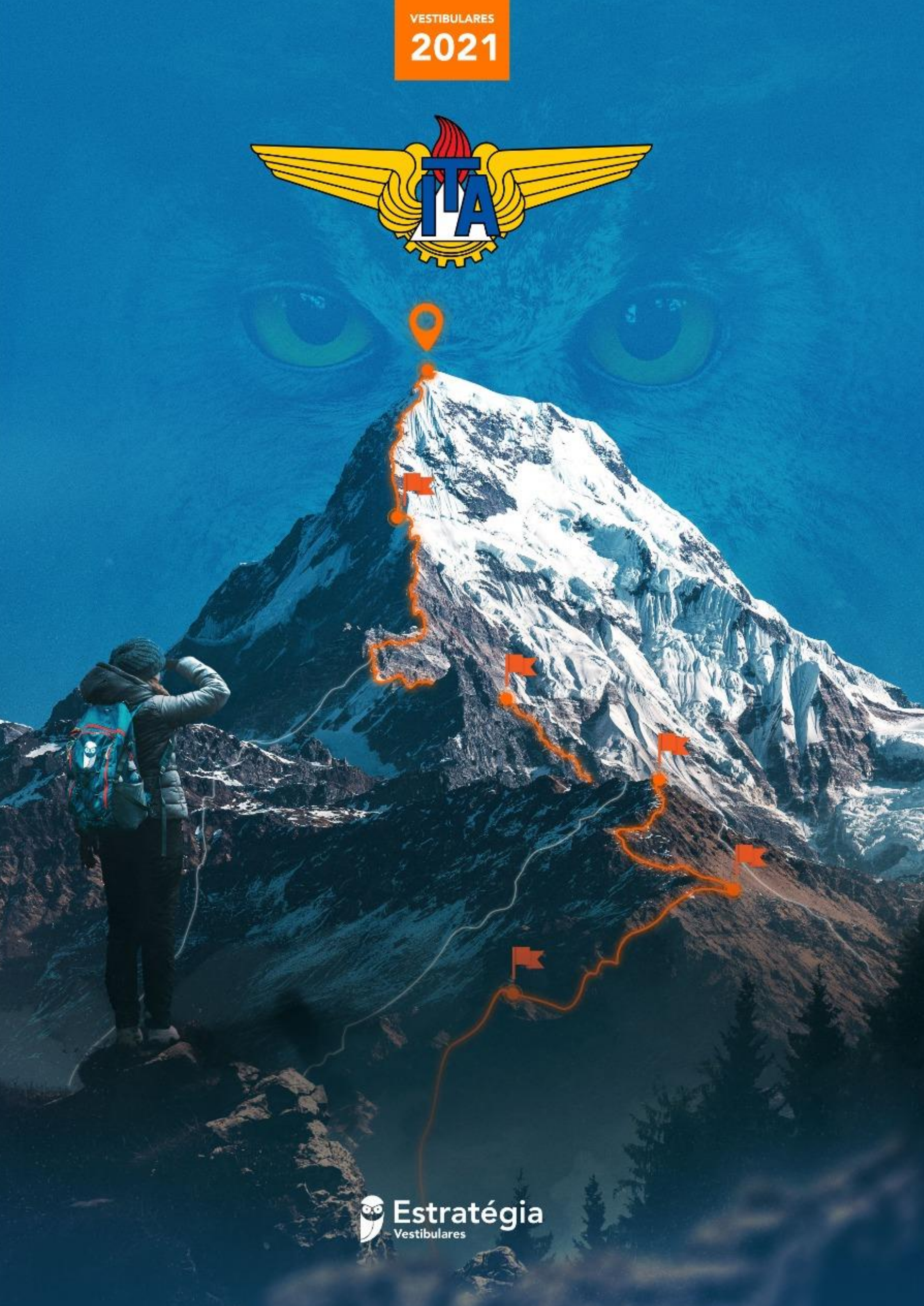
VESTIBULARES
2021
ITA
Estratégia
Vestibulares

Sumário

Apresentação

Olá, caros alunos!

Sejam bem-vindos à Trilha Estratégica, nosso Bizuário, para as provas do ITA!

Antes de darmos início, vou me apresentar:

Meu nome é Bruno Henrique Almeida da Cunha, sou aluno do ITA, aprovado na AFA, no IME e no ITA por dois anos consecutivos (2018 e 2019).

SOBRE O BIZUÁRIO: Trata-se de uma instrução sobre como otimizar o seu estudo nas disciplinas. Sabemos que, durante a preparação para o ITA, é comum o aluno se deparar com inúmeras listas com muitos exercícios e materiais enormes também. Nesse sentido, esse material foi feito no intuito de instruir o aluno a seguir um caminho mais otimizado para conseguir o conhecimento que ele precisa e acertar as questões da prova. Aqui usarei da minha experiência nos vestibulares ITA/IME, obtida com mais de 4 anos de preparação, para fazer um roteiro de aula em que você poderá acessar as suas dificuldades na matéria de forma rápida e objetiva.

Instruções Gerais

Geometria Analítica é uma das matérias mais importantes no vestibular. A frequência que ela cai no vestibular é certa de 10%. Então, com certeza, aparecerá no mínimo uma questão de geometria analítica no final do ano. Geralmente, as questões dessa disciplina envolvem muitas contas e, consequentemente, muita atenção para não errar "besteiras". Historicamente, o ITA cobra mais questões de retas e circunferências, sendo hipérbole a curva menos frequente na prova. Para as questões dessa matéria que caem no vestibular é muito importante que você faça organizadamente na folha de rascunho lá na hora, ainda mais quando você for fazer a representação geométrica da questão. Tendo isso em mente, vamos adiante.

Quanto à questão de como estudar o Bizuário e as aulas, lembre-se:

- para passar no ITA é preciso bastante disciplina, foco e paciência. O esperado é que o aluno estude entre 10 e 12 horas por dia, em média, principalmente no começo. Pode parecer muita coisa, até fora da realidade. Porém, considerando que o aluno tem afinidade pelas disciplinas de exatas e que ele encontre um ambiente propício para o estudo, é natural que, com o tempo, ele atinja níveis de estudo muito altos sem demandar grandes esforços para isso.

- “Sangue no olho” e “faca nos dentes” são expressões que indicam muito bem o comportamento de um vestibulando de ITA. Sabendo disso, vamos nessa!

Observação: Quando você for indicado a fazer uma questão e encontrar dificuldades, pule-a e continue a resolver outras questões. É interessante que você não olhe a resolução desse exercício logo de primeira, use as outras questões mais fáceis como subsídio para resolver as questões mais complexas. Se mesmo assim você continuar com esse problema, verifique a resolução. Seguir dessa forma irá ajudá-lo a absorver a matéria.

Análise da aula

Essa Disciplina no Vestibular

A matéria de geometria analítica I é sobre retas. Apesar de ser um tipo de curva entre as 5 estudadas na geometria analítica, ela é a mais importante, pois geralmente as questões do ITA ou são apenas de retas ou são de retas com outras curvas. Tenha em mente que existem diversas técnicas de resolução de questões de geometria analítica, algumas com mais contas, outras com menos. No entanto, você verá que a técnica mais eficiente de resolução de exercícios de GA no ITA é pela representação do problema da questão no plano cartesiano quando for interessante, e tentar buscar algum tipo de simetria, ângulo de $90°$ ou qualquer outro ângulo bonito, pois assim será possível usar geometria plana. E acreditem, na maioria das vezes, quando você faz uma questão de GA por plana, você economiza muitas contas e diminui muito suas chances de errar. Em geometria analítica no ITA tudo é conta. O pior problema possível é quando a banca dá uma questão com valores ruins de calcular e sem qualquer tipo de simetria na questão. Ai haja determinantes, equações do segundo grau e álgebra! Sabendo disso, vamos para a aula.

Roteiro da Aula

- A aula começa com o conceito de lugar geométrico. Muito importante. Basicamente quando a questão pede especificamente o lugar geométrico, o que mais cai nas provas são circunferências e elipse, que serão vistas na próxima aula. Mas nada impede que o LG seja uma reta.
- Se você já estudou geometria analítica ou já sabe o que é o plano cartesiano, pular o tópico **1.2**
- Em **1.3** temos a distância entre dois pontos. Sem muito segredo. Dados dois pontos, para achar a distância é só aplicar a fórmula.
- Em **1.4** (condição de alinhamento) também não tem segredo. Basta colocar os pontos na fileira, calcular e ver se dá zero. É importante ressaltar que alguns autores não usam a fileira para verificar se os pontos estão alinhados ou não, e sim um determinante 3x3. Mas, na prática, calcular por fileira acaba sendo a mesma coisa, porém mais rápido.
- **1.5** tem baixa incidência na prova. Vale a pena ler, mas não foque muito nesse tópico.
- **1.6** e **1.7** também não tem segredo, é saber que o ponto médio entre os pontos A e B é $M = \frac{A+B}{2}$ e o baricentro de um triângulo de vértices A, B e C é $G = \frac{A+B+C}{3}$.
- A partir do começo do capítulo **2** até **2.4** temos um apanhado geral sobre retas. Equação, representação gráfica e intersecção entre retas. É importante ressaltar que, dependendo do problema, é mais interessante expressar a reta de uma forma ou de outra. Para problemas envolvendo coeficiente angular, é mais interessante a equação reduzida da reta. Porém, para problemas envolvendo retas e algum tipo de análise de números primos ou análise da quantidade de inteiros que satisfazem determinada propriedade é melhor a forma segmentária. Para a equação geral da reta $ax + by + c = 0$, o coeficiente angular m é dado por $m = \frac{-a}{b}$.
- Em **2.5** temos os ângulos entre retas. Bem aplicação de fórmula também, apenas lembre-se que essa fórmula calcula sempre o menor ângulo. **2.5.1** fala sobre a condição de perpendicularidade, extremamente frequente na prova, assim como a condição de paralelismo (**2.5.2**).
- Em **2.6**, na prática, é melhor verificar se a equação de uma reta é múltipla da outra. Se for, serão retas coincidentes. Se não for, deve-se verificar se o sistema envolvendo as duas retas tem solução. Se não tiver, elas serão paralelas ou reversas, se tiver, serão concorrentes. Caso os coeficiente angulares forem iguais, as retas serão paralelas, se não, serão reversas.
- **2.7** (distância de ponto à reta) também, basicamente é decorar a fórmula e aprender como usar nos exercícios, sem segredo. Atenção para o caso em que a questão pede distância entre retas paralelas, pois nesse caso o numerador fica apenas com o módulo da diferença dos valores de c.

- Retas bissetrizes, da mesma forma que distância entre ponto e reta, é preciso decorar o método e aplicar nos exercícios. Assim você aprende de forma natural e decora mais facilmente. É interessante entender a demonstração do método usado para calcular as bissetrizes, é bem simples e vai ajudar a não se confundir. Cuidado para não expressar a reta errada, é bom fazer um teste antes e verificar se a bissetriz que você achou é aquela que a equação pede. Esse teste pode ser feito com substituição de valores e comparação com as retas que foram dadas inicialmente.
- Para área de triângulos, decore a fórmula. Para calcular área de polígonos basta dividir em vários triângulos e usar a fórmula para calcular a área de cada um desses triângulos e somar tudo no final.
- Para o tópico de aprofundamento que o professor passou no final do capítulo **2**, o que você deve saber é a equação do plano: $ax + by + cz + d$ e que uma reta no espaço é a intersecção entre dois planos.
- Chegamos ao fim da aula, está na hora de praticar com exercícios. Caso essa seja sua primeira vez estudando essa matéria, siga as questões na ordem de dificuldade. Caso não seja essa a situação, faça as questões, inclusive as fáceis, porém numa velocidade maior que a usual. Tente fazer de forma ligeira, sem pensar muito. Vá fazendo dessa forma aos poucos e veja sua margem de erro. Assim você simula mais ou menos a correria do vestibular. Lembre-se de fazer tudo o mais organizado possível. Você que já é mais experiente, pode seguir as questões na ordem que aparecerem.

Questões da Aula Separadas por Nível

Aqui separei as questões da aula por nível de dificuldade. Não se preocupe se você não conseguiu ou não entendeu uma questão difícil logo de primeira, a maior parte das questões de Geometria Analítica I que caem no ITA são fáceis e médias, mais fáceis do que médias. Porém, no longo prazo, é importante que você domine todas as questões da aula e as ideias que foram descritas ali, para que aprofunde seus conhecimentos na matéria e minimize, assim, as chances de cair alguma questão desse assunto que você não saiba resolver na hora da prova.

Não se preocupe caso você tenha encontrado dificuldade em alguma questão considerada fácil, pois você pode estar destreinado na matéria. Verá que, com um pouco mais de prática, você, provavelmente, vai concordar comigo!

Fáceis	Médias	Difíceis
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13 até 102, 118, 131	7, 10, 103, 104, 105, 106, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 129, 130	107, 132

Bizus

- Geometria analítica é uma matéria que, além de fornecer os meios próprios para que resolvamos as questões, permite a aplicação de outras ferramentas para auxiliar na resolução dos exercícios, as quais podem se mostrar muito úteis. As principais são vetores e números complexos, que não deixam de ser vetores.
- **Questão:** Seja um quadrado no plano cartesiano com vértices $A(1,1)$, $B(1,2)$ e $C(2,1)$. Ache o terceiro vértice do quadrado.

Solução:

Uma das formas de resolver essa questão é pegar o vetor $\overrightarrow{AC}$, rotacionar $45°$ no sentido anti-horário usando números complexos e depois multiplicar por $\sqrt{2}$, pois a diagonal do quadrado é $\sqrt{2}$ vezes maior que o lado. Fica assim:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,1) - (1,1) = (1,0)$$

No plano complexo, $\overrightarrow{AC} = 1 + 0i = 1$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = \sqrt{2}\overrightarrow{AC}cis(45°)$$

No plano complexo, $\overrightarrow{AD} = (x-1) + (y-1)i$

$$(x-1) + (y-1)i = cis(45°)\,\sqrt{2}(1+0i) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\sqrt{2} = 1 + i \Rightarrow (x,y) = (2,2)$$

$$D = (2,2)$$

Essa técnica é muito útil também para achar o terceiro vértice de um triângulo equilátero dados os dois outros vértices!

- **Questão:** Seja um triângulo de vértices $A(2,3)$, $B(3,4)$ e $C(0,5)$. Encontre o ortocentro desse triângulo.

Solução: Uma forma de encontrar o ortocentro desse triângulo é fazer o produto escalar do vetor $\overrightarrow{CH}$ com o vetor $\overrightarrow{AB}$ e depois o produto escalar do vetor $\overrightarrow{BH}$ com o vetor $\overrightarrow{AC}$. A ideia aqui é aproveitar o fato de que o ortocentro está na intersecção das altura e por isso o produto escalar de $\overrightarrow{CH}$ com $\overrightarrow{AB}$ é zero, assim como o de $\overrightarrow{BH}$ com $\overrightarrow{AC}$. Dessa forma, temos que:

$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0\ (I)\ e\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0\ (II)$$

$$\big((x-0),(y-5)\big).(1,1) = 0 \quad (I)$$

$$\big((x-3),(y-4)\big).(-2,2) = 0 \quad (II)$$

Fazendo os produtos escalares, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ -x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos que $H = (2,3)$.

- E quando mistura geometria plana com geometria analítica? O maior bizu de todos para a prova do ITA é analisar como se fosse geometria plana o máximo que der.
- Aqui vai um bizu importante. O ITA costuma colocar questões que envolvem passar uma reta por uma determinada área e dizer que essa reta divide a área na razão 1:1 ou qualquer outra razão. E a partir daí a banca pergunta coisas como algum ponto de interseção. É interessante que você divida a figura a ser cortada no lugar certo. Caso contrário você pode chegar em uma incoerência, como na questão 108. Então tome cuidado com isso, a divisão de área tem que fazer sentido visualmente.
- GA é uma matéria de muitas contas. Logo, não tenha medo de fazer contas na hora da prova. Porém, na prova do ITA, suspeite se der uma quantidade muito exorbitante de contas, pois isso pode ser um indicador de que a sua solução está errada.

- Também é possível calcular o simétrico de um ponto em relação a uma reta usando vetores. Para isso, basta fazer um produto escalar do vetor AH, em que A é o ponto a ser refletido e H o pé da altura baixada de A na reta, com um vetor qualquer da reta. Achando H, usa-se a fórmula $B = 2H - A$.
- A solução da aula para a questão 112 é muito boa. Analisar a área do problema como a área complementar do retângulo sem os três triângulos. Uma visão mais de geometria plana mesmo. O aluno poderia tentar fazer por GA, o que implicaria em 3 ou 4 determinantes e mais um monte de contas!
- A questão 119 é, de novo, uma questão para calcular quadriláteros que, desenhando a situação no plano cartesiano, percebe-se que é melhor calcular a área através da área de dois triângulos do que através dos vértices do quadrilátero e do cálculo de área por determinante.
- Para achar a reta perpendicular a uma reta dada, basta trocar os coeficientes de x e de y e trocar o sinal de um deles, depois substituir valores para achar o valor de c'. Fica assim.

  Encontre a reta perpendicular a $ax + by + c = 0$.

  É dada por: $-bx + ay + c' = 0$. Após isso, basta jogar qualquer ponto pertencente à reta perpendicular para achar o valor de c' ☺