II. $\frac{4x-1}{x-2} \leq 1$

O menor intervalo que contém todos os valores de **x** que satisfazem, simultaneamente, às desigualdades I e II é:

A) $\left]\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right]$

B) $\left]-2, -\frac{3}{2}\right]$

C) $\left]-\infty, \frac{3}{5}\right]$

D) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$

E) $\left[\frac{4}{3}, \frac{3}{5}\right[$

12. YOPI

(Umesp) A função $f(x) = \frac{\sqrt{\frac{3x}{x+4}}}{\sqrt{4-x^2}}$ tem como domínio, no campo dos reais, os valores de **x** que se encontram na alternativa:

A) $\mathbb{R} - \{4\}$

B) $x < -4$ ou $x \geq 0$

C) $0 \leq x < 4$

D) $0 \leq x < 2$

E) $0 < x < 2$

13. (UFJF-MG–2018) Dadas as funções $f(x) = x + 3$ e $g(x) = \frac{13-9}{x+2}$, determine o maior subconjunto dos números reais tal que $f(x) > g(x)$.

A) $]5, +\infty[$

B) $]-2, 5[$

C) $]-\infty, 3[\cup]5, +\infty[$

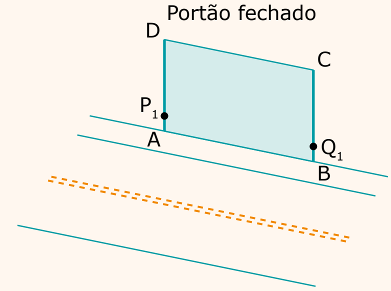
D) $]-\infty, 3[$

E) $]-2, 3[\cup]5, +\infty[$

14. 9J20

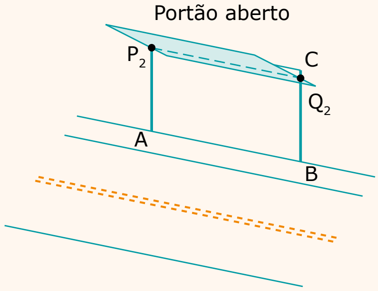
(Insper-SP) O acesso à garagem de um edifício é guardado por um portão retangular que fica normalmente fechado. Para abrir a passagem para os veículos que por ali circulam, o portão sobe e se inclina, conforme figuras a seguir:

Portão fechado



Distantes 0,5 m do nível da calçada (pontos **A** e **B**), os pontos P_1 e Q_1 indicam as posições das extremidades de um eixo que sustenta o portão.

Portão aberto



O portão, que tem 3 m de altura, sobe e, simultaneamente, gira 60 graus em torno desse eixo, até ficar totalmente aberto, suspenso nas posições indicadas por P_2 e Q_2.

O portão é feito soldando-se placas quadradas de 1 m^2, que não podem ser cortadas, e pesam 15 kg cada uma. Se o eixo que movimenta o portão pode sustentar até 250 kg, a maior largura AB que o portão pode ter é

A) 3,0 m.
B) 3,5 m.
C) 4,0 m.
D) 4,5 m.
E) 5,0 m.

15. IY2A (UEMA) Uma função consiste na associação de dois conjuntos **A** e **B** de números reais, por meio de uma lei **f**. O subconjunto dos elementos de **A** que corresponde a um, e somente um, elemento de **B** é denominado domínio da função D(f). Considerando que a expressão

$$f(x) = \sqrt{\frac{(2x^2 - 8)(x^2 + x - 6)}{x^2 + 2x - 3}}$$

é uma função, determine o domínio de f(x).

A) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1; x \leq -2 \text{ e } x \neq -3\}$
B) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1; x < -2 \text{ e } x \neq -3\}$
C) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1; x \geq -2 \text{ e } x = -3\}$
D) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1; x \leq -2 \text{ e } x = 3\}$
E) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1; x > -2 \text{ e } x \neq 3\}$

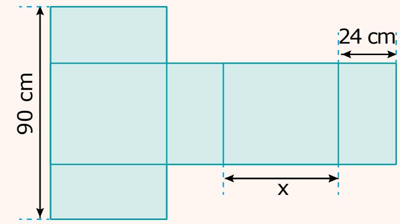
SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2018) Uma empresa de comunicação tem a tarefa de elaborar um material publicitário de um estaleiro para divulgar um novo navio, equipado com um guindaste de 15 m de altura e uma esteira de 90 m de comprimento. No desenho desse navio, a representação do guindaste deve ter sua altura entre 0,5 cm e 1 cm, enquanto a esteira deve apresentar comprimento superior a 4 cm. Todo o desenho deverá ser feito em uma escala 1 : X. Os valores possíveis para **X** são, apenas:

A) X > 1 500
B) X < 3 000
C) 1 500 < X < 2 250
D) 1 500 < X < 3 000
E) 2 250 < X < 3 000

02. (Enem) Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.

A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.



O maior valor possível para **x**, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Ana, é

A) 25.
B) 33.
C) 42.
D) 45.
E) 49.

03. (Enem) Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade **q** de produtos é dado por uma função, simbolizada por CT, enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade **q** também é uma função, simbolizada por FT. O lucro total (LT) obtido pela venda de quantidade **q** de produtos é dado pela expressão LT(q) = FT(q) – CT(q).

Considerando-se as funções FT(q) = 5q e CT(q) = 2q + 12 como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. D	03. A	05. D	07. B
02. D	04. B	06. C	08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A	05. B	09. B	13. E
02. B	06. C	10. D	14. E
03. C	07. A	11. D	15. A
04. E	08. B	12. D	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C	02. E	03. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %