Função Afim

INTRODUÇÃO

Chamamos de função polinomial do primeiro grau, ou função afim, toda função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que f(x) = ax + b, sendo **a** e **b** números reais e $a \neq 0$. O gráfico de uma função afim é uma reta.

Na função f(x) = ax + b, temos:

i) O número **a** é chamado **coeficiente angular, inclinação** ou **declividade**.

ii) O número **b** é chamado **coeficiente linear**.

Exemplos:

1º) y = 3x + 5

2º) f(x) = −4x + 17

3º) y = −8x

4º) f(x) = x − 5

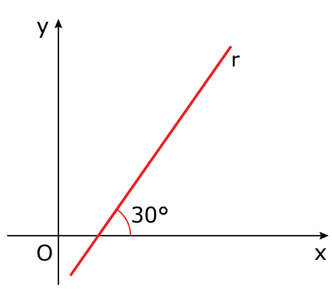
CÁLCULO DO COEFICIENTE ANGULAR

O coeficiente angular **a** é definido como a tangente do ângulo formado pela reta e pelo eixo **x**, tomado no sentido anti-horário. Esse ângulo é chamado de ângulo de inclinação.

Exemplos:

Calcular o coeficiente angular da reta **r** em cada caso.

1º)



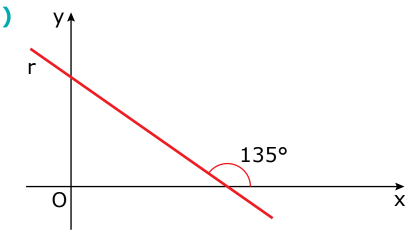
O coeficiente angular é dado por $a = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

OBSERVAÇÃO

Quando o ângulo de inclinação é agudo, sua tangente é positiva.

Assim, para a > 0, a função é **crescente**.

2º)



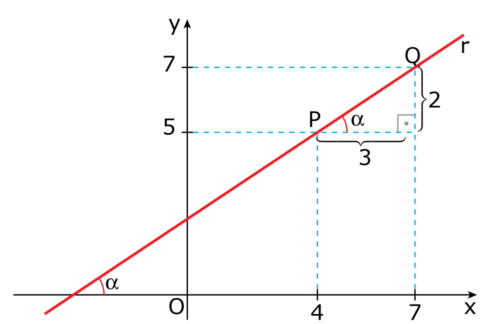
O coeficiente angular é dado por a = tg 135° = −1.

OBSERVAÇÃO

Quando o ângulo de inclinação é obtuso, sua tangente é negativa.

Assim, para a < 0, a função é **decrescente**.

3º) **r** contém os pontos P = (4, 5) e Q = (7, 7).



O ângulo de inclinação é indicado na figura por α. Assim, temos a = tg α.

Logo, a tangente do ângulo α pode ser calculada no triângulo retângulo indicado.

Daí, $\text{tg } \alpha = \frac{2}{3}$, ou seja, $a = \frac{2}{3}$.

OBSERVAÇÃO

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ dois pontos que pertencem ao gráfico de uma função afim. O coeficiente angular **a** é dado por:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ ou, então, } a = \frac{y}{x}\text{, em que } \begin{cases} \text{Dy} \to \text{variação em } \mathbf{y} \\ \text{Dx} \to \text{variação em } \mathbf{x} \end{cases}.$$

ESBOÇO DO GRÁFICO

Para esboçarmos o gráfico de uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma y = ax + b, é conveniente conhecermos os pontos de interseção desse gráfico com os eixos coordenados.

i) Interseção da reta com o eixo Oy

Fazendo x = 0, temos y = a.0 + b = b. Logo, o ponto de interseção da reta com o eixo Oy é dado pelo ponto (0, b).

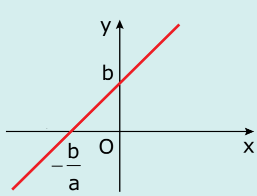
ii) Interseção da reta com o eixo Ox

Fazendo y = 0, temos 0 = ax + b, ou seja, $x = -\frac{b}{a}$.

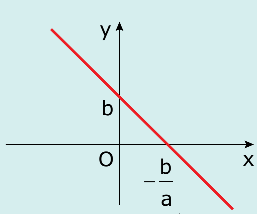
Esse valor é chamado **raiz** ou **zero** da função. Portanto, o ponto de interseção da reta com o eixo Ox é dado por $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Marcando esses pontos no sistema de coordenadas cartesianas, temos:

a > 0
(função crescente)



a < 0
(função decrescente)



Exemplo:

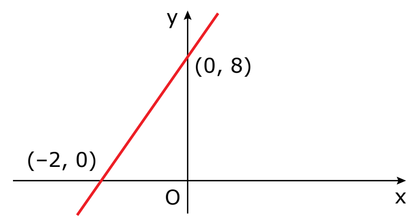
Construir o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que f(x) = 4x + 8.

Temos a = 4 e b = 8.

O número **b** indica a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo Oy. Logo, esse ponto é igual a (0, 8).

O número $-\frac{b}{a}$ indica a abscissa do ponto de interseção da reta com o eixo Ox. Temos: $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{4} = -2$. Logo, esse ponto é igual a (−2, 0).

Marcando esses pontos em um sistema de coordenadas cartesianas, basta uni-los para obter o esboço da reta.

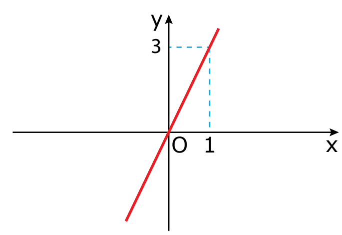


OBSERVAÇÃO

Considere uma função afim f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = ax + b. Se b = 0, a função é chamada **função linear,** e seu gráfico é uma reta passando pela origem do sistema de coordenadas.

Exemplo:

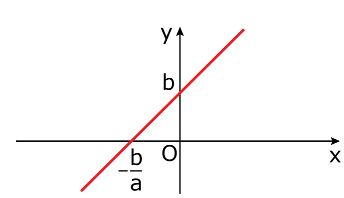
Esboçar o gráfico da função linear y = 3x.



ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

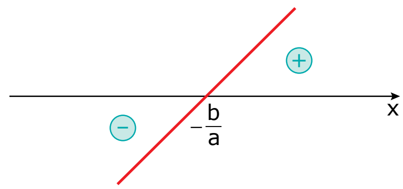
Estudar o sinal de uma função f(x) significa descobrir os valores de **x** para os quais f(x) < 0 ou f(x) = 0 ou f(x) > 0.

Como exemplo, tomemos o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que y = ax + b, com a > 0.



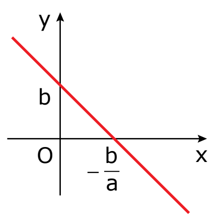
Observe que $-\frac{b}{a}$ é o ponto no qual a função é nula, ou seja, é uma raiz. Para valores de **x** menores do que a raiz, os valores correspondentes de **y** são negativos.

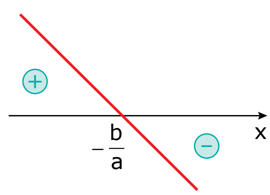
Já para valores de **x** maiores do que a raiz, os valores correspondentes de **y** são positivos**.** Indicamos esses resultados no esquema a seguir:



Os sinais **–** e **+** representam os sinais de **y** para o intervalo de **x** considerado.

Analogamente, com a < 0, observamos que, para valores de **x** menores do que a raiz, os valores correspondentes de **y** são positivos. Já para valores de **x** maiores do que a raiz, os valores correspondentes de **y** são negativos. Indicamos esses resultados no esquema a seguir:





RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES DO 1º GRAU

Exemplos:

Resolver cada inequação a seguir:

1º) $3x - 7 > 0$

$3x > 7 \Rightarrow x > \frac{7}{3}$

Conjunto solução (S): $S = \ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{7}{3}$

2º) $\frac{x-4}{3} \leq 2x - 5$

$x - 4 \leq 6x - 15 \Rightarrow -5x \leq -11$

Multiplicando os dois membros por –1, temos:

$5x \geq 11 \Rightarrow x \geq \frac{11}{5}$

$S = \ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{11}{5}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

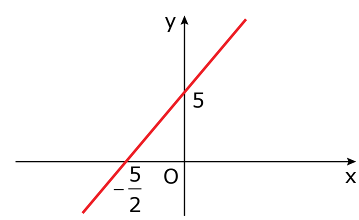
01. Encontrar a expressão matemática e fazer um esboço do gráfico da função afim que contém os pontos A = (1, 7) e B = (–3, –1).

Resolução:

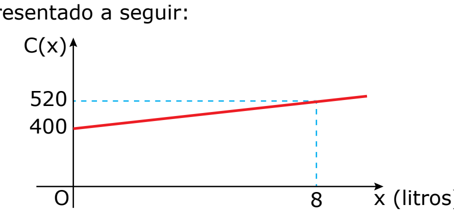
A expressão geral da função afim é dada por y = ax + b. Substituindo as coordenadas dos pontos **A** e **B**, temos o sistema linear: $\begin{matrix} a + b = 7 \\ -3a + b = -1 \end{matrix}$

Resolvendo o sistema, obtemos a = 2 e b = 5. Portanto, a expressão da função é y = 2x + 5. Para esboçarmos o seu gráfico, é necessário encontrar as suas interseções com os eixos coordenados. Fazendo x = 0, temos que y = 5. Fazendo y = 0, temos que $x = -\frac{5}{2}$ (raiz). Portanto, os pontos (0, 5) e $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ indicam as interseções com os eixos Oy e Ox, respectivamente.

Esboço do gráfico:



02. O custo **C** de produção de **x** litros de certa substância é dado por uma função afim, com x ≥ 0, cujo gráfico está representado a seguir:



Nessas condições, quantos litros devem ser produzidos de modo que o custo de produção seja igual a R$ 580,00?

Resolução:

Uma função afim é da forma C(x) = ax + b. Do gráfico, temos que C(0) = 400. Mas C(0) = b. Logo, b = 400.

Sabemos que C(8) = a.8 + b = 520. Substituindo o valor de **b**, temos $8a + 400 = 520 \Rightarrow 8a = 120 \Rightarrow a = 15$.

Portanto, o custo de produção é dado por C(x) = 15x + 400. Fazendo C(x) = 580, temos:

$15x + 400 = 580 \Rightarrow 15x = 180 \Rightarrow x = 12$

Portanto, devem ser produzidos 12 litros.

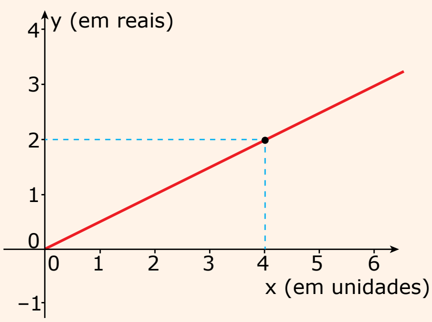
EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (FGV-SP) Uma função polinomial **f** do 1º grau é tal que f(3) = 6 e f(4) = 8. Portanto, o valor de f(10) é:

A) 16.
B) 17.
C) 18.
D) 19.
E) 20.

02. N8J2 (IFSP–2016) O gráfico a seguir apresenta informações sobre a relação entre a quantidade comprada **x** e o valor total pago **y** para um determinado produto que é comercializado para revendedores.



Um comerciante que pretende comprar 2 350 unidades desse produto para revender pagará, nessa compra, o valor total de

A) R$ 4 700,00.
B) R$ 2 700,00.
C) R$ 3 175,00.
D) R$ 8 000,00.
E) R$ 1 175,00.

03. 4NR3 (PUC Minas–2015) A função linear R(t) = at + b expressa o rendimento **R**, em milhares de reais, de certa aplicação. O tempo **t** é contado em meses, R(1) = –1 e R(2) = 1. Nessas condições, o rendimento obtido nessa aplicação, em quatro meses, é

A) R$ 3 500,00.
B) R$ 4 000,00.
C) R$ 5 000,00.
D) R$ 5 500,00.

04. V3D7 (Unicamp-SP) Em determinada região do planeta, a temperatura média anual subiu de 13,35 °C em 1995 para 13,8 °C em 2010. Seguindo a tendência de aumento linear observada entre 1995 e 2010, a temperatura média em 2012 deverá ser de

A) 13,83 °C.
B) 13,86 °C.
C) 13,92 °C.
D) 13,89 °C.

05. (UFG-GO) Para uma certa espécie de grilo, o número **N**, que representa os cricrilados por minuto, depende da temperatura ambiente **T**. Uma boa aproximação para essa relação é dada pela lei de Dolbear, expressa na fórmula N = 7T – 30, com **T** em graus Celsius. Um desses grilos fez sua morada no quarto de um vestibulando às vésperas de suas provas. Com o intuito de diminuir o incômodo causado pelo barulho do inseto, o vestibulando ligou o condicionador de ar, baixando a temperatura do quarto para 15 °C, o que reduziu pela metade o número de cricrilados por minuto.

Assim, a temperatura, em graus Celsius, no momento em que o condicionador de ar foi ligado era, aproximadamente, de:

A) 75.
B) 36.
C) 30.
D) 26.
E) 20.

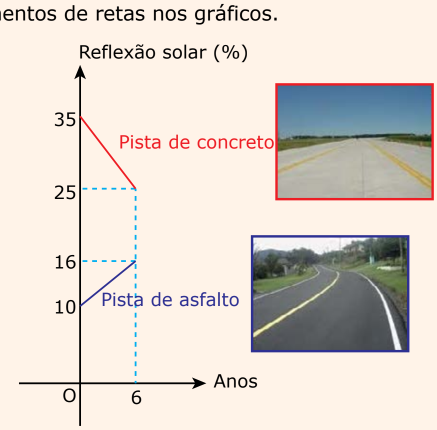
06. X2MT (UCS-RS) O salário mensal de um vendedor é de R$ 750,00 fixos mais 2,5% sobre o valor total, em reais, das vendas que ele efetuar durante o mês. Em um mês em que suas vendas totalizarem **x** reais, o salário do vendedor será dado pela expressão:

A) 750 + 2,5x
B) 750 + 0,25x
C) 750,25x
D) 750(0,25x)
E) 750 + 0,025x

07. ELTC (Unesp) A unidade usual de medida para a energia contida nos alimentos é kcal (quilocaloria). Uma fórmula aproximada para o consumo diário de energia (em kcal) para meninos entre 15 e 18 anos é dada pela função f(h) = 17.h, em que **h** indica a altura em cm e, para meninas nessa mesma faixa de idade, pela função g(h) = (15,3)h. Paulo, usando a fórmula para meninos, calculou seu consumo diário de energia e obteve 2 975 kcal. Sabendo-se que Paulo é 5 cm mais alto que sua namorada Carla (e que ambos têm idade entre 15 e 18 anos), o consumo diário de energia para Carla, de acordo com a fórmula, em kcal, é:

A) 2 501.
B) 2 601.
C) 2 770.
D) 2 875.
E) 2 970.

08. 9LP5 (Unesp–2018) Dois dos materiais mais utilizados para fazer pistas de rodagem de veículos são o concreto e o asfalto. Uma pista nova de concreto reflete mais os raios solares do que uma pista nova de asfalto; porém, com os anos de uso, ambas tendem a refletir a mesma porcentagem de raios solares, conforme mostram os segmentos de retas nos gráficos.



Mantidas as relações lineares expressas nos gráficos ao longo dos anos de uso, duas pistas novas, uma de concreto e outra de asfalto, atingirão pela primeira vez a mesma porcentagem de reflexão dos raios solares após

A) 8,225 anos.
B) 9,375 anos.
C) 10,025 anos.
D) 10,175 anos.
E) 9,625 anos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO **Bernoulli Play**

01. (EPCAR-MG–2017) João, ao perceber que seu carro apresentara um defeito, optou por alugar um veículo para cumprir seus compromissos de trabalho. A locadora, então, lhe apresentou duas propostas:

- plano A, no qual é cobrado um valor fixo de R$ 50,00 e mais R$ 1,60 por quilômetro rodado.
- plano B, no qual é cobrado um valor fixo de R$ 64,00 mais R$ 1,20 por quilômetro rodado.

João observou que, para certo deslocamento que totalizava **k** quilômetros, era indiferente optar pelo plano A ou pelo plano B, pois o valor final a ser pago seria o mesmo.

É correto afirmar que **k** é um número racional entre

A) 14,5 e 20.
B) 20 e 25,5.
C) 25,5 e 31.
D) 31 e 36,5.

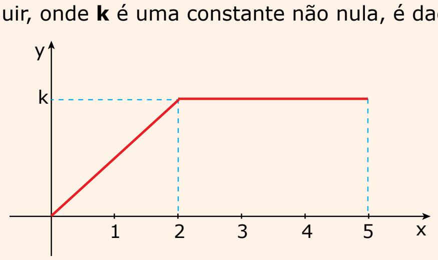
02. N223 (UFSM-RS) De acordo com dados da UNEP – Programa das Nações Unidas para o Meio Ambiente, a emissão de gases do efeito estufa foi de 45 bilhões de toneladas de CO_2 em 2005 e de 49 bilhões de toneladas em 2010. Se as emissões continuarem crescendo no mesmo ritmo atual, a emissão projetada para 2020 é de 58 bilhões de toneladas. Porém, para garantir que a temperatura do planeta não suba mais que 2 °C até 2020, a meta é reduzir as emissões para 44 bilhões de toneladas.

Suponha que a meta estabelecida para 2020 seja atingida e considere que **Q** e **t** representam, respectivamente, a quantidade de gases do efeito estufa (em bilhões de toneladas) e o tempo (em anos), com t = 0 correspondendo a 2010, com t = 1 correspondendo a 2011 e assim por diante, sendo **Q** uma função afim de **t**.

A expressão algébrica que relaciona essas quantidades é:

A) $Q = -\frac{9}{10}t + 45$
B) $Q = -\frac{1}{2}t + 49$
C) $Q = -5t + 49$
D) $Q = \frac{1}{2}t + 45$
E) $Q = \frac{9}{10}t + 49$

03. DGDH (UEG-GO–2016) A função f(x) que representa o gráfico a seguir, onde **k** é uma constante não nula, é dada por:



A) $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ x, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

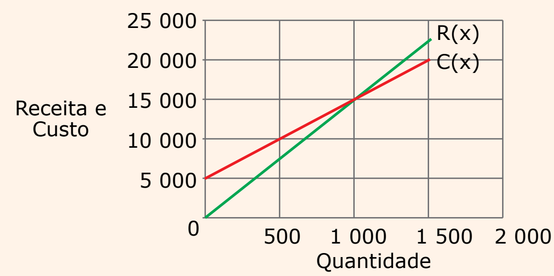
B) $f(x) = \begin{cases} k, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ 3k, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

C) $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ kx, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

D) $f(x) = \begin{cases} kx, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ k, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

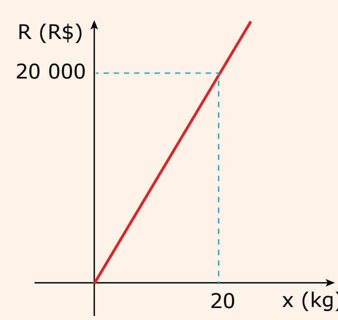
E) $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ k, \text{ se } 2 < x \le 5 \end{cases}$

04. (FGV-SP) Os gráficos a seguir representam as funções receita mensal R(x) e custo mensal C(x) de um produto fabricado por uma empresa, em que **x** é a quantidade produzida e vendida. Qual o lucro obtido ao se produzir e vender 1 350 unidades por mês?



A) 1 740
B) 1 750
C) 1 760
D) 1 770
E) 1 780

05. (UCS-RS–2016) O custo total **C**, em reais, de produção de **x** kg de certo produto é dado pela expressão C(x) = 900x + 50. O gráfico a seguir é o da receita **R**, em reais, obtida pelo fabricante, com a venda de **x** kg desse produto.



Qual porcentagem da receita obtida com a venda de 1 kg do produto é lucro?

A) 5%.
B) 10%.
C) 12,5%.
D) 25%.
E) 50%.

06. UXCR (FGV) Uma fábrica de panelas opera com um custo fixo mensal de R$ 9 800,00 e um custo variável por panela de R$ 45,00. Cada panela é vendida por R$ 65,00. Seja **x** a quantidade que deve ser produzida e vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a 20% da receita.

A soma dos algarismos de **x** é:

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

07. HEMD (FGV-SP) Uma fábrica de paletós trabalha com um custo fixo mensal de R$ 10 000,00 e um custo variável de R$ 100,00 por paletó. O máximo que a empresa consegue produzir, com a atual estrutura, é 500 paletós por mês. O custo médio na produção de **x** paletós é igual ao quociente do custo total por **x**.

O menor custo médio possível é igual a

A) R$ 100,00.
B) R$ 105,00.
C) R$ 110,00.
D) R$ 115,00.
E) R$ 120,00.

08. UYV8 (CEFET-MG–2015) Um motorista de táxi cobra, para cada corrida, uma taxa fixa de R$ 5,00 e mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. O valor total arrecadado (**R**) num dia é função da quantidade total (**x**) de quilômetros percorridos e calculado por meio da função $R(x) = ax + b$, em que **a** é o preço cobrado por quilômetro e **b** a soma de todas as taxas fixas recebidas no dia. Se, em um dia, o taxista realizou 10 corridas e arrecadou R$ 410,00 então a média de quilômetros rodados por corrida, foi de:

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20

09. (PUC-SP) O prefeito de certa cidade solicitou a uma equipe de trabalho que obtivesse uma fórmula que lhe permitisse estudar a rentabilidade mensal de cada um dos ônibus de uma determinada linha. Para tal, os membros da equipe consideraram que havia dois tipos de gastos – uma quantia mensal fixa (de manutenção) e o custo do combustível – e que os rendimentos seriam calculados multiplicando-se 2 reais por quilômetro rodado. A tabela a seguir apresenta esses valores para um único ônibus de tal linha, relativamente ao mês de outubro de 2008.

	Outubro
Quantia fixa (reais)	1 150
Consumo de combustível (litros/100 km)	40
Custo de 1 litro de combustível (reais)	4
Rendimentos/km (reais)	2
Distância percorrida (km)	x

Considerando constantes os gastos e o rendimento, a menor quantidade de quilômetros que o ônibus deverá percorrer no mês para que os gastos não superem o rendimento é:

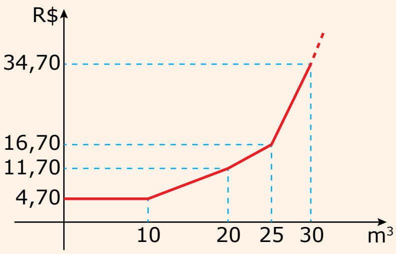
A) 2 775.
B) 2 850.
C) 2 875.
D) 2 900.
E) 2 925.

10. L5EL (Unicamp-SP) O consumo mensal de água nas residências de uma pequena cidade é cobrado como se descreve a seguir. Para um consumo mensal de até 10 metros cúbicos, o preço é fixo e igual a 20 reais. Para um consumo superior, o preço é de 20 reais acrescidos de 4 reais por metro cúbico consumido acima dos 10 metros cúbicos. Considere C(x) a função que associa o gasto mensal com o consumo de **x** metros cúbicos de água.

A) Esboce o gráfico da função C(x) no plano cartesiano para **x** entre 0 e 30.

B) Para um consumo mensal de 4 metros cúbicos de água, qual é o preço efetivamente pago por metro cúbico? E para um consumo mensal de 25 metros cúbicos?

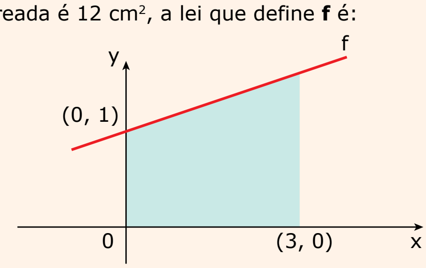
11. GC2B (UFJF-MG) Para desencorajar o consumo excessivo de água, o Departamento de Água de certo município aumentou o preço desse líquido. O valor mensal pago em reais por uma residência, em função da quantidade de metros cúbicos consumida, é uma função cujo gráfico é a poligonal representada a seguir:



De acordo com o gráfico, quanto ao pagamento relativo ao consumo mensal de água de uma residência, é correto afirmar que, se o consumo

A) for nulo, a residência estará isenta do pagamento.
B) for igual a 5 m³, o valor pago será menor do que se o consumo for igual a 10 m³.
C) for igual a 20 m³, o valor pago será o dobro do que se o consumo for igual a 10 m³.
D) exceder 25 m³, o valor pago será R$ 16,70 acrescido de R$ 3,60 por m³ excedente.
E) for igual a 22 m³, o valor pago será R$ 15,00.

12. OLSL (Ibmec-RJ) Considere a figura seguinte, onde um dos lados do trapézio retângulo se encontra apoiado sobre o gráfico de uma função **f**. Sabendo-se que a área da região sombreada é 12 cm², a lei que define **f** é:



A) $y = 2x - 1$
B) $y = -2x + 1$
C) $y = \frac{2x}{3} + 1$
D) $y = \frac{5x}{2} + 1$
E) $y = 2x + 1$

13. 6ILO (UESC-BA) O monitoramento do número de batimentos cardíacos por minuto, relacionando-o com a idade do indivíduo, não só pode evitar enfartes fulminantes como também auxiliar na determinação dos limites a serem respeitados na prática de atividades físicas. A fórmula clássica utilizada na determinação do número máximo de batimentos cardíacos por minuto (bpm), $F_{Máx.} = 220 - i$, em que **i** é a idade, é bastante controversa, pois pode errar de duas maneiras – os mais jovens podem extrapolar seus limites e os mais velhos ficarem aquém dos que poderiam atingir.

Estudos mostraram que se utilizando a fórmula $F = 60 + k(F_{Máx.} - 60)$, em que $55\% \le k \le 70\%$, se pode determinar uma faixa de batimentos cardíacos por minuto dentro da qual é possível conseguir benefícios através dos exercícios, evitando sobrecargas.

Nessas condições, um indivíduo com 50 anos de idade pode fazer exercícios físicos, com segurança, dentro da faixa de batimentos por minuto, entre

A) 108 e 125.
B) 121 e 136.
C) 130 e 142.
D) 138 e 153.
E) 150 e 166.

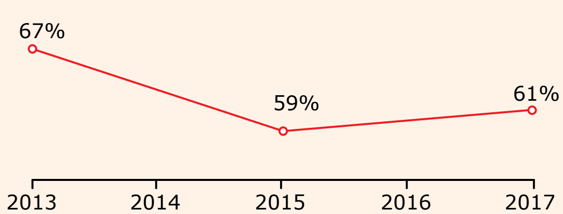
14. 9RVR (UPE) Um dos reservatórios d'água de um condomínio empresarial apresentou um vazamento a uma taxa constante, às 12 h do dia 1º de outubro. Às 12 h dos dias 11 e 19 do mesmo mês, os volumes d'água no reservatório eram, respectivamente, 315 mil litros e 279 mil litros. Dentre as alternativas seguintes, qual delas indica o dia em que o reservatório esvaziou totalmente?

A) 16 de dezembro.
B) 17 de dezembro.
C) 18 de dezembro.
D) 19 de dezembro.
E) 20 de dezembro.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2018) A raiva é uma doença viral e infecciosa, transmitida por mamíferos. A campanha nacional de vacinação antirrábica tem o objetivo de controlar a circulação do vírus da raiva canina e felina, prevenindo a raiva humana. O gráfico mostra a cobertura (porcentagem de vacinados) da campanha, em cães, nos anos de 2013, 2015 e 2017, no município de Belo Horizonte, em Minas Gerais. Os valores das coberturas dos anos de 2014 e 2016 não estão informados no gráfico e deseja-se estimá-los. Para tal, levou-se em consideração que a variação na cobertura de vacinação da campanha antirrábica, nos períodos de 2013 a 2015 e de 2015 a 2017, deu-se de forma linear.

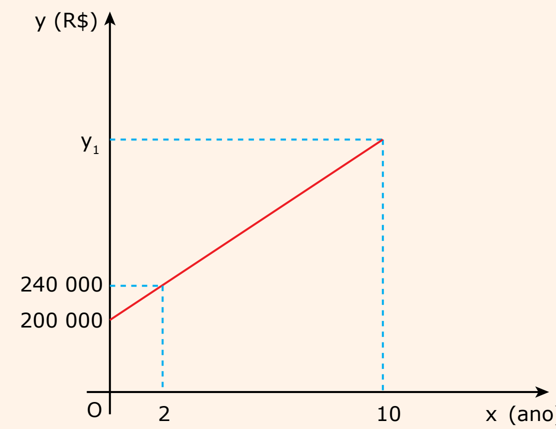


Disponível em: <http://pni.datasus.gov.br>. Acesso em: 05 nov. 2017.

Qual teria sido a cobertura dessa campanha no ano de 2014?

A) 62,3%.
B) 63,0%.
C) 63,5%.
D) 64,0%.
E) 65,5%.

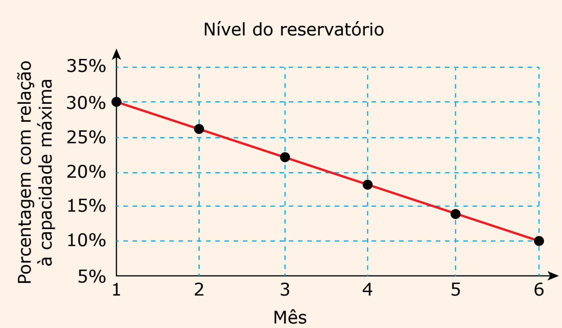
02. (Enem–2017) Um sítio foi adquirido por R$ 200 000,00. O proprietário verificou que a valorização do imóvel, após sua aquisição, cresceu em função do tempo conforme o gráfico, e que essa tendência de valorização se manteve nos anos seguintes.



O valor desse sítio, no décimo ano após sua compra, em real, será de

A) 190 000.
B) 232 000.
C) 272 000.
D) 400 000.
E) 500 000.

03. CQQN (Enem–2016) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

A) 2 meses e meio.
B) 3 meses e meio.
C) 1 mês e meio.
D) 4 meses.
E) 1 mês.

04. (Enem) Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

Valor do kWh (com tributos) x consumo (em kWh) + Cosip

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo.

O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	Valor da Cosip (R$)
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

A) 134,1
B) 135,0
C) 137,1
D) 138,6
E) 143,1

05. (Enem) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$Q_O = -20 + 4P$

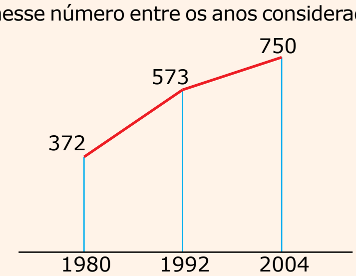
$Q_D = 46 - 2P$,

em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e **P** é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam.

Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

A) 5
B) 11
C) 13
D) 23
E) 33

06. (Enem) O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, considerando que a variação nesse número entre os anos considerados é linear.

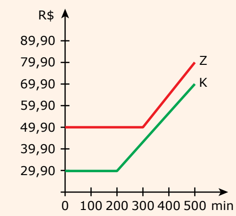


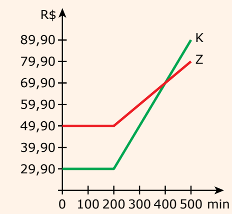
ÉPOCA. Favela tem memória. n. 621, 12 abr. 2010 (Adaptação).

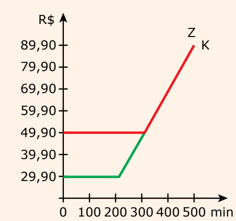
Se o padrão na variação do período 2004-2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número de favelas em 2010 é 968, então o número de favelas em 2016 será

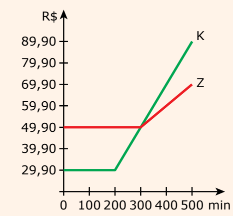
A) menor que 1 150.
B) 218 unidades maior que em 2004.
C) maior que 1 150 e menor que 1 200.
D) 177 unidades maior que em 2010.
E) maior que 1 200.

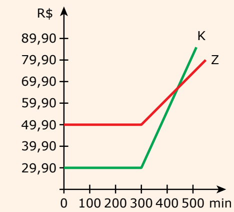
07. (Enem) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano **K**, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano **Z**, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente. O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é:

A)


B)


C)


D)


E)


GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

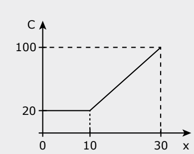
01. E
02. E
03. C
04. B
05. D
06. E
07. B
08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. D
02. B
03. E
04. B
05. A
06. D
07. E
08. C
09. C

10.

A)


B) R$ 5,00; R$ 3,20

11. D
12. E
13. B
14. E

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. D
03. A
04. C
05. B
06. C
07. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Função Quadrática

INTRODUÇÃO

Sabe-se que, em cerca de 2000 a.C., os babilônios já estavam familiarizados com equações do segundo grau, aplicadas à resolução de problemas práticos. Um matemático indiano, de nome Bhaskara, promoveu um enorme avanço na resolução de equações do segundo grau ao desenvolver uma fórmula para o cálculo das suas raízes.

A função quadrática é uma das funções mais importantes da Matemática. Seu gráfico descreve uma curva extremamente importante, denominada parábola, que serve, por exemplo, para descrever a trajetória de um projétil lançado obliquamente no ar. Hoje, reconhecemos que a função quadrática é muito indicada para a modelagem de problemas nos quais é necessária a determinação de quantidades máximas ou mínimas, indicadas pelas coordenadas do seu vértice.

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

A função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que **a**, **b** e **c** são constantes reais e $a \neq 0$, é dita função quadrática ou função polinomial do segundo grau. Seu gráfico é uma curva chamada **parábola**.

RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Fórmula de Bhaskara

Para encontrar as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, devemos fazer $f(x) = 0$.

Assim, obtemos a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Logo, temos $ax^2 + bx = -c$.

Multiplicando os dois membros por 4a, obtemos:

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Somando b^2 aos dois membros da equação, a fim de completar o quadrado do lado esquerdo, temos:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

O lado esquerdo da equação é um trinômio quadrado perfeito. Logo, podemos escrever:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Denotando pela letra grega delta (Δ) o termo $b^2 - 4ac$, obtemos:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac}$$

Esse resultado é conhecido como Fórmula de Bhaskara.

OBSERVAÇÕES

i) Se $\Delta < 0$, a função não possui raízes reais.

ii) Se $\Delta = 0$, a função tem duas raízes reais iguais.

iii) Se $\Delta > 0$, a função tem duas raízes reais distintas.

Exemplo:

Calcular as raízes da função $f(x) = x^2 + x - 12$.

Igualando a expressão a zero, temos $x^2 + x - 12 = 0$.

Ora, $a = 1$, $b = 1$ e $c = -12$.

Daí, $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) \Rightarrow \Delta = 1 + 48 \Rightarrow \Delta = 49$

Assim: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm 7}{2}$

Denotando por x_1 e x_2 as raízes procuradas, temos:

$$x_1 = \frac{-1-7}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \text{ e } x_2 = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Portanto, $S = \{-4, 3\}$.

Soma e produto das raízes

Sejam x_1 e x_2 as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Valem as seguintes relações:

i) Soma das raízes da função

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

ii) Produto das raízes da função

$$\boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Exemplo:

Calcular, utilizando as relações de soma e produto, as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 + x_2 = -\frac{(-5)}{1} \qquad x_1 + x_2 = 5 \text{ e}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} \qquad x_1 . x_2 = \frac{6}{1} \qquad x_1 . x_2 = 6$$

Assim, os números que satisfazem essas condições são 2 e 3.

Portanto, S = {2, 3}.

FORMA FATORADA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, que possua raízes reais x_1 e x_2, pode ser escrita como um produto de duas funções do primeiro grau.

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Exemplo:

Escrever a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$, na forma fatorada.

Cálculo das raízes:

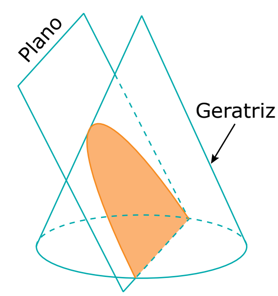
$D = (-6)^2 - 4 . 2 . 4 \Rightarrow D = 36 - 32 \Rightarrow D = 4$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2 . 2} \Rightarrow x = \frac{6 \pm 2}{4} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 2.$$

Assim, a função $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$, na forma fatorada, é $f(x) = 2(x - 1)(x - 2)$.

GRÁFICOS DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Já sabemos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Tal curva é definida, geometricamente, como a interseção de um cone de revolução e um plano paralelo a uma geratriz do cone, conforme figura a seguir:



Para esboçar o gráfico de uma função quadrática, devemos seguir a seguinte sequência:

i) Determinar a concavidade da parábola.

Quando **a** (coeficiente de x^2) é positivo, a parábola tem concavidade para cima.

Quando **a** é negativo, a parábola tem concavidade para baixo.

ii) Determinar a interseção da parábola com o eixo Oy.

A parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, c).

iii) Determinar as interseções da parábola com o eixo Ox (raízes).

Conforme visto anteriormente, a existência ou não de raízes reais depende do valor de D, na Fórmula de Bhaskara.

Se $D < 0$, a função não tem raízes reais, ou seja, a parábola não intercepta o eixo das abscissas.

Se $D = 0$, a função tem duas raízes reais iguais, ou seja, a parábola intercepta o eixo das abscissas em um único ponto (tangencia o eixo Ox).

Se $D > 0$, a função tem duas raízes reais distintas, ou seja, a parábola intercepta o eixo das abscissas em dois pontos.

iv) Determinar as coordenadas (x_v, y_v) do vértice **V** da parábola.

Vértice é o ponto de interseção da parábola com o eixo de simetria. Como x_v pertence ao eixo de simetria, as abscissas dispostas de maneira simétrica em relação a x_v possuem a mesma imagem.

Logo, x_v é a média aritmética das raízes.

$$\boxed{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ou } x_v = -\frac{b}{2a}}$$

Substituindo, na função polinomial de 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, temos:

$$y_v = a x_v^2 + b.x_v + c \underbrace{\quad}_{x_v = \frac{-b}{2a}} \quad \boxed{y_v = -\frac{\;}{4a}}$$

Portanto, o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\;}{4a}\right)$ é o vértice da parábola.

Determinados esses valores, basta esboçarmos a parábola.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Fazer o esboço da parábola $y = 2x^2 - 3x + 1$.

Resolução:

Concavidade:

Temos $a = 2 > 0$, ou seja, a concavidade está voltada para cima.

Interseção com o eixo Oy:

Temos que $c = 1$, ou seja, a parábola intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$.

Raízes:

$D = (-3)^2 - 4 . 2 . 1 \Rightarrow D = 9 - 8 \Rightarrow D = 1$

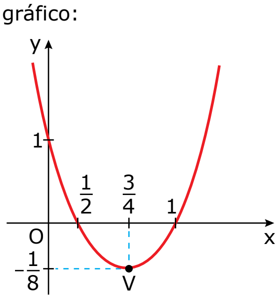
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = 1$$

Logo, as raízes são $\frac{1}{2}$ e 1.

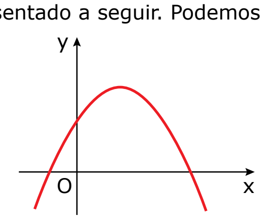
Vértice $V = (x_v, y_v)$:

$$\left.\begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{(-3)}{2.2} = \frac{3}{4} \\ y_v &= -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{1}{4.2} = -\frac{1}{8} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

Esboço do gráfico:



02. (FAFI-MG) O gráfico de uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ está representado a seguir. Podemos afirmar que:



A) $a < 0$, $b < 0$ e $c < 0$.
B) $a < 0$, $b < 0$ e $c > 0$.
C) $a < 0$, $b > 0$ e $c < 0$.
D) $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$.
E) $a > 0$, $b < 0$ e $c < 0$.

Resolução:

Como a concavidade da parábola está voltada para baixo, temos $a < 0$. Além disso, observe que a interseção do gráfico com o eixo Oy ocorre em um ponto de ordenada positiva. Conforme visto anteriormente, esse ponto é igual a $(0, c)$. Logo, temos que $c > 0$.

Para investigar o sinal do **b**, vamos considerar a abscissa do vértice da parábola. Sabemos que $x_v = -\frac{b}{2a}$.

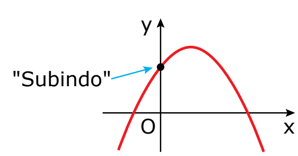
Pelo gráfico, verificamos que x_v é positivo. Como **a** é negativo, temos que $-b$ deve ser negativo. Isso ocorre somente se **b** for positivo.

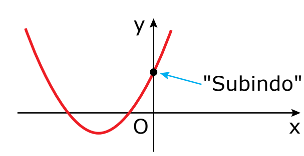
Logo, $b > 0$.

Regra prática para a determinação do sinal de b

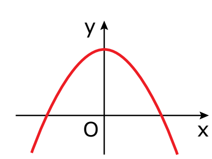
No exercício anterior, mostramos uma maneira de determinar o coeficiente **b**. Veremos agora uma regra prática para a obtenção desse sinal.

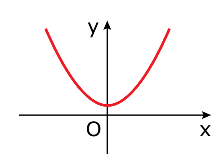
i) Se a função de 2º grau estiver num trecho crescente quando intercepta o eixo das ordenadas, então $b > 0$.



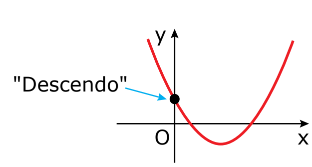


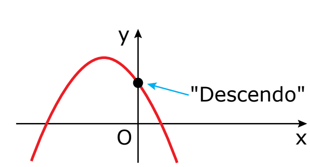
ii) Se o vértice encontra-se exatamente no eixo das ordenadas, então $b = 0$.





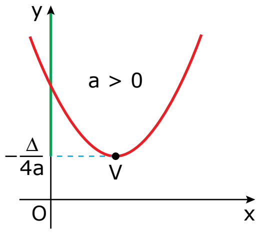
iii) Se a função de 2º grau estiver em um trecho decrescente quando intercepta o eixo das ordenadas, então $b < 0$.





VALOR MÁXIMO E VALOR MÍNIMO DA FUNÇÃO

Se a > 0, a parábola $y = ax^2 + bx + c$ apresenta concavidade voltada para cima. Nesse caso, é fácil constatar que existe um valor mínimo assumido por **y**, que coincide com a ordenada do vértice y_v. Essa ordenada é o valor mínimo da função.

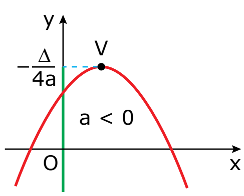


i) $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo da função.

ii) A imagem (Im) da função, caso o domínio seja o conjunto dos números reais, é dada por:

$$\boxed{Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}}$$

Se a < 0, a parábola $y = ax^2 + bx + c$ possui concavidade voltada para baixo. Nesse caso, verificamos que existe um valor máximo assumido por **y** e, analogamente, dizemos que a ordenada do vértice y_v é o valor máximo da função.



i) $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo da função.

ii) A imagem (Im) da função, caso o domínio seja o conjunto dos números reais, é dada por:

$$\boxed{Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}}$$

OBSERVAÇÃO

Caso o domínio de função não seja o conjunto dos números reais, o conjunto imagem dessa função pode depender das imagens das extremidades do domínio. O exercício resolvido a seguir ilustra esse ponto.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

03. (UFU-MG) Sendo **x** e **y** números reais tais que $0 \leq x \leq 3$ e $y = x^2 - 2x$, os valores mínimo e máximo de **y** são, nessa ordem, iguais a:

A) 0 e 6.
B) −1 e 9.
C) −1 e 6.
D) −1 e 3.
E) 3 e 9.

Resolução:

Raízes da função:

$x^2 - 2x = 0$

$D = (-2)^2 - 4 . 1 . 0 \Rightarrow D = 4$

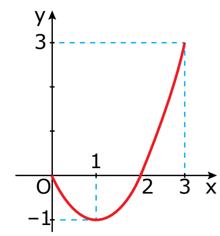
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4}}{2 . 1} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 2$$

Portanto, as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Vértice:

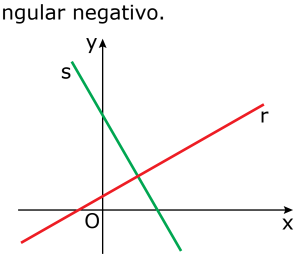
$$\left.\begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2.a} \Rightarrow x_v = -\frac{(-2)}{2 . 1} \Rightarrow x_v = 1 \\ y_v &= -\frac{\Delta}{4.a} \Rightarrow y_v = -\frac{4}{4 . 1} \Rightarrow y_v = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = (1, -1)$$

A ordenada do ponto **V** é o valor mínimo da função, qualquer que seja o intervalo de **x** considerado. Para encontrar o valor máximo, primeiramente deve-se perceber que a função está definida no intervalo $0 \leq x \leq 3$. Logo, os candidatos de valor máximo são y(0) = 0 e y(3) = 3 (extremidades do intervalo do domínio). Como y(3) > y(0), o valor máximo de **y** é 3. Observe o esboço do gráfico da função.



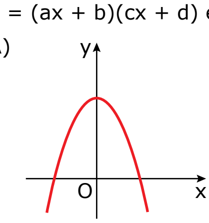
Os valores mínimo e máximo de **y** são, respectivamente, −1 e 3.

04. (UFV-MG) Na figura a seguir, a reta r: y = ax + b tem coeficiente angular positivo, e a reta s: y = cx + d tem coeficiente angular negativo.

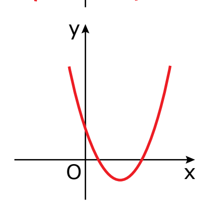


A figura que melhor representa o gráfico do trinômio y = (ax + b)(cx + d) é:

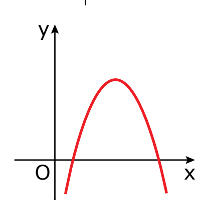
A)



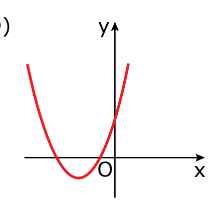
B)



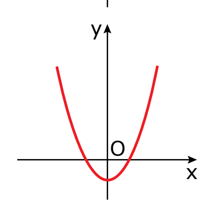
C)



D)



E)



Resolução:

Efetuando a multiplicação dos termos, obtemos $y = (ac)x^2 + (ad + bc)x + bd$. Trata-se de uma função quadrática. Analisando as retas dadas, temos que **a** é positivo, **b** é positivo, **c** é negativo e **d** é positivo. Portanto, ac é negativo (concavidade voltada para baixo). Além disso, bd é positivo, ou seja, a parábola intercepta o eixo Oy em um ponto de ordenada positiva. Entre os gráficos, o único com essas características é o da alternativa A.

05. (Fafeid-MG) No instante $t = 0$, uma bola é atirada verticalmente para cima, de uma altura de 5 cm acima do solo. Após **t** segundos, a sua altura **s**, em cm, acima do solo, é dada por $s = 5 + 40t - 16t^2$. Assim, é correto afirmar que a altura máxima da bola, acima do solo, em cm, é igual a:

A) 30.

B) 25.

C) 55.

D) 20.

Resolução:

O gráfico de s(t) é parabólico, com concavidade voltada para baixo. Assim, a altura máxima corresponde à ordenada do vértice:

$\Delta = 40^2 - 4(-16)5 \Rightarrow \Delta = 1\,600 + 320 \Rightarrow \Delta = 1\,920$

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} \quad y_v = -\dfrac{1\,920}{4(-16)} \quad y_v = -\dfrac{1\,920}{-64} \Rightarrow y_v = 30$

A altura máxima alcançada é 30 cm.

06. (PUC Minas) Uma empresa fabrica **x** peças por dia, e seu lucro, em reais, é dado pela função $L(x) = 100(9 - x)(x - 1)$. O lucro máximo obtido pela empresa, por dia, em reais, é:

A) 1 200.

B) 1 300.

C) 1 400.

D) 1 500.

E) 1 600.

Resolução:

Efetuando os produtos indicados, obtemos:

$L(x) = -100x^2 + 1\,000x - 900$

Observe que o lucro L(x) é uma função quadrática do número de peças **x**. Como a concavidade está voltada para baixo, o lucro máximo corresponde à ordenada do vértice.

$\Delta = 1\,000^2 - 4(-100)(-900) \Rightarrow$

$\Delta = 1\,000\,000 - 360\,000 \Rightarrow \Delta = 640\,000$

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} \quad y_v = -\dfrac{640\,000}{4(-100)} \quad y_v = -\dfrac{640\,000}{-400} \Rightarrow y_v = 1\,600$

O lucro máximo é igual a R$ 1 600,00.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio) Sejam **f** e **g** funções reais dadas por $f(x) = 2 + x^2$ e $g(x) = 2 + x$.

Os valores de **x**, tal que $f(x) = g(x)$, são:

A) $x = 0$ ou $x = -1$.

B) $x = 0$ ou $x = 2$.

C) $x = 0$ ou $x = 1$.

D) $x = 2$ ou $x = -1$.

E) $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

02. EEET (UEG-GO–2016) Um processo de produção é modelado pela seguinte função $f(t) = -\alpha t^2 + 160\alpha t$, em que **t** é a temperatura do processo em graus Celsius e α é uma constante positiva. Para que se atinja o máximo da produção, a temperatura deve ser

A) −40 °C.

B) −80 °C.

C) 0 °C.

D) 40 °C.

E) 80 °C.

03. MA8Y (IFBA–2016) Jorge planta tomates em uma área de sua fazenda, e resolveu diminuir a quantidade **Q** (em mil litros) de agrotóxicos em suas plantações, usando a lei $Q(t) = 7 + t^2 - 5t$, onde **t** representa o tempo, em meses, contado a partir de $t = 0$. Deste modo, é correto afirmar que a quantidade mínima de agrotóxicos usada foi atingida em

A) 15 dias.

B) 1 mês e 15 dias.

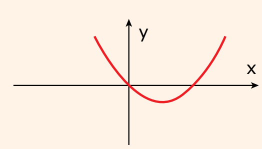
C) 2 meses e 10 dias.

D) 2 meses e 15 dias.

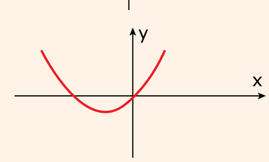
E) 3 meses e 12 dias.

04. ØSLW (Unicamp-SP–2019) Sejam **a** e **b** números reais positivos. Considere a função quadrática $f(x) = x(ax + b)$, definida para todo número real **x**. No plano cartesiano, qual figura corresponde ao gráfico de $y = f(x)$?

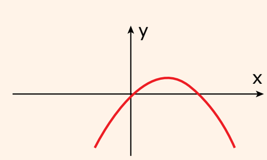
A)



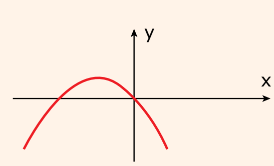
B)



C)



D)



MATEMÁTICA

05. THE4 (UECE–2016) Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções quadráticas dadas por $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ e $g(x) = x^2 + 8x + 17$. Se **M** é o valor máximo de **f** e **m** o valor mínimo de **g**, então, o produto M.m é igual a:

A) 8. B) 6. C) 4. D) 10.

06. QY49 (UCS-RS) O lucro obtido por um distribuidor com a venda de caixas de determinada mercadoria é dado pela expressão $L(x) = \frac{6}{5}x - \frac{0{,}01}{5}x^2 - 0{,}6x$, em que **x** denota o número de caixas vendidas. Quantas caixas o distribuidor deverá vender para que o lucro seja máximo?

A) 60
B) 120
C) 150
D) 600
E) 1 500

07. L5RZ (UFJF-MG) Um ônibus de 54 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa cobrou de cada passageiro a quantia de R$ 55,00 e mais R$ 2,50 por lugar vago. O número de passageiros que dá à empresa rentabilidade máxima é:

A) 16.
B) 24.
C) 38.
D) 49.
E) 54.

08. (CEFET-MG–2016) O saldo **S** de uma empresa A é calculado em função do tempo **t**, em meses, pela equação $S(t) = 3t^2 - 39t + 66$.

Considerando essa função, o saldo da empresa é negativo entre o

A) 2º e o 11º mês.
B) 4º e o 16º mês.
C) 1º e 4º e entre o 5º do 16º mês.
D) 2º e 5º e entre o 7º do 14º mês.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFRGS-RS) Dada a função **f**, definida por $f(x) = x^2 + 9 - 6x$, o número de valores de **x** que satisfazem a igualdade $f(x) = -f(x)$ é:

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 3.
E) 4.

02. SGJY (Albert Einstein–2016) Suponha que, em janeiro de 2016, um economista tenha afirmado que o valor da dívida externa do Brasil era de 30 bilhões de reais. Nessa ocasião, ele também previu que, a partir de então, o valor da dívida poderia ser estimado pela lei $D(x) = -\frac{9}{2}.x^2 + 18x + 30$ em que **x** é o número de anos contados a partir de janeiro de 2016 (x = 0). Se sua previsão for correta, o maior valor que a dívida atingirá, em bilhões de reais, e o ano em que isso ocorrerá, são, respectivamente,

A) 52 e 2020.
B) 52 e 2018.
C) 48 e 2020.
D) 48 e 2018.

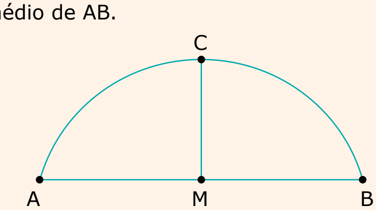
03. DSTH (UEMG–2016) O lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática L = R – C, onde **L** é o lucro, **C** o custo da produção e **R** a receita do produto.

Uma fábrica de tratores produziu **n** unidades e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(n) = n^2 - 1\,000n$ e a receita representada por $R(n) = 5\,000n - 2n^2$.

Com base nas informações acima, a quantidade **n** de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo corresponde a um número do intervalo:

A) $580 < n < 720$
B) $860 < n < 940$
C) $980 < n < 1\,300$
D) $1\,350 < n < 1\,800$

04. CBAC (UNIFESP) A figura mostra um arco parabólico ACB de altura CM = 16 cm, sobre uma base AB de 40 cm. **M** é o ponto médio de AB.



A altura do arco, em centímetros, em um ponto da base que dista 5 cm de **M**, é:

A) 15.
B) 14.
C) 13.
D) 12.
E) 10.

05. K192 (ESPM-SP–2016) O lucro (em reais) obtido com a produção e venda de **x** unidades de um certo produto é dado pela função L = k.(x + 10)(x – 50), onde **k** é uma constante negativa. Podemos avaliar que o maior lucro possível será obtido para **x** igual a:

A) 24.
B) 22.
C) 15.
D) 20.
E) 18.

06. 43PA (UFSM-RS) Um jogador de basquete lança uma bola em direção à cesta e ela descreve um arco de parábola. A lei que descreve essa parábola é $h(t) = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{5}{3}t + 2$, em que **t** é o tempo decorrido em segundos após o lançamento, e **h** é a altura em metros. Assim, é correto afirmar:

A) A bola atinge o solo em 5 s.

B) A imagem de h(t) é dada pelo conjunto $y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{49}{9}$.

C) O vértice da parábola é o ponto $\frac{5}{2}, \frac{49}{12}$.

D) Para todo $t \in (-6, 1)$, $h(t) \geq 0$.

E) A altura máxima atingida pela bola é igual a $\frac{7}{3}$ m.

07. (UECE–2016) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, o gráfico da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2mx + 9$ é uma parábola que tangencia o eixo das abscissas, e um de seus pontos com ordenada igual a 9 tem abscissa negativa. Nessas condições, o valor do parâmetro **m** está entre

A) 1,5 e 2,5.

B) 2,5 e 3,5.

C) 3,5 e 4,5.

D) 4,5 e 5,5.

08. J74H (IFMA–2016) Os alunos de uma escola de Pindaré-Mirim fretaram, para a sua viagem de formandos, um ônibus com capacidade para 50 pessoas. Cada estudante comprometeu-se a pagar R$ 250,00, caso o ônibus ficasse com todas as cadeiras ocupadas. No caso de haver uma cadeira vazia, então cada aluno pagaria um adicional de R$ 4,50 por cadeira que ficasse vazia. A fórmula matemática da receita **R** do total pago pelos alunos no frete do ônibus, em função do número **x** de alunos que irão comparecer é:

A) $R(x) = -4{,}5x^2 + 475x$

B) $R(x) = 45x^2 - 625x$

C) $R(x) = 35x^2 - 325x$

D) $R(x) = 3{,}5x^2 + 630x$

E) $R(x) = -25x^2 - 250x$

09. (Albert Einstein-SP–2018) Para arrecadar recursos para a festa de formatura, os formandos de uma escola decidiram vender convites para um espetáculo. Cada formando recebeu para vender um número de convites que é igual ao número total de formandos mais 3. Se todos os formandos conseguirem vender todos os convites a 5 reais, o dinheiro arrecadado será menor do que R$ 26 270,00.

Nessas condições, o maior número de formandos que essa escola pode ter é múltiplo de

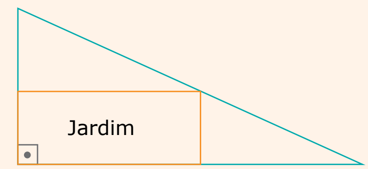
A) 12.

B) 13.

C) 14.

D) 15.

10. XPGF (UEG-GO) Em um terreno, na forma de um triângulo retângulo, será construído um jardim retangular, conforme figura a seguir:



Sabendo-se que os dois menores lados do terreno medem 9 m e 4 m, as dimensões do jardim, para que ele tenha a maior área possível, serão, respectivamente

A) 2,0 m e 4,5 m.

B) 3,0 m e 4,0 m.

C) 3,5 m e 5,0 m.

D) 2,5 m e 7,0 m.

11. NVCQ (PUC-SP–2016) Para abastecer seu estoque, um comerciante comprou um lote de camisetas ao custo de 16 reais a unidade. Sabe-se que em um mês, no qual vendeu (40 – x) unidades dessas camisetas ao preço unitário de **x** reais, o seu lucro foi máximo. Assim sendo, pela venda de tais camisetas nesse mês, o percentual de aumento repassado aos clientes, calculado sobre o preço unitário que o comerciante pagou na compra do lote, foi de

A) 80%. B) 75%. C) 60%. D) 45%.

12. (USF-SP–2016) A empresa X vende seus produtos de modo que o preço unitário (**p**) dependa da quantidade (**q**) de unidades vendidas. A relação de dependência entre as variáveis **p** e **q** é dada por: $p(q) = 40 - 0{,}2q$.

Em relação a essa situação, analise as afirmações a seguir.

I. Para que a receita da empresa seja R$ 2 000,00 é necessário produzir e vender 100 unidades.

II. 50 ou 150 unidades vendidas geram a mesma receita para a empresa.

III. A receita máxima da empresa nessa situação é R$ 2 000,00.

É correto o que se afirma em

A) I, II e III.

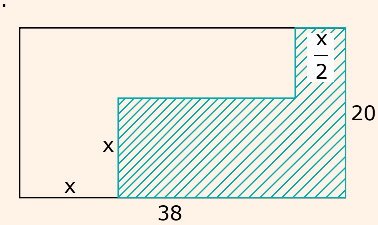
B) apenas II e III.

C) apenas I.

D) apenas II.

E) apenas I e III.

13. SHD1 (ESPM-SP–2016) Um arquiteto projetou uma casa para ser construída num terreno retangular de 20 m por 38 m. A superfície ocupada pela casa, representada pela parte hachurada, deve atender às medidas indicadas na figura a seguir.



A maior área que essa casa pode ter é de

A) 412 m².

B) 384 m².

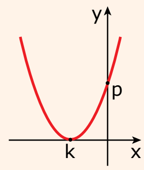
C) 362 m².

D) 428 m².

E) 442 m².

MATEMÁTICA

14. 8HJS (Mackenzie-SP) Na figura, temos o gráfico da função real definida por $y = x^2 + mx + (8 - m)$. O valor de $k + p$ é:

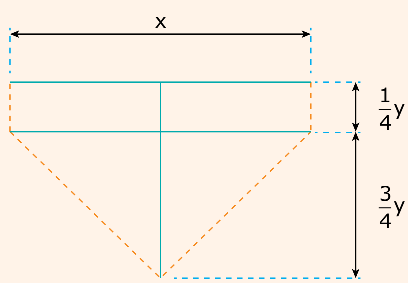


A) −2.
B) 2.
C) −1.
D) 1.
E) 3.

15. (UFV-MG) Um retângulo tem três de seus vértices nos pontos (0, 0), (x, 0) e (0, y), sendo **x** e **y** positivos, e o quarto vértice encontra-se sobre a reta $2x + 3y = 6$. Nessas condições, o retângulo de área máxima tem perímetro com medida igual a:

A) 4.
B) 6.
C) 5.
D) 7.

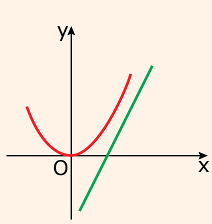
16. DJVE (UFPA) Um estudante, ao construir uma pipa, deparou-se com o seguinte problema: possuía uma vareta de miriti com 80 centímetros de comprimento, que deveria ser dividida em três varetas menores, duas necessariamente com o mesmo comprimento **x**, que será a largura da pipa, e outra de comprimento **y**, que determinará a altura da pipa. A pipa deverá ter formato pentagonal, como na figura a seguir, de modo que a altura da região retangular seja $\frac{1}{4}y$, enquanto a da triangular seja $\frac{3}{4}y$. Para garantir maior captação de vento, ele necessita que a área da superfície da pipa seja a maior possível.



A pipa de maior área que pode ser construída, nessas condições, possui área igual a

A) 350 cm².
B) 400 cm².
C) 450 cm².
D) 500 cm².
E) 550 cm².

17. 1YHØ (UFMG) Observe esta figura:



Nela, estão representados os gráficos das funções $f(x) = \frac{x^2}{2}$ e $g(x) = 3x - 5$. Considere os segmentos paralelos ao eixo **y**, com uma das extremidades sobre o gráfico da função **f** e a outra extremidade sobre o gráfico da função **g**. Entre esses segmentos, seja **S** o que tem o menor comprimento. Assim, o comprimento do segmento **S** é:

A) $\frac{1}{2}$.
B) $\frac{3}{4}$.
C) 1.
D) $\frac{5}{4}$.

18. HZSW (ACAFE-SC–2016) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para todo **x** real, pode ser representada através da equação dada por $f(x - 1) - f(x) = 3 + 4x$. Sabendo que o gráfico da função f(x) é uma parábola e que o valor máximo dessa função é dado por uma constante real acrescida do valor do coeficiente independente da função, pode-se concluir que o valor dessa constante é:

A) $\frac{25}{8}$.
B) $\frac{25}{4}$.
C) $\frac{1}{8}$.
D) $\frac{7}{8}$.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. KGAN (Enem–2017) A igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

Figura 1

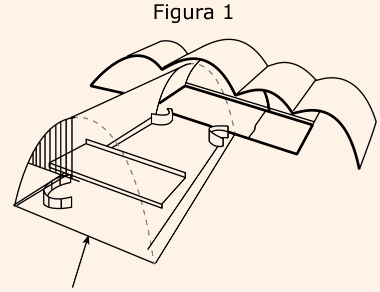
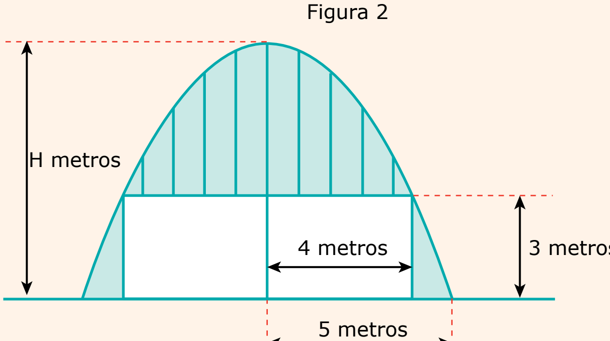


Figura 2



Qual a medida da altura **H**, em metro, indicada na figura 2?

A) $\frac{16}{3}$
B) $\frac{31}{5}$
C) $\frac{25}{4}$
D) $\frac{25}{3}$
E) $\frac{75}{2}$

02. (Enem–2017) A única fonte de renda de um cabeleireiro é proveniente de seu salão. Ele cobra R$ 10,00 por cada serviço realizado e atende 200 clientes por mês, mas está pensando em aumentar o valor cobrado pelo serviço. Ele sabe que cada real cobrado a mais acarreta uma diminuição de 10 clientes por mês.

Para que a renda do cabeleireiro seja máxima, ele deve cobrar por serviço o valor de

A) R$ 10,00.
B) R$ 10,50.
C) R$ 11,00.
D) R$ 15,00.
E) R$ 20,00.

03. JLCZ (Enem–2016) Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$y = 9 - x^2$, sendo **x** e **y** medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

A) 18
B) 20
C) 36
D) 45
E) 54

04. (Enem–2015) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que **h** representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

A) muito baixa.
B) baixa.
C) média.
D) alta.
E) muito alta.

05. (Enem) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial **f**, de grau menor que 3, para alterar as notas **x** da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é:

A) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

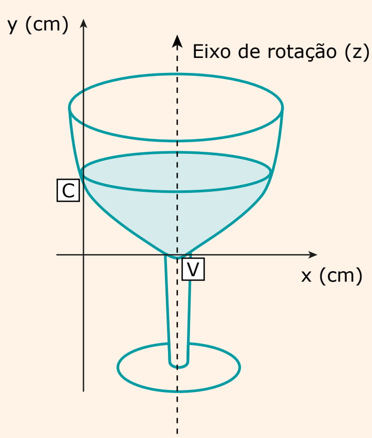
B) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

C) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

D) $y = \frac{4}{5}x + 2$

E) $y = x$

06. (Enem) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo **z**, conforme mostra a figura:



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde **C** é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto **V**, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo **x**.

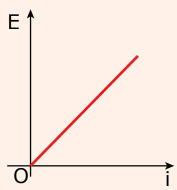
Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:

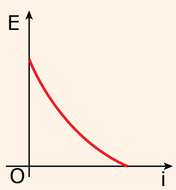
A) 1.
B) 2.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

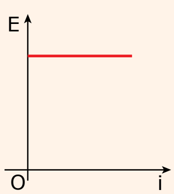
MATEMÁTICA

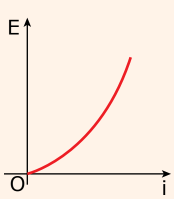
07. (Enem) Existem, no mercado, chuveiros elétricos de diferentes potências, que representam consumos e custos diversos. A potência (**P**) de um chuveiro elétrico é dada pelo produto entre sua resistência elétrica (**R**) e o quadrado da corrente elétrica (**i**) que por ele circula. O consumo de energia elétrica (**E**), por sua vez, é diretamente proporcional à potência do aparelho.

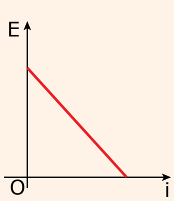
Considerando as características apresentadas, qual dos gráficos a seguir representa a relação entre a energia consumida (**E**) por um chuveiro elétrico e a corrente elétrica (**i**) que circula por ele?

A) 

B) 

C) 

D) 

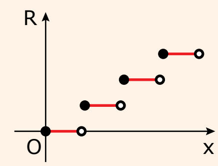
E) 

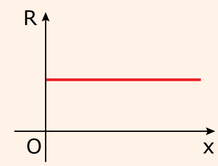
Instrução: Texto para as questões **08** e **09**.

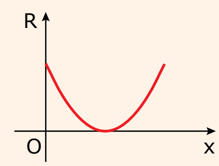
Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo **R** a rapidez de propagação, **P** o público-alvo e **x** o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:

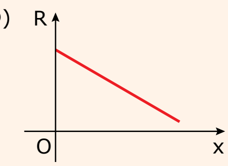
R(x) = k.x.(P – x), onde **k** é uma constante positiva, característica do boato.

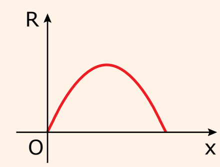
08. (Enem) O gráfico cartesiano que melhor representa a função R(x), para **x** real, é:

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

09. (Enem) Considerando o modelo anteriormente descrito, se o público-alvo é de 44 000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

A) 11 000

B) 22 000

C) 33 000

D) 38 000

E) 44 000

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	03. D	05. C	07. C
02. E	04. B	06. C	08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. B	06. C	11. B	16. D
02. D	07. B	12. A	17. A
03. C	08. A	13. B	18. A
04. A	09. C	14. B	
05. D	10. A	15. C	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. D	04. D	07. D
02. D	05. A	08. E
03. C	06. E	09. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Função Composta e Função Inversa

FUNÇÃO BIJETORA

Uma função f: A → B é bijetora se, e somente se, essa função atende às seguintes condições.

i) A sua imagem (Im) é igual ao seu contradomínio (CD) (**f** é sobrejetora).

Observe que, ao representarmos simbolicamente uma função **f** na forma f: A → B, o conjunto **A** é o domínio da função, e o conjunto **B** é o contradomínio da função.

Portanto, a condição é satisfeita se, e somente se, Im = B.

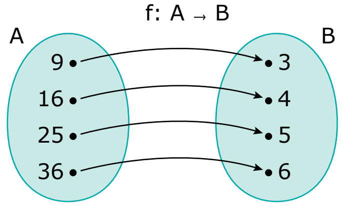
ii) Para quaisquer elementos x_1 e x_2 do domínio **A**, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$ (**f** é injetora).

Em outras palavras, cada elemento da imagem deve estar relacionado com um único elemento do domínio. Logo, uma função será bijetora quando for sobrejetora e injetora.

Exemplos:

1º) Em forma de diagrama

f: A → B



Verificando a condição **i**, temos que:

Domínio: D = A = {9, 16, 25, 36}

Contradomínio: CD = B = {3, 4, 5, 6}

Imagem: Im = {3, 4, 5, 6}

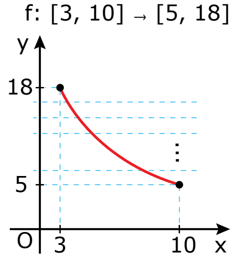
Logo, CD = Im.

Verificando a condição **ii**:

Podemos observar que cada elemento da imagem está relacionado com um único elemento do domínio.

2º) Em forma de gráfico

f: [3, 10] → [5, 18]



Verificando a condição **i**, temos que:

Domínio: D = [3, 10]

Contradomínio: CD = [5, 18]

Imagem (projeção do gráfico no eixo das ordenadas): Im = [5, 18]

Logo, CD = Im.

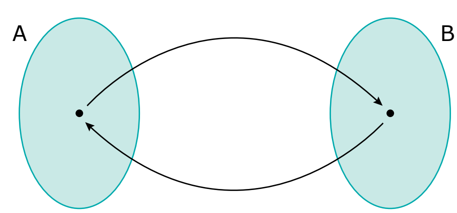
Verificando a condição **ii**:

Podemos observar que cada elemento da imagem está relacionado com um único elemento do domínio. Para tal verificação, basta traçarmos linhas paralelas ao eixo das abscissas, a partir da imagem. Cada uma dessas linhas deve interceptar a curva em um único ponto, para que a condição seja satisfeita.

FUNÇÃO INVERSA

Considere o diagrama a seguir:

f: A → B



f^{-1}: B → A

No diagrama, está indicada uma função **f** que associa a cada elemento de **A** a sua imagem em **B**. A função inversa de **f**, indicada por f^{-1}, é a função que associa a cada elemento de **B** o elemento de **A** associado a **B** por **f**.

Observe que **f** deve ser uma função bijetora.

> Uma função bijetora f: A → B é inversível, e sua inversa é a função f^{-1}: B → A se, e somente se, para todo $(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$.

Cálculo da função inversa – regra prática

i) Trocar **x** por **y** e **y** por **x**.

ii) Isolar o novo **y**.

Exemplos:

Determinar a função inversa das seguintes funções.

1º) $f(x) = 3x$

(trocar **x** por **y** e **y** por **x**): $x = 3y$

(isolar o novo **y**): $y = \frac{x}{3}$

Assim, indicamos na forma $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$.

2º) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, para $x \neq -2$

(trocar **x** por **y** e **y** por **x**):

$x = \frac{y-1}{y+2} \Rightarrow y - 1 = xy + 2x \Rightarrow y - xy = 2x + 1$

(isolar o novo **y**):

$y(1 - x) = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{1-x}$, para $x \neq 1$

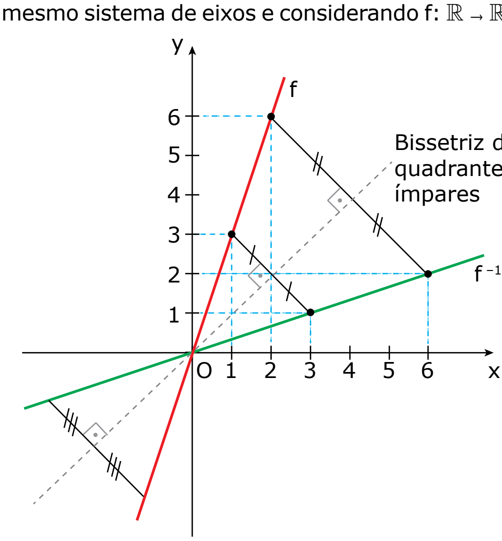
Assim, indicamos na forma $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-x}$.

OBSERVAÇÃO

Os gráficos da função **f** de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo:

Esboçando os gráficos das funções $f(x) = 3x$ e $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$ em um mesmo sistema de eixos e considerando $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos:



EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFV-MG) Seja **f** a função real, tal que $f(2x - 9) = x$, para todo **x** real. A igualdade $f(c) = f^{-1}(c)$ se verifica para **c** igual a:

A) 5.
B) 7.
C) 3.
D) 9.
E) 1.

Resolução:

Cálculo de f(c):

Fazendo $2x - 9 = k$, temos $x = \frac{k+9}{2}$. Portanto, temos que $f(k) = \frac{k+9}{2}$. Logo, podemos dizer que $f(x) = \frac{x+9}{2}$.

Então, para $x = c$, temos $f(c) = \frac{c+9}{2}$.

Cálculo de $f^{-1}(c)$:

Temos $f(x) = \frac{x+9}{2}$.

Trocando **x** por **y** e **y** por **x**, temos:

$x = \frac{y+9}{2} \Rightarrow y = 2x - 9 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 9$

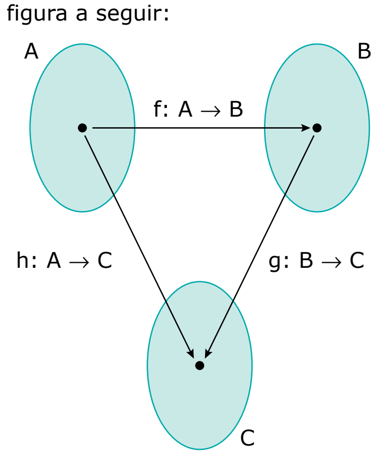
Logo, para $x = c$, temos $f^{-1}(c) = 2c - 9$.

Fazendo $f(c) = f^{-1}(c)$, obtemos:

$\frac{c+9}{2} = 2c - 9 \Rightarrow 4c - 18 = c + 9 \Rightarrow 3c = 27 \Rightarrow c = 9$

FUNÇÃO COMPOSTA

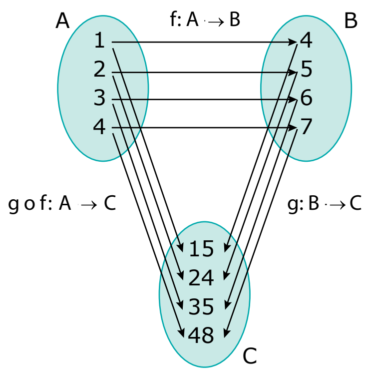
Sejam as funções **f** e **g**, tal que $f: A \to B$ e $g: B \to C$, conforme a figura a seguir:



Considere uma função $h: A \to C$ que produz os mesmos resultados que as funções **f** e **g** aplicadas em sequência, ou seja, que relaciona cada elemento de **A** com o correspondente elemento de **C** sem passar pelo conjunto **B**. Tal função **h** é denominada função composta de **f** e **g**.

Denotamos a função composta h(x) por g(f(x)) ou $g \circ f(x)$.

Como exemplo, considere os conjuntos **A**, **B** e **C** representados a seguir e sejam as funções f: A → B e g: B → C, tais que f(x) = x + 3 e g(x) = $x^2 - 1$. Vamos descobrir a expressão matemática da função g(f(x)), que relaciona os elementos de **A** com os elementos de **C**.



Para calcular a expressão da função g(f(x)), devemos substituir o **x** na expressão de g(x) por f(x).

Assim, como $g(x) = x^2 - 1$, temos:

$g(f(x)) = f(x)^2 - 1$

Mas, f(x) = x + 3. Portanto, temos:

$g(f(x)) = g(x + 3) = (x + 3)^2 - 1 = x^2 + 6x + 9 - 1$

Assim, $g(f(x)) = x^2 + 6x + 8$.

Observe que essa expressão realmente relaciona os elementos de **A** com os elementos de **C**.

- Para x = 1, temos $g(f(1)) = 1^2 + 6 . 1 + 8 = 15$.
- Para x = 2, temos $g(f(2)) = 2^2 + 6 . 2 + 8 = 24$.
- Para x = 3, temos $g(f(3)) = 3^2 + 6 . 3 + 8 = 35$.
- Para x = 4, temos $g(f(4)) = 4^2 + 6 . 4 + 8 = 48$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

02. Sejam as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que f(x) = 2x + 3 e g(x) = x − 2. Calcular:

A) f(g(2))

Resolução:

f(g(2)) = f(0) = 3

B) $f \circ g \circ g(1)$

Resolução:

$f \circ g \circ g(1) = f(g(g(1))) = f(g(-1)) = f(-3) = -3$

C) f(g(x))

Resolução:

f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(x − 2) + 3 = 2x − 1

D) $g \circ f(x)$

Resolução:

$g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) - 2 = 2x + 3 - 2 = 2x + 1$

03. Considere as funções f(x) = 4x + 11 e f(g(x)) = 6x − 10. Determinar a expressão de g(x).

Resolução:

Pela definição de função composta, temos que f(g(x)) = 4g(x) + 11. Igualando esse resultado com a expressão fornecida, temos:

$4g(x) + 11 = 6x - 10 \Rightarrow 4g(x) = 6x - 21 \Rightarrow g(x) = \dfrac{6x - 21}{4}$

04. Sejam as funções h(x) = 5x − 3 e t(h(x)) = 15x + 32. Determinar a expressão de t(x).

Resolução:

$t(h(x)) = 15x + 32 \Rightarrow t(5x - 3) = 15x + 32 \quad \text{(I)}$

Vamos denotar 5x − 3 por **k**. Assim, temos:

$5x - 3 = k \Rightarrow x = \dfrac{k+3}{5}$

Substituindo na expressão (I), temos:

$t(k) = 15 . \dfrac{k+3}{5} + 32 \Rightarrow t(k) = 3k + 9 + 32 \Rightarrow$

$t(k) = 3k + 41$

Daí, se a expressão vale para **k**, também vale para **x**, ou seja, t(x) = 3x + 41.

05. (UFU-MG) Seja **f** uma função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ f(f(-x)), & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

Então, f(−1) é igual a:

A) 0. B) 1. C) 2. D) −1. E) 3.

Resolução:

Para x = −1, temos f(−1) = f(f(1)).

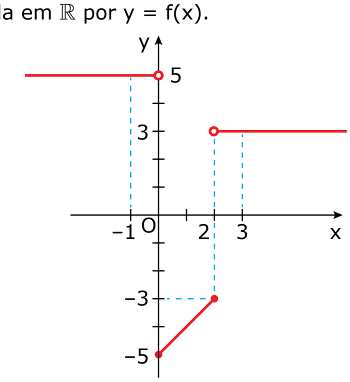
Mas f(1) = 1 + 1 ⇒ f(1) = 2.

Logo, f(−1) = f(2).

Mas f(2) = 2 + 1 ⇒ f(2) = 3.

Logo, f(−1) = 3.

06. (Mackenzie-SP) O gráfico a seguir representa uma função definida em $\mathbb{R}$ por y = f(x).



O valor de f(2) + f(f(−5)) é igual a:

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

Resolução:

Pelo gráfico, verificamos que f(2) = −3.

Além disso, f(−5) = 5.

Logo, f(f(−5)) = f(5) = 3.

Portanto, f(2) + f(f(−5)) = −3 + 3 = 0.

MATEMÁTICA

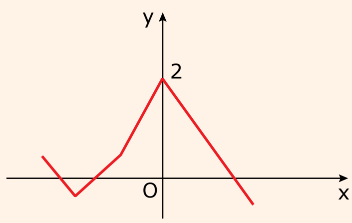
EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 5LAK (IFMA–2016) Considere as funções afins f(x) e p(x), definidas de reais em reais, onde f(x) = 2x + 4 e p(x) = 6x – 2m, sendo **m** uma constante real. O valor de **m** para que p(f(x)) = f(p(x)) é:

A) –7.
B) $\frac{1}{3}$.
C) 5.
D) 7.
E) –10.

02. (EFOA-MG) A figura a seguir representa o gráfico de uma função **f**.



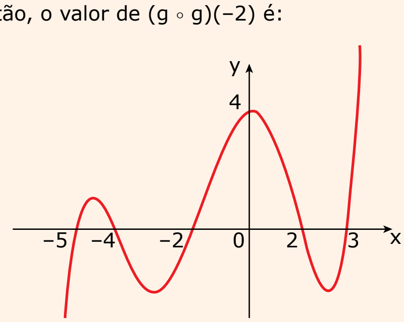
O total de elementos **x** tais que f(f(x)) = 2 é:

A) 2.
B) 4.
C) 0.
D) 3.
E) 1.

03. BHJE (IFCE) Seja f:]1, +∞[⊂ ℝ → ℝ uma função dada por $f(x) = \frac{x}{x-1}$. A expressão da função composta g(x) = f(f(x+1)) é:

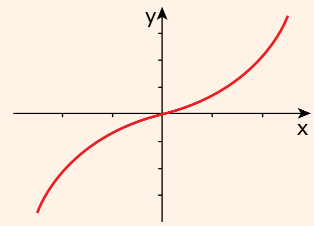
A) $g(x) = \frac{1}{x-1}$
B) $g(x) = \frac{x}{x-1}$
C) g(x) = x + 1
D) g(x) = x – 1
E) $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

04. VRTX (UPF-RS–2015) Considere a função real **g**, cuja representação gráfica está parcialmente ilustrada na figura a seguir. Sendo g ∘ g a função composta de **g** com **g**, então, o valor de (g ∘ g)(–2) é:

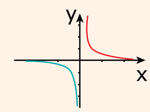


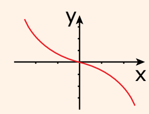
A) 0.
B) 4.
C) 2.
D) –2.
E) –5.

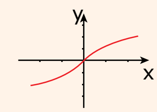
05. (Unicamp-SP–2016) Considere o gráfico da função y = f(x) exibido a seguir.

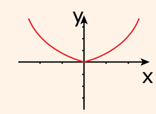


O gráfico da função inversa y = $f^{-1}(x)$ é dado por:

A) 

B) 

C) 

D) 

06. 3NM2 (UPF-RS–2018) Um estudo das condições ambientais de um município do Rio Grande do Sul indica que a taxa média de monóxido de carbono (CO) no ar será de C(P) = 0,2P – 1 partes por milhão (ppm) quando a população for **P** milhares de habitantes. Sabe-se que, em **t** anos, a população desse município será dada pela relação P(t) = 50 + 0,05t^2. O nível de monóxido de carbono, em função do tempo **t**, é dado por

A) C(t) = 9 + 0,01t^2
B) C(t) = 0,2(49 + 0,05t^2)
C) C(t) = 9 + 0,05t^2
D) C(t) = 0,1(1 + 0,05t^2) – 1
E) C(t) = 10 + 0,95t^2

07. DXEL (UERN–2015) Considerando as funções f(x) = 3x – 2 e g(x) = –2x + 1, o valor de **k**, com k ∈ ℝ tal que $f(g(k))^{-1} = 1$ é:

A) 3.
B) 2.
C) –1.
D) –5.

08. BJG7 (UECE–2016) A função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ é invertível. Se f^{-1} é sua inversa, então, o valor de $[f(0) + f^{-1}(0) + f^{-1}(-1)]^2$ é:

A) 1.
B) 4.
C) 9.
D) 16.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (ACAFE-SC–2016) Dadas as funções **f** e **g**, com funções reais $f(2x + 1) = 4x + 12$ e $g(x + 2) = 2x - 1$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}$, então, pode-se afirmar que $f(g(x)) = 2$ é um número

A) divisor de 10.

B) múltiplo de 4.

C) fracionário.

D) primo.

02. P1T5 (UECE–2017) A função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x+1}$, para $x \neq -\dfrac{1}{4}$ é invertível. Sua inversa **g** pode ser expressa na forma $g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, onde **a**, **b**, **c** e **d** são números inteiros.

Nessas condições, a soma a + b + c + d é um número inteiro múltiplo de

A) 6. B) 5. C) 4. D) 3.

03. (CEFET-MG–2016) Dadas as funções $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = x^2 + 3x + c$, o maior valor inteiro de **c** tal que a equação $g(f(x)) = 0$ apresente raízes reais é:

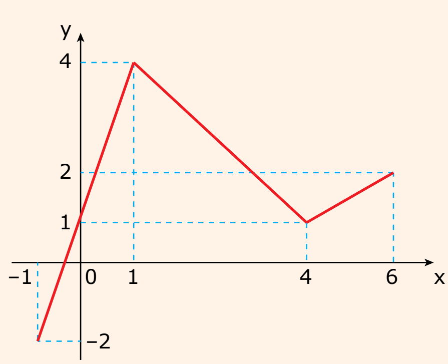
A) 1. B) 2. C) 3. D) 4.

04. WWMA (ESPM-SP) Sejam **f** e **g** funções reais, tal que $f(2x + 1) = 2x + 4$ e $g(x + 1) = 2x - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos afirmar que a função $f \circ g(x)$ é igual a:

A) $2x - 1$ C) $3x + 1$ E) $x - 3$

B) $x + 2$ D) $2x$

05. TKXJ (ACAFE-SC–2016) O gráfico a seguir representa a função real f(x), definida no intervalo [–1, 6].



Considerando a função $h(x) = f(x - 2)$, então, o valor da expressão dada por $f(h(3)) + h(f(4))$ é igual a:

A) 7. B) –2. C) 5. D) –1.

06. HLLI (IFCE–2016) Se $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x^3+1}{2}$ possui inversa

A) $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2x+1}}$.

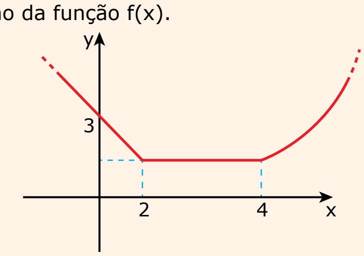
B) $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x^3+1}$.

C) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x+1}$.

D) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x-1}$.

E) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2}$.

07. A0H8 (ESPM-SP) A figura a seguir representa o gráfico cartesiano da função f(x).



Sabendo-se que f(1) = 2, o valor de f [f(π)] é:

A) 1. B) $\dfrac{3}{2}$. C) $\dfrac{3}{4}$. D) 2. E) $\dfrac{5}{2}$.

08. N35N (UFSM-RS) Os praticantes de exercícios físicos se preocupam com o conforto dos calçados utilizados em cada modalidade. O mais comum é o tênis, que é utilizado em corridas, caminhadas, etc. A numeração para esses calçados é diferente em vários países, porém existe uma forma para converter essa numeração de acordo com os tamanhos. Assim, a função $g(x) = \dfrac{x}{6}$ converte a numeração dos tênis fabricados no Brasil para a dos tênis fabricados nos Estados Unidos, e a função $f(x) = 40x + 1$ converte a numeração dos tênis fabricados nos Estados Unidos para a dos tênis fabricados na Coreia. A função **h** que converte a numeração dos tênis brasileiros para a dos tênis coreanos é:

A) $h(x) = \dfrac{20}{3}x + \dfrac{1}{6}$

B) $h(x) = \dfrac{2}{3}x + 1$

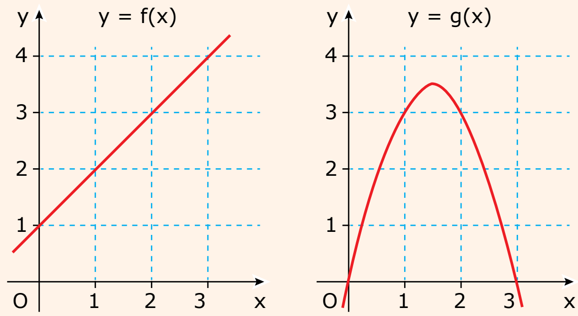
C) $h(x) = \dfrac{20}{3}x + 1$

D) $h(x) = \dfrac{20x+1}{3}$

E) $h(x) = \dfrac{2x+1}{3}$

MATEMÁTICA

09. (UFJF-MG) A seguir, encontram-se representados os gráficos das funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Sabendo que **f** possui inversa f^{-1}: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o valor de $f \circ g \circ f^{-1}(2)$ é:

A) 0.

B) 1.

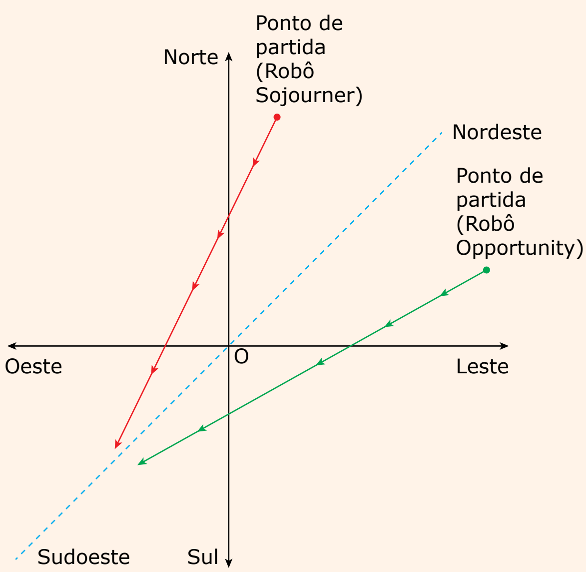
C) 2.

D) 3.

E) 4.

SEÇÃO ENEM

01. A figura a seguir indica as trajetórias de dois robôs, Sojourner e Opportunity, utilizados pela Agência Espacial Americana no projeto de exploração científica do planeta Marte. Considere que os dois robôs tenham partido, simultaneamente, de pontos distintos da superfície de Marte, com a mesma velocidade e em trajetória retilínea, em uma missão de exploração. Cada um dos robôs é controlado por um operador na Terra.



Sabe-se que o robô Sojourner intercepta a linha norte-sul a 4 km ao norte do ponto de referência **O**, e intercepta a linha leste-oeste a 2 km a oeste desse mesmo ponto de referência.

Considerando-se que a trajetória do robô Opportunity seja simétrica à trajetória do robô Sojourner em relação à linha sudoeste-nordeste, e que não ocorram imprevistos que atrasem os robôs, pode-se afirmar que eles vão se encontrar a, aproximadamente,

(Considere: $\sqrt{2} \cong 1,4$)

A) 1,4 km do ponto **O**.

B) 2,8 km do ponto **O**.

C) 4,2 km do ponto **O**.

D) 5,6 km do ponto **O**.

E) 7,0 km do ponto **O**.

02. Uma das etapas da implementação de uma rotina de programação de computadores consiste na determinação de um parâmetro ▯. Esse parâmetro é obtido da seguinte forma:

- Um dado de entrada **x** é inserido no programa.
- Multiplica-se **x** por 8.
- Adiciona-se 11 ao resultado anterior.

Em uma etapa subsequente, o programador calcula um parâmetro σ, utilizando o valor de ▯ calculado anteriormente, do seguinte modo:

- Adiciona-se 13 ao valor de ▯.
- Eleva-se o valor obtido ao quadrado.

Um programador decidiu determinar o parâmetro σ em uma única etapa, a partir do dado de entrada **x**. A expressão matemática correspondente a essa operação é:

A) $\sigma = 64(x^2 + 6x + 9)$

B) $\sigma = 64(x^2 + 11x + 13)$

C) $\sigma = 64(x^2 + 9)$

D) $\sigma = 64(x^2 - 3x + 12)$

E) $\sigma = 64(4x^2 + 6x + 9)$

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. E	04. B	07. D
02. D	05. C	08. C
03. C	06. A	

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. C	04. D	07. D
02. C	05. D	08. C
03. B	06. D	09. E

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. D	02. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Inequações

INTRODUÇÃO

Sabemos que uma inequação é uma relação caracterizada pela presença de sinais de desigualdade: >, <, ≥ ou ≤. Vejamos alguns exemplos:

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $x - 3 > 18$.

$x - 3 > 18 \Rightarrow x > 21$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 21\}$

2º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $-2 \leq \dfrac{x+4}{3} < 8$.

Multiplicando-se todos os termos da inequação por 3, temos:

$-6 \leq x + 4 < 24$

Subtraindo-se 4 de todos os termos, temos:

$-10 \leq x < 20$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 \leq x < 20\}$

3º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Inicialmente, vamos calcular as raízes da função:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4 . 1 . 6 = 1$

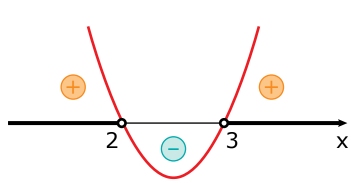
$x = \dfrac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2$ ou $x_2 = 3$

Representando no gráfico, temos:

- Estudo do sinal

  $y > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ou $x > 3$

  $y < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$



Portanto, o conjunto solução é dado por:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

INEQUAÇÃO PRODUTO

Chamamos de inequação produto a toda inequação na qual o primeiro membro é formado por um produto de funções do primeiro grau e / ou funções do segundo grau, e o segundo membro é nulo.

Exemplos:

1º) $(x - 2).(x - 3) \geq 0$

2º) $(x - 1).(x^2 - 4x + 3) \geq 0$

3º) $(2x^2 - 5x).(2 + x - x^2) < 0$

Para resolver uma inequação produto, devemos estudar o sinal de cada uma das funções que estão sendo multiplicadas. Em seguida, obtemos o resultado analisando os sinais obtidos e utilizando o chamado **quadro de sinais**.

Exemplos:

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 2).(x - 3) \geq 0$.

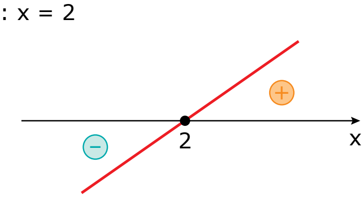
Vamos denotar cada função por y_1 e y_2 e estudar o sinal de cada uma delas.

$\overbrace{(x-2)}^{y_1}.\overbrace{(x-3)}^{y_2} \geq 0$

- Estudo do sinal de y_1

  $y_1 = x - 2$

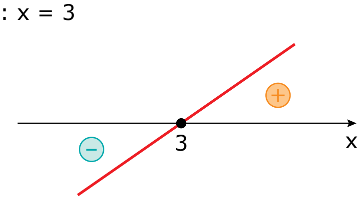
  Raiz: $x = 2$



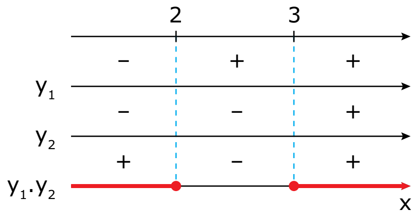
- Estudo do sinal de y_2

  $y_2 = x - 3$

  Raiz: $x = 3$



- Quadro de sinais



Como queremos saber em quais intervalos o produto é positivo ou igual a zero, temos:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$.

OBSERVAÇÃO

As inequações do 2º grau que possuam raízes reais podem ser fatoradas e, portanto, transformadas em inequações produto. Nesse caso, podem ser resolvidas como descrito anteriormente. Por exemplo, a inequação $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ pode ser escrita na forma $(x - 2)(x - 3) \geq 0$ e resolvida com o uso do quadro de sinais.

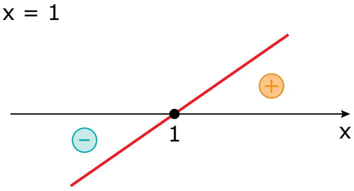
2º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 1).(x^2 - 4x + 3) \geq 0$.

$$\overbrace{(x-1)}^{y_1}.\overbrace{(x^2-4x+3)}^{y_2} \geq 0$$

- Estudo do sinal de y_1

$y_1 = x - 1$

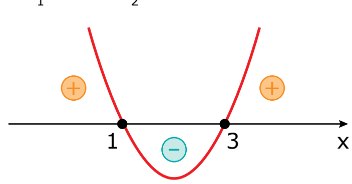
Raiz: $x = 1$



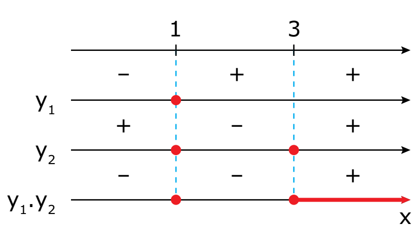
- Estudo do sinal de y_2

$y_2 = x^2 - 4x + 3$

Raízes: $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$



- Quadro de sinais



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ ou } x \geq 3\}$.

3º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(2x^2 - 5x).(2 + x - x^2) < 0$.

$$\overbrace{(2x^2-5x)}^{y_1}.\overbrace{(2+x-x^2)}^{y_2} < 0$$

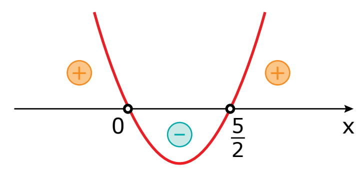
- Estudo do sinal de y_1

$y_1 = 2x^2 - 5x$

Raízes: $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{5}{2}$.

$y_1 > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > \frac{5}{2}$

$y_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{5}{2}$



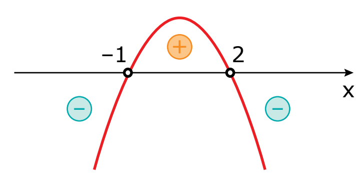
- Estudo do sinal de y_2

$y_2 = 2 + x - x^2$

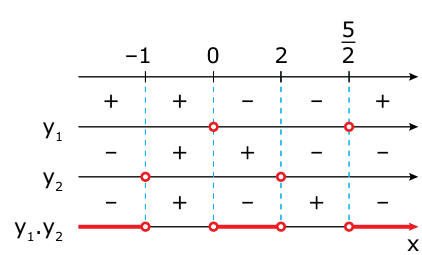
Raízes: $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$

$y_2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$

$y_2 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 2$



- Quadro de sinais



Queremos saber para que valores de **x** temos $y_1.y_2 < 0$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 < x < 2 \text{ ou } x > \frac{5}{2}\right\}$.

INEQUAÇÃO QUOCIENTE

Chamamos de inequação quociente a toda inequação na qual o primeiro membro é formado por uma divisão envolvendo funções do primeiro grau e / ou funções do segundo grau, e o segundo membro é nulo. Convém ressaltar que, como se trata de uma divisão, devemos verificar suas condições de existência, ou seja, o denominador não pode ser nulo.

Exemplos:

1º) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} \leq 0$ **2º)** $\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 6x + 9} \geq 0$

O procedimento para resolução é análogo ao adotado nas inequações produto.

Exemplos:

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} \leq 0$.

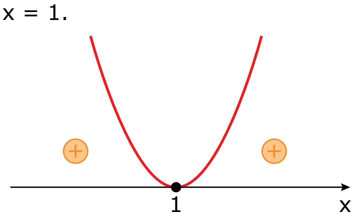
Condição de existência: $x \neq 3$

$$\dfrac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{y_1}}{\underbrace{x - 3}_{y_2}} \leq 0$$

- Estudo do sinal de y_1

  $y_1 = x^2 - 2x + 1$

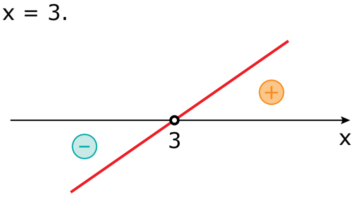
  Raiz: $x = 1$.



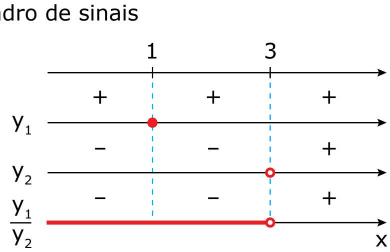
- Estudo do sinal de y_2

  $y_2 = x - 3$

  Raiz: $x = 3$.



- Quadro de sinais



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.

2º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 6x + 9} \geq 0$.

$$\dfrac{\overbrace{x^2 - 2x - 8}^{y_1}}{\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{y_2}} \geq 0$$

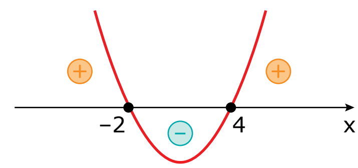
- Estudo do sinal de y_1

  $y_1 = x^2 - 2x - 8$

  $y_1 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ou $x > 4$

  $y_1 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4$

  Raízes: $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$



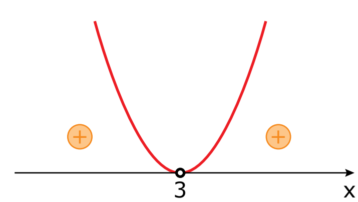
- Estudo do sinal de y_2

  $y_2 = x^2 - 6x + 9$

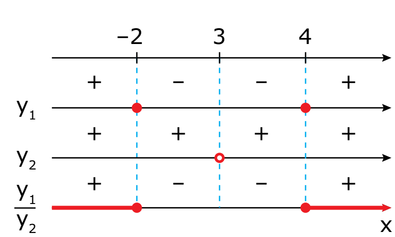
  Condição de existência: $x \neq 3$

  $y_2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

  Raízes: $x = 3$



- Quadro de sinais



Queremos saber para que valores de **x** temos $\dfrac{y_1}{y_2} \geq 0$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2$ ou $x \geq 4\}$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio) O conjunto das soluções inteiras da inequação $x^2 - 3x \leq 0$ é:

A) $\{0, 3\}$
B) $\{1, 2\}$
C) $\{-1, 0, 2\}$
D) $\{1, 2, 3\}$
E) $\{0, 1, 2, 3\}$

02. (UFG-GO) Duas empresas **A** e **B** comercializam o mesmo produto. A relação entre o patrimônio **y** e o tempo de atividade em anos **x** de cada empresa é representada, respectivamente, por:

A: $x - 2y + 6 = 0$ e B: $x - 3y + 15 = 0$

Considerando essas relações, o patrimônio da empresa **A** será superior ao patrimônio da empresa **B** a partir de quantos anos?

A) 3 B) 5 C) 9 D) 12 E) 15

03. 9HP3 (PUC Rio–2015) A soma dos valores inteiros que satisfazem a desigualdade $x^2 + 6x \leq -8$ é:

A) −9.
B) −6.
C) 0.
D) 4.
E) 9.

04. J2Ø L (PUC Rio–2016) Considere as funções reais $f(x) = x^2 + 4x$ e $g(x) = x$. Qual é o maior inteiro para o qual vale a desigualdade $f(x) < g(x)$?

A) −3
B) −1
C) 0
D) 3
E) 4

05. 9B1M (IFSP–2015) Um espião de guerra enviou ao seu comando a seguinte mensagem:

$$5n + 25 > 5\,500$$
$$-8n + 3\,501 > 210 - 5n$$

O comando sabia que a letra **n** representava o número de foguetes do inimigo. Fazendo os cálculos, é correto afirmar que o total de foguetes que o comando descobriu foi de

A) 3 000 foguetes.
B) 2 192 foguetes.
C) 1 097 foguetes.
D) 1 096 foguetes.
E) 195 foguetes.

06. VZZS (CEFET-MG–2018) O número de soluções inteiras pertencentes ao conjunto solução da inequação $\frac{(3x-9)}{2} \cdot \frac{(x+6)}{3} < 0$ em $\mathbb{R}$ é

A) 4. B) 6. C) 8. D) 10.

07. L5I5 (PUC Rio–2016) Considere a inequação $\frac{x+1}{-x-5} \leq 0$, com $x \in \mathbb{R}$.

Qual é o conjunto solução da inequação?

A) $(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$
B) $(-\infty, -5) \cup [-1, \infty)$
C) $[0, \infty)$
D) $[-5, \infty)$
E) $(-1, \infty)$

08. GC5V (UESPI) Em qual dos seguintes intervalos abertos o gráfico da parábola $y = 3x^2 - 4x - 3$ fica abaixo do gráfico da parábola $y = x^2 + 3$?

A) $(-1, 4)$
B) $(0, 5)$
C) $(-2, 1)$
D) $(-2, 4)$
E) $(-1, 3)$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. SZA7 (PUC Rio) A soma das soluções da inequação $\frac{-x+3}{2x-1} > 0$ em que **x** pertence ao conjunto dos números naturais é:

A) 3. B) 4. C) 5. D) 6. E) 8.

02. (CEFET-MG) O conjunto solução **S**, em $\mathbb{R}$, da inequação $-4.(2x-1).\left(\frac{x}{3} - 1\right) > 0$ é

A) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$.
B) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 3\right\}$.
C) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$.
D) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\right\}$.

03. 6GYP (UFU-MG) Suponha que, para realizar traduções de textos egípcios para um museu brasileiro, um tradutor **X** cobre um valor fixo de R$ 440,00, acrescido de R$ 3,20 por linha traduzida. Por outro lado, um tradutor **Y**, para executar o mesmo trabalho, cobra um fixo de R$ 800,00, mais R$ 2,30 por linha traduzida.

Nessas condições, o número que corresponde à quantidade mínima de linhas a serem traduzidas de modo que o custo seja menor se for realizado pelo tradutor **Y** é

A) um quadrado perfeito.
B) divisível por 5.
C) um número ímpar.
D) divisível por 3.

04. PJTG (IFCE) O conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação $(5x^2 - 6x - 8)(2 - 2x) < 0$ é

A) $S = \left]-\frac{4}{5}, 2\right[\cup \,]-\infty, 1[$.
B) $S = \,]2, +\infty[\,\cup \left]-\frac{4}{5}, 1\right[$.
C) $S = \left]-\frac{4}{5}, 2\right[\cup \,]1, +\infty[$.
D) $S = \left]-\infty, -\frac{4}{5}\right[\cup \,]1, 2[$.
E) $S = \left]-\frac{4}{5}, 1\right[\cup \,]2, +\infty[$.

05. (CEFET-MG–2015) No conjunto dos números reais, o conjunto solução da inequação $\frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{4} > 1$ é o intervalo:

A) $]-\infty, -3[$

B) $\left]-\infty, -\frac{3}{7}\right[$

C) $\left]-\frac{3}{7}, \infty\right[$

D) $]-3, \infty[$

06. VRQ7

(Unimontes-MG–2015) Em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de $\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2x+1}$ é:

A) $x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}$ ou $0 \leq x < 1$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$

C) $x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2$ ou $-\frac{1}{2} < x < 1$

D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$

07. GPU7

(UERN) A soma de todos os números inteiros que satisfazem simultaneamente a inequação produto $(3x - 7).(x + 4) < 0$ e a inequação quociente $\frac{2x+1}{5-x} > 0$ é:

A) 3.

B) 5.

C) 6.

D) 7.

08. BVYO

(ACAFE-SC) Uma pequena fábrica de tubos de plástico calcula a sua receita em milhares de reais, através da função R(x) = 3,8x, onde **x** representa o número de tubos vendidos. Sabendo que o custo para a produção do mesmo número de tubos é 40% da receita mais R$ 570,00. Nessas condições, para evitar prejuízo, o número mínimo de tubos de plástico que devem ser produzidos e vendidos pertence ao intervalo:

A) [240, 248]

B) [248, 260]

C) [252, 258]

D) [255, 260]

09. 6J4Y

(Mackenzie-SP) A função $f(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{x^2+x-2}}$ tem como domínio o conjunto da solução

A) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq -2$ ou $1 \leq x < 3\}$

B) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2$ ou $1 < x \leq 3\}$

C) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2$ ou $1 \leq x \leq 3\}$

D) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq -1$ ou $1 \leq x \leq 3\}$

E) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < -1$ ou $1 < x \leq 3\}$

10. 37ZH

(UNEB-BA–2015) Uma empresa pode gastar, no máximo, R$ 15 000,00 para comprar 400 unidades de certo material. De determinada marca, o material custa R$ 25,00 por unidade, e de outra, de melhor qualidade, custa R$ 45,00 por unidade.

Efetuada a compra, tem-se que a razão entre o número de unidades compradas da melhor marca e o da marca inferior deve ser, no máximo,

A) $\frac{5}{9}$

B) $\frac{3}{5}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{5}{3}$

E) $\frac{9}{5}$

11. (UFJF-MG–2016) Dadas as desigualdades, em $\mathbb{R}$:

I. $3x + 1 < -x + 3 \leq -2x + 5$

II. $\frac{4x-1}{x-2} \leq 1$

O menor intervalo que contém todos os valores de **x** que satisfazem, simultaneamente, às desigualdades I e II é:

A) $\left]\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right[$

B) $\left]-2, -\frac{3}{2}\right[$

C) $\left]-\infty, \frac{3}{5}\right[$

D) $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$

E) $\left[\frac{4}{3}, \frac{3}{5}\right[$

12. YOPI

(Umesp) A função $f(x) = \frac{\sqrt{\frac{3x}{x+4}}}{\sqrt{4-x^2}}$ tem como domínio, no campo dos reais, os valores de **x** que se encontram na alternativa:

A) $\mathbb{R} - \{4\}$

B) $x < -4$ ou $x \geq 0$

C) $0 \leq x < 4$

D) $0 \leq x < 2$

E) $0 < x < 2$

13. (CN-RJ–2015) Seja S a soma dos valores inteiros que satisfazem a inequação $\frac{(5x-40)^2}{x^2-10x+21} \leq 0$. Sendo assim, pode-se afirmar que

A) S é um número divisível por 7.

B) S é um número primo.

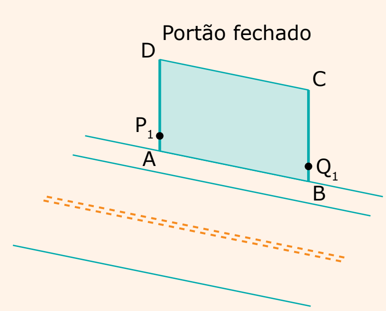
C) S^2 é divisível por 5.

D) $\sqrt{S}$ é um número racional.

E) 3S + 1 é um número ímpar.

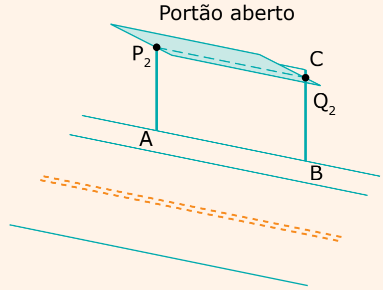
14. 9J20

(Insper-SP) O acesso à garagem de um edifício é guardado por um portão retangular que fica normalmente fechado. Para abrir a passagem para os veículos que por ali circulam, o portão sobe e se inclina, conforme figuras a seguir.



MATEMÁTICA

Distantes 0,5 m do nível da calçada (pontos **A** e **B**), os pontos P_1 e Q_1 indicam as posições das extremidades de um eixo que sustenta o portão.



O portão, que tem 3 m de altura, sobe e, simultaneamente, gira 60 graus em torno desse eixo, até ficar totalmente aberto, suspenso nas posições indicadas por P_2 e Q_2.

O portão é feito soldando-se placas quadradas de 1 m², que não podem ser cortadas, e pesam 15 kg cada uma. Se o eixo que movimenta o portão pode sustentar até 250 kg, a maior largura AB que o portão pode ter é

A) 3,0 m.
B) 3,5 m.
C) 4,0 m.
D) 4,5 m.
E) 5,0 m.

15. IY2A (UEMA–2015) Uma função consiste na associação de dois conjuntos **A** e **B** de números reais, por meio de uma lei **f**. O subconjunto dos elementos de **A** que corresponde a um, e somente um, elemento de **B** é denominado domínio da função D(f).

Considerando que a expressão $f(x) = \sqrt{\dfrac{(2x^2 - 8)(x^2 + x - 6)}{x^2 + 2x - 3}}$

é uma função, determine o domínio de f(x).

A) D = {x Œ ℝ | x > 1; x £ –2 e x π – 3}

B) D = {x Œ ℝ | x > 1; x < –2 e x π – 3}

C) D = {x Œ ℝ | x > 1; x ≥ –2 e x = – 3}

D) D = {x Œ ℝ | x ≥ 1; x £ –2 e x = 3}

E) D = {x Œ ℝ | x £ 1; x > –2 e x π 3}

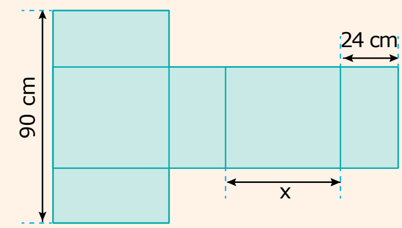
SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2018) Uma empresa de comunicação tem a tarefa de elaborar um material publicitário de um estaleiro para divulgar um novo navio, equipado com um guindaste de 15 m de altura e uma esteira de 90 m de comprimento. No desenho desse navio, a representação do guindaste deve ter sua altura entre 0,5 cm e 1 cm, enquanto a esteira deve apresentar comprimento superior a 4 cm. Todo o desenho deverá ser feito em uma escala 1 : X. Os valores possíveis para X são, apenas,

A) X > 1 500
B) X < 3 000
C) 1 500 < X < 2 250
D) 1 500 < X < 3 000
E) 2 250 < X < 3 000

02. (Enem) Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.

A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.



O maior valor possível para **x**, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Ana, é:

A) 25.
B) 33.
C) 42.
D) 45.
E) 49.

03. (Enem) Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade **q** de produtos é dado por uma função, simbolizada por CT, enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade **q** também é uma função, simbolizada por FT. O lucro total (LT) obtido pela venda de quantidade **q** de produtos é dado pela expressão LT(q) = FT(q) – CT(q).

Considerando-se as funções FT(q) = 5q e CT(q) = 2q + 12 como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

GABARITO

Meu aprovaitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. E
02. D
03. A
04. B
05. D
06. C
07. B
08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. B
03. C
04. E
05. B
06. C
07. A
08. B
09. B
10. D
11. D
12. D
13. B
14. E
15. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

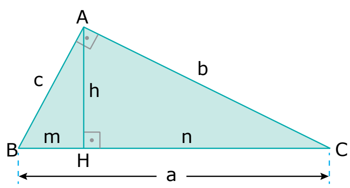
01. C
02. E
03. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Triângulo Retângulo

INTRODUÇÃO

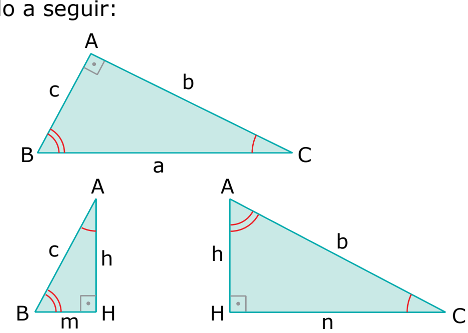
Considere o triângulo retângulo ABC a seguir:



Em que:

- **b** e **c** são as medidas dos catetos;
- **a** é a medida da hipotenusa;
- **h** é a medida da altura relativa à hipotenusa;
- **m** é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa;
- **n** é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

Pela altura relativa à hipotenusa, separamos o triângulo retângulo em dois outros triângulos semelhantes a ele, como mostrado a seguir:



Pela semelhança entre esses triângulos, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta HBA \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Leftrightarrow \begin{array}{l} ah = bc \\ c^2 = am \\ ch = bm \end{array}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta HAC \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Leftrightarrow \begin{array}{l} b^2 = an \\ ah = bc \\ bh = cn \end{array}$$

$$\Delta HBA \sim \Delta HAC \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Leftrightarrow \begin{array}{l} bh = cn \\ ch = bm \\ h^2 = mn \end{array}$$

Para demonstrar o Teorema de Pitágoras, basta adicionar, membro a membro, as relações $b^2 = an$ e $c^2 = am$, obtendo:

$$b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(n + m)$$

Como $n + m = a$, concluímos que:

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

OBSERVAÇÃO

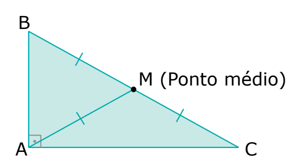
O recíproco Teorema de Pitágoras também é válido, ou seja, se, em um triângulo, o quadrado de um lado for igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo será retângulo.

Resumindo as relações encontradas e excluindo as repetidas, vale a pena memorizar as seguintes:

i) $b^2 = an$
ii) $c^2 = am$
iii) $h^2 = mn$
iv) $ah = bc$
v) $a^2 = b^2 + c^2$

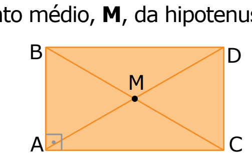
MEDIDA DA MEDIANA RELATIVA À HIPOTENUSA

Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa.



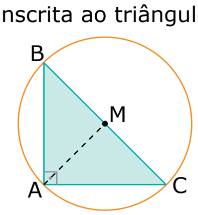
$$\boxed{AM = \frac{BC}{2}}$$

Para provar essa propriedade, construa o retângulo ABDC e suas diagonais. As diagonais de um retângulo são congruentes e o ponto comum às duas é o ponto médio de cada uma. Logo, este é o ponto médio, **M**, da hipotenusa do triângulo ABC:



Como $AD = BC$ e $AM = \frac{AD}{2}$, concluímos que $AM = \frac{BC}{2}$.

Outra maneira de verificar tal propriedade é por meio da circunferência circunscrita ao triângulo retângulo.

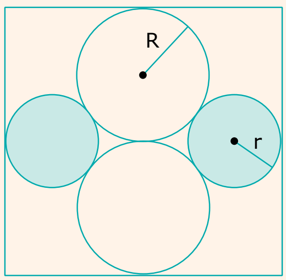


Como o ângulo inscrito na circunferência é reto, o arco $\overset{\frown}{BC}$ que ele "enxerga" mede 180°. Portanto, o segmento $\overline{BC}$ é o diâmetro, e o ponto médio **M** é o centro da circunferência. Logo, a medida $\overline{AM}$ é igual ao raio da circunferência, de onde conclui-se que $AM = \frac{BC}{2}$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. HFVT (ESPM-SP) A figura mostra um quadrado, dois círculos claros de raios **R** e dois círculos escuros de raios **r**, tangentes entre si e aos lados do quadrado.

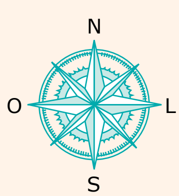


A razão entre **R** e **r** é igual a:

A) $\sqrt{2}$
B) $\sqrt{3}$
C) $\frac{3}{2}$
D) 2
E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

02. B4DQ (IFPE–2016) Francisco decidiu fazer uma brincadeira com seus filhos. Montou um mapa do tesouro com algumas instruções e disse-lhes que, ao chegar ao ponto final, encontrariam um belo prêmio. As instruções foram:

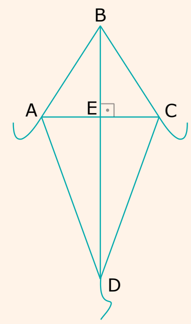
1. Ande 200 metros na direção norte;
2. Ande 120 metros na direção leste;
3. Ande 50 metros na direção sul;
4. Ande 40 metros na direção oeste.



Luiz, um de seus filhos, decidiu colocar em prática o que acabara de aprender na escola. Em alguns minutos, ele descobriu qual seria a menor distância entre o ponto de partida e o ponto de chegada mostrado no mapa. Assim sendo, a distância calculada por Luiz foi de

A) 170 metros.
B) 150 metros.
C) 180 metros.
D) 200 metros.
E) 210 metros.

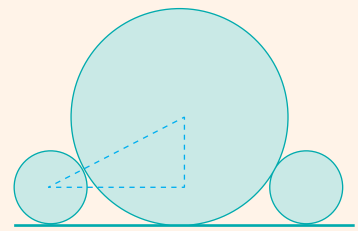
03. J07V (CEFET-MG–2016) Uma pipa, cuja figura é mostrada a seguir, foi construída no formato do quadrilátero ABCD sendo $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{CD}$. A vareta $\overline{BD}$ da pipa intercepta a vareta $\overline{AC}$ em seu ponto médio **E**, formando um ângulo reto. Na construção dessa pipa, as medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{BE}$ usadas são, respectivamente, 25 cm e 20 cm, e a medida de $\overline{AC}$ equivale a $\frac{2}{5}$ da medida de $\overline{BD}$.



Nessas condições, a medida de $\overline{DE}$, em cm, é igual a:

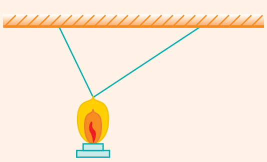
A) 25.
B) 40.
C) 55.
D) 70.

04. Ø379 (UESPI) Uma circunferência de raio **R** é tangente externamente a duas circunferências de raio **r**, com r < R. As três circunferências são tangentes a uma mesma reta, como ilustrado a seguir. Qual a distância entre os centros das circunferências de raio **r**?



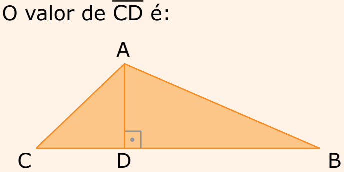
A) $4\sqrt{Rr}$
B) $3\sqrt{Rr}$
C) $2\sqrt{Rr}$
D) $\sqrt{Rr}$
E) $\frac{\sqrt{Rr}}{2}$

05. (UFRGS-RS) O lampião, representado na figura, está suspenso por duas cordas perpendiculares presas ao teto. Sabendo que essas cordas medem $\frac{1}{2}$ e $\frac{6}{5}$, a distância do lampião ao teto é:



A) 1,69. B) 1,3. C) 0,6. D) $\frac{1}{2}$. E) $\frac{6}{13}$.

06. 96Q8 (FUVEST-SP) Na figura a seguir, tem-se AC = 3, AB = 4 e CB = 6. O valor de $\overline{CD}$ é:

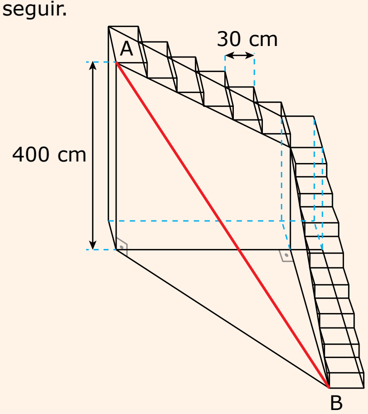


A) $\frac{17}{12}$.
B) $\frac{19}{12}$.
C) $\frac{23}{12}$.
D) $\frac{25}{12}$.
E) $\frac{29}{12}$.

07. (Mackenzie-SP–2016) A soma entre as medidas da altura e da base de um retângulo é de 14 cm. Se a diagonal mede 10 cm, então as medidas da altura e da base do retângulo são, respectivamente,

A) 2 cm e 12 cm.
B) 9 cm e 5 cm.
C) 10 cm e 4 cm.
D) 8 cm e 6 cm.
E) 11 cm e 3 cm.

08. 4DDY (IFSC–2015) Para acessar o topo de uma plataforma de saltos a 400 cm de altura, um atleta deve subir uma escadaria que possui 8 degraus no primeiro lance e 6 degraus no segundo lance de escada, conforme mostra a figura a seguir.



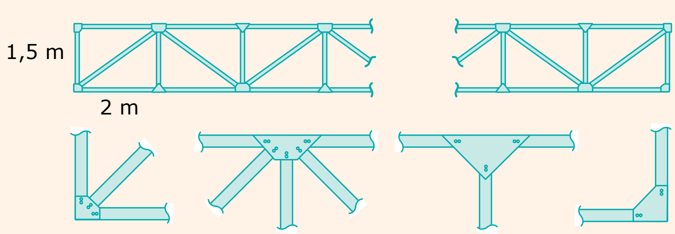
Sabendo que cada degrau possui 30 cm de profundidade, é correto afirmar que o comprimento, em cm, da haste metálica AB utilizada para dar sustentação à plataforma é:

A) 300.
B) 400.
C) 500.
D) 200.
E) 100.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

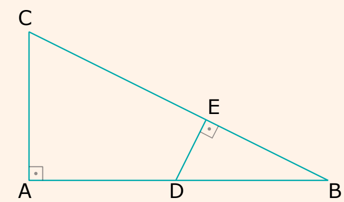
01. EAØT (Unicamp-SP) Um carpinteiro foi contratado para construir uma cerca formada por ripas de madeira. As figuras a seguir apresentam uma vista parcial da cerca, bem como os detalhes das ligações entre as ripas, nos quais os parafusos são representados por círculos brancos. Note que cada ripa está presa à cerca por dois parafusos em cada extremidade.



Para construir uma cerca com 300 m de comprimento, são necessários

A) 1 201,5 m de ripas.
B) 1 425,0 m de ripas.
C) 2 403,0 m de ripas.
D) 712,5 m de ripas.

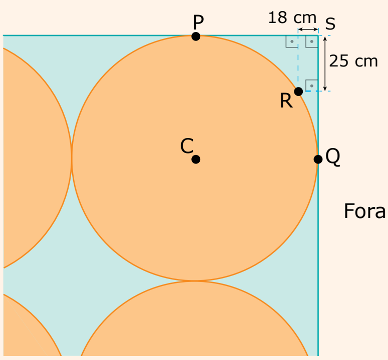
02. ALTH (CEFET-MG–2015) Na figura, os triângulos ABC e BDE são triângulos retângulos, onde $\overline{AC} = 2$, $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ e $\overline{AD} = 2\,\overline{DE}$.



Desenhando o triângulo ACD a medida do segmento CD é igual a:

A) $\sqrt{2}$
B) $\sqrt{3}$
C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{7}$

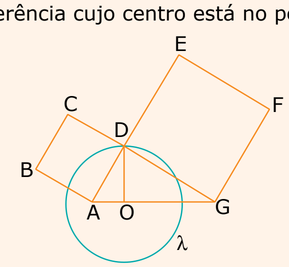
03. RRCR (UNIFESP–2018) Em um tapete retangular decorado com círculos idênticos, o círculo de centro **C** tangencia as laterais do tapete em **P** e **Q**. O ponto **R** pertence à circunferência desse círculo e está à distância de 18 cm e de 25 cm das laterais do tapete, como mostra a figura.



Fora de escala

A) Calcule a distância de **R** até o canto superior do tapete, indicado por **S**. Deixe a resposta indicada com raiz quadrada.
B) Calcule o raio dos círculos que compõem a decoração do tapete.

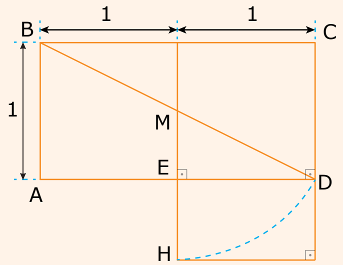
04. (CEFET-MG–2015) Na figura a seguir, os quadrados ABCD e DEFG possuem áreas iguais a 9 e 16 m^2 respectivamente. O triângulo ADG é retângulo em **D** e λ é a circunferência cujo centro está no ponto **O**.



Sabendo-se que a área de um círculo de raio **r** é πr^2, então o valor da área delimitada por λ, em m^2, é igual a:

A) 4,5 π
B) 5,76 π
C) 7,24 π
D) 9,30 π

05. 9Y7M (CEFET-MG) Nesta figura, ABCD é um retângulo e DH é um arco de circunferência cujo centro é o ponto **M**.



O segmento EH em unidades de comprimento, mede:

A) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

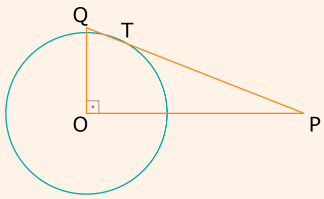
B) $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

06. IYV4 (UDESC–2018) Na figura a seguir sem escala, o raio da circunferência de centro **O** é r = 3 cm e o segmento OP mede 5 cm.



Sabendo que o segmento PQ tangencia a circunferência no ponto **T**, pode-se dizer que o segmento OQ mede

A) 1,25 cm.

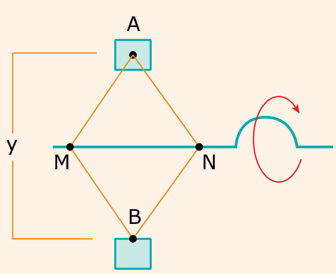
B) 5 cm.

C) 3,75 cm.

D) 4 cm.

E) 3,5 cm.

07. (UERJ) Um modelo de macaco, ferramenta utilizada para levantar carros, consiste em uma estrutura composta por dois triângulos isósceles congruentes, AMN e BMN, e por um parafuso acionado por uma manivela, de modo que o comprimento da base MN possa ser alterado pelo acionamento desse parafuso. Observe a figura:



Considere as seguintes medidas:
AM = AN = BM = BN = 4 dm; MN = x dm; AB = y dm.
O valor, em decímetros, de **y** em função de **x** corresponde a:

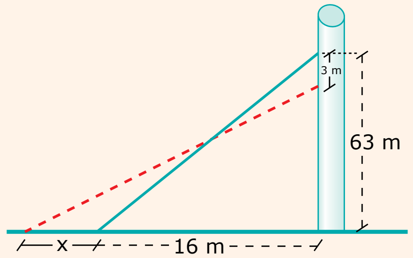
A) $\sqrt{16-4x^2}$

B) $\sqrt{64-x^2}$

C) $\frac{\sqrt{16-4x^2}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{64-2x^2}}{2}$

08. Q2FW (IFPE–2016) Durante a construção de uma torre de televisão, fez-se necessário o uso de um cabo de aço para sustentação. O pé desse cabo está fincado a 16 m de distância da base da torre e o seu topo a 63 m de altura, conforme a figura. Refeitos os cálculos, decidiu-se que o topo do cabo deve ser deslocado 3 m para baixo ao longo da torre, alterando assim a posição da extremidade fixada ao chão, conforme a figura seguinte:



Considerando a nova orientação, de quanto será o deslocamento **x** do pé do cabo de sustentação em relação à posição anterior?

A) 3 m.

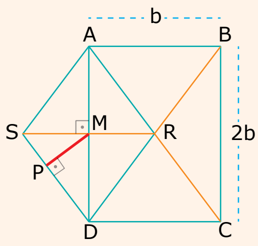
B) 8 m.

C) 9 m.

D) 13 m.

E) 15 m.

09. 9DH1 (CEFET-MG) Nessa figura, ABCD é um retângulo cujos lados medem **b** e 2b. O ponto **R** pertence aos segmentos AC e BD e, ARDS é um quadrilátero em que **M** é ponto médio do segmento RS.



O segmento MP, expresso em função de **b**, é:

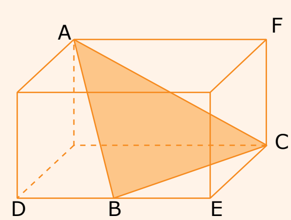
A) $\frac{b\sqrt{5}}{5}$

B) $\frac{b\sqrt{5}}{3}$

C) $\frac{2b\sqrt{5}}{3}$

D) $\frac{3b\sqrt{5}}{5}$

10. 56A3 (ESPM-SP) A figura a seguir representa um paralelepípedo reto-retângulo de medidas AF = 4, FC = 3 e CE = $2\sqrt{3}$, sendo **B** o ponto médio de $\overline{DE}$. O perímetro do triângulo ABC é igual a:



A) 12.

B) 14.

C) 13.

D) 15.

E) 11.

11. (UECE–2015) No quadrado MNPQ, **R** é o ponto médio do lado PQ, **S** é um ponto do segmento NR tal que os segmentos MS e NR são perpendiculares. Se a medida do segmento MS é 3 cm, então a medida do lado do quadrado é

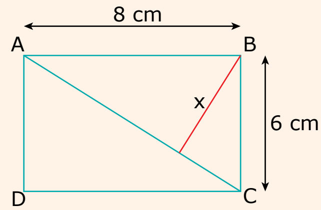
A) $\sqrt{5}$ cm.

B) $1,5\sqrt{5}$ cm.

C) $2,0\sqrt{5}$ cm.

D) $2,5\sqrt{5}$ cm.

12. LZ8Y (Unifor-CE–2015) A figura seguinte mostra um retângulo ABCD onde AC é a diagonal desse retângulo.



Se um coelho sai do vértice **A** para o vértice **D**, depois segue para o vértice **C**, volta para o vértice **A** através da diagonal AC e vai para o vértice **B**, e, por fim, percorre a distância **x** do vértice **B** a diagonal AC, então o coelho andou

A) 34,8 cm.

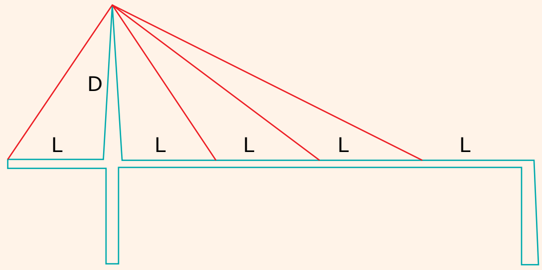
B) 35,6 cm.

C) 36,8 cm.

D) 37,5 cm.

E) 38,8 cm.

13. QUP9 (UFPA) Uma passarela construída em uma BR no Pará tem um vão livre de comprimento 4L. A sustentação da passarela é feita a partir de 3 cabos de aço presos em uma coluna à esquerda a uma altura **D** da passarela. Esta coluna por sua vez é presa por um cabo de aço preso a um ponto na mesma altura da passarela, e a uma distância **L** da passarela, conforme representa a figura a seguir.



Supondo L = 9 m e D = 12 m, o comprimento total dos quatro cabos de aço utilizados é, em metros:

A) 57

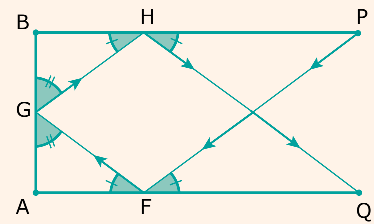
B) 111

C) $21 + \sqrt{1\,341}$

D) $30 + 6\sqrt{13} + 3\sqrt{97}$

E) $30 + 2\sqrt{13} + \sqrt{97}$

14. 9LDJ (Unicamp-SP) Em um aparelho experimental, um feixe *laser* emitido no ponto **P** reflete internamente três vezes e chega ao ponto **Q**, percorrendo o trajeto PFGHQ. Na figura a seguir, considere que o comprimento do segmento PB é de 6 cm, o do lado AB é de 3 cm, o polígono ABPQ é um retângulo e os ângulos de incidência e reflexão são congruentes, como se indica em cada ponto da reflexão interna. Qual é a distância total percorrida pelo feixe luminoso no trajeto PFGHQ?



A) 12 cm

B) 15 cm

C) 16 cm

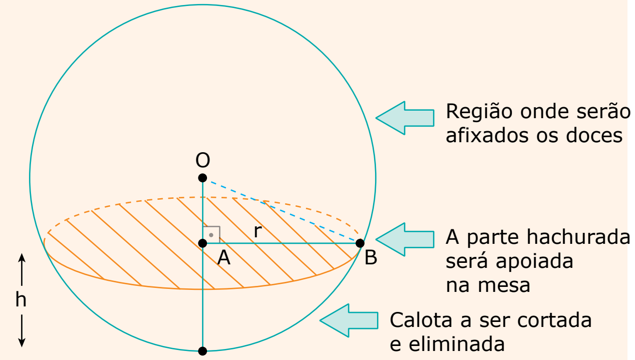
D) 18 cm

15. (UFPR) A tela de uma TV está no formato *widescreen*, no qual a largura e a altura estão na proporção de 16 para 9. Sabendo que a diagonal dessa tela mede 37 polegadas, qual é sua largura e qual a sua altura, em centímetros? (Para a simplificar os cálculos, use as aproximações $\sqrt{337} \cong 18,5$ e uma polegada $\cong 2,5$ cm.)

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 6M9V (Enem–2017) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade desse suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio **r** da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura **h**, em centímetro, igual a

A) $5 - \dfrac{\sqrt{91}}{2}$

B) $10 - \sqrt{91}$

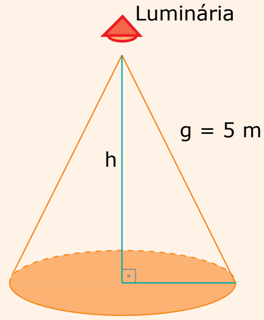
C) 1

D) 4

E) 5

MATEMÁTICA

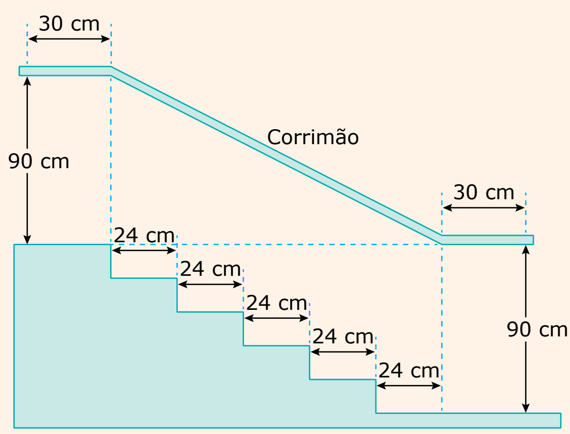
02. (Enem) Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28,26 m², considerando $\pi \cong 3,14$, a altura **h** será igual a

A) 3 m.
B) 4 m.
C) 5 m.
D) 9 m.
E) 16 m.

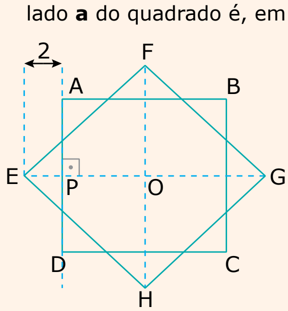
03. (Enem)



Na figura anterior, que representa o projeto de uma escada de 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

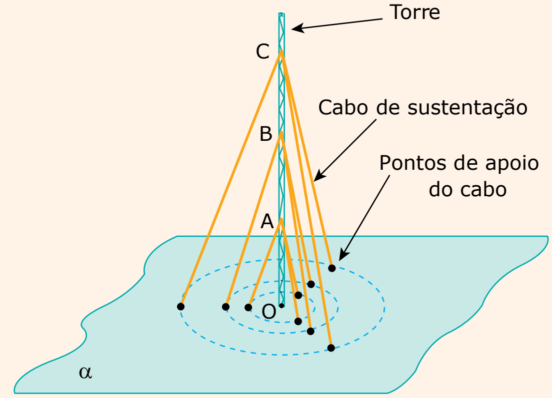
A) 1,8 m.
B) 1,9 m.
C) 2,0 m.
D) 2,1 m.
E) 2,2 m.

04. Antônio adora soltar pipas. Para confeccionar uma pipa nova, ele faz uma armação com dois quadrados iguais ABCD e EFGH, ambos com lado **a** e centro **O**, conforme a figura. Se EP = 2 cm, então podemos afirmar que o lado **a** do quadrado é, em cm:



A) $4(\sqrt{3} + 1)$
B) $4 + \sqrt{2}$
C) $\sqrt{3} + 2$
D) $2\sqrt{2}$
E) $4(\sqrt{2} + 1)$

05. Uma torre de transmissão vertical possui vários cabos de sustentação, conforme ilustração a seguir:



O local de instalação da torre será representado pelo plano α, os pontos de apoio dos cabos serão colocados em pontos das circunferências λ_1, λ_2, λ_3, concêntricas e de centro **O**, sendo as medidas dos raios 30 m, 50 m e 90 m, respectivamente. Os pontos de apoio dos cabos serão vértices de um triângulo equilátero, inscrito em cada circunferência. Sabendo-se que OA = AB = BC = 60 m, e que os pontos de apoio que estão sobre uma mesma circunferência são equidistantes um do outro, o comprimento mínimo de cabo com apoio na circunferência de raio 30 m, em metros, usada na sustentação da torre é:

A) $30\sqrt{5}$
B) $55\sqrt{5}$
C) $70\sqrt{5}$
D) $90\sqrt{5}$
E) $120\sqrt{5}$

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. A
03. C
04. A
05. E
06. E
07. D
08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. D
03.
    A) $\overline{RS} = \sqrt{949}$
    B) 73 cm
04. B
05. A
06. C
07. B
08. C
09. A
10. B
11. B
12. C
13. D
14. B
15. L = 80 cm
    H = 45 cm

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. B
03. D
04. E
05. D

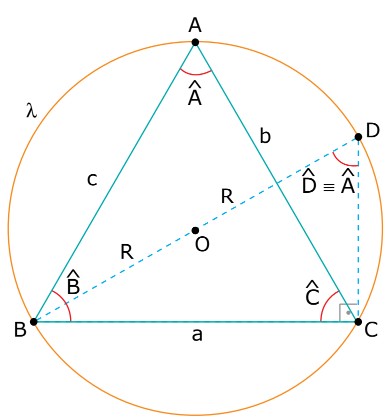
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

LEI DOS SENOS

Considere um triângulo ABC qualquer, inscrito em uma circunferência λ de raio **R**. Traçando o diâmetro BD, temos que o triângulo BCD é retângulo em **C**, pois o ângulo $B\hat{C}D$ "enxerga" um arco de 180°.

O ângulo $\hat{D}$ é congruente ao ângulo $\hat{A}$, pois ambos são inscritos na circunferência e "enxergam" o mesmo arco $\overset{\frown}{BC}$.



Do triângulo BCD, temos que:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2R$$

Analogamente, conclui-se que $\dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = 2R$ e $\dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$.

A Lei dos Senos pode, então, ser enunciada da seguinte maneira:

Em todo triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles, e a constante de proporcionalidade é igual ao dobro do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo, ou seja:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R}$$

OBSERVAÇÃO

Os valores dos senos de dois ângulos suplementares são iguais, isto é:

$$\boxed{\text{sen } (180° - x) = \text{sen } x}$$

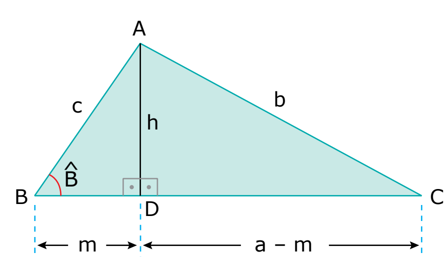
Por exemplo, sendo x = 60°, temos:

$\text{sen } x = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e

$\text{sen } (180° - x) = \text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

LEI DOS COSSENOS

Considere um triângulo ABC qualquer e sua altura AD.



Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos formados, temos:

$$\begin{array}{lll} c^2 = h^2 + m^2 & h^2 = c^2 - m^2 & \text{(I)} \\ b^2 = h^2 + (a - m)^2 & b^2 = h^2 + (a - m)^2 & \text{(II)} \end{array}$$

Substituindo (I) em (II):

$b^2 = c^2 - m^2 + (a - m)^2 \Rightarrow b^2 = c^2 + a^2 - 2.a.m$ (III)

Mas, no triângulo ABD, $\cos \hat{B} = \dfrac{m}{c} \Rightarrow m = c.\cos \hat{B}$. (IV)

Substituindo (IV) em (III):

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \hat{B}$

Analogamente, conclui-se que $\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \hat{C} \end{array}$

A Lei dos Cossenos pode, então, ser enunciada da seguinte maneira:

Em todo triângulo, o quadrado de qualquer um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois, diminuída do dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado, ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \hat{C}$$

OBSERVAÇÃO

Os valores dos cossenos de dois ângulos suplementares diferem apenas no sinal, ou seja:

$$\cos(180° - x) = -\cos x$$

Por exemplo, sendo x = 45°, temos:

$$\cos x = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e}$$

$$\cos(180° - x) = \cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

NATUREZA DE UM TRIÂNGULO

Um triângulo, quanto aos seus ângulos, é classificado em acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

Sabe-se que, num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo, e vice-versa. Assim, conhecendo as medidas dos três lados, podemos determinar as medidas dos três ângulos pela Lei dos Cossenos e, portanto, classificar o triângulo.

Seja o triângulo ABC, com lados medindo **a**, **b** e **c**, em que $a \geq b \geq c$.

Tem-se três possibilidades quanto à natureza do triângulo ABC:

i) O $\triangle$ ABC é acutângulo se, e somente se, $a^2 < b^2 + c^2$.

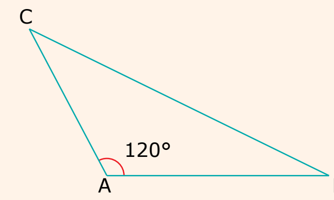
ii) O $\triangle$ ABC é retângulo se, e somente se, $a^2 = b^2 + c^2$.

iii) O $\triangle$ ABC é obtusângulo se, e somente se, $a^2 > b^2 + c^2$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

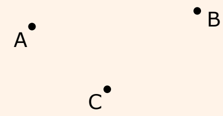
01. (UFTM-MG) Na figura estão posicionadas as cidades vizinhas **A**, **B** e **C**, que são ligadas por estradas em linha reta. Sabe-se que, seguindo por essas estradas, a distância entre **A** e **C** é de 24 km, e entre **A** e **B** é de 36 km.



Nesse caso, pode-se concluir que a distância, em km, entre **B** e **C** é igual a

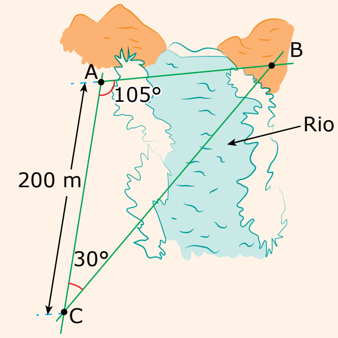
A) $8\sqrt{17}$
B) $12\sqrt{19}$
C) $12\sqrt{23}$
D) $20\sqrt{15}$
E) $20\sqrt{13}$

02. 2DOD (IFSul–2015) Em certa cidade, a igreja está localizada no ponto **A**, a prefeitura no ponto **B**, e a livraria no ponto **C**, como mostra os pontos a seguir. Sabendo-se que a distância da igreja à prefeitura é de 10 metros, a distância da prefeitura à livraria corresponde a 15 metros, e que o ângulo formado por essas duas direções é 60°, a distância da livraria à igreja é



A) $17\sqrt{5}$ m.
B) $5\sqrt{7}$ m.
C) $25\sqrt{7}$ m.
D) $7\sqrt{5}$ m.

03. YQJE (UFPB) A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, **A** e **B**, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, **C**, distante 200 m do ponto **A** e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto **A**. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ mediam, respectivamente, 30° e 105°, conforme ilustrado na figura a seguir.



Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto **A** ao ponto **B** é de:

A) $200\sqrt{2}$ C) $150\sqrt{2}$ E) $50\sqrt{2}$

B) $180\sqrt{2}$ D) $100\sqrt{2}$

04. IAJY

(UECE–2016) A medida do cosseno do maior dos ângulos internos do triângulo cujas medidas dos lados são respectivamente 8 m, 10 m e 15 m é igual a:

A) −0,38125. C) −0,43713.

B) −0,42112. D) −0,46812.

05. S76U

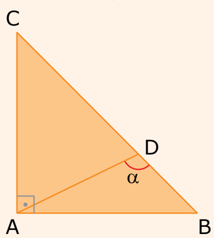
(IFPE–2015) Sandro é velejador e está participando de uma competição. O barco de Sandro está se deslocando em linha reta e ele identifica os pontos **A**, **B** e **C** marcados na carta náutica por onde o seu barco vai passar. Quando o barco está no ponto **A**, ele avista um farol (**F**) na costa e mede o ângulo $F\hat{A}C$ de 30°. Após navegar 4 milhas náuticas, o barco chega no ponto **B**. Ele calcula o ângulo $F\hat{B}C$ e encontra 75°. Qual a distância, em milhas náuticas, do ponto **B** ao farol?

A) $\sqrt{2}$ C) 4 E) 8

B) $2\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$

06. 18GT

(UFU-MG) Considere o triângulo retângulo a seguir:

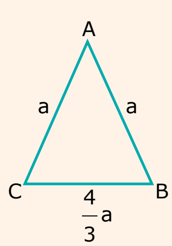


Sabendo-se que α = 120°, AB = AC = 1 cm, então AD é igual a

A) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm. C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm.

B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm. D) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm.

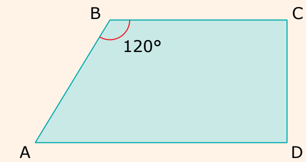
07. (Unimontes-MG–2015) Considere o triângulo isósceles ABC da figura a seguir. É correto afirmar que o cosseno do ângulo $\hat{A}$ vale:



A) $\frac{1}{9}$. B) $\frac{2}{9}$. C) $\frac{1}{3}$. D) $\frac{2}{3}$.

08. 0Z39

(UFMG) Esta figura representa o quadrilátero ABCD.



Sabe-se que AB = 1 cm e AD = 2 cm; o ângulo $A\hat{B}C$ mede 120°; e o segmento $\overline{CD}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Então, é correto afirmar que o comprimento do segmento $\overline{BD}$ é

A) $\sqrt{3}$ cm. C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm.

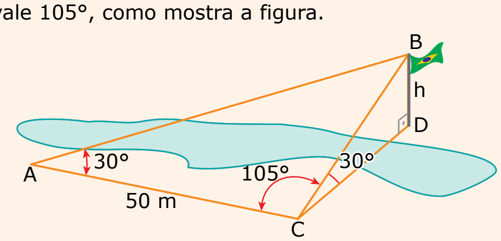
B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm. D) $\sqrt{2}$ cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 90EM

(Unesp) Uma pessoa se encontra no ponto **A** de uma planície, às margens de um rio, e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto **B**. Com o objetivo de determinar a altura **h** do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto **C**. Sendo **D** o pé do mastro, avalia que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ valem 30°, e o $A\hat{C}B$ vale 105°, como mostra a figura.

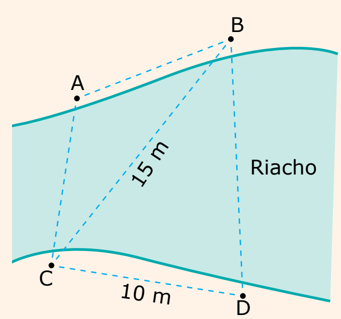


A altura **h** do mastro da bandeira, em metros, é:

A) 12,5 C) 25,0 E) 35,0

B) $12,5\sqrt{2}$ D) $25,0\sqrt{2}$

02. (Unicamp-SP) Um topógrafo deseja calcular a distância entre pontos situados à margem de um riacho, como mostra a figura a seguir. O topógrafo determinou as distâncias mostradas na figura, bem como os ângulos especificados na tabela a seguir, obtidos com a ajuda de um teodolito.



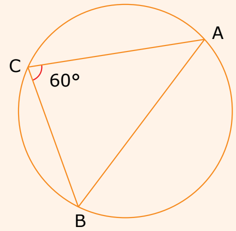
Visada	Ângulo
$A\hat{C}B$	$\frac{\pi}{6}$
$B\hat{C}D$	$\frac{\pi}{3}$
$A\hat{B}C$	$\frac{\pi}{6}$

A) Calcule a distância entre **A** e **B**.

B) Calcule a distância entre **B** e **D**.

03. A064

(UFJF-MG) Uma praça circular de raio **R** foi construída a partir da planta a seguir:



Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ simbolizam ciclovias construídas no interior da praça, sendo que $\overline{AB}$ = 80 m. De acordo com a planta e as informações dadas, é correto afirmar que a medida de **R** é igual a

A) $\frac{160\sqrt{3}}{3}$ m.

B) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ m.

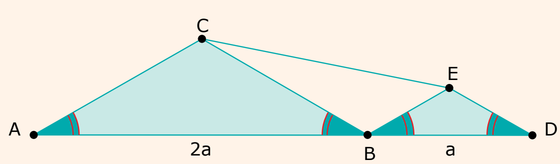
C) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ m.

D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ m.

E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m.

04. 6OJS

(Unicamp-SP) Na figura a seguir, ABC e BDE são triângulos isósceles semelhantes de bases 2a e **a**, respectivamente, e o ângulo $C\hat{A}B$ = 30°. Portanto, o comprimento do segmento CE é



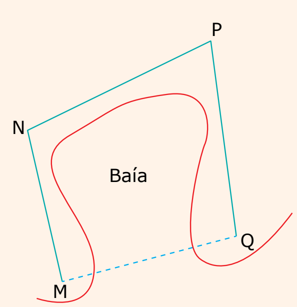
A) $a\sqrt{\frac{5}{3}}$

B) $a\sqrt{\frac{8}{3}}$

C) $a\sqrt{\frac{7}{3}}$

D) $a\sqrt{2}$

05. (UEFS-BA)



As cidades **M** e **Q** são separadas por uma baía, como na figura anterior. Para ir de uma a outra, um motorista precisa atualmente dirigir $12\sqrt{2}$ km até outra cidade **N**, mais 21 km até a cidade **P**, e outros 21 km de **P** até **Q**. As estradas que ligam essas cidades são praticamente retas e formam ângulos de 105°, em **N**, e 60°, em **P**.

Se uma ponte for construída sobre a baía, ligando **M** diretamente a **Q** (reta pontilhada na figura), o trajeto entre as duas cidades poderá ser reduzido para

A) 12 km.

B) 15 km.

C) $12\sqrt{2}$ km.

D) 18 km.

E) $16\sqrt{2}$ km.

06. (UECE–2015) Sejam **x**, **y** e **z** as medidas dos lados do triângulo XYZ e **R** a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Se o produto dos senos dos ângulos internos do triângulo é $\frac{k.x.y.z}{R^3}$, então o valor de **k** é:

A) 0,500

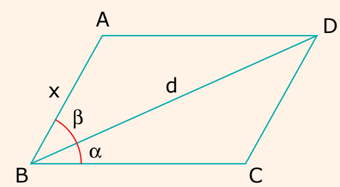
B) 0,250

C) 0,125

D) 1,000

07. UGQO

(EN-RJ) A figura a seguir mostra um paralelogramo ABCD. Se **d** representa o comprimento da diagonal BD e α e β são ângulos conhecidos (ver figura), podemos afirmar que o comprimento **x** do lado AB é igual a:



A) d.cos β

B) $\frac{d.\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}$

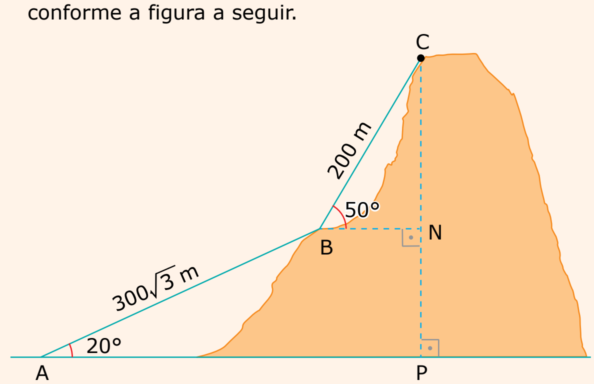
C) d.sen β

D) $\frac{d.\cos\beta}{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}$

E) d.cos (180° – (α + β))

08. 3JOR

(UFPB) Para explorar o potencial turístico de uma cidade, conhecida por suas belas paisagens montanhosas, o governo pretende construir um teleférico, ligando o terminal de transportes coletivos ao pico de um morro, conforme a figura a seguir.



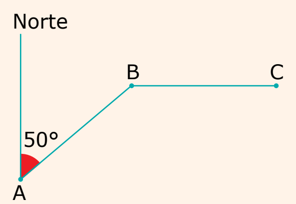
Para a construção do teleférico, há duas possibilidades:

- o ponto de partida ficar localizado no terminal de transportes coletivos (ponto **A**), com uma parada intermediária (ponto **B**), e o ponto de chegada localizado no pico do morro (ponto **C**);
- o ponto de partida ficar localizado no ponto **A** e o de chegada localizado no ponto **C**, sem parada intermediária.

Supondo que $\overline{AB} = 300\sqrt{3}$ m, $\overline{BC} = 200$ m, $B\hat{A}P = 20°$ e $C\hat{B}N = 50°$, é correto afirmar que a distância entre os pontos **A** e **C** é de

A) 700 m.
B) 702 m.
C) 704 m.
D) 706 m.
E) 708 m.

09. FLA7 (FGV–2016) A figura a seguir mostra a trajetória de Renato com seu barco.

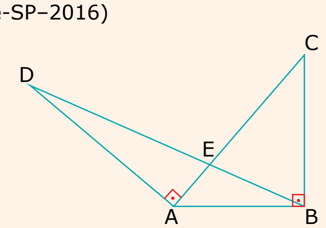


Renato saiu do ponto **A** e percorreu 10 km em linha reta, até o ponto **B**, numa trajetória que faz 50° com a direção norte. No ponto **B**, virou para o leste e percorreu mais 10 km em linha reta, chegando ao ponto **C**.

Calcule a distância do ponto **A** ao ponto **C**.

Dados: sen 20° = 0,342, cos 20° = 0,940.

10. ØQLZ (Mackenzie-SP–2016)



Na figura anterior, ABC e AED são triângulos retângulos. Se $m\left(\overline{AC}\right) = \ell$, $m\left(B\hat{A}C\right) = \alpha$, $m\left(A\hat{D}E\right) = \beta$ e $m\left(A\hat{B}C\right) = m\left(D\hat{A}E\right) = 90°$, então $m\left(\overline{BD}\right)$ é:

A) $\ell \cdot \cos\alpha$

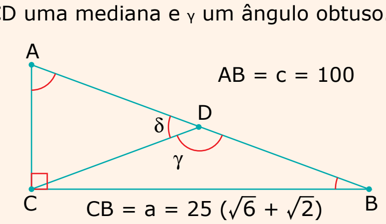
B) $\ell \cdot \text{sen}^2\,\alpha$

C) $\ell \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$

D) $\dfrac{\ell \cdot \cos^2\alpha}{\text{sen}\,\beta}$

E) $\dfrac{\ell \cdot \text{sen}^2\,\alpha}{\cos\beta}$

11. V6Y5 (UFU-MG–2016) A figura a seguir, sem escala, apresenta informações parciais de um triângulo retângulo ABC, sendo CD uma mediana e γ um ângulo obtuso.



Com base nessas informações, determinam-se as medidas dos ângulos δ e γ que possibilitam encontrar os ângulos internos do triângulo ABC. Esses ângulos internos são:

Observação: $\sqrt{6}.\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$.

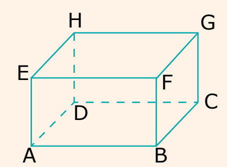
A) $A\hat{C}B = 90°$, $C\hat{B}A = 15°$ e $B\hat{A}C = 75°$.

B) $A\hat{C}B = 90°$, $C\hat{B}A = 10°$ e $B\hat{A}C = 80°$.

C) $A\hat{C}B = 90°$, $C\hat{B}A = 20°$ e $B\hat{A}C = 70°$.

D) $A\hat{C}B = 90°$, $C\hat{B}A = 30°$ e $B\hat{A}C = 60°$.

12. (FUVEST-SP–2017) O paralelepípedo reto-retângulo ABCDEFGH, representado na figura, tem medida dos lados AB = 4, BC = 2 e BF = 2.



O seno do ângulo $H\hat{A}F$ é igual a:

A) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

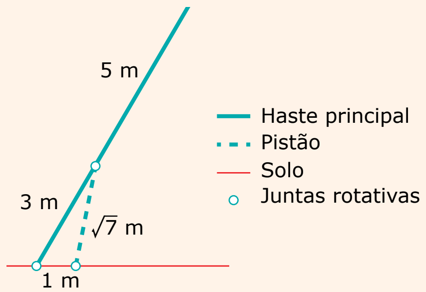
B) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

C) $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$

D) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

E) $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

13. WJEI (UDESC-SC) Um guindaste industrial simples, usado para elevar cargas até o topo de uma máquina em uma fábrica, é formado por duas partes principais: uma haste rígida de 8 m de comprimento fixada ao solo em uma de suas extremidades; e um pistão hidráulico que pode variar de 2 m a 3 m de comprimento, fixado em uma de suas extremidades ao solo, em um ponto a 1 m da base da haste principal, e na outra extremidade em um ponto da haste a 3 m de sua base, conforme figura. Todas as três junções (haste com o solo, pistão com o solo e haste com o pistão) são rotativas (como uma dobradiça).



De acordo com a figura, a altura que a ponta elevada da haste principal atingirá quando o pistão hidráulico estiver estendido em $\sqrt{7}$ m será de

A) $4\sqrt{3}$ m.

B) $\dfrac{8\sqrt{7}}{3}$ m.

C) 4 m.

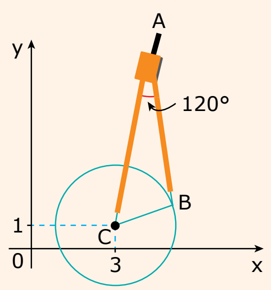
D) $4\sqrt{7}$ m.

E) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ m.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. C2ZG (Enem–2017) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

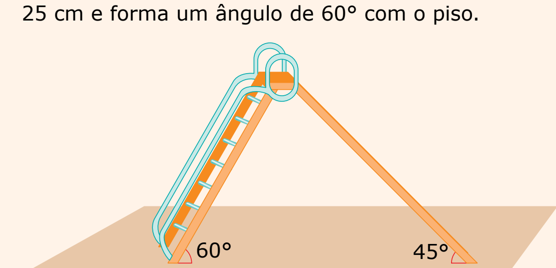
Tipo de material	Intervalo de valores de raio
I	$0 < R \le 5$
II	$5 < R \le 10$
III	$10 < R \le 15$
IV	$15 < R \le 21$
V	$21 < R \le 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

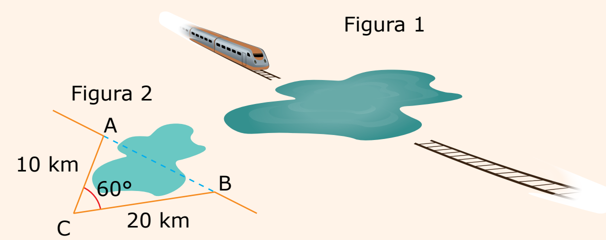
02. Em escolas infantis, é comum encontrar um brinquedo, chamado escorregador, constituído de uma superfície plana inclinada e lisa (rampa), por onde as crianças deslizam, e de uma escada. No pátio da escolinha Casa Feliz, há um escorregador, apoiado em um piso plano e horizontal, cuja escada tem 8 degraus espaçados de 25 cm e forma um ângulo de 60° com o piso.



O comprimento da rampa, sabendo-se que ela forma com o chão um ângulo de 45°, é de

A) $\sqrt{3}$ m.
B) $\sqrt{6}$ m.
C) $2\sqrt{2}$ m.
D) $2\sqrt{3}$ m.
E) $2\sqrt{6}$ m.

03. Uma empresa, ao construir uma linha férrea, acaba por deparar-se com uma nascente de água e seu curso será alterado para garantir um custo menor de construção, figuras 1 e 2. Sabe-se que o aumento do custo de construção depende da diferença entre a distância efetiva de construção (soma das distâncias dos segmentos AC e BC) e a distância inicialmente planejada (medida do segmento AB). O valor encontrado pela construtora nessa diferença de percurso, em km, é



A) $5\left(\sqrt{3}-1\right)$
B) $5\left(2-\sqrt{3}\right)$
C) $10\left(\sqrt{3}-1\right)$
D) $10\left(2-\sqrt{3}\right)$
E) $10\left(3-\sqrt{3}\right)$

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. B
- 03. D
- 04. A
- 05. B
- 06. A
- 07. A
- 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02.
  - A) $AB = 5\sqrt{3}$ m
  - B) $BD = 5\sqrt{7}$ m
- 03. B
- 04. C
- 05. B
- 06. C
- 07. B
- 08. A
- 09. AC = 18,8 km
- 10. D
- 11. A
- 12. E
- 13. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. B
- 03. E

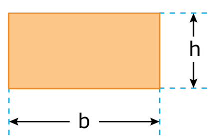
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Áreas de Polígonos

ÁREA DE ALGUMAS FIGURAS PLANAS

Retângulo

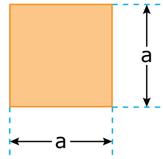
A área **A** de um retângulo é o produto da medida da base pela medida da altura.



$$\boxed{A = b.h}$$

Quadrado

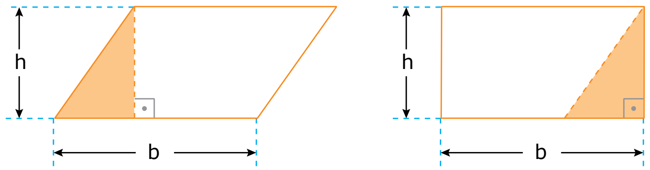
O quadrado é um retângulo de lados iguais. Logo, sua área **A** é o produto da medida da base pela medida da altura.



$$\boxed{A = a^2}$$

Paralelogramo

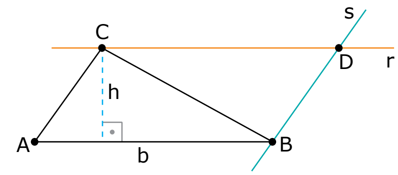
A área de um paralelogramo de base **b** e altura **h** é igual à área de um retângulo de base **b** e altura **h**. Observe:



$$\boxed{A = b.h}$$

Triângulo

Consideremos um triângulo ABC, cuja base $\overline{AB}$ mede **b** e a altura relativa a essa base mede **h**. Traçando por **C** a reta **r** paralela à base, e por **B** a reta **s** paralela ao lado $\overline{AC}$, obtemos o paralelogramo ABDC a seguir:



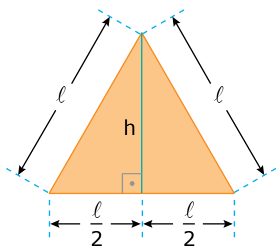
Como o triângulo BCD é congruente ao triângulo ABC e a área **A** do triângulo ABC é metade da área do paralelogramo, então, temos:

$$\boxed{A = \frac{b.h}{2}}$$

Ou seja, a área do triângulo é metade do produto da medida da base pela medida da altura.

Triângulo equilátero

Pelo Teorema de Pitágoras, calcula-se facilmente a medida **h** da altura de um triângulo equilátero de lado ℓ, obtendo:



$$\boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

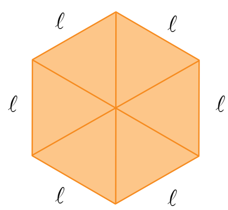
Logo, a área **A** desse triângulo é:

$$A = \frac{\ell.\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} \qquad A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}$$

Hexágono regular

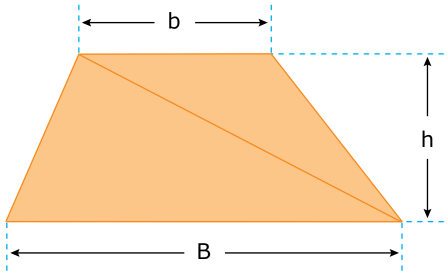
As diagonais de um hexágono regular dividem-no em seis triângulos equiláteros. Assim, a área **A** de um hexágono regular de lado ℓ é igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado ℓ.



$$A = 6.\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3\sqrt{3}\ell^2}{2}}$$

Trapézio

Traçando uma diagonal de um trapézio de altura **h** e bases **b** e **B**, dividimo-lo em dois triângulos de altura **h** e bases de medidas **b** e **B**. Observe a figura.



A área **A** do trapézio é a soma das áreas desses dois triângulos. Assim, temos:

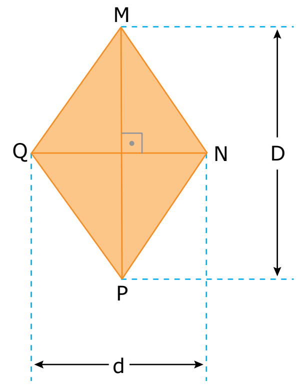
$$A = \frac{B.h}{2} + \frac{b.h}{2} \qquad \boxed{A = \frac{(B + b).h}{2}}$$

Portanto, a área **A** do trapézio é igual à metade do produto da altura pela soma das bases.

Losango

Consideremos um losango cujas diagonais medem **D** e **d**. Sabemos que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e o ponto em que elas concorrem é o ponto médio de cada uma.

Observe, portanto, que a área **A** do losango é o dobro da área do triângulo de base **d** e altura $\frac{D}{2}$.



$$A = 2.\frac{d.\frac{D}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{d.D}{2}}$$

Portanto, a área **A** do losango é metade do produto das medidas das diagonais.

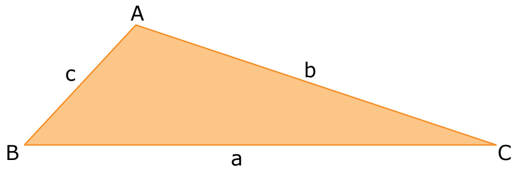
OBSERVAÇÃO

O losango também é paralelogramo. Logo, sua área pode ser calculada como a área de um paralelogramo.

EXPRESSÕES DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Em função das medidas dos lados – Teorema de Heron

Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c**, sendo o semiperímetro $p = \frac{a + b + c}{2}$,



temos que a área do triângulo ABC é:

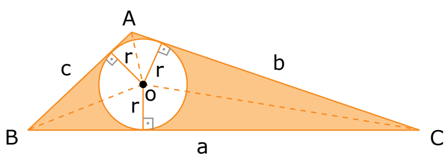
$$\boxed{A = \sqrt{p.(p - a).(p - b).(p - c)}}$$

Em função do semiperímetro e do raio da circunferência inscrita

Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c**, com semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, e a circunferência inscrita de raio **r**, então a área do triângulo ABC é:

$$\boxed{A = p.r}$$

Demonstração:



$$A_{\Delta\,ABC} = A_{\Delta\,BCO} + A_{\Delta\,ACO} + A_{\Delta\,ABO} \Rightarrow$$

$$A_{\Delta\,ABC} = \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2} \Rightarrow$$

$$A_{\Delta\,ABC} = \frac{a+b+c}{2}.r \Rightarrow$$

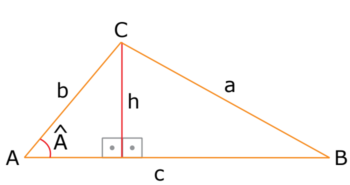
$$A_{\Delta\,ABC} = p.r$$

Em função da medida de dois lados e do ângulo compreendido entre eles

Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c** e ângulo de medida $\hat{A}$, compreendido pelos lados **b** e **c**, temos que a área desse triângulo é:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}.b.c.\text{sen}\,\hat{A}}$$

Demonstração:



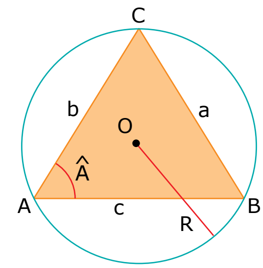
$$A_{ABC} = \frac{c.h}{2}$$

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{h}{b} \qquad h = b\,\text{sen}\,\hat{A}$$

$$A_{ABC} = \frac{b.c.\text{sen}\,\hat{A}}{2}$$

Em função das medidas dos lados e do raio da circunferência circunscrita

Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c**, inscrito em uma circunferência de raio **R**.



A área do triângulo ABC inscrito na circunferência é:

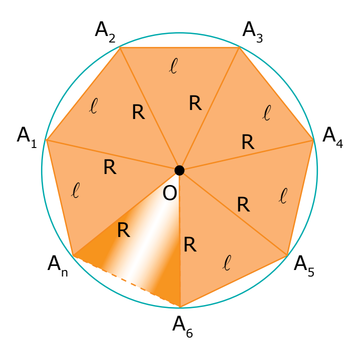
$$\boxed{A = \frac{a.b.c}{4R}}$$

Demonstração:

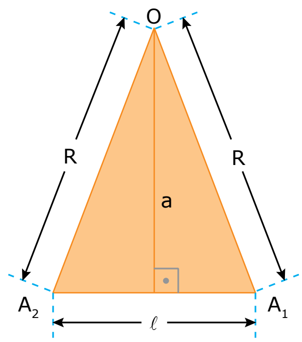
$$\left.\begin{array}{l} A_{\Delta\,ABC} = \frac{1}{2}.b.c.\text{sen}\,\hat{A} \\ \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R \Rightarrow \text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{2R} \end{array}\right\} \Rightarrow A_{\Delta\,ABC} = \frac{a.b.c}{4R}$$

ÁREAS DE POLÍGONOS REGULARES

Considere um polígono regular $A_1A_2A_3A_4...A_n$, de **n** lados de medida ℓ e semiperímetro $p = \frac{n\ell}{2}$, inscrito em uma circunferência de centro **O** e raio **R**. O polígono pode ser dividido em **n** triângulos isósceles congruentes.



Traça-se, em um dos triângulos, o apótema **a** do polígono.



A área A_T desse triângulo é dada por $A_T = \frac{\ell . a}{2}$.

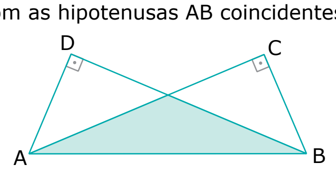
Como o polígono possui **n** triângulos, então sua área A_P é dada por:

$$A_P = n.A_T \Rightarrow A_P = n.\frac{\ell . a}{2} \Rightarrow A_P = \frac{n.\ell}{2}.a \Rightarrow$$

$$\boxed{A_P = p.a}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. (UNIFESP) Dois triângulos congruentes ABC e ABD, de ângulos 30°, 60° e 90°, estão colocados como mostra a figura, com as hipotenusas AB coincidentes.

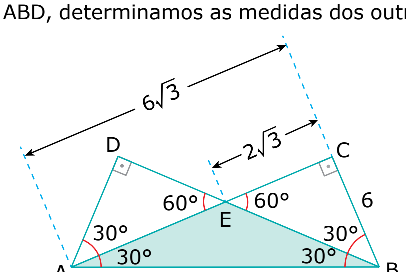


Se AB = 12 cm, a área comum aos dois triângulos, em centímetros quadrados, é igual a:

A) 6
B) $4\sqrt{3}$
C) $6\sqrt{3}$
D) 12
E) $12\sqrt{3}$

Resolução:

Dados AB = 12 cm e os ângulos internos dos triângulos ABC e ABD, determinamos as medidas dos outros lados.



$\text{sen } 30° = \frac{BC}{AB}$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{BC}{12}$ $\quad BC = 6\,\text{cm}$

$\cos 30° = \frac{AC}{AB}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{12}$ $\quad AC = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$

$\text{tg } 30° = \frac{CE}{BC}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{CE}{6}$ $\quad CE = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$

Portanto, a área, em cm², do triângulo ABE vale:

$$A_{\Delta ABE} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta BEC} \Rightarrow A_{\Delta ABE} = \frac{6.6\sqrt{3}}{2} - \frac{6.2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$A_{\Delta ABE} = 12\sqrt{3}$$

02. (UFV-MG) Seja **f** a função definida por f(x) = sen x, x ≥ 0. Num mesmo sistema de coordenadas, considere os pontos $A\ \frac{\neq}{6}, 0$, $B\ \frac{\neq}{2}, 0$, **C** e **D**, em que **C** e **D** estão sobre o gráfico de **f**, cujas abscissas são, respectivamente, $\frac{\neq}{2}$ e $\frac{\neq}{6}$. Unindo-se esses pontos, obtém-se o quadrilátero ABCD, cuja área vale:

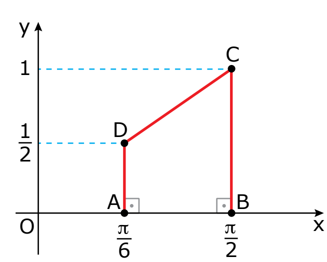
A) $\frac{\neq}{4}$ B) $\frac{\neq}{2}$ C) $\frac{\neq}{5}$ D) $\frac{\neq}{3}$

Resolução:

Temos os pontos $A\ \frac{\neq}{6}, 0$ e $B\ \frac{\neq}{2}, 0$. Como os pontos **C** e **D** pertencem ao gráfico de f(x) = sen x, temos:

$C\ \frac{\neq}{2}, \text{sen}\frac{\neq}{2}$ $\quad C\ \frac{\neq}{2}, 1$ e $D\ \frac{\neq}{6}, \text{sen}\frac{\neq}{6}$ $\quad D\ \frac{\neq}{6}, \frac{1}{2}$

Substituindo os pontos **A**, **B**, **C** e **D** em um mesmo sistema de coordenadas, temos:



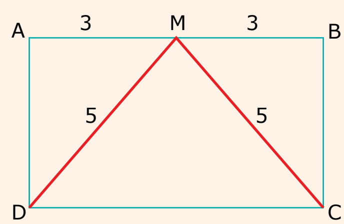
Logo, temos um trapézio retângulo cuja área vale:

$$A = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{2} \quad A = \frac{\frac{\cancel{3}}{2} . \frac{\pi}{\cancel{3}}}{2} \quad A = \frac{\pi}{4}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

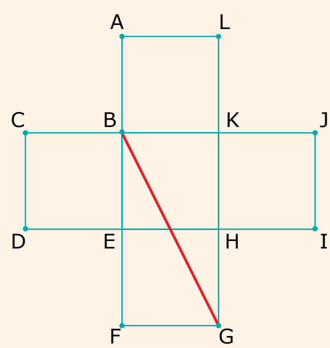
01. (PUC Rio–2016) Considere o retângulo ABCD.



Seja **M** o ponto médio do lado AB. Sabemos que AM = MB = 3 e que DM = MC = 5. Quanto vale a área do triângulo AMD?

A) 4
B) 6
C) $\frac{15}{2}$
D) 10
E) 15

02. BT56 (CEFET-RJ–2016) O quintal da casa de Manoel é formado por cinco quadrados ABKL, BCDE, BEHK, HIJK e EFGH, de igual área e tem a forma da figura a seguir. Se $BG = \sqrt{20}$ m, então a área do quintal é



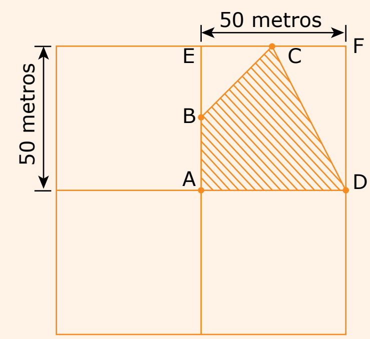
A) 20 m².
B) 30 m².
C) 40 m².
D) 50 m².

03. J6VP (IFCE–2016) Sobre os lados AB e BC do retângulo ABCD são tomados os pontos **M** e **N**, respectivamente, de tal forma que AM, MB e BN tenham medida 1, e NC tenha medida 3.

Nessas condições, a área do triângulo MND é:

A) 4.
B) 2.
C) 3.
D) 3,5.
E) 2,5.

04. KY18 (CEFET-MG–2016) A área quadrada de um sítio deve ser dividida em quatro partes iguais, também quadradas, e, em uma delas, deverá ser mantida uma reserva de mata nativa (área hachurada), conforme mostra a figura a seguir.



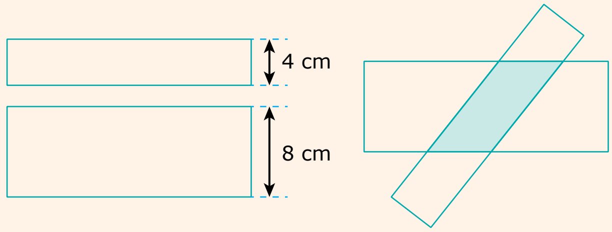
Sabendo-se que **B** é o ponto médio do segmento AE e **C** é o ponto médio do segmento EF, a área hachurada, em m², mede:

A) 625,0.
B) 925,5.
C) 1 562,5.
D) 2 500,0.

05. (UECE) O palco de um teatro tem a forma de um trapézio isósceles cujas medidas de suas linhas de frente e de fundo são respectivamente 15 m e 9 m. Se a medida de cada uma de suas diagonais é 15 m, então a medida da área do palco, em m², é:

A) 80.
B) 90.
C) 108.
D) 1 182.

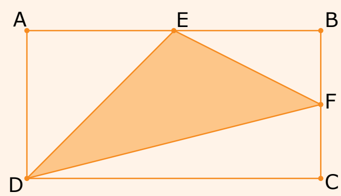
06. W6U4 (UPE) Dois retângulos foram superpostos, e a intersecção formou um paralelogramo, como mostra a figura seguinte.



Sabendo-se que um dos lados do paralelogramo mede 4,5 cm, quanto mede a área desse paralelogramo?

A) 12 cm².
B) 16 cm².
C) 24 cm².
D) 32 cm².
E) 36 cm².

07. 5H4U (UFJF-MG–2016) No retângulo ABCD a seguir, tem-se que **E** e **F** são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.



A razão entre as áreas do triângulo DEF e do retângulo ABCD é:

A) $\frac{2}{5}$.

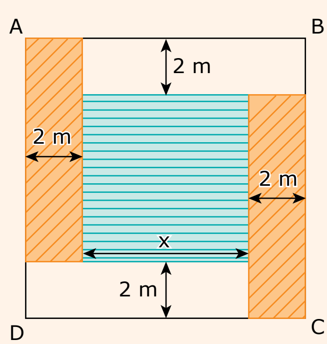
B) $\frac{3}{8}$.

C) $\frac{1}{2}$.

D) $\frac{5}{8}$.

E) $\frac{3}{4}$.

08. LR7R (Unesp–2016) Renata pretende decorar parte de uma parede quadrada ABCD com dois tipos de papel de parede, um com linhas diagonais e outro com riscos horizontais. O projeto prevê que a parede seja dividida em um quadrado central, de lado **x**, e quatro retângulos laterais, conforme mostra a figura.



Se o total da área decorada com cada um dos dois tipos de papel é a mesma, então **x**, em metros, é igual a:

A) $1 + 2\sqrt{3}$

B) $2 + 2\sqrt{3}$

C) $2 + \sqrt{3}$

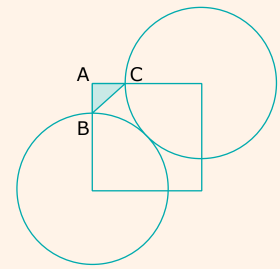
D) $1 + \sqrt{3}$

E) $4 + \sqrt{3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. SØDN (UFRGS) Dois círculos tangentes e de mesmo raio têm seus respectivos centros em vértices opostos de um quadrado, como mostra a figura a seguir.



Se a medida do lado do quadrado é 2, então a área do triângulo ABC mede:

A) $3 - 2\sqrt{2}$

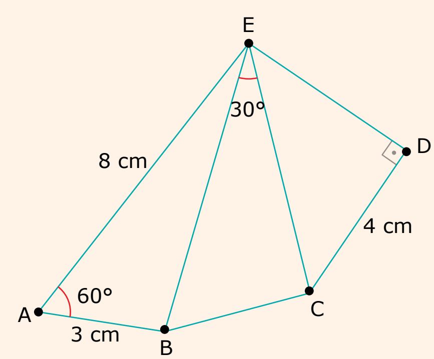
B) $6 - 4\sqrt{2}$

C) $12 - 4\sqrt{2}$

D) $\pi(3 - \sqrt{2})$

E) $\pi(6 - 4\sqrt{2})$

02. FG00 (Albert Einstein–2017) No pentágono ABCDE da figura, o lado $\overline{AB}$ mede 3 cm; o lado $\overline{AE}$ mede 8 cm; o lado $\overline{CD}$ mede 4 cm e os ângulos $B\hat{E}C$, $\hat{A}$ e $\hat{D}$ medem 30°, 60° e 90°, respectivamente.



Sendo a área do triângulo BCE igual a 10,5 cm², a medida, em cm, do lado $\overline{DE}$ é:

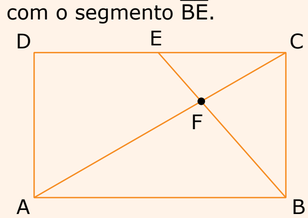
A) $\sqrt{18}$

B) $\sqrt{20}$

C) $\sqrt{22}$

D) $\sqrt{24}$

03. B3YT (FUVEST-SP) A figura representa um retângulo ABCD, com AB = 5 e AD = 3. O ponto **E** está no segmento $\overline{CD}$, de maneira que CE = 1, e **F** é o ponto de interseção da diagonal $\overline{AC}$ com o segmento $\overline{BE}$.



Então, a área do triângulo BCF vale:

A) $\frac{6}{5}$.

B) $\frac{5}{4}$.

C) $\frac{4}{3}$.

D) $\frac{7}{5}$.

E) $\frac{3}{2}$.

04. P405 (FUVEST-SP) O segmento $\overline{AB}$ é lado de um hexágono regular de área $\sqrt{3}$. O ponto **P** pertence à mediatriz de $\overline{AB}$, de tal modo que a área do triângulo PAB vale $\sqrt{2}$. Então, a distância de **P** ao segmento $\overline{AB}$ é igual a:

A) $\sqrt{2}$

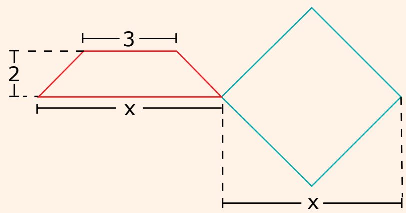
B) $2\sqrt{2}$

C) $3\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$

E) $2\sqrt{3}$

05. (CEFET-MG–2016) A figura a seguir representa a justaposição de um trapézio isósceles e um quadrado.



Se a área do trapézio vale 10, então o perímetro da figura vale:

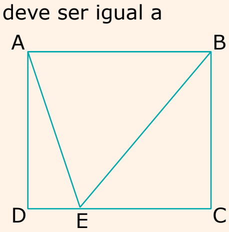
A) $10 + 18\sqrt{2}$

B) $7 + 21\sqrt{2}$

C) $11 + 13\sqrt{2}$

D) $9 + 11\sqrt{2}$

06. K8B6 (UFU-MG) Na figura a seguir, a área do triângulo ADE corresponde a 20% da área do quadrado ABCD. Para que a área do triângulo EBC seja igual a 30 cm², o lado do quadrado ABCD deve ser igual a



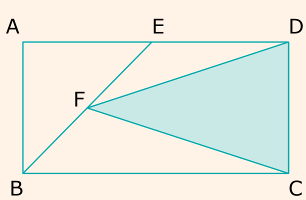
A) 10 cm.

B) $10\sqrt{2}$ cm.

C) $5\sqrt{3}$ cm.

D) 5 cm.

07. G10Q (IFCE) Na figura seguinte, os segmentos AB, AE e ED possuem o mesmo comprimento. Sendo **F** o ponto médio do segmento BE e sabendo-se que ABCD é um retângulo de área 200 m², é correto concluir-se que a área do triângulo CDF, em metros quadrados, vale:



A) 120.

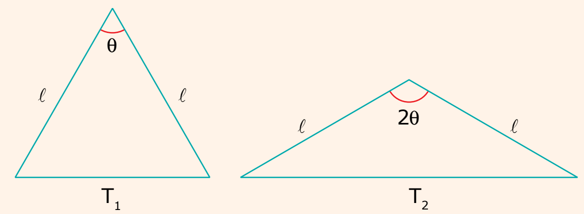
B) 100.

C) 90.

D) 75.

E) 50.

08. AA51 (Insper-SP) Movendo as hastes de um compasso, ambas de comprimento ℓ, é possível determinar diferentes triângulos, como os dois representados a seguir, fora de escala.



Se a área do triângulo T_1 é o triplo da área do triângulo T_2, então o valor de cos θ é igual a:

A) $\frac{1}{6}$

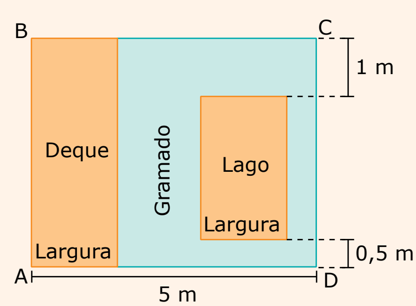
B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

09. X1B8 (Unesp–2016) Em um terreno retangular ABCD, de 20 m², serão construídos um deque e um lago, ambos de superfícies retangulares de mesma largura, com as medidas indicadas na figura. O projeto de construção ainda prevê o plantio de grama na área restante, que corresponde a 48% do terreno.



No projeto descrito, a área da superfície do lago, em m², será igual a:

A) 4,1.

B) 4,2.

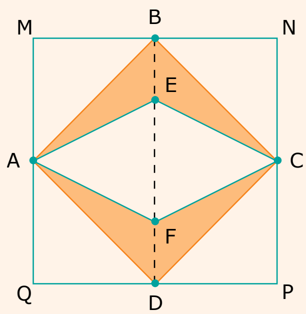
C) 3,9.

D) 4,0.

E) 3,8.

10. HJHX (Fatec-SP–2016) Na figura, os pontos **A**, **B**, **C** e **D** são pontos médios dos lados do quadrado MNPQ de lado de medida ℓ. Os pontos **E** e **F** pertencem ao segmento $\overline{BD}$ de modo que $BE = FD = \frac{\ell}{4}$.

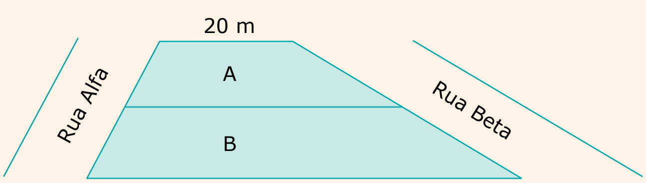
A área do quadrado MNPQ é igual a **k** vezes a área da superfície destacada em laranja.



Assim sendo, o valor de **k** é:

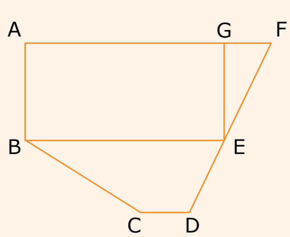
A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10

11. (UERJ) Dois terrenos, **A** e **B**, ambos com a forma de trapézio, têm as frentes de mesmo comprimento voltadas para a Rua Alfa. Os fundos dos dois terrenos estão voltados para a Rua Beta. Observe o esquema:



As áreas de **A** e **B** são, respectivamente, proporcionais a 1 e 2, e a lateral menor do terreno **A** mede 20 m. Calcule o comprimento **x**, em metros, da lateral maior do terreno **B**.

12. WBBX (FUVEST-SP) O mapa de uma região utiliza a escala de 1 : 200 000. A porção desse mapa, contendo uma Área de Preservação Permanente (APP), está representada na figura, na qual $\overline{AF}$ e $\overline{DF}$ são segmentos de reta, o ponto **G** está no segmento $\overline{AF}$ o ponto **E** está no segmento $\overline{DF}$ ABEG é um retângulo e BCDE é um trapézio. Se AF = 15, AG = 12, AB = 6, CD = 3 e DF = $5\sqrt{5}$ indicam valores em centímetros no mapa real, então a área da APP é



(Figura sem escala)

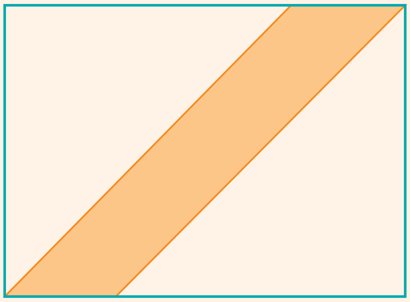
A) 100 km².
B) 108 km².
C) 210 km².
D) 240 km².
E) 444 km².

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2017) Uma família possui um terreno retangular com 18 metros de largura e 24 metros de comprimento. Foi necessário demarcar nesse terreno dois outros iguais, na forma de triângulos isósceles, sendo que um deles será para o filho e o outro para os pais. Além disso, foi demarcada uma área de passeio entre os dois novos terrenos para o livre acesso das pessoas.

Os terrenos e a área de passeio são representados na figura.



A área de passeio calculada pela família, em metro quadrado, é de

A) 108.
B) 216.
C) 270.
D) 288.
E) 324.

02. ØDQ8 (Enem–2016) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

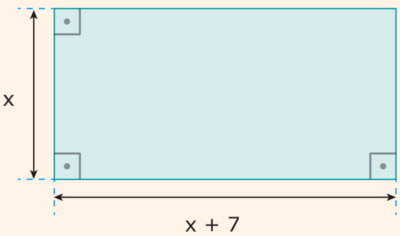


Figura A

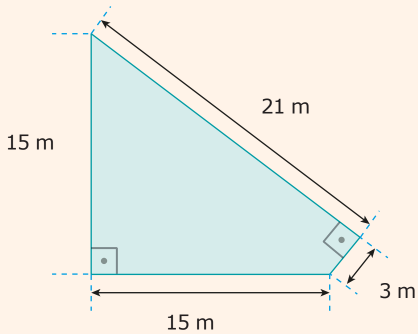


Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

A) 7,5 e 14,5.

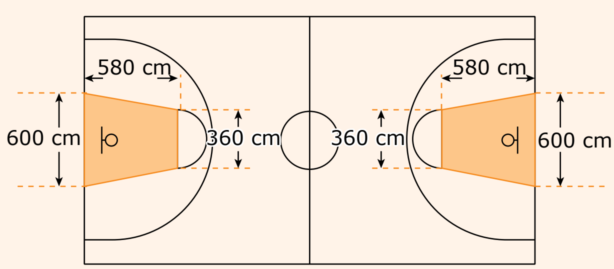
B) 9,0 e 16,0.

C) 9,3 e 16,3.

D) 10,0 e 17,0.

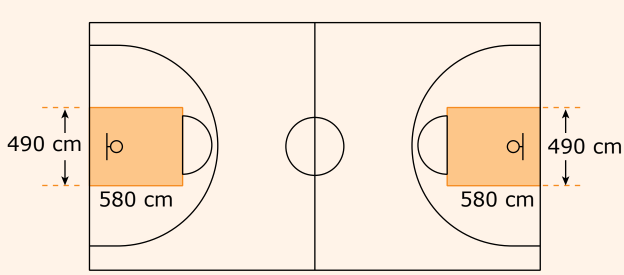
E) 13,5 e 20,5.

03. (Enem–2015) O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender às orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

A) aumento de 5 800 cm².

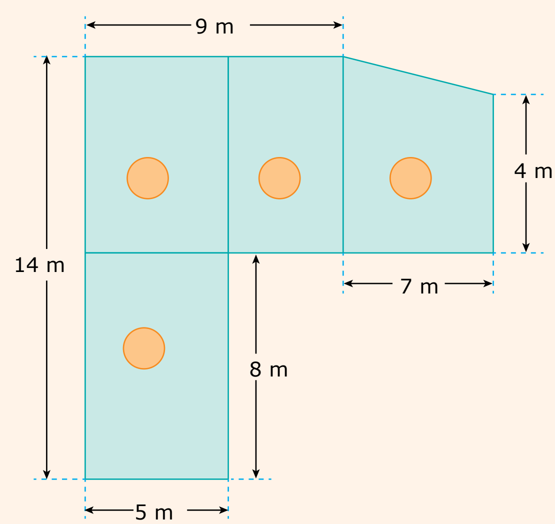
B) aumento de 75 400 cm².

C) aumento de 214 600 cm².

D) diminuição de 63 800 cm².

E) diminuição de 272 600 cm².

04. (Enem) Jorge quer instalar aquecedores no seu salão de beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno. Ele estuda a compra de unidades de dois tipos de aquecedores: modelo **A**, que consome 600 g/h (gramas por hora) de gás propano e cobre 35 m² de área, ou modelo **B**, que consome 750 g/h de gás propano e cobre 45 m² de área. O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura. Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mínimo possível com gás. A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte (ambientes representados por três retângulos e um trapézio).



Avaliando-se todas as informações, serão necessários

A) quatro unidades do tipo **A** e nenhuma unidade do tipo **B**.

B) três unidades do tipo **A** e uma unidade do tipo **B**.

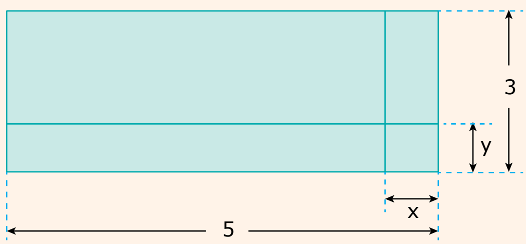
C) duas unidades do tipo **A** e duas unidades do tipo **B**.

D) uma unidade do tipo **A** e três unidades do tipo **B**.

E) nenhuma unidade do tipo **A** e quatro unidades do tipo **B**.

MATEMÁTICA

05. (Enem) Um forro retangular de tecido traz, em sua etiqueta, a informação de que encolherá após a primeira lavagem, mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é (5 – x)(3 – y).



Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

A) 2xy

B) 15 – 3x

C) 15 – 5y

D) –5y – 3x

E) 5y + 3x – xy

06. (Enem) O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

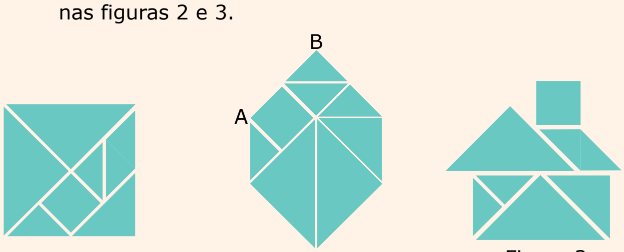


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

A) 4 cm².

B) 8 cm².

C) 12 cm².

D) 14 cm².

E) 16 cm².

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. A
- 03. E
- 04. C
- 05. C
- 06. E
- 07. B
- 08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. B
- 03. B
- 04. E
- 05. A
- 06. A
- 07. D
- 08. A
- 09. D
- 10. B
- 11. x = 100 m
- 12. E

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. B
- 03. A
- 04. C
- 05. E
- 06. B

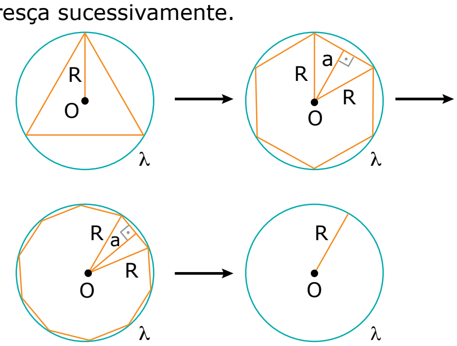
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Áreas de Círculo e suas Partes

ÁREA DE UM CÍRCULO

Considere a circunferência λ de centro **O** e raio **R**.

Inscreva em λ polígonos regulares, de modo que o número de lados cresça sucessivamente.

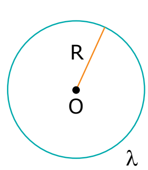


Sabemos que a área de um polígono regular **P** é o produto do seu semiperímetro **p** pelo apótema **a**: $A_p = p.a$

Quanto maior o número de lados do polígono regular inscrito em λ, mais seu perímetro se aproxima do perímetro (comprimento) da circunferência, e seu apótema se aproxima do raio. A área do polígono torna-se, portanto, cada vez mais próxima da área do círculo de raio **R**.

Afirma-se, então, que a área de um círculo é o produto do seu semiperímetro pelo raio.

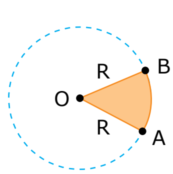
Assim, para o círculo de raio **R**, tem-se:



$A = \pi R.R \Rightarrow \boxed{A = pR^2}$

SETOR CIRCULAR

Setor circular é uma parte do círculo limitada por um arco de circunferência e dois raios com extremidades nas extremidades do arco.

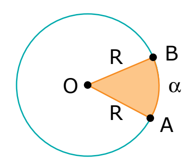


Área de um setor circular

A área de um setor circular de raio **R** é proporcional à medida do arco correspondente.

1º caso:

$\overset{\frown}{AB}$ medido em graus.



Área ------ **Arco**

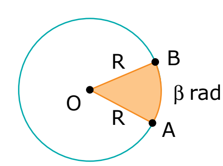
πR^2 ------------------------- $360°$

A ------------------------- α

Logo, $\dfrac{\pi R^2}{A} = \dfrac{360°}{\alpha} \Rightarrow \boxed{A = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{360°}}$

2º caso:

$\overset{\frown}{AB}$ medido em radianos.



Área ------ **Arco**

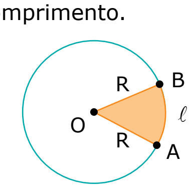
πR^2 --------------------------- 2π rad

A --------------------------- β rad

Logo, $\dfrac{\pi R^2}{A} = \dfrac{2\pi}{\beta} \Rightarrow \boxed{A = \dfrac{\beta R^2}{2}}$

3º caso:

$\overset{\frown}{AB}$ medido em comprimento.



Área ------ **Arco**

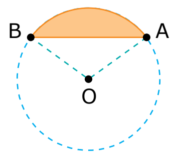
πR^2 ----------------------- $2\pi R$

A ----------------------- ℓ

Logo, $\dfrac{\pi R^2}{A} = \dfrac{2\pi R}{\ell} \Rightarrow \boxed{A = \dfrac{\ell R}{2}}$

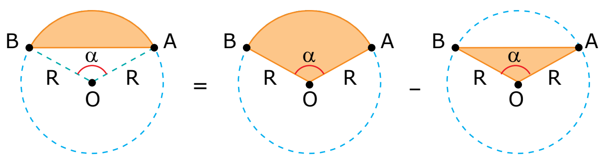
SEGMENTO CIRCULAR

Segmento circular é uma parte do círculo limitada por um arco de circunferência e por uma corda com extremidades nas extremidades do arco.



A corda $\overline{AB}$ determina dois segmentos circulares, como mostrado na figura anterior.

Para calcularmos a área de um segmento circular de ângulo central $0 < \alpha \leq \pi$, procedemos como mostrado na figura seguinte:

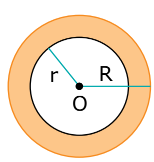


$$A = A_{setor} - A_{triângulo} = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{1}{2}R^2.\text{sen } \alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{A = \frac{R^2}{2}(\alpha - \text{sen } \alpha)}$$

COROA CIRCULAR

Dadas duas circunferências concêntricas de raios **r** e **R**, com r < R, chama-se coroa circular ao conjunto dos pontos pertencentes ao círculo de raio **R** e exteriores ao círculo de raio **r**.

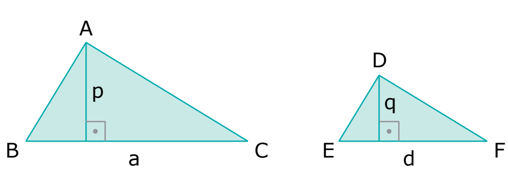


Para calcularmos a área de uma coroa circular, fazemos a diferença entre as áreas dos dois círculos:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow \boxed{A = \pi(R^2 - r^2)}$$

RAZÃO ENTRE ÁREAS DE FIGURAS SEMELHANTES

Consideremos os triângulos semelhantes ABC e DEF, sendo **k** a razão de semelhança do primeiro para o segundo.



$$\frac{a}{d} = \frac{p}{q} = k$$

Calculando a razão da área do primeiro para a área do segundo triângulo, temos:

$$\frac{A_{ABC}}{A_{DEF}} = \frac{\frac{ap}{2}}{\frac{dq}{2}} = \frac{ap}{dq} = \frac{a}{d}.\frac{p}{q} = k.k = k^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{A_{\Delta\,ABC}}{A_{\Delta\,DEF}} = k^2}$$

Dessa maneira, deduzimos uma importante propriedade:

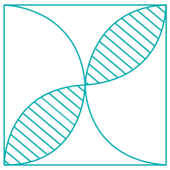
A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

Essa propriedade pode ser generalizada para quaisquer figuras semelhantes, isto é:

> A razão entre áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre essas figuras.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (AFA-SP) Na figura a seguir, o lado do quadrado é 1 cm. Então, a área da região hachurada, em cm², é



A) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

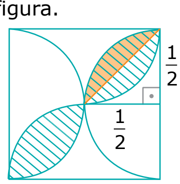
B) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

C) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$

D) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$

Resolução:

A área hachurada corresponde a quatro vezes a área de um segmento circular de ângulo central 90° e raio $\frac{1}{2}$, como indicado na figura.



Assim, $A_{hac.} = 4(A_{setor} - A_{\Delta}) \Rightarrow A_{hac.} = 4.\left[\frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4} - \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}{2}\right] \Rightarrow$

$A_{hac.} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ cm².

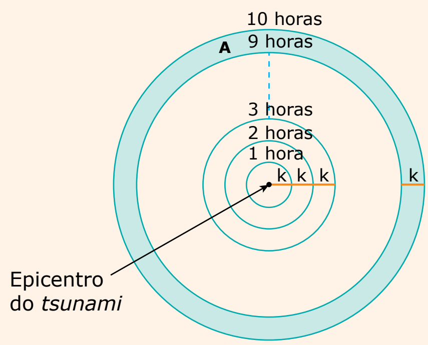
EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UNIFESP) Se um arco de 60° num círculo I tem o mesmo comprimento de um arco de 40° num círculo II, então a razão da área do círculo I pela área do círculo II é:

A) $\frac{2}{9}$.
B) $\frac{4}{9}$.
C) $\frac{2}{3}$.
D) $\frac{3}{2}$.
E) $\frac{9}{4}$.

02. X4HG (UEL-PR) Considere que um *tsunami* se propaga como uma onda circular.



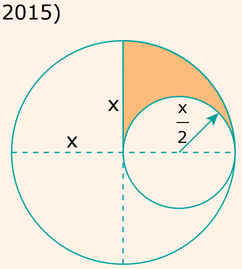
Se a distância radial percorrida pelo *tsunami*, a cada intervalo de 1 hora, é de **k** quilômetros, então a área **A**, em quilômetros quadrados, varrida pela onda entre 9 horas e 10 horas, é dada por:

A) $A = \pi k^2$
B) $A = 9\pi k^2$
C) $A = 12\pi k^2$
D) $A = 15\pi k^2$
E) $A = 19\pi k^2$

03. (IFCE–2016) O perímetro de um quadrado cujos lados medem **l** é igual ao comprimento de uma circunferência de raio **R**. A razão entre as áreas do quadrado e do círculo será:

A) 2π
B) $\frac{4}{\pi}$
C) π
D) $\frac{\pi}{4}$
E) $\frac{\pi}{2}$

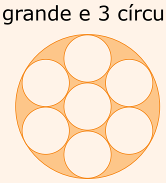
04. L7GK (Mackenzie-SP–2015)



O valor da área sombreada na figura anterior é:

A) $\frac{\pi x^2}{4}$
B) $\frac{\pi x^2}{2}$
C) $\frac{\pi x^2}{8}$
D) $\frac{\pi x^2}{12}$
E) $\frac{\pi x^2}{6}$

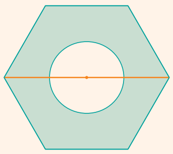
05. 2P4U (FGV) Cada um dos 7 círculos menores da figura a seguir tem raio 1 cm. Um círculo pequeno é concêntrico com o círculo grande, e tangencia os outros 6 círculos pequenos. Cada um desses 6 outros círculos pequenos tangencia o círculo grande e 3 círculos pequenos.



Na situação descrita, a área da região sombreada na figura, em cm², é igual a:

A) π
B) $\frac{3\pi}{2}$
C) 2π
D) $\frac{5\pi}{2}$
E) 3π

06. SL4W (UPE) A figura a seguir representa um hexágono regular de lado medindo 2 cm e um círculo cujo centro coincide com o centro do hexágono, e cujo diâmetro tem medida igual à medida do lado do hexágono.

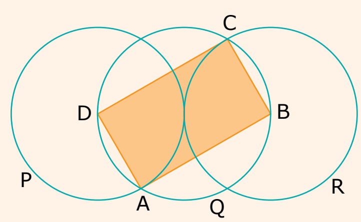


Considere: $\pi \cong 3$ e $\sqrt{3} \cong 1{,}7$

Nessas condições, quanto mede a área da superfície colorida?

A) 2,0 cm².
B) 3,0 cm².
C) 7,2 cm².
D) 8,0 cm².
E) 10,2 cm².

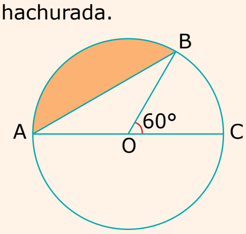
07. 3HI9 (UFRGS-RS–2016) Na figura a seguir, três discos **P**, **Q** e **R**, de mesmo raio, são construídos de maneira que **P** e **R** são tangentes entre si e o centro de **Q** é ponto de tangência entre **P** e **R**. O quadrilátero sombreado ABCD têm vértices nos centros dos discos **P** e **R** e em dois pontos de interseção de **Q** com **P** e **R**.



Se o raio do disco **P** é 5, a área do quadrilátero ABCD é:

A) $5\sqrt{3}$
B) 25
C) 50
D) $25\sqrt{3}$
E) 75

08. GZA1 (UEG-GO) A figura a seguir representa uma circunferência de raio r = 2 cm, em que $\overline{AC}$ é o diâmetro e $\overline{AB}$ é uma corda. Sabendo-se que o ângulo $B\hat{O}C$ = 60°, calcule a área da região hachurada.

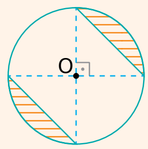


MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO **Bernoulli Play**

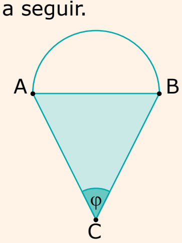
01. 9LFD (UFT-TO) Considerando a circunferência da figura a seguir com centro no ponto **O** e diâmetro igual a 4 cm.



Pode-se afirmar que o valor da área da região hachurada é

A) $\left(\sqrt{8}\pi - 4\right)\text{cm}^2$.
B) 2π cm².
C) $(2\pi - 4)$ cm².
D) $(\pi - 1)$ cm².
E) $(4\pi - 2)$ cm².

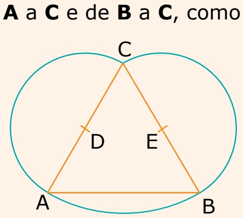
02. M3SB (Unicamp-SP) O segmento AB é o diâmetro de um semicírculo e a base de um triângulo isósceles ABC, conforme a figura a seguir.



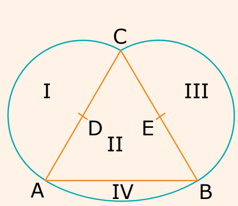
Denotando as áreas das regiões semicircular e triangular, respectivamente, por S(φ) e T(φ), podemos afirmar que a razão $\frac{S(\varphi)}{T(\varphi)}$, quando $\varphi = \frac{\pi}{2}$ radianos, é:

A) $\frac{\pi}{2}$
B) 2π
C) π
D) $\frac{\pi}{4}$

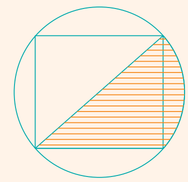
03. (PUC Rio–2018) Seja ABC um triângulo equilátero de lado 16. Com centro em **C**, temos um arco de círculo entre **A** e **B**, como na figura. Sejam **D** e **E** os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Com centros em **D** e **E**, temos semicírculos de **A** a **C** e de **B** a **C**, como na figura.



A) Determine os raios dos círculos na figura, de centros **C**, **D** e **E**, respectivamente.
B) Calcule o comprimento dos arcos AC, CB e BA.
C) Calcule as áreas das quatro regiões indicadas na figura a seguir.

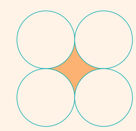


04. (ACAFE) Na figura a seguir, o quadrado está inscrito na circunferência. Sabendo que a medida do lado do quadrado é 8 cm, então, a área da parte hachurada, em cm², é igual a:



A) $4(\pi + 2)$
B) $8(\pi + 4)$
C) $8(\pi + 2)$
D) $4(\pi + 4)$

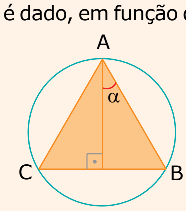
05. UZLG (UFRGS-RS) Os círculos desenhados na figura a seguir são tangentes dois a dois.



A razão entre a área de um círculo e a área da região sombreada é:

A) 1
B) 2
C) $\frac{3}{4-\pi}$
D) $\frac{\pi}{4-\pi}$
E) $\frac{2\pi}{4-\pi}$

06. B1BØ (FUVEST-SP) Na figura a seguir, o triângulo ABC inscrito na circunferência tem AB = AC. O ângulo entre o lado $\overline{AB}$ e a altura do triângulo ABC em relação a $\overline{BC}$ é α. Nessas condições, o quociente entre a área do triângulo ABC e a área do círculo da figura é dado, em função de α, pela expressão:



A) $\frac{2}{\pi}.\cos^2\alpha$
B) $\frac{2}{\pi}.\text{sen}^2\,2\alpha$
C) $\frac{2}{\pi}.\text{sen}^2\,2\alpha.\cos\alpha$
D) $\frac{2}{\pi}.\text{sen}\,\alpha.\cos 2\alpha$
E) $\frac{2}{\pi}.\text{sen}\,2\alpha.\cos^2\alpha$

07. L54T (UFV-MG) A região hachurada da figura 1 a seguir é denominada Triângulo de Reuleaux, em homenagem a Franz Reuleaux (1829-1905). Nesse triângulo, os vértices **A**, **B** e **C** são centros de circunferências de raio **r**, as quais contêm, respectivamente, os arcos $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AB}$, conforme ilustrado. A janela da Catedral de Notre Dame (Figura 2) em Bruxelas, na Bélgica, tem seu *design* inspirado no Triângulo de Reuleaux.

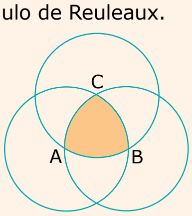


Figura 1

Figura 2

Para a construção dessa janela, é necessário conhecer a área do Triângulo de Reuleaux, em função do raio **r**, que é dada por:

A) $\frac{\neq + \sqrt{3}}{2}r^2$

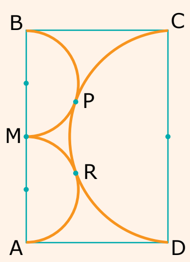
B) $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}r^2$

C) $\frac{\pi - \sqrt{5}}{2}r^2$

D) $\frac{\neq + \sqrt{5}}{2}r^2$

08. 35CO

(Albert Einstein–2016) Na figura a seguir, ABCD é um retângulo tal que BC = 6 cm e **M** é ponto médio do lado AB. Se os semicírculos no interior do retângulo são dois a dois tangentes entre si, nos pontos **M**, **P** e **R**, então a área de ABCD, em centímetros quadrados, é:



A) $36\sqrt{3}$

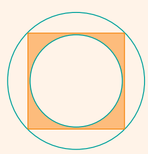
B) $36\sqrt{2}$

C) $18\sqrt{3}$

D) $18\sqrt{2}$

09. QJAA

(UEFS-BA–2016)



Na figura, tem-se uma circunferência inscrita em um quadrado, que, por sua vez, está inscrito em outra circunferência.

Considerando-se π = 3,14, a área escura compreendida entre o quadrado e a circunferência menor representa, em relação à área interna à circunferência maior, um percentual de, aproximadamente,

A) 11,8%.

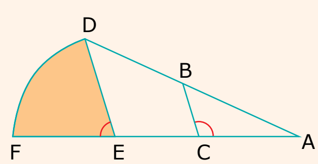
B) 13,7%.

C) 16,4%.

D) 18,3%.

E) 21,5%.

10. (EPCAR-MG–2017) Na figura a seguir, tem-se que $\overparen{DF}$ é um arco de circunferência de centro **E** e raio DE.



Sabe-se que:

- ADE é um triângulo
- DE é paralelo a BC
- $\overline{BD} = 7$ cm
- $\overline{AC} = 10$ cm
- $\overline{BC} = 6$ cm
- $A\hat{C}B = 120°$
- $\cos 120° = -\frac{1}{2}$

A área do setor circular hachurado na figura, em cm^2, é igual a:

A) 27 π

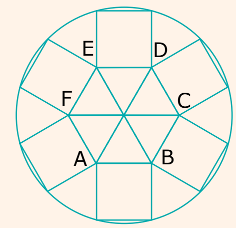
B) $\frac{27\neq}{2}$

C) $\frac{9\neq}{2}$

D) 3 π

11. Y9B5

(UFRGS-RS–2016) Na figura a seguir, encontram-se representados o hexágono regular ABCDEF, seis quadrados com um de seus lados coincidindo com um lado do hexágono e um círculo que passa por vértices dos quadrados.



Se o lado do hexágono é 1, então a área do círculo é:

A) $\pi + \sqrt{3}$

B) $\neq\sqrt{3}$

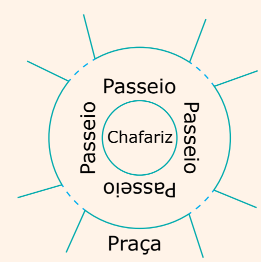
C) $\pi\left(2 + \sqrt{3}\right)$

D) $2\neq\sqrt{3}$

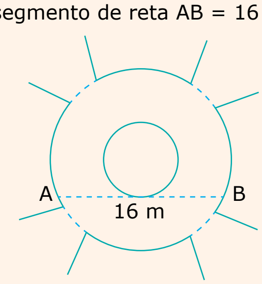
E) $\pi\left(1 + \sqrt{3}\right)$

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2018) A figura mostra uma praça circular que contém um chafariz em seu centro e, em seu entorno, um passeio. Os círculos que definem a praça e o chafariz são concêntricos.



O passeio terá seu piso revestido com ladrilhos. Sem condições de calcular os raios, pois o chafariz está cheio, um engenheiro fez a seguinte medição: esticou uma trena tangente ao chafariz, medindo a distância entre dois pontos **A** e **B**, conforme a figura. Com isso, obteve a medida do segmento de reta AB = 16 m.



Dispondo apenas dessa medida, o engenheiro calculou corretamente a medida da área do passeio, em metro quadrado.

A medida encontrada pelo engenheiro foi

A) 4π.

B) 8π.

C) 48π.

D) 64π.

E) 192π.

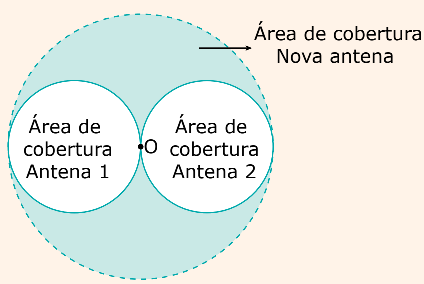
02. (Enem–2017) Em uma plataforma de exploração de petróleo, localizada no mar, ocorreu um vazamento. A equipe técnica de operação dessa plataforma percebeu que a mancha de óleo espalhado na superfície do mar tinha formato circular e estimou, visualmente, que a área atingida era de aproximadamente 100 km².

Utilize 3 como aproximação para π.

O valor inteiro mais próximo do raio da mancha de óleo formada, em km, é

A) 4.
B) 6.
C) 10.
D) 17.
E) 33.

03. (Enem–2015) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto **O**, como mostra a figura.

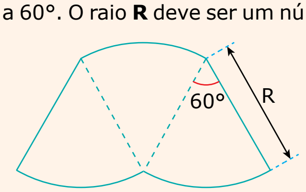


O ponto **O** indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

A) 8π.
B) 12π.
C) 16π.
D) 32π.
E) 64π.

04. (Enem–2015) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que á formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio **R** deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m x 24 m.

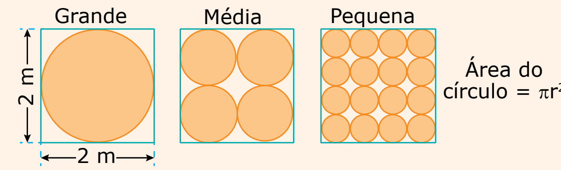
O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3,0 como aproximação para p.

O maior valor possível para **R**, em metros, deverá ser:

A) 16.
B) 28.
C) 29.
D) 31.
E) 49.

05. (Enem) Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que

A) a entidade I recebe mais material do que a entidade II.
B) a entidade I recebe metade do material da entidade III.
C) a entidade II recebe o dobro de material da entidade III.
D) as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.
E) as três entidades recebem iguais quantidades de material.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. E
- 03. D
- 04. C
- 05. C
- 06. C
- 07. D
- 08. $A = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ cm²

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. A
- 03.
  - A) C = 16, D = E = 8
  - B) $\widehat{AC} = 8p$, $\widehat{CB} = 8p$ e $\widehat{BA} = \frac{16\neq}{3}$
  - C) $I = 32\pi$, $II = 64\sqrt{3}$, $III = 32p$ e $IV = \frac{128\neq}{3} - 64\sqrt{3}$
- 04. C
- 05. D
- 06. E
- 07. B
- 08. B
- 09. B
- 10. B
- 11. C

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. B
- 03. A
- 04. B
- 05. E

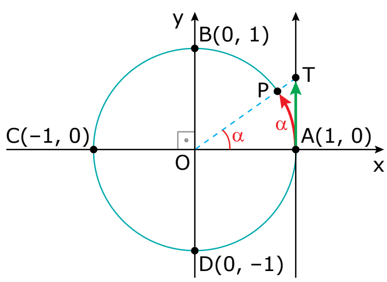
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Outras Funções Trigonométricas

FUNÇÃO TANGENTE

Pela origem **A** dos arcos, consideremos o eixo AT paralelo a Oy, passando por **A**.

Temos que α é a medida do ângulo agudo $A\hat{O}P$, e o triângulo OAT é retângulo.



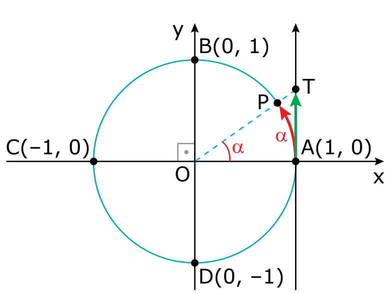
Portanto, utilizando a definição de tangente para ângulos agudos num triângulo retângulo, podemos escrever $\text{tg}\,\alpha = \frac{AT}{OA}$, em que OA = 1, e AT é a ordenada de **T**, ou seja:

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = \text{ordenada de } \mathbf{T}}$$

A função tangente é a função de $\mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$, que para todo número α associa a ordenada do ponto **T**, interseção de $\overleftrightarrow{AT}$ com $\overleftrightarrow{OP}$ (em que **P** é a imagem de α no ciclo trigonométrico).

$\text{tg}: \mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

$\text{tg}\,\alpha = AT$



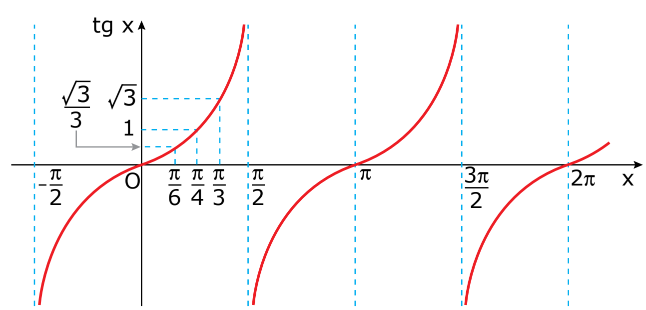
Dizemos, também, que AT é a tangente de $A\hat{O}P$ ou de $\overset{\frown}{AP}$.

$$\boxed{\text{tg}\,A\hat{O}P = \text{tg}\,\overset{\frown}{AP} = AT}$$

O eixo AT passa a ser denominado, então, eixo das tangentes.

Gráfico

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0



A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$.

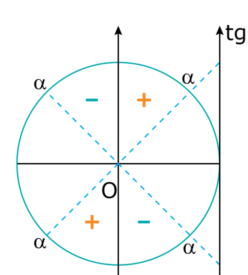
A função tangente é periódica, e seu período é π.

OBSERVAÇÃO

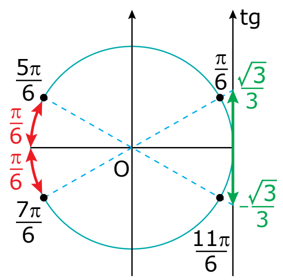
$$\boxed{f(x) = \text{tg}\,(mx + n) \Rightarrow p = \frac{\pi}{|m|},\ m \neq 0}$$

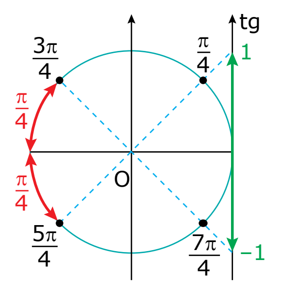
Sinal

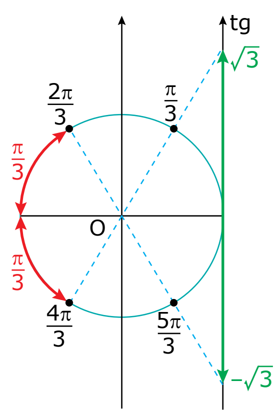
Vamos estudar o sinal de $\text{tg}\,\alpha$ quando **P** (imagem de α no ciclo trigonométrico) pertence a cada um dos quadrantes.



Valores notáveis







TANGENTES DE ARCOS CÔNGRUOS

Qualquer que seja o número real α, os arcos de medidas α e $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem **A** e a mesma extremidade **P**. Logo:

$$\boxed{\text{tg } (\alpha + 2k\pi), = \text{tg } \alpha,\ \alpha \in D(\text{tg}),\ k \in \mathbb{Z}}$$

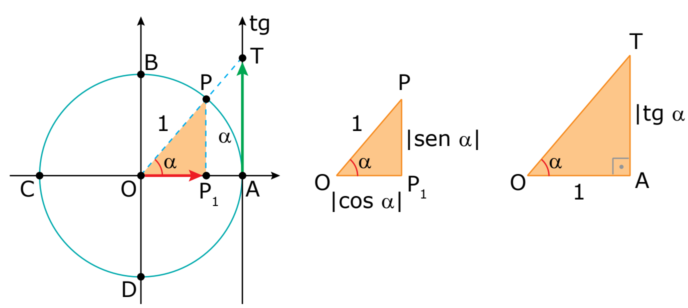
Exemplos:

1º) tg 1 080° = tg 720° = tg 360° = tg 0° = 0

2º) A determinação principal do arco de medida $\frac{38\neq}{3}$ rad mede $\frac{2\neq}{3}$ rad. Então: $\text{tg } \frac{38\neq}{3} = \text{tg } \frac{2\neq}{3} = -\sqrt{3}$

RELAÇÃO ENTRE TANGENTE, SENO E COSSENO

Qualquer que seja $\alpha \in D(\text{tg})$, se $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, existem os triângulos retângulos OAT e OP_1P semelhantes. Logo:



$$\frac{AT}{P_1P} = \frac{OA}{OP_1} \qquad \frac{|\text{tg } \alpha|}{|\text{sen } \alpha|} = \frac{1}{|\cos \alpha|} \qquad |\text{tg } \alpha| = \frac{|\text{sen } \alpha|}{|\cos \alpha|}$$

A análise dos sinais de tg α, sen α e cos α e o estudo dos casos particulares nos permite concluir que:

$$\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha},\ \alpha \neq \frac{\neq}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

OUTRAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Função cotangente

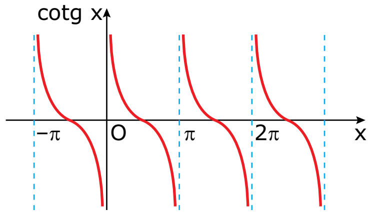
Definiremos a função cotangente utilizando as funções seno e cosseno da seguinte forma:

$$\boxed{\text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Como consequência imediata, temos:

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha},\ \alpha \neq \frac{k\neq}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Gráfico



A imagem da função cotangente é $\mathbb{R}$.

A função cotangente é periódica, e seu período é π.

OBSERVAÇÃO

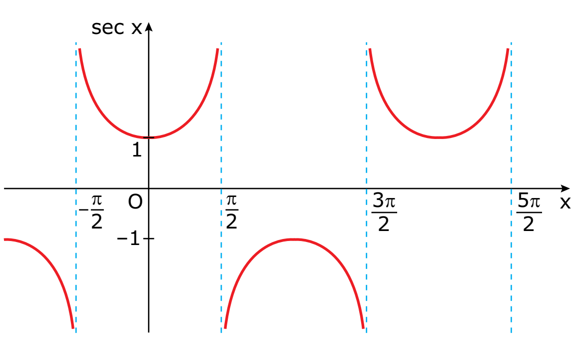
$$f(x) = \text{cotg}\,(mx + n) \Rightarrow p = \frac{\neq}{|m|},\ m \neq 0$$

Função secante

Definiremos a função secante utilizando a função cosseno, da seguinte forma:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha},\ \alpha \neq \frac{\neq}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Gráfico



A imagem da função secante é $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

A função secante é periódica, e seu período é 2p.

OBSERVAÇÃO

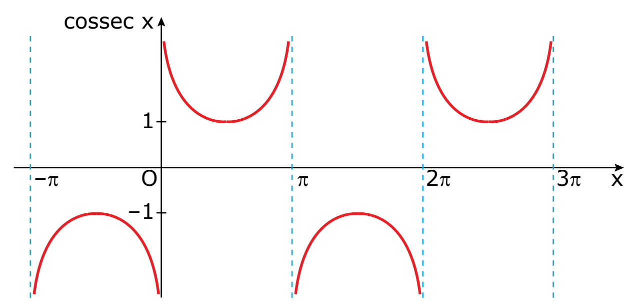
$$f(x) = \sec\,(mx + n) \Rightarrow p = \frac{2\neq}{|m|},\ m \neq 0$$

Função cossecante

Definiremos a função cossecante utilizando a função seno, da seguinte forma:

$$\text{cossec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Gráfico



A imagem da função cossecante é $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

A função cossecante é periódica, e seu período é 2p.

OBSERVAÇÃO

$$f(x) = \text{cossec}\,(mx + n) \Rightarrow p = \frac{2\neq}{|m|},\ m \neq 0$$

RELAÇÃO ENTRE SECANTE E TANGENTE E ENTRE COSSECANTE E COTANGENTE

Dividindo os membros de $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$ por $\cos^2 \alpha$, sendo $\cos \alpha \neq 0$, temos:

$$\frac{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \text{tg}^2\,\alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \text{tg}^2\,\alpha = \sec^2 \alpha,\ \alpha \neq \frac{\neq}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

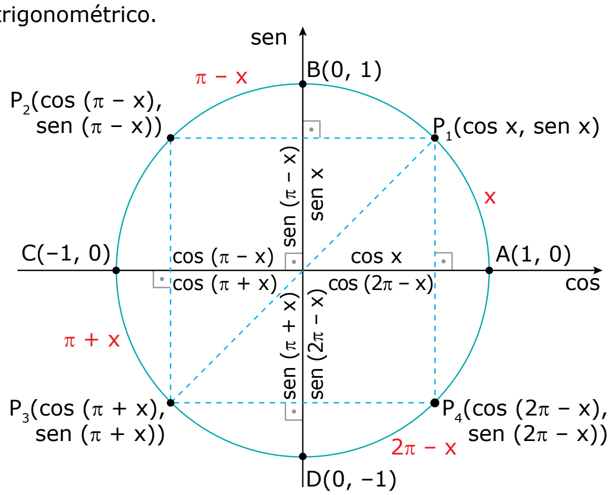
Analogamente, dividindo por $\text{sen}^2 \alpha$, sendo $\text{sen}\ \alpha \neq 0$, temos:

$$1 + \text{cotg}^2\,\alpha = \text{cossec}^2\,\alpha,\ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

MATEMÁTICA

REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

Consideremos os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 simétricos no ciclo trigonométrico.



Se P_1 determina um arco de medida **x**, $0 < x < \frac{\neq}{2}$, então P_2, P_3 e P_4 determinam, respectivamente, arcos de medidas $\pi - x$, $\pi + x$ e $2\pi - x$.

Pelas definições de seno e de cosseno, temos:

$P_1(\cos x, \text{sen } x)$;

$P_2(\cos (\pi - x), \text{sen } (\pi - x))$;

$P_3(\cos (\pi + x), \text{sen } (\pi + x))$ e

$P_4(\cos (2\pi - x), \text{sen } (2\pi - x))$.

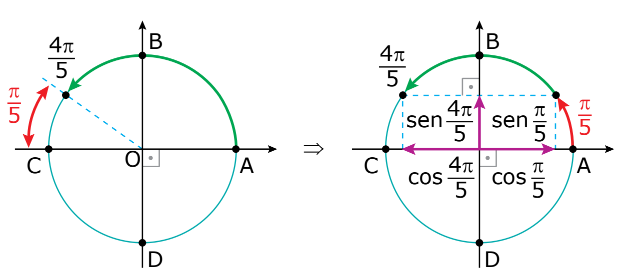
Aplicando as simetrias das coordenadas, obtemos:

Pontos	Abscissas	Ordenadas
P_1 e P_2	$\cos (\pi - x) = -\cos x$	$\text{sen } (\pi - x) = \text{sen } x$
P_1 e P_3	$\cos (\pi + x) = -\cos x$	$\text{sen } (\pi + x) = -\text{sen } x$
P_1 e P_4	$\cos (2\pi - x) = \cos x$	$\text{sen } (2\pi - x) = -\text{sen } x$

Tais relações são válidas para todo número real **x**.

Exemplos:

1º) Reduzindo $\frac{4\neq}{5}$ ao 1º quadrante, temos:



$\text{sen } \frac{4\pi}{5} = \text{sen } \frac{\pi}{5}$; $\cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5}$;

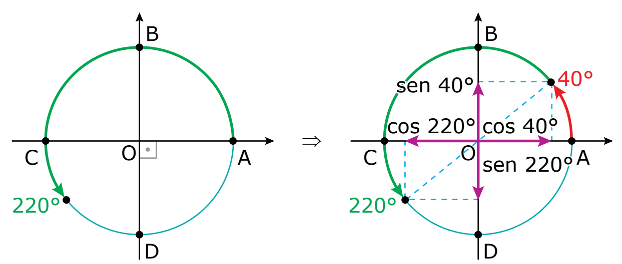
$\text{tg } \frac{4\pi}{5} = \dfrac{\text{sen } \frac{4\pi}{5}}{\cos \frac{4\pi}{5}} = \dfrac{\text{sen } \frac{\pi}{5}}{-\cos \frac{\pi}{5}}$ $\quad \text{tg } \frac{4\pi}{5} = -\text{tg } \frac{\pi}{5}$;

$\text{cotg } \frac{4\pi}{5} = \dfrac{1}{\text{tg } \frac{4\pi}{5}} = \dfrac{1}{-\text{tg } \frac{\pi}{5}}$ $\quad \text{cotg } \frac{4\pi}{5} = -\text{cotg } \frac{\pi}{5}$;

$\sec \frac{4\pi}{5} = \dfrac{1}{\cos \frac{4\pi}{5}} = \dfrac{1}{-\cos \frac{\pi}{5}}$ $\quad \sec \frac{4\pi}{5} = -\sec \frac{\pi}{5}$;

$\text{cossec } \frac{4\pi}{5} = \dfrac{1}{\text{sen } \frac{4\pi}{5}} = \dfrac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{5}}$ $\quad \text{cossec } \frac{4\pi}{5} = \text{cossec } \frac{\pi}{5}$;

2º) Reduzindo 220° ao 1º quadrante, temos:

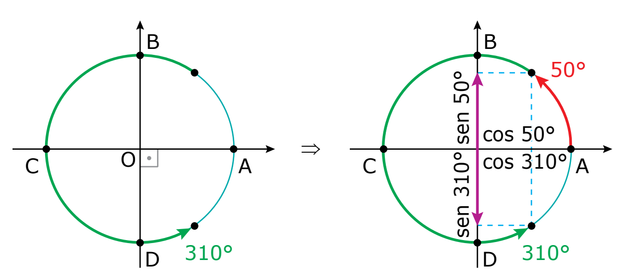


sen 220° = −sen 40°; cos 220° = −cos 40°;

tg 220° = tg 40°; cotg 220° = cotg 40°;

sec 220° = −sec 40°; cossec 220° = −cossec 40°;

3º) Reduzindo 310° ao 1º quadrante, temos:



sen 310° = −sen 50°; cos 310° = cos 50°;

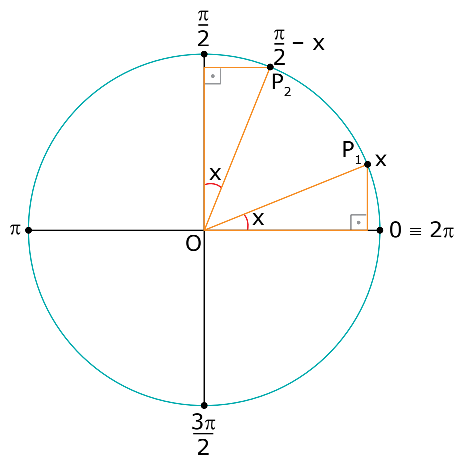
tg 310° = −tg 50°; cotg 310° = −cotg 50°;

sec 310° = sec 50°; cossec 310° = −cossec 50°;

RELAÇÕES ENTRE ARCOS COMPLEMENTARES

Considerando um arco de medida **x**, $0 < x < \frac{\neq}{2}$, sabemos que seu arco complementar tem medida $\frac{\neq}{2} - x$.

No ciclo trigonométrico, temos:



Pelas definições de seno e cosseno, temos:

$P_1(\cos x, \text{sen } x)$ e $P_2 \ \cos \ \frac{\pi}{2} - x \ , \text{sen } \frac{\pi}{2} - x$

Da congruência dos dois triângulos retângulos anteriores, obtemos:

$$\boxed{\text{sen } \frac{\pi}{2} - x = \cos x \text{ e } \cos \frac{\pi}{2} - x = \text{sen } x}$$

Tais relações são válidas para todo número real **x**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Provar que $(1 + \text{cotg}^2 x)(1 - \cos^2 x) = 1$ para todo **x** real, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Resolução:

$(1 + \text{cotg}^2 x)(1 - \cos^2 x) = \text{cossec}^2 (x).\text{sen}^2 (x)$

$$= \frac{1}{\text{sen}^2 x}.\text{sen}^2 x = 1$$

02. Provar que $\text{tg } x + \text{cotg } x = \sec (x).\text{cossec } (x)$ para todo **x** real, $x \neq \frac{k\neq}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.

Resolução:

$$\text{tg } x + \text{cotg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x.\text{sen } x}$$

$$= \frac{1}{\cos x.\text{sen } x} = \frac{1}{\cos x}.\frac{1}{\text{sen } x}$$

$$= \sec (x).\text{cossec } (x)$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. FCSJ (UEPB) Sendo $f(x) = -4\cos \ \frac{\pi}{2} - x \ + 2\cos x$, o valor de $f \ -\frac{7\pi}{4}$ é:

A) $\sqrt{2}$

B) 2

C) $-\sqrt{2}$

D) −1

E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

02. KZQW (FGV-SP) Sabendo que o valor da secante de **x** é dado por $\sec x = \frac{5}{4}$, em que **x** pertence ao intervalo $\frac{3\neq}{2}, 2\neq$, podemos afirmar que os valores de cos x, sen x e tg x são, respectivamente,

A) $\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}$ e $-\frac{3}{4}$.

B) $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$.

C) $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ e $-\frac{4}{3}$.

D) $-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}$ e $\frac{4}{3}$.

E) $\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$.

03. B599 (Mackenzie-SP) Se $\text{sen } x = \frac{1}{2}$, em que 0° < x < 90°, então o valor da expressão $y = \frac{\cos x}{\text{tg } x + \sec x}$ é:

A) 0

B) 1

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

04. (UFOP-MG) Se tg x = a, $\frac{\neq}{2} < x < \pi$, é correto afirmar que sen (x) + cos (x) vale

A) $\frac{-1 - a}{\sqrt{1 + a^2}}$

B) $\frac{1 + a}{\sqrt{1 + a^2}}$

C) $\frac{1 - a}{\sqrt{1 + a^2}}$

D) $\frac{-1 + a}{\sqrt{1 + a^2}}$

05. 4CZT (UFOP-MG) Dado que sen 18° = $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, o valor de sec 18° é:

A) $\frac{8}{5 + \sqrt{5}}$

B) $\frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

C) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}$

D) $\frac{4}{\sqrt{5} - 1}$

MATEMÁTICA

06. (IFSC-SC) Se $\cos(x) = -\frac{12}{13}$, $p < x < \frac{3p}{2}$ e $x \in 3^o$ quadrante, então é correto afirmar que o valor de tg (x) é:

A) $-\frac{5}{13}$.

B) $-\frac{5}{12}$.

C) $\frac{5}{13}$.

D) $\frac{5}{12}$.

E) 0,334.

07. I13E (UFSJ-MG) Considerando os valores de θ, para os quais a expressão $\frac{\text{sen } q}{\cos\sec q} + \frac{\cos q}{\sec q}$ é definida, é correto afirmar que ela está sempre igual a

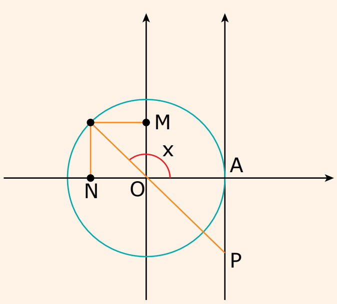
A) 1.

B) 2.

C) sen θ.

D) cos θ.

08. MRT7 (UFRN) Considere a figura a seguir, na qual a circunferência tem raio igual a 1.



Nesse caso, as medidas dos segmentos $\overline{ON}$, $\overline{OM}$ e $\overline{AP}$, correspondem, respectivamente, a

A) sen x, sec x e cotg x.

B) cos x, sen x e tg x.

C) cos x, sec x e cossec x.

D) tg x, cossec x e cos x.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. YVPR (CEFET-MG) Sabendo-se que $\cos a = \frac{3}{5}$ e $0 < a < \frac{p}{2}$, pode-se afirmar que tg α vale:

A) $\frac{4}{3}$.

B) 1.

C) $\frac{5}{6}$.

D) $\frac{3}{4}$.

02. ULSU (IFSul) Sabendo-se que $\text{sen } a = \frac{1}{2}$ e que $\alpha \in 2^o$ quadrante, o valor da expressão $y = \frac{\text{sen}(90° - \alpha).\tan\alpha}{\sec(180° + \alpha)}$ é:

A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C) $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

D) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

03. (UFTM-MG) Se $0 < x \leq \pi$ e $3\cos(x) + \text{sen}(x) = 3$, pode-se afirmar que

A) $\text{tg } x < -1$

B) $-1 \leq \text{tg } x < -\frac{1}{2}$

C) $-\frac{1}{2} \leq \text{tg } x < \frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{2} \leq \text{tg } x < 1$

E) $\text{tg } x \geq 1$

04. (FGV) Se $\cos x + \sec(-x) = t$, então, $\cos^2 x + \sec^2 x$ é igual a:

A) 1

B) $t^2 + 2$

C) t^2

D) $t^2 - 2$

E) $t^2 + 1$

05. TC35 (UPE–2015) Num triângulo retângulo, temos que tg x = 3. Se **x** é um dos ângulos agudos desse triângulo, qual o valor de cos x?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

06. Z1PG (IFCE–2016) Se $\text{sen } x = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, então o valor de $\frac{\sec^2 x - \text{tg}^2 x}{1 - \text{cossec } x}$ é:

A) $-\frac{1}{2}$.

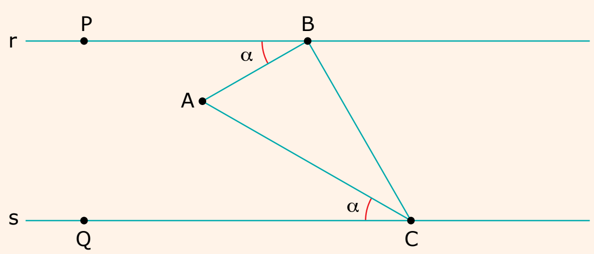
B) –1.

C) $\frac{1}{2}$.

D) 1.

E) 0.

07. 98MR (Ibmec-SP) Na figura, em que as retas **r** e **s** são paralelas, **A** é um ponto que dista 1 de **r** e 2 de **s**. Dada uma medida α, em graus, tal que 0 < α < 90, tomam-se os pontos **B** e **P** sobre **r** e **C** e **Q** sobre **s** tais que $m(A\hat{B}P) = m(A\hat{C}Q) = \alpha$.



Nessas condições, a área do triângulo ABC é igual a

A) tg α.

B) 2tg α.

C) (tg α)(cotg α).

D) cotg α.

E) 2cotg α.

08. (Cesgranrio) Se $\text{tg } x = \sqrt{5}$, então $\text{sen}^2 x$ é igual a:

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{5}{6}$

09. (Fatec-SP) Se **f** é uma função real definida por $f(x) = \frac{2 \cdot \text{tg } x}{1 + \text{tg}^2 x}$, então f(x) é igual a

A) cosec 2x.

B) sec 2x.

C) tg 2x.

D) cos 2x.

E) sen 2x.

10. H4GW (Unifesp) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por f(x) = sen x.

Considere as afirmações seguintes:

1. A função f(x) é uma função par, isto é, f(x) = f(–x), para todo **x** real.
2. A função f(x) é periódica de período 2π, isto é, f(x + 2π) = f(x), para todo **x** real.
3. A função f(x) é sobrejetora.
4. $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

São verdadeiras as afirmações

A) 1 e 3, apenas.

B) 3 e 4, apenas.

C) 2 e 4, apenas.

D) 1, 2 e 3, apenas.

E) 1, 2, 3 e 4.

11. GNVJ (AFA) Considere **A** o conjunto mais amplo possível na função real $f: A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{\text{sen } x}{\text{cossec } x} + \frac{\cos x}{\sec x}$.

Sobre a função **f**, é correto afirmar que

A) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B) é periódica com período igual a π.

C) é decrescente se
$$x \in \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

D) é ímpar.

SEÇÃO ENEM

01. O lucro mensal de uma empresa, em reais, é dado por

$$L(t) = 10\,000 + \frac{1\,000}{\sec\left(\frac{\pi t}{6}\right)},$$

em que **t** representa os meses do ano. O lucro dessa empresa, em reais, no mês de fevereiro, é de:

A) 9 000

B) 9 500

C) 10 000

D) 10 500

E) 11 000

MATEMÁTICA

02. Carlos, administrador de empresas, está realizando um trabalho de pesquisa sobre duas empresas concorrentes **A** e **B**. Nesse trabalho, ele está usando várias informações sobre cada uma delas, como lucro mensal, quantidade de funcionários e de clientes.

O lucro ao longo de um ano de cada empresa, em milhares de reais, é fornecido pela seguinte função do tempo **t**, em meses, sendo t = 1 correspondente ao mês de janeiro:

$$L_A(t) = 200 + 50.\cos \frac{\neq t}{12}$$

$$L_B(t) = 300 - 50.\text{cossec} \frac{\neq t}{24}$$

O orientador do trabalho de pesquisa de Carlos pediu para ele fazer uma análise mensal sobre os lucros de cada uma das empresas. Portanto, Carlos poderá afirmar que, no mês de abril,

A) a empresa **A** lucrou R$ 20 000,00 a mais que a empresa **B**.

B) a empresa **B** lucrou R$ 20 000,00 a mais que a empresa **A**.

C) a empresa **A** lucrou R$ 25 000,00 a mais que a empresa **B**.

D) a empresa **B** lucrou R$ 25 000,00 a mais que a empresa **A**.

E) as duas empresas tiveram lucros iguais.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. A
- 03. D
- 04. A
- 05. C
- 06. D
- 07. A
- 08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. B
- 03. D
- 04. D
- 05. E
- 06. A
- 07. E
- 08. E
- 09. E
- 10. C
- 11. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . ______ %

Funções Soma e Fatoração

SENO E COSSENO DA SOMA DE ARCOS

Observe-se que:

sen (30° + 60°) ≠ sen 30° + sen 60°, pois $1 \neq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, sen (a + b) ≠ sen a + sen b.

Fórmulas

Quaisquer que sejam os valores de **a** e **b**, valem as seguintes identidades:

I	sen (a + b) = sen a.cos b + sen b.cos a
II	sen (a – b) = sen a.cos b – sen b.cos a
III	cos (a + b) = cos a.cos b – sen a.sen b
IV	cos (a – b) = cos a.cos b + sen a.sen b

Exemplo:

Calcular sen 75°.

Como 75° = 45° + 30°, tem-se:

sen 75° = sen (45° + 30°) ⇒

sen 75° = sen 45°.cos 30° + sen 30°.cos 45° ⇒

$$\text{sen } 75° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

SENO E COSSENO DO ARCO DUPLO

Para todo **x**, tem-se:

$$\boxed{\text{sen } 2x = 2.\text{sen } x.\cos x}$$

De fato:

sen 2x = sen (x + x) = sen x.cos x + sen x.cos x ⇒

sen 2x = 2.sen x.cos x

Exemplos:

1º) sen 4x = 2.sen 2x.cos 2x

2º) sen 20° = 2.sen 10°.cos 10°

3º) $\text{sen } \frac{\neq}{4} = 2.\text{sen } \frac{\neq}{8}.\cos \frac{\neq}{8}$

4º) $\text{sen } x = 2.\text{sen } \frac{x}{2}.\cos \frac{x}{2}$

Da mesma forma, para todo **x**, tem-se:

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x}$$

De fato:

cos 2x = cos (x + x) = cos x.cos x – sen x.sen x ⇒

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Exemplos:

1º) $\cos 4x = \cos^2 2x - \text{sen}^2 2x$

2º) $\cos 20° = \cos^2 10° - \text{sen}^2 10°$

3º) $\cos \frac{\neq}{4} = \cos^2 \frac{\neq}{8} - \text{sen}^2 \frac{\neq}{8}$

4º) $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2}$

Observamos que, ao utilizar a relação fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, podemos obter duas outras fórmulas para cos 2x, que são:

$$\boxed{\cos 2x = 2.\cos^2 x - 1}$$

$$\boxed{\cos 2x = 1 - 2.\text{sen}^2 x}$$

TANGENTE DA SOMA DE ARCOS

Observe-se que tg (30° + 120°) ≠ tg 30° + tg 120°, pois:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \neq \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}$$

Assim, tg (a + b) ≠ tg a + tg b.

Fórmulas

i) Sendo **a**, **b** e $a + b \neq \frac{\neq}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\boxed{\text{tg } (a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a.\text{tg } b}}$$

Demonstração:

$$\text{tg } (a + b) = \frac{\text{sen } (a+b)}{\cos (a+b)} = \frac{\text{sen } a.\cos b + \text{sen } b.\cos a}{\cos a.\cos b - \text{sen } a.\text{sen } b}$$

Dividindo-se o numerador e o denominador por cos a.cos b, tem-se:

$$\text{tg }(a + b) = \frac{\frac{\text{sen } a.\cos b}{\cos a.\cos b} + \frac{\text{sen } b.\cos a}{\cos a.\cos b}}{\frac{\cos a.\cos b}{\cos a.\cos b} - \frac{\text{sen } a.\text{sen } b}{\cos a.\cos b}} \Rightarrow$$

$$\text{tg }(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a.\text{tg } b}$$

ii) Sendo **a**, **b** e $a - b \neq \frac{\neq}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\boxed{\text{tg }(a - b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a.\text{tg } b}}$$

A demonstração é análoga à anterior.

TANGENTE DO ARCO DUPLO

Sendo **x** e $2x \neq \frac{\neq}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\boxed{\text{tg } 2x = \frac{2.\text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}}$$

Demonstração:

$$\text{tg } 2x = \text{tg }(x + x) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x.\text{tg } x} = \frac{2.\text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$$

Exemplos:

1º) $\text{tg } 4x = \dfrac{2.\text{tg } 2x}{1 - \text{tg}^2 2x}$

2º) $\text{tg } 20° = \dfrac{2.\text{tg } 10°}{1 - \text{tg}^2 10°}$

3º) $\text{tg } \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2.\text{tg } \frac{\pi}{8}}{1 - \text{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$

4º) $\text{tg } x = \dfrac{2.\text{tg } \frac{x}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{x}{2}}$

FATORAÇÃO DA SOMA E DIFERENÇA DE SENOS E COSSENOS

A fatoração de uma expressão é um recurso muito importante para a simplificação de frações, bem como para a resolução de equações e de inequações.

Dedução de fórmulas

Sejam as fórmulas:

- sen (a + b) = sen a.cos b + sen b.cos a;
- sen (a − b) = sen a.cos b − sen b.cos a;
- cos (a + b) = cos a.cos b − sen a.sen b;
- cos (a − b) = cos a.cos b + sen a.sen b.

A partir delas, é possível concluir que:

i) sen (a + b) + sen (a − b) = 2.sen a.cos b

ii) sen (a + b) − sen (a − b) = 2.sen b.cos a

iii) cos (a + b) + cos (a − b) = 2.cos a.cos b

iv) cos (a + b) − cos (a − b) = −2.sen a.sen b

Essas fórmulas transformam somas e diferenças em produtos. Para facilitar o seu uso, convém escolher novas variáveis **p** e **q**, tal que a + b = p e a − b = q.

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases} \Rightarrow a = \frac{p + q}{2} \text{ e } b = \frac{p - q}{2}$$

Assim, as fórmulas ficam:

I	$\text{sen } p + \text{sen } q = 2.\text{sen } \frac{p + q}{2}.\cos \frac{p - q}{2}$
II	$\text{sen } p - \text{sen } q = 2.\text{sen } \frac{p - q}{2}.\cos \frac{p + q}{2}$
III	$\cos p + \cos q = 2.\cos \frac{p + q}{2}.\cos \frac{p - q}{2}$
IV	$\cos p - \cos q = -2.\text{sen } \frac{p + q}{2}.\text{sen } \frac{p - q}{2}$

FATORAÇÃO DA SOMA E DIFERENÇA DE TANGENTES

$$\text{tg } p + \text{tg } q = \frac{\text{sen } p}{\cos p} + \frac{\text{sen } q}{\cos q} = \frac{\text{sen } p.\cos q + \text{sen } q.\cos p}{\cos p.\cos q} \Rightarrow$$

$$\text{tg } p + \text{tg } q = \frac{\text{sen }(p + q)}{\cos p.\cos q}$$

Assim, sendo **p** e **q** $\neq \frac{\neq}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\boxed{\text{tg } p + \text{tg } q = \frac{\text{sen }(p + q)}{\cos p.\cos q}}$$

Analogamente, demonstra-se que:

$$\boxed{\text{tg } p - \text{tg } q = \frac{\text{sen }(p - q)}{\cos p.\cos q}}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 2HMZ (Unifor-CE) O período da função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ é:

A) $\frac{\neq}{4}$

B) $\frac{\neq}{2}$

C) $\neq$

D) $\frac{3\neq}{2}$

E) $2\neq$

02. (UFAM) Dado $\text{tg}\ \frac{x}{2} = 2$, tg x é igual a:

A) $-\frac{3}{5}$.

B) $\frac{4}{5}$.

C) $-\frac{4}{3}$.

D) $\frac{4}{3}$.

E) $-\frac{5}{3}$.

03. (UFC-CE) Se $\text{sen}\ x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, então o valor de sen 2x é:

A) $-\frac{2}{3}$.

B) $-\frac{1}{3}$.

C) $\frac{1}{3}$.

D) $\frac{2}{3}$.

04. ADG4 (UFJF-MG) Considere as seguintes afirmativas:

I. sen (a + b) = sen a + sen b

II. $\text{sen}^2\ a + \cos^2 a = 1$

III. sen 2a = 2 sen a.cos a

IV. sen a.b = sen a.cos b

Pode-se concluir que

A) todas as afirmativas são corretas.

B) apenas a afirmativa II é correta.

C) apenas a afirmativa III é correta.

D) as afirmativas II e III são corretas.

E) as afirmativas I e IV são corretas.

05. 1KZH (EEAR–2016) O valor de cos 735° é:

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

D) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$

06. 4Ø0U (UFAM) Dada a expressão:

$$\frac{\text{sen}\ 34°.\cos 26° + \text{sen}\ 26°.\cos 34°}{\cos 57°.\cos 27° + \text{sen}\ 57°.\text{sen}\ 27°}$$

o seu valor é:

A) $\sqrt{3}$

B) 1

C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

07. 8FSM (Cesgranrio) Todos os valores de $x \in [\pi, 2\pi]$ que satisfazem sen x.cos x > 0 são:

A) $p < x < \frac{5p}{4}$

B) $\frac{5p}{4} < x < p$

C) $p < x < \frac{3p}{2}$

D) $\frac{3p}{2} < x < 2p$

E) $\frac{3p}{2} < x < \frac{7p}{4}$

08. I5DF (IFCE) Se $\text{sen}\ x = -\frac{2}{3}$, cos 2x.sen(–x) é:

A) $\frac{2}{9}$.

B) $\frac{2}{27}$.

C) $-\frac{2}{9}$.

D) $-\frac{2}{27}$.

E) $-\frac{9}{27}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. A3B9 (UEG-GO–2015) Considerando-se que $\text{sen}\ 5° = \frac{2}{25}$, tem-se que cos 50° é:

A) $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621}+2\right)$

B) $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621}-2\right)$

C) $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(1-\sqrt{621}\right)$

D) $\frac{\sqrt{2}}{50}\left(\sqrt{621}-1\right)$

02. (PUC Rio–2015) Sabendo que $p < x < \frac{3p}{2}$ e $\text{sen}\ x = -\frac{1}{3}$, é correto afirmar que sen 2x é:

A) $-\frac{2}{3}$

B) $-\frac{1}{6}$

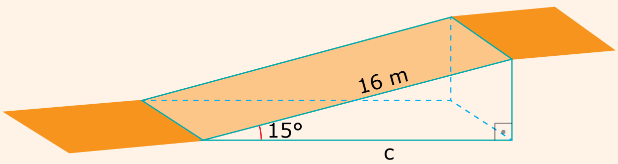
C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

D) $\frac{1}{27}$

E) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

MATEMÁTICA

03. 4412 (UFSM-RS) Para melhorar as condições de acessibilidade a uma clínica médica, foi construída uma rampa conforme indicado na figura.



O comprimento horizontal **c** da rampa, em metros, pode ser expresso por

A) $4(2 - \sqrt{3})$

B) $8\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

C) $8\sqrt{3}$

D) $4(2 + \sqrt{3})$

E) $8\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

04. (UFPB) É dada a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos 4x.\cos 2x + \text{sen } 4x.\text{sen } 2x$. Então, o seu período, em radianos, é:

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) 2π D) π E) $\frac{\pi}{3}$

05. UJ6D (UFJF-MG–2016) Seja $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ uma medida de ângulo em radianos tal que

$$\cos x + \text{sen } x = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos x - \text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

O valor de tg 2x é:

A) $4 - \sqrt{15}$

B) $\frac{\sqrt{15}}{15}$

C) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

D) $\sqrt{15}$

E) $4\sqrt{15}$

06. (UFU-MG) O valor de $\left[\text{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \cos\frac{\pi}{12}\right]^2$ é:

A) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

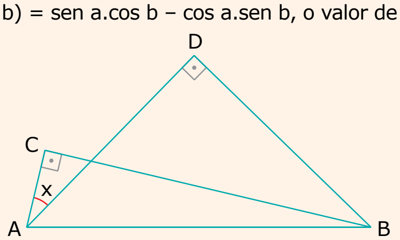
B) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

07. (FUVEST-SP) Nos triângulos retângulos da figura, AC = 1 cm, BC = 7 cm, AD = BD. Sabendo que sen (a – b) = sen a.cos b – cos a.sen b, o valor de sen x é:



A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{7}{\sqrt{50}}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

08. ZNTJ (Mackenzie-SP) Se tg α = 2, então cos 2α é igual a:

A) $-\frac{3}{5}$.

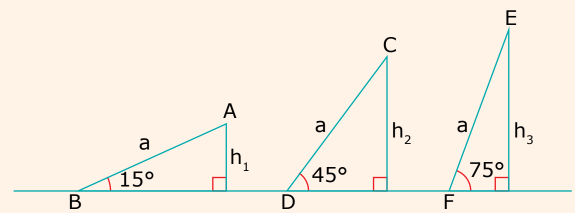
B) $-\frac{2}{5}$.

C) $-\frac{1}{5}$.

D) $\frac{1}{5}$.

E) $\frac{2}{5}$.

09. LS07 (UERJ) Um esqueitista treina em três rampas planas de mesmo comprimento **a**, mas com inclinações diferentes. As figuras a seguir representam as trajetórias retilíneas AB = CD = EF, contidas nas retas de maior declive de cada rampa.



Sabendo que as alturas, em metros, dos pontos de partida **A**, **C** e **E** são, respectivamente, h_1, h_2 e h_3, conclui-se que $h_1 + h_2$ é igual a:

A) $h_3\sqrt{3}$ B) $h_3\sqrt{2}$ C) $2h_3$ D) h_3

10. I4EW (Mackenzie-SP) Se sen x = $\frac{4}{5}$ e tg x < 0, então tg 2x vale:

A) $\frac{24}{7}$.

B) $-\frac{24}{7}$.

C) $-\frac{9}{3}$.

D) $\frac{9}{3}$.

E) $-\frac{4}{3}$.

11. (CEFET-MG) A função $f(x) = \sec x \, . \, \text{sen } 2x \, . \, \text{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) . \cos(\pi - x).\text{tg}^2 x$ deve ser reescrita como produto de uma constante pelas funções seno e cosseno, calculadas no mesmo valor x, como $f(x) = k.\text{sen}^m x \, . \, \cos^n x$.

O valor de **m** é:

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	03. A	05. C	07. C
02. C	04. D	06. B	08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. B	04. D	07. C	10. A
02. E	05. B	08. A	11. E
03. E	06. D	09. D	

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Equações e Inequações Trigonométricas

EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Sejam f(x) e g(x) duas funções trigonométricas.

Para resolver a equação trigonométrica f(x) = g(x), devemos reduzi-la a uma das três equações seguintes:

i) $\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta$;

ii) $\cos \alpha = \cos \beta$;

iii) $\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta$.

Estas são denominadas equações fundamentais.

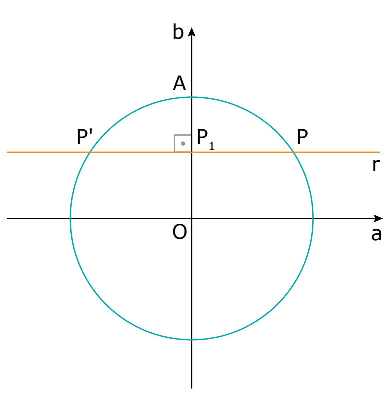
RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO SEN α = SEN β

Se $\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta = OP_1$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta **r**, que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto P_1, isto é, estão em **P** ou P'.

Há, portanto, duas possibilidades:

i) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos; ou

ii) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é, são suplementares.



Em resumo, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

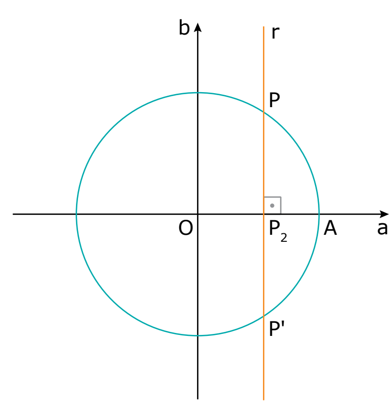
RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO COS α = COS β

Se $\cos \alpha = \cos \beta = OP_2$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta **r**, que é perpendicular ao eixo dos cossenos no ponto P_2, isto é, estão em **P** ou P'.

Há, portanto, duas possibilidades:

i) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos; ou

ii) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos.



Em resumo, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\therefore \cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \pm \beta + 2kp$$

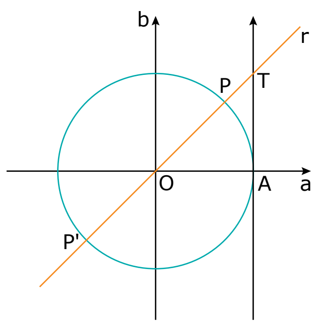
RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TG α = TG β

Se tg α = tg β = AT, então as imagens de α e β estão sobre a reta **r**, determinada por **O** e **T**, isto é, estão em **P** ou P'.

Há, portanto, duas possibilidades:

i) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos; ou

ii) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo.



Em resumo, para k ∈ ℤ, temos:

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{array}$$

$$\therefore \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b \Rightarrow a = b + kp$$

INEQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Dadas f(x) e g(x) duas funções trigonométricas e m ∈ ℝ, as inequações trigonométricas f(x) > g(x) ou f(x) < g(x) podem ser reduzidas a inequações de um dos seis tipos:

i) sen x > m

ii) sen x < m

iii) cos x > m

iv) cos x < m

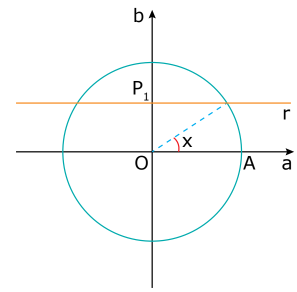
v) tg x > m

vi) tg x < m

RESOLUÇÃO DE SEN x > m

Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1, tal que OP_1 = m. Traçamos por P_1 a reta **r**, perpendicular ao eixo. As imagens dos reais **x**, tais que sen x > m, estão na interseção do ciclo com o semiplano situado acima de **r**.

Finalmente, descrevemos os intervalos aos quais **x** pode pertencer, tomando o cuidado de partir de **A** e de percorrer o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta.

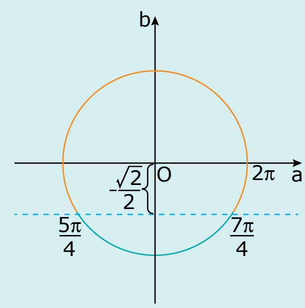


Exemplo:

Resolver a inequação sen x ≥ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, em ℝ.

Procedendo conforme foi indicado, para k ∈ ℤ, temos:

$$0 + 2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \le x < 2\pi + 2k\pi$$

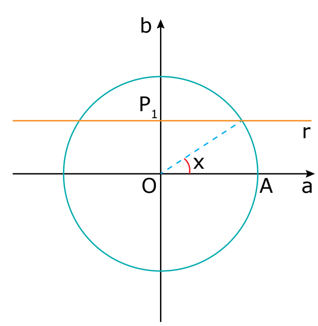


Notemos que escrever $\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ estaria errado, pois, como $\frac{7\pi}{4} > \frac{5\pi}{4}$, não existe **x** algum nesse intervalo.

RESOLUÇÃO DE SEN x < m

Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1, tal que OP_1 = m. Traçamos por P_1 a reta **r**, perpendicular ao eixo. As imagens dos reais **x**, tais que sen x < m, estão na interseção do ciclo com o semiplano situado abaixo de **r**.

Finalmente, partindo de **A** e percorrendo o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.

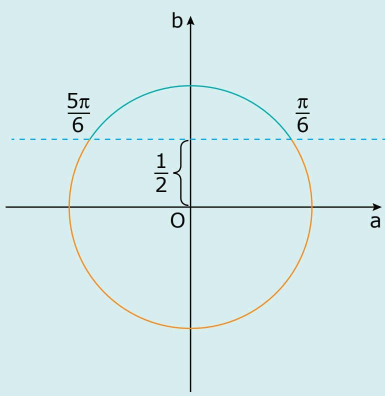


Exemplo:

Resolver a inequação sen x < $\frac{1}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para k ∈ $\mathbb{Z}$, temos:

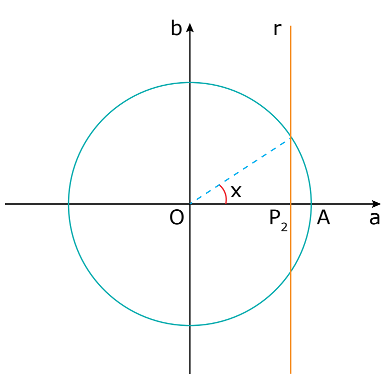
$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\neq}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\neq}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



RESOLUÇÃO DE COS x > m

Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2, tal que OP_2 = m. Traçamos por P_2 a reta **r**, perpendicular ao eixo. As imagens dos reais **x**, tais que cos x > m, estão na interseção do ciclo com o semiplano situado à direita de **r**.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.

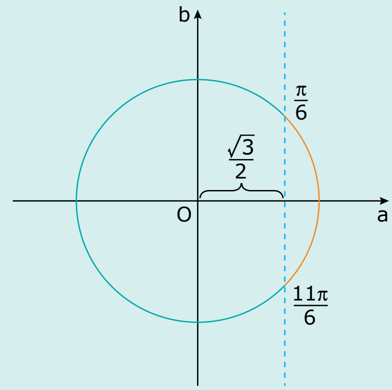


Exemplo:

Resolver a inequação cos x > $\frac{\sqrt{3}}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para k ∈ $\mathbb{Z}$, temos:

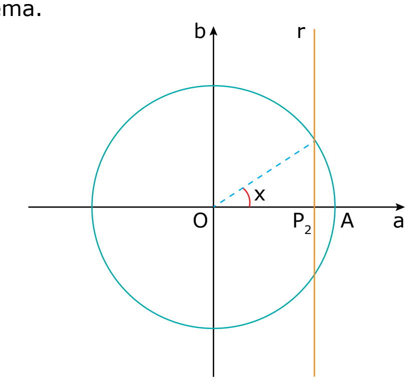
$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\neq}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{11\neq}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



RESOLUÇÃO DE COS x < m

Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2, tal que OP_2 = m. Traçamos por P_2 a reta **r**, perpendicular ao eixo. As imagens dos reais **x**, tais que cos x < m, estão na interseção do ciclo com o semiplano situado à esquerda de **r**.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.

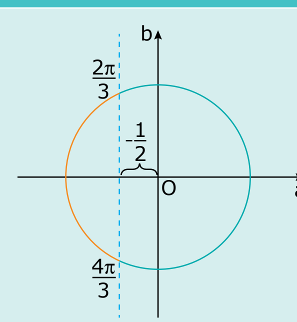


Exemplo:

Resolver a inequação cos x < $-\frac{1}{2}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para k ∈ $\mathbb{Z}$, temos:

$$\frac{2\neq}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\neq}{3} + 2k\pi$$

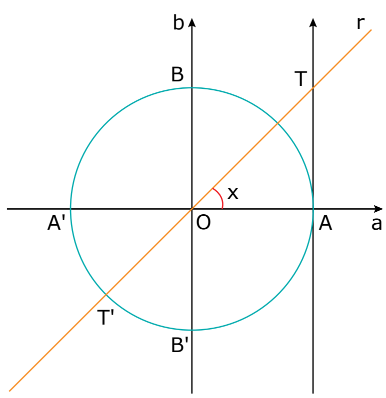


MATEMÁTICA

RESOLUÇÃO DE TG x > m

Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto **T**, tal que AT = m. Traçamos a reta $r = \overleftrightarrow{OT}$. As imagens dos reais **x**, tais que tg x > m, estão na interseção do ciclo com o ângulo $T\hat{O}B$ e o seu oposto $T'\hat{O}B'$.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



Exemplo:

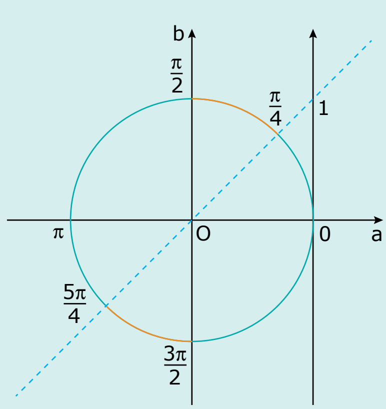
Resolver a inequação tg x > 1, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

que podem ser resumidos em:

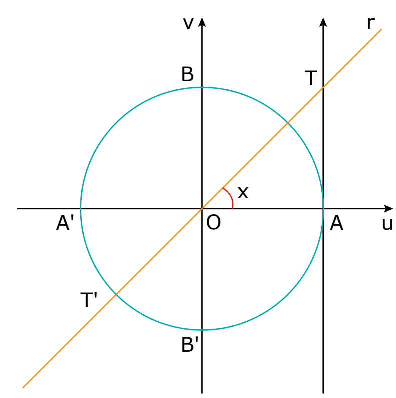
$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$



RESOLUÇÃO DE TG x < m

Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto **T**, tal que AT = m. Traçamos a reta $r = \overleftrightarrow{OT}$. As imagens dos reais **x**, tais que tg x < m, estão na interseção do ciclo com o ângulo $T\hat{O}B'$ e o seu oposto $T'\hat{O}B$.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



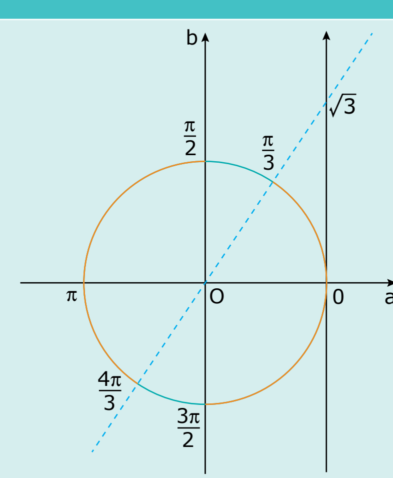
Exemplo:

Resolver a inequação tg x < $\sqrt{3}$, em $\mathbb{R}$.

Procedendo conforme foi indicado, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$0 + 2k\pi \le x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$, que podem ser resumidos em:

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k\pi$$



EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (FGV) Em certa cidade litorânea, verificou-se que a altura da água do mar em um certo ponto era dada por $f(x) = 4 + 3.\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, em que **x** representa o número de horas decorridas a partir de zero hora de determinado dia, e a altura f(x) é medida em metros.

Em que instantes, entre 0 e 12 horas, a maré atingiu a altura de 2,5 m naquele dia?

A) 5 e 9 horas.
B) 7 e 12 horas.
C) 4 e 8 horas.
D) 3 e 7 horas.
E) 6 e 10 horas.

02. (PUC RS–2016) Se $x \in \mathbb{R}$, então a equação cos(x) = cos(−x) apresenta o conjunto solução:

A) $\mathbb{R}$
B) [−1; 1]
C) [0; +∞)
D) (−∞; 0]
E) {−1, 0, 1}

03. GFE6 (UEG-GO–2017) A inequação sen x.cos x ≤ 0, no intervalo de $0 \leq x \leq 2\pi$ e x real, possui conjunto solução:

A) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$

B) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

C) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$

D) $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$

E) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi$

04. 27JI (IFMA–2016) Seja **x** um ângulo do segundo quadrante. Sendo sen x + 2cos x = 0, o valor de cos x é igual a:

A) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
E) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

05. UR66 (PUC RS) A solução da equação $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, quando $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, é:

A) $\frac{\pi}{4}$
B) $-\frac{\pi}{4}$
C) $\frac{7\pi}{12}$
D) $\frac{\pi}{2}$
E) 0

06. 7A8Q (PUC Rio–2016) Sabendo que cos 3x = −1 quais são os possíveis valores para cos x?

A) $\frac{1}{2}$ e −1
B) $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{2}$ e 1
D) −1 e 5
E) 0 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

07. TMGT (PUC RS) Se $0 \leq x < 2\pi$, então o conjunto solução da equação $\text{sen } x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ é:

A) $S = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
B) $S = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
C) $S = \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$
D) S = [0; 2π]
E) S = [0; π]

08. UTZP (VUNESP) O conjunto solução de $|\cos x| < \frac{1}{2}$, para $0 < x < 2\pi$, é definido por:

A) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

B) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ ou $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

C) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

D) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

E) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{6}$ ou $\frac{4\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. KZI2 (Mackenzie-SP) O maior valor inteiro de **k** para que a equação $\sqrt{3}\text{sen } x + \cos x = k - 2$ apresente soluções reais é:

A) 3.
B) 4.
C) 5.
D) 6.
E) 7.

02. SVB7 (UFU-MG) Considere que **f** e **g** são as funções reais de variável real dadas, respectivamente, por f(x) = 1 + sen (2x) e g(x) = 1 + 2.cos (x). Desse modo, podemos afirmar que, para $x \in [0, 2\pi)$, os gráficos de **f** e **g** cruzam-se em

A) 1 ponto.
B) 2 pontos.
C) 3 pontos.
D) nenhum ponto.

MATEMÁTICA

03. ØR5C (Unimontes) Considere a equação trigonométrica $\cos 3x.\cos 2x - \text{sen } 3x.\text{sen } 2x = 0$. O número de raízes da equação, no intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{5}\right]$, é:

A) 2.

B) 1.

C) 3.

D) 4.

04. (UECE) Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas por $f(x) = \text{sen } x$, $g(x) = \text{sen } 2x$ e P (a, b) um ponto na interseção dos gráficos de **f** e **g**. Os possíveis valores para $\text{tg}^2\, a$ são:

A) 0 ou 1

B) 0 ou 2

C) 0 ou 3

D) 0 ou $\sqrt{3}$

05. (Unir-RO) A soma de todas as soluções reais da equação $\text{sen } 2x = \cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

A) 4π

B) π

C) 2π

D) 3π

E) 5π

06. HTDN (UEFS-BA) O número de soluções da equação $\text{sen } 2x = \text{cotg } x$ no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$ é:

A) 0.

B) 1.

C) 2.

D) 4.

E) 6.

07. (FGV) No intervalo $[0, 4\pi]$, a equação $\text{sen}^3 x - 2\text{sen}^2 x - 5\text{sen } x + 6 = 0$ tem raízes cuja soma é:

A) 2

B) −2

C) 6

D) $\frac{\pi}{2}$

E) 3π

08. (EsPCEx-SP–2016) A soma das soluções da equação $\cos(2x) - \cos(x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi)$, é igual a:

A) $\frac{5\pi}{3}$

B) 2π

C) $\frac{7\pi}{3}$

D) π

E) $\frac{8\pi}{3}$

09. E9IA (Mackenzie-SP–2015) O conjunto solução da inequação $\cos^4 x - \text{sen}^4 x < \frac{1}{2}$, no intervalo $[0, \pi]$, é:

A) $S = \varnothing$

B) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

C) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\right\}$

D) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \cup \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$

E) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \cup \frac{5\pi}{6} < x \leq \pi\right\}$

10. 4F1M (UDESC) A equação $3\text{sen}^2 x + (m - 1)\text{sen } x - 4(m - 1)^2 = 0$ admite solução para os valores de **m** pertencentes ao intervalo:

A) $[-1, 1]$

B) $[0, 2]$

C) $-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}$

D) $\left[-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right]$

E) $[1, 4]$

11. CBUS (UEFS-BA–2015) O número de soluções da equação $3\cos^2 x + \tan^2 x = 3$, no intervalo $[0, 2\pi]$, é:

A) 1

B) 2

C) 4

D) 6

E) 7

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. A
- 03. A
- 04. A
- 05. A
- 06. A
- 07. E
- 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. B
- 03. A
- 04. C
- 05. D
- 06. E
- 07. E
- 08. B
- 09. B
- 10. B
- 11. E

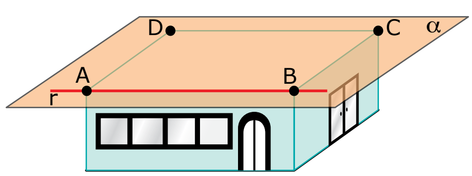
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Geometria de Posição e Poliedros

GEOMETRIA DE POSIÇÃO

Introdução

Alguns conceitos na Geometria são intuitivos, primitivos e, por isso, não necessitam de definição. A Geometria de posição é construída com base nas noções intuitivas de ponto, reta e plano, que estão exemplificadas na figura a seguir:



i) **A**, **B**, **C** e **D** são pontos;

ii) **r** ou $\overleftrightarrow{AB}$ é a reta que contém os pontos **A** e **B**;

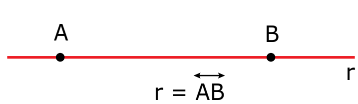
iii) **α** é o plano que contém o teto da casa.

Com base nos conceitos básicos de ponto, reta e plano, podemos enunciar alguns postulados (verdades aceitas sem demonstração):

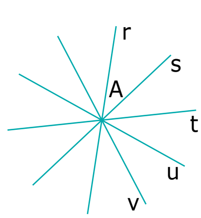
i) Em uma reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.

ii) Em um plano, bem como fora dele, há infinitos pontos.

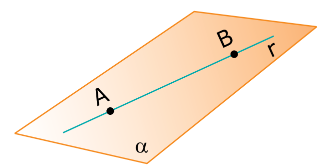
iii) Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.



iv) Por um ponto passam infinitas retas.



v) Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.

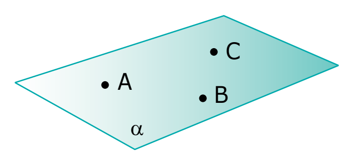


r = $\overleftrightarrow{AB}$

Determinação de planos

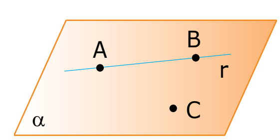
Dizemos que um plano está determinado quando ele é único. Existem quatro modos de se determinar planos:

i) Por três pontos não colineares.

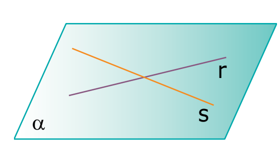


α = (A, B, C)

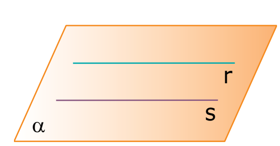
ii) Por uma reta e um ponto fora dela.



iii) Por duas retas concorrentes.



iv) Por duas retas paralelas distintas.

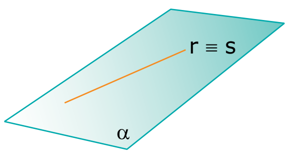


Posições relativas entre duas retas

Duas retas que pertencem ao mesmo plano (coplanares) podem ser paralelas ou concorrentes.

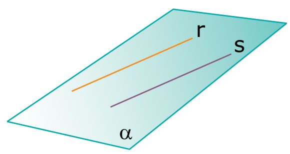
Paralelas

Duas retas coplanares são paralelas se, e somente se, são coincidentes ou não têm ponto comum.



Paralelas coincidentes

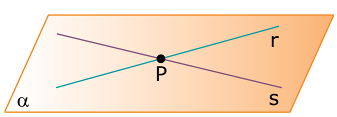
ou



Paralelas distintas

Concorrentes

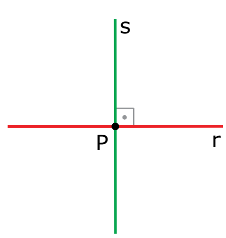
Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum.



$r \cap s = \{P\}$

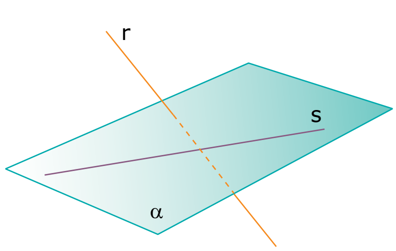
Caso particular:

Duas retas são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulo reto.



Reversas

Duas retas são reversas se, e somente se, não existir um plano que as contenha, ou seja, se não forem coplanares.



r reversa a **s**

Não existe um plano que contém **r** e **s** simultaneamente, e, consequentemente, $r \cap s = \cap$(retas reversas não possuem pontos em comum).

Caso particular:

Duas retas são ortogonais se, e somente se, são reversas e formam ângulo reto.

RESUMINDO

Dadas duas retas quaisquer, podemos classificá-las da seguinte maneira:

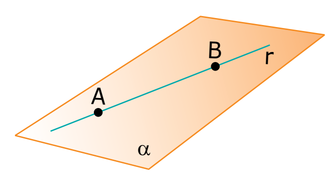
- Retas coplanares
  - Paralelas
    - Coincidentes
    - Distintas
  - Concorrentes
- Retas não coplanares
  - Reversas

Posições relativas entre uma reta e um plano

Uma reta e um plano podem admitir as seguintes posições relativas:

Reta contida no plano

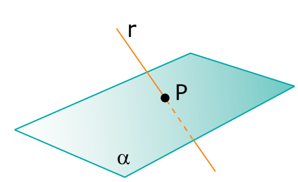
Uma reta **r** ($\overleftrightarrow{AB}$) está contida em um plano α se, e somente se, todos os pontos da reta pertencem ao plano.



Reta secante (ou concorrente) ao plano

Uma reta e um plano são secantes se possuem um único ponto em comum.

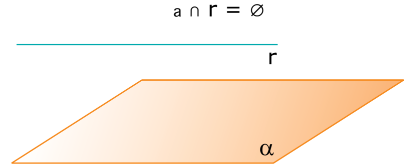
a ∩ r = P



Reta paralela ao plano

Uma reta e um plano são paralelos se, e somente se, não possuem pontos em comum.

a ∩ r = ∅



Posições relativas entre planos

Dois planos podem admitir as seguintes posições relativas:

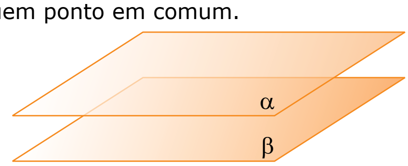
Paralelos coincidentes

Dois planos são coincidentes se, e somente se, possuem todos os pontos em comum.

$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

Paralelos distintos

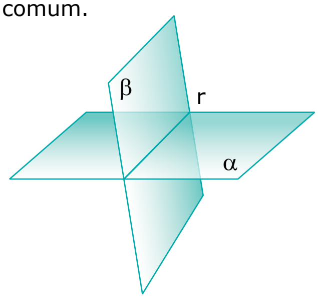
Dois planos são paralelos distintos se, e somente se, não possuem ponto em comum.



$\alpha \cap \beta = \varnothing$

Secantes

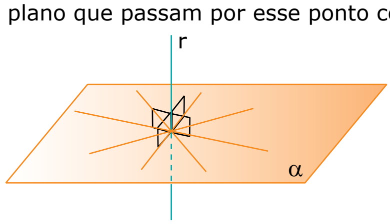
Dois planos são secantes se, e somente se, possuem uma única reta em comum.



$\alpha \cap \beta = r$

Reta perpendicular ao plano

Uma reta e um plano são perpendiculares se, e somente se, eles têm um ponto comum e a reta é perpendicular a todas as retas do plano que passam por esse ponto comum.



$r \perp \alpha$ ou $\alpha \perp r$

OBSERVAÇÃO

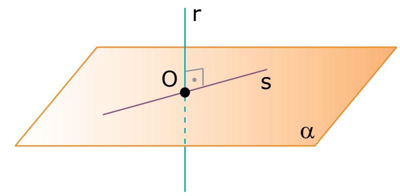
Uma reta e um plano são oblíquos se, e somente se, são concorrentes e não são perpendiculares.

Teorema

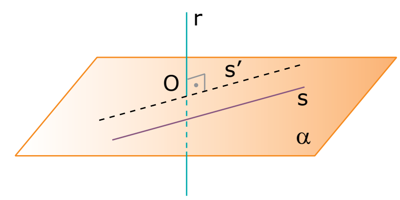
Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é perpendicular ou ortogonal a qualquer reta do plano.

Nas figuras seguintes, mostramos as duas possibilidades.

- **r** e **s** são perpendiculares.

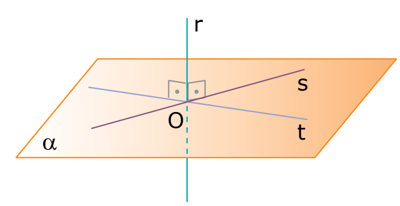


- **r** e **s** são ortogonais (reversas que formam 90°).



Teorema

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.



$r \perp \alpha$

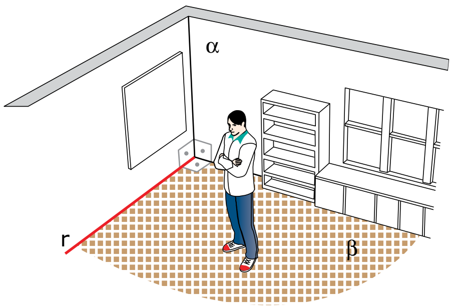
Observe, na figura a seguir, a reta que representa a interseção de duas paredes da sala. Ela é perpendicular ao chão, pois é perpendicular a duas retas concorrentes do chão.

Planos perpendiculares

Um plano α é perpendicular a um plano β se, e somente se, α contém uma reta perpendicular a β.

MATEMÁTICA

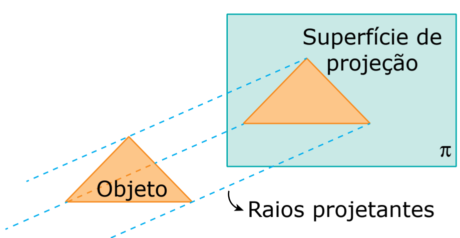
Observe, na figura a seguir, que o chão da sala (plano β) é perpendicular à parede (plano α), pois o chão possui uma reta perpendicular à parede (reta **r**).



$\beta \perp \alpha$, pois $r \perp \alpha$.

PROJEÇÕES

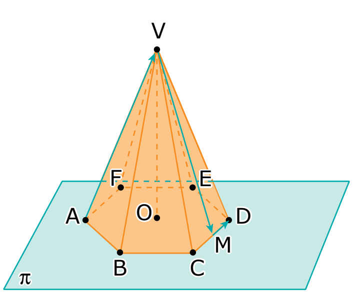
Trabalharemos aqui com projeções de um objeto sobre uma superfície plana, denominada **superfície de projeção**. A projeção é construída através de linhas imaginárias que tangenciam os vértices do objeto. As interseções dessas linhas imaginárias com o plano geram uma imagem correspondente à **projeção** desse objeto no plano. Tais linhas imaginárias são chamadas de **raios de projeção** ou **raios projetantes**.

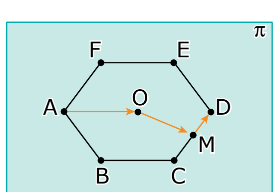


Sombras obtidas utilizando-se as propriedades das projeções

Outro exemplo de utilização do conceito de projeção é descrito a seguir:

Considere uma pirâmide hexagonal regular de base ABCDEF e vértice **V**, indicados na figura. O ponto **O** é o centro do hexágono regular da base e o ponto **M** é o ponto médio da aresta CD. Considere que um ponto se desloque pela pirâmide seguindo a trajetória AVMD.





Deslocamento visto de cima

Observe que, se visualizarmos a figura anterior (vista superior), teremos a projeção AOMD da trajetória desse ponto localizada no plano π, que contém a base da pirâmide.

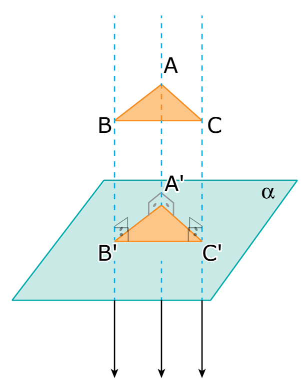
Classificação das projeções

As projeções construídas segundo o método descrito anteriormente são classificadas de acordo com o ângulo formado entre os raios projetantes e a superfície de projeção e de acordo com a posição relativa entre os raios projetantes.

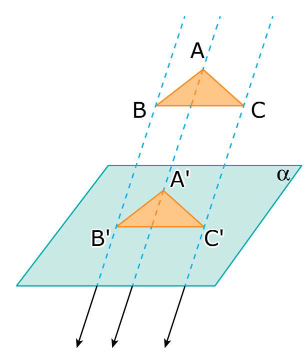
Quanto aos ângulos dos raios projetantes com a superfície de projeção

Projeção ortogonal e projeção oblíqua

Uma projeção é dita ortogonal quando os raios projetantes são perpendiculares à superfície de projeção. Por outro lado, é dita oblíqua quando os raios de projeção são oblíquos à superfície de projeção.



Projeção ortogonal

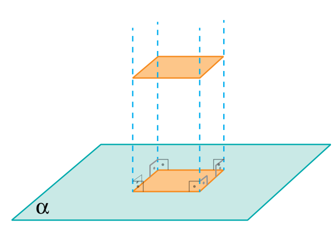


Projeção oblíqua

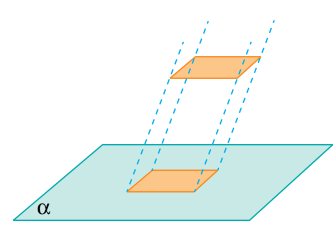
Quanto à posição relativa entre os raios projetantes

Projeção cilíndrica

Uma projeção é dita cilíndrica quando os raios projetantes são paralelos entre si. Toda projeção ortogonal é cilíndrica.



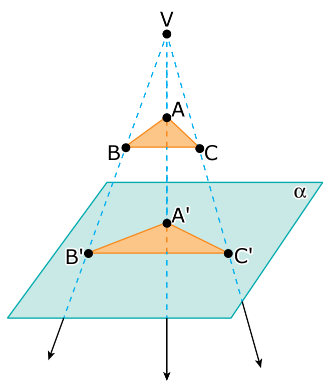
Projeção cilíndrica ortogonal



Projeção cilíndrica oblíqua

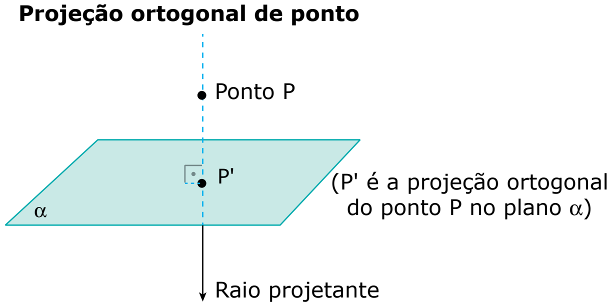
Projeção cônica

Uma projeção é dita cônica quando os raios projetantes se intersectam em um ponto **V**, denominado ponto de convergência. Em outros termos, os raios projetantes são concorrentes entre si em um único ponto. Nesse caso, as dimensões do objeto projetado não são conservadas na projeção. Toda projeção cônica é oblíqua.



Exemplos de projeções

Projeção ortogonal de ponto



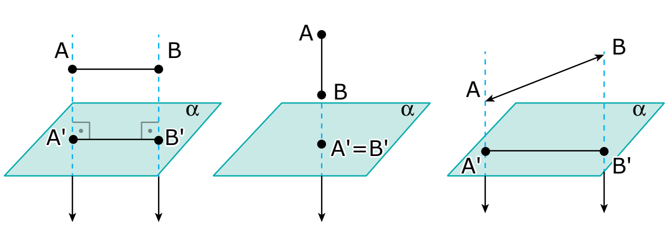
Projeção ortogonal de um segmento

Para um segmento AB:

i) **Paralelo ao plano de projeção:** a projeção ortogonal é formada pelo segmento A'B' horizontal, que tem a mesma medida do segmento original.

ii) **Perpendicular ao plano de projeção:** a projeção ortogonal é formada por um único ponto.

iii) **Oblíquo ao plano de projeção:** a projeção ortogonal é formada pelo segmento A'B' de medida menor que o segmento original.



(i) (ii) (iii)

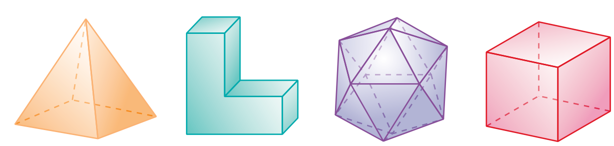
Projeção de uma região

A projeção de uma região ocorre a partir da projeção de todos os pontos da região.

Na Geometria Espacial, é comum o uso das projeções como artifícios na solução de problemas estabelecidos.

POLIEDROS

Poliedros são figuras espaciais fechadas formadas pela reunião de polígonos, como mostrado nos exemplos seguintes:

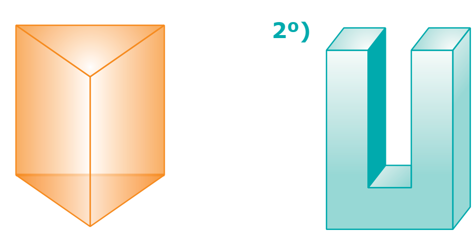


Cada polígono é denominado face do poliedro. Os lados dos polígonos são as arestas do poliedro e os vértices dos polígonos são os vértices do poliedro.

Um poliedro é chamado convexo se o plano que contém qualquer um dos seus polígonos deixa os demais polígonos no mesmo semiespaço.

Exemplos:

1º) **2º)**



Poliedro convexo — Poliedro não convexo

O segundo poliedro é não convexo, pois o plano que contém a face negritada, por exemplo, divide o poliedro em duas partes, uma para cada semiespaço.

Propriedade

A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é:

$$\boxed{S = (V - 2).360°}$$

Nela, **V** é o número de vértices desse poliedro.

Relação de Euler

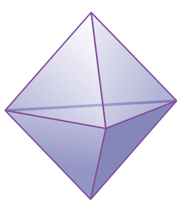
Para todo poliedro convexo, vale a relação

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

Nela, **V** é o número de vértices, **A** é o número de arestas, e **F** é o número de faces desse poliedro.

Exemplos:

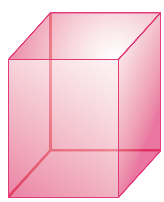
1º)



$V - A + F = 2$

$5 - 9 + 6 = 2$

2º)



$V - A + F = 2$

$8 - 12 + 6 = 2$

Poliedros de Platão

Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

i) Todas as faces têm o mesmo número (**n**) de arestas.

ii) De todos os vértices, parte o mesmo número (**m**) de arestas.

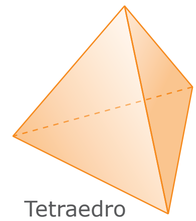
iii) Vale a Relação de Euler (V – A + F = 2).

Propriedade

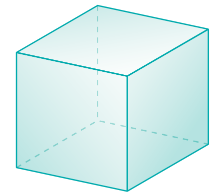
Existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão.

Nomes dos poliedros de Platão

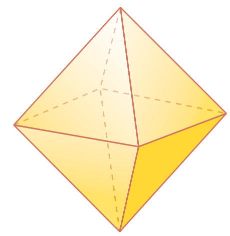
Nome	m	n	A	V	F
Tetraedro	3	3	6	4	4
Hexaedro	3	4	12	8	6
Octaedro	4	3	12	6	8
Dodecaedro	3	5	30	20	12
Icosaedro	5	3	30	12	20



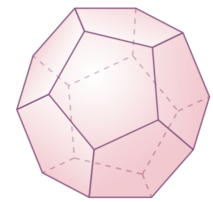
Tetraedro



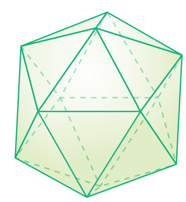
Hexaedro



Octaedro



Dodecaedro



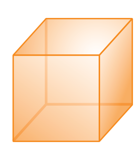
Icosaedro

OBSERVAÇÃO

Um poliedro é regular se ele é de Platão e possui todas as arestas congruentes. Todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro regular.

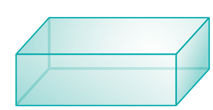
Exemplos:

1º)



Cubo: poliedro de Platão regular

2º)



Paralelepípedo: poliedro de Platão não regular

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUCPR) O tetra-hexaedro é um sólido convexo limitado por 4 faces triangulares e 6 hexagonais, todas regulares. O número de arestas e vértices desse sólido é:

A) A = 21 e V = 13.
B) A = 24 e V = 16.
C) A = 48 e V = 40.
D) A = 32 e V = 24.
E) A = 34 e V = 24.

Resolução:

Em 4 faces triangulares, temos 12 lados, e, em 6 faces hexagonais, temos 36 lados, totalizando 48 lados. Cada lado é comum a duas faces e, portanto, foi contado duas vezes.

Assim, o número de arestas **A** é: $2A = 48 \Rightarrow A = 24$

Aplicando a Relação de Euler a esse poliedro convexo, temos: $V + F = A + 2 \Rightarrow V + 10 = 24 + 2 \Rightarrow V = 16$

Logo, esse sólido possui 24 arestas e 16 vértices.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. G3E1 (Saeb) Uma caixa no formato de um poliedro precisa ser reforçada com 3 parafusos em cada vértice, um revestimento de metal nas suas 7 faces e uma aplicação de uma cola especial em todas as 15 arestas. A quantidade necessária de parafusos será igual a:

A) 72. C) 24. E) 10.
B) 66. D) 30.

02. (UECE–2016) Um poliedro convexo com 32 vértices possui apenas faces triangulares. O número de arestas deste poliedro é:

A) 100. B) 120. C) 90. D) 80.

03. HXAP (IFSP) A figura mostra uma peça feita em 1587 por Stefano Buonsignori, e está exposta no Museu Galileo, em Florença, na Itália. Esse instrumento tem a forma de um dodecaedro regular e, em cada uma de suas faces pentagonais, há a gravação de um tipo diferente de relógio.

Em 1758, o matemático Leonard Euler (1707-1783) descobriu o teorema conhecido por relação de Euler: em todo poliedro convexo com **V** vértices, **A** arestas e **F** faces, vale a relação V – A + F = 2. Ao se aplicar a relação de Euler no poliedro da figura, o número de arestas não visíveis é:

A) 10. C) 15. E) 18.
B) 12. D) 16.

04. 6LNI (Unit-AL–2017) O número de vértices de um poliedro convexo de sete faces, sendo duas pentagonais e cinco quadrangulares, é

A) 7. C) 14. E) 20.
B) 10. D) 17.

05. X01V (UEFS-BA)

Um tipo de bola de futebol é inspirado no icosaedro truncado, que é um poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais.

O número de vértices desse poliedro é

A) 40. C) 60. E) 76.
B) 48. D) 64.

06. I91F (UEPB) Sejam as afirmativas:

I. Duas retas que não se interceptam são paralelas entre si.

II. Duas retas que não se interceptam são reversas entre si.

III. Se uma reta é perpendicular a uma reta do plano, então ela é perpendicular a esse plano.

IV. Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.

Podemos concluir que

A) apenas I é verdadeira.
B) apenas II é verdadeira.
C) todas são falsas.
D) apenas III é verdadeira.
E) apenas IV é verdadeira.

07. (PUC RS) Um poliedro convexo possui duas faces pentagonais e cinco quadrangulares. O número de vértices deste poliedro é:

A) 4. C) 8. E) 10.
B) 6. D) 9.

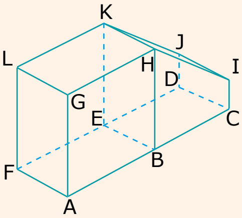
08. HXDR (UECE) Um poliedro convexo tem 32 faces, sendo 20 hexágonos e 12 pentágonos. O número de vértices deste polígono é:

A) 90. B) 72. C) 60. D) 56.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (EsPCEx-SP) O sólido geométrico a seguir é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma.



Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$, as retas $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$, e as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$ As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,

A) concorrentes; reversas; reversas.
B) reversas; reversas; paralelas.
C) concorrentes, reversas; paralelas.
D) reversas; concorrentes; reversas.
E) concorrentes; concorrentes; reversas.

02. TQXL (UEG-GO) Observe e classifique as afirmações a seguir como sendo verdadeiras ou falsas:

I. Se um plano intercepta dois outros planos paralelos, então as interseções são retas paralelas.

II. Se dois planos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.

III. Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

IV. Se dois planos são paralelos, uma reta de um deles pode ser reversa a uma reta do outro.

Marque a alternativa correta.

A) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
B) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
C) Apenas as afirmações I e IV são verdadeiras.
D) Apenas as afirmações II e IV são verdadeiras.
E) Apenas as afirmações III e IV são verdadeiras.

03. (CEFET-MG) No contexto da Geometria Espacial, afirma-se:

I. Se uma reta é paralela a um plano, então ela está contida nesse plano.

II. Duas retas sem ponto comum são paralelas ou reversas.

III. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela ao outro.

IV. Duas retas distintas paralelas a um plano são paralelas entre si.

São corretas apenas as afirmativas

A) I e II.
B) I e III.
C) II e III.
D) II e IV.
E) III e IV.

04. GPX5 (UEMA–2015) A bola de futebol evoluiu ao longo do tempo e, atualmente, é um icosaedro truncado, formado por 32 peças, denominadas de gomos e, geometricamente, de faces. Nessa bola, 12 faces são pentágonos regulares, e as outras, hexágonos, também regulares. Os lados dos pentágonos e dos hexágonos são iguais e costurados. Ao unirem-se os dois lados costurados das faces, formam-se as arestas. O encontro das arestas forma os vértices. Quando cheio, o poliedro é similar a uma esfera.

O número de arestas e o número de vértices existentes nessa bola de futebol são, respectivamente,

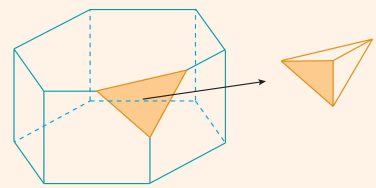
A) 80 e 60.
B) 80 e 50.
C) 70 e 40.
D) 90 e 60.
E) 90 e 50.

05. (Albert Einstein-SP–2017) Dado um tetraedro regular de aresta 6 cm, assinale os pontos que dividem cada aresta em três partes iguais. Corte o tetraedro pelos planos que passam pelos três pontos de divisão mais próximos de cada vértice e remova os pequenos tetraedros regulares que ficaram formados.

A soma dos comprimentos de todas as arestas do sólido resultante, em centímetros, é

A) 56.
B) 32.
C) 30.
D) 36.
E) 48.

06. ØKD4 (Insper-SP) De cada vértice de um prisma hexagonal regular foi retirado um tetraedro, como exemplificado para um dos vértices do prisma desenhado a seguir.



O plano que definiu cada corte feito para retirar os tetraedros passa pelos pontos médios das três arestas que concorrem num mesmo vértice do prisma. O número de faces do poliedro obtido depois de terem sido retirados todos os tetraedros é:

A) 24.
B) 20.
C) 18.
D) 16.
E) 12.

07. WRDC (Albert Einstein-SP–2017) Seja uma reta **r** e os planos secantes α e β, de modo que $\alpha \cap \beta = r$. Seja **s** uma reta paralela à reta **r**, de modo que $s \cap \beta = \varnothing$. Seja **t** uma reta secante ao plano β no ponto P, de modo que $P \in r$. De acordo com essas informações, necessariamente

A) $s \cap \alpha = s$.
B) $t \cap \beta = \varnothing$.
C) $P \notin \alpha$.
D) $r \cap t \neq \varnothing$.

08. (UFC-CE) Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices, então o número de faces triangulares é:

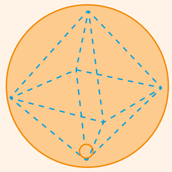
A) 12.
B) 11.
C) 10.
D) 9.
E) 8.

09. 3N7I (UEL-PR–2015) Originalmente os dados eram feitos de osso, marfim ou argila. Há evidências da existência deles no Paquistão, Afeganistão e noroeste da Índia, datando de 3500 a.C. Os dados cúbicos de argila continham de 1 a 6 pontos, dispostos de tal maneira que a soma dos pontos de cada par de faces opostos é sete.

Museu Arqueológico do Red Fort. Delhi, Índia (Adaptação).

Atualmente, além dos dados em forma de cubo (hexaedro), encontram-se dados em vários formatos, inclusive esféricos, como mostram as figuras a seguir:

Apesar do formato esférico, ao ser lançado, o dado mostra pontos de um a seis, como se fosse um dado cúbico. Isso acontece porque no interior da esfera existe uma cavidade em forma de octaedro, na qual existe um peso (um chumbinho) que se aloja em um dos vértices do octaedro.



Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a propriedade dos poliedros regulares que justifica o fato de a cavidade no interior da esfera ser octaédrica.

A) O número de vértices do octaedro é igual ao número de faces do hexaedro.

B) O número de vértices do octaedro é diferente do número de faces do hexaedro.

C) O número de arestas do octaedro é igual ao número de arestas do hexaedro.

D) O número de faces do octaedro é igual ao número de vértices do hexaedro.

E) O número de faces do octaedro é diferente do número de vértices do hexaedro.

10. UTQU (UERJ) Considere o icosaedro a seguir (Figura 1), construído em plástico inflável, cujos vértices e pontos médios de todas as arestas estão marcados.

A partir dos pontos médios, quatro triângulos equiláteros congruentes foram formados em cada face do icosaedro.

Admita que o icosaedro é inflado até que todos os pontos marcados fiquem sobre a superfície de uma esfera, e os lados dos triângulos tornem-se arcos de circunferências, como ilustrado na figura 2.

Observe agora que, substituindo-se esses arcos por segmentos de reta, obtém-se uma nova estrutura poliédrica de faces triangulares, denominada geodésica (Figura 3).

Figura 1

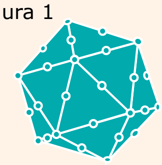


Figura 2

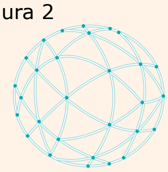
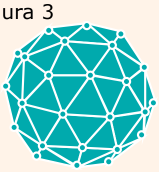


Figura 3



O número de arestas dessa estrutura é igual a:

A) 90. B) 120. C) 150. D) 180.

11. PØDL (FUVEST-SP) Dados um plano α e uma reta **r**, podemos afirmar que:

A) existe um plano β que contém **r** e é perpendicular a α.

B) existe um único plano β que contém **r** e é perpendicular a α.

C) existe um plano β que contém **r** e é paralelo a α.

D) existe um único plano β que contém **r** e é paralelo a α.

E) qualquer plano β que contém **r** intercepta o plano α.

12. ALE5 (EsPCEx-SP–2017) Considere dois planos α e β perpendiculares e três retas distintas **r**, **s** e **t** tais que $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $t = \alpha \cap \beta$.

Sobre essas retas e os planos é correto afirmar que

A) as retas **r** e **s** somente definirão um plano se forem concorrentes com **t** em um único ponto.

B) as retas **r** e **s** podem definir um plano paralelo à reta **t**.

C) as retas **r** e **s** são necessariamente concorrentes.

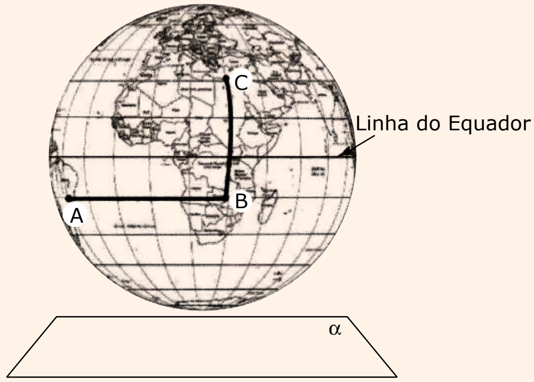
D) se **r** e **s** forem paralelas, então elas definem um plano perpendicular a α e β.

E) o plano definido por **r** e **t** é necessariamente paralelo a **s**.

SEÇÃO ENEM

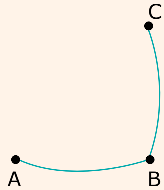
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. E230 (Enem–2016) A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos **A**, **B** e **C**. Os pontos **A** e **B** estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos **B** e **C**, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto **A** até **C**, pela superfície do globo, passando por **B**, de forma que o trecho de **A** até **B** se dê sobre o paraleloque passa por **A** e **B** e, o trecho de **B** até **C** se dê sobre o meridiano que passa por **B** e **C**. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.

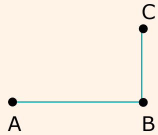


A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por

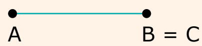
A)



B)



C)

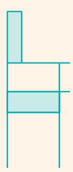


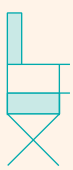
D)

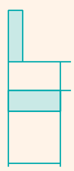
E)

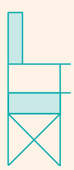
02. (Enem–2016) Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da figura para uma aula ao ar livre. A professora, ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guaradas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.

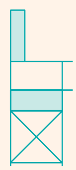
Qual é o esboço obtido pelos alunos?

A) 

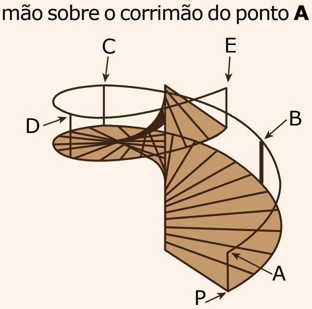
B) 

C) 

D) 

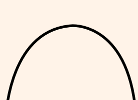
E) 

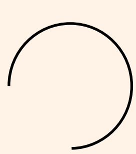
03. (Enem) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos **P**, **A** e **E** estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto **A** até o ponto **D**.

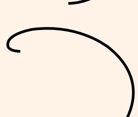


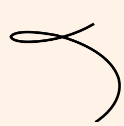
A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:

A) 

B) 

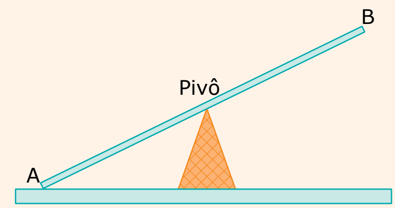
C) 

D) 

E) 

04. (Enem) Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos **A** e **B** são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos **A** e **B**, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. D	03. A	05. C	07. E
02. C	04. B	06. C	08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. E	04. D	07. D	10. B
02. C	05. D	08. E	11. A
03. C	06. B	09. A	12. B

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. E	02. C	03. C	04. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %