1. Análise combinatória

INTRODUÇÃO E CONCEITO:

Análise combinatória é a parte da matemática que estuda os diversos tipos de ***agrupamentos*** que podemos formar com os elementos de um conjunto, e também, métodos de contagem indiretos. De forma bem sucinta, podemos dizer que é o número de maneiras distintas (nº de possibilidades) pelas quais um evento poderá se realizar.

Por exemplo, podemos analisar os elementos de um conjunto qualquer, podemos agrupá-los de dois em dois, de três em três, de vinte em vinte, alternar sua ordem de todas as maneiras possíveis, levar em consideração sua ordem ou não, atribuir alguma restrição específica para um ou mais elementos do conjunto, etc. De imediato, pode-se pensar que resolver os exemplos dados, bem como muitos outros, é uma tarefa fácil e ligeira. Todavia, sem os conhecimentos das propriedades desses agrupamentos ou das fórmulas desenvolvidas para estes fins, você verá que, em muitos casos, é humanamente impossível executar tais procedimentos.

A contagem das várias possibilidades de um evento se realizar, pode ser feita através de 4 técnicas muito conhecidas: O PFC (Princípio Fundamental da Contagem, os Arranjos, as Permutações e as Combinações).

Com esta noção inicial de análise combinatória, você já pode notar a importância do estudo dos ***conjuntos*** neste tópico. De fato, no decorrer de nosso estudo, trabalharemos com vários tipos de conjuntos: numéricos, não numéricos, finitos e infinitos assim como suas propriedades. Portanto, faça uma boa revisão de conjuntos!

É importante você notar que, somente em alguns poucos casos bem salientados, estaremos interessados em “***quais***” agrupamentos podemos formar. Na maioria esmagadora das vezes o que estudaremos em análise combinatória é o total desses agrupamentos, ou seja, seu número, sua quantidade.

A análise combinatória tem seu alicerce fundamentado em apenas um princípio que é, como veremos a seguir, muitíssimo importante: o ***Princípio Fundamental da Contagem*** ou ***Princípio Multiplicativo*** **(P.F.C.)**.

Vamos a alguns exemplos de casos estudados em Análise Combinatória:

Exemplo 1: Jogar uma moeda para cima 3 vezes. Quais as possíveis sequências de possibilidades?

Através do Diagrama Sequência ou do Diagrama da Árvore, chegaremos às seguintes sequências:

(K, K, K); (K, K, C); (K, C, K); (K, C, C);(C, K, K); (C, K, C); (C, C, C); (C, C, K).

Percebemos um montante de 8 possibilidades de sequências para o evento citado. Poderíamos chegar nesta mesma quantidade pelo PFC, onde bastaria multiplicar o número de possibilidades em cada etapa do evento principal: 2 . 2 . 2 = 8 possibilidades de sequência.

Yves 1: **CUIDADO!!!** Sequências de Tamanhos Diferentes. Devemos observar que em alguns casos, não poderemos utilizar o princípio fundamental da contagem, sob determinadas restrições impostas pelas questões. Por exemplo: Quais as sequências de resultados possíveis, quando uma pessoa lança uma moeda sucessivamente até que ocorram 2 caras consecutivas ou 4 lançamentos feitos, o que ocorrer primeiro. Após montar o Diagrama da Árvore percebemos uma coisa curiosa, além do exemplo não obedecer ao PFC, as sequências apresentam tamanhos diferentes. Como são 4 lançamentos, deveríamos esperar 16 possibilidades de sequência, no entanto fazendo uma a uma, percebemos apenas 12 possibilidades, e 2 delas (em negrito) são de tamanhos distintos:

(K, K); (K, C, K, K); (K, C, K, C); (K, C, C, K); (K, C, C, C); **(C, K, K)**; (C, K, C, K); (C, K, C, C); (C, C, K, K); (C, C, K, C); (C, C, C, K); (C, C, C, C).

Exemplo 2: Quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar com os algarismos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?

Neste exemplo, percebemos facilmente que a **ORDEM É IMPORTANTE**, pois o número "12" é diferente do número "21", logo, estamos diante de um caso de ***Arranjos***, e o número de possibilidades será igual a 81! Resolveremos a questão em momento oportuno. Queríamos apenas salientar a questão da importância da **ORDEM**.

Exemplo 3: Quantas duplas de algarismos distintos podemos formar com os algarismos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?

Neste exemplo, percebemos facilmente que a **ORDEM NÃO** é importante, pois a dupla "1 e 2" é igual à dupla "2 e 1", logo, estamos diante de um caso de ***Combinações***, e o número de possibilidades será igual a 45! Resolveremos a questão em momento oportuno. Queríamos apenas salientar a questão da **ORDEM NÃO** ser importante!

☞ ESTUDO ESPECÍFICO DAS TÉCNICAS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA:

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (P.F.C.):

Antes de enunciarmos este princípio, preste bem atenção no tipo de situação em que você deverá usá-lo. Suponha que você irá realizar uma ação qualquer (qualquer coisa). Suponha também que há efetivamente possibilidades distintas para o seu propósito. O princípio fundamental se faz útil lhe mostrando o total de maneiras de concluir sua ação. Para isso você deve decompor a ação em *etapas independentes*, verificar *quantas* são as possibilidades *de cada etapa* e, em seguida, *multiplicar* os números de possibilidades de todas as etapas.

Seja uma experiência que pode ser dividida em "**n**" etapas sucessivas e independentes entre si ($\mathbf{E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n}$), sendo $\mathbf{N_1, N_2, N_3, \ldots, N_n}$ os números de possibilidades de cada etapa, respectivamente. Então o total de modos de se realizar esta experiência é $\mathbf{N_1 . N_2 . N_3 . \ldots . N_n}$. Logo, pelo P.F.C., temos:

$$\boxed{\textbf{PFC} = N_1 . N_2 . N_3 . \ldots . N_n}$$

O princípio fundamental da contagem é necessário em análise combinatória, mas não é suficiente. Há certos tipos de problemas nos quais a simples aplicação direta deste princípio ou é pouco prática (muito demorada e complicada) ou é impossível. Tais problemas exigem uma abordagem mais específica. É aí que entram em ação as fórmulas!

Entretanto, como dissemos antes, o princípio fundamental é a base de tudo em análise combinatória, por isso todas as fórmulas que veremos têm suas deduções feitas a partir deste princípio. As fórmulas que estudaremos fazem referência aos três tipos mais importantes de agrupamentos: Arranjos, Permutações e Combinações. Estudaremos com detalhes Arranjos Simples, Arranjos com Repetição, Permutações Simples, Permutações com Repetição, Permutações Circulares, Combinações Simples e Combinações com elementos repetidos.

Exemplo 1: Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}?

Como temos 10 possibilidades de escolha e podemos ter elementos repetidos, basta fazermos: 9 . 10 . 10 = 900 números.

Exemplo 2: Quantas senhas de um programa de computador podemos formar utilizando a seguinte sequência de caracteres LLNNN?

Como temos 26 possibilidades de escolha para cada letra e 10 possibilidades de escolha para cada algarismo e também não temos restrição quanto a repetição de elementos, basta fazermos: 26 . 26 . 10 . 10 . 10 = $26^2 . 10^3$ = 676.000 possibilidades.

ARRANJOS SIMPLES:

São *agrupamentos* que podemos formar com os elementos de um conjunto levando em consideração sua ordem e sua natureza sem repetirmos nenhum deles. Portanto, dois arranjos quaisquer se distinguem pela ordem ou pela natureza de seus elementos. Note que a ordem e a natureza **SÃO** importantes!

$$\mathbf{A_{n,p}} = n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Lê-se: arranjos simples de ***n*** elementos tomados ***p*** a ***p***.

Exemplo 1: Um baralho apresenta 52 cartas. Se tirarmos 3 cartas de forma sucessiva e sem reposição, de quantas maneiras distintas podemos retirá-las?

Poderíamos resolver esta questão pelo PFC, onde a cada retirada de uma carta, diminui o montante de cartas a serem novamente escolhidas. Logo, bastaria fazermos: 52.51.50 = 132.600 maneiras.

Exemplo 2: De quantas maneiras poderíamos preencher 3 lugares disponíveis em uma fila dispondo de 7 pessoas?

Poderíamos resolver esta questão pelo PFC, onde a cada preenchimento de um lugar disponível com uma pessoa, diminui o número de pessoas disponíveis para a próxima escolha. Logo, bastaria fazermos: 7.6.5 = 210 maneiras.

Exemplo 3: Quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar com os algarismos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?

Chegou o momento de solucionarmos este exemplo que foi comentado no início do material. Poderíamos resolver a questão por PFC ou pela aplicação da fórmula de arranjos:

- Pelo PFC, teríamos: 10 . 9 = 90 números.

- Pela fórmula, teríamos:

$$A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10.9.\cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90 \text{ números}$$

ARRANJOS COM REPETIÇÃO:

É quando se permite a repetição de elementos no arranjo. Mas lembre-se que a ordem e a natureza devem ser consideradas. Eis a formula:

$$\boxed{(\mathbf{AR})_{\mathbf{n,p}} = \mathrm{n}^{\mathrm{p}}}$$

Exemplo 1: Quantos números de 3 algarismos conseguimos formar com os seguintes algarismos {1, 2, 3, 4, 5}?

Poderíamos resolver esta questão pelo PFC, onde a cada escolha de um algarismo, temos sempre a mesma quantidade para fazer a nova escolha, visto que os elementos podem se repetir. Logo, bastaria fazermos: 5 . 5 . 5 = 125 algarismos. Aplicando a fórmula, teríamos: $(AR)_{5,3} = 5^3 = 125$ algarismos.

Exemplo 2: Considerando uma urna com bolas de mesmo material e cores diferentes, deseja-se retirar 2 bolas para observarmos a cor. Se a retirada for feita com reposição, de quantas maneiras poderíamos observar a sequência de cores, considerando que a urna apresenta 10 bolas?

Poderíamos resolver esta questão pelo PFC, onde a cada escolha de uma bola, temos sempre a mesma quantidade para fazer a nova escolha, visto que os elementos podem se repetir. Logo, bastaria fazermos: 10 . 10 = 100 maneiras. Aplicando a fórmula, teríamos: $(AR)_{10,2} = 10^2 = 100$ maneiras.

PERMUTAÇÕES SIMPLES:

São *agrupamentos* que podemos formar com os elementos de um conjunto de modo que todos os elementos deste conjunto *apenas* trocam de lugar entre si. Portanto o que distingue duas permutações é apenas a ordem dos elementos. Note que a ordem é importante! Os elementos devem ser distintos, e não é permitida a repetição.

$$\boxed{\mathbf{P_n} = \mathrm{n}!}$$

Obs.: Permutações simples são na realidade arranjos simples quando “n” é igual a “p”.

Exemplo 1: De quantas maneiras 3 crianças conseguem ocupar 3 cadeiras?

Esta questão pode ser feita de 3 maneiras distintas.

☞ **1ª Maneira:** Descrevendo todas as possibilidades:

A – B – C   B – C – A
A – C – B   C – A – B
B – A – C   C – B – A

2ª Maneira: Pelo PFC: 3 . 2 . 1 = 6 maneiras.

3ª Maneira: Pela fórmula: $\mathbf{P_n = n!}$ $\therefore P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$ maneiras.

Exemplo 2: De quantas maneiras 3 pessoas podem sentar-se em 4 poltronas no cinema?

Esta questão pode ser feita de forma mais prática, de 2 maneiras distintas.

1ª Maneira: Pelo PFC: 4.3.2.1 = 24 maneiras.

2ª Maneira: Pela fórmula: $\mathbf{P_n = n!}$ $\therefore P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$ maneiras.

Exemplo 3: De quantas maneiras podemos organizar 5 quadros de 2 pintores, enfileirados numa parede? Deve-se levar em consideração que Antônio tem 2 quadros e Beto, 3 quadros. Os quadros de um mesmo pintor tem de permanecer juntos.

Neste exemplo devemos perceber que temos várias permutações em um mesmo evento. O resultado final será igual ao produto das permutações das etapas. Temos a permutação entre os 2 quadros de Antônio (P_2), temos a permutação dos 3 quadros do Beto (P_3) e temos a permutação entre os 2 quadros de Antônio e os 3 quadros de Beto (P_2), logo nosso cálculo ficará: $P = P_2 . P_3 . P_2 = 2! . 3! . 2! = 2 . 1 . 3 . 2 . 1 . 2 . 1 = 24$ maneiras.

Exemplo 4: Quantos anagramas conseguimos formar com a palavra **AMO?**

$P_3 = 3! = 3 . 2 . 1 = 6$ anagramas.

PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO:

É quando se permite a repetição de elementos no arranjo. Mas lembre-se de que todos os elementos devem apenas trocar de lugar entre si. Eis a fórmula:

$$\boxed{\mathbf{P_n^{\alpha,\beta,\gamma}} = \frac{n!}{\alpha!\ .\ \beta!\ .\ \gamma!\ .\ \ldots}}$$

Exemplo 1: De quantas maneiras podemos organizar 5 livros em uma estante sendo 2 livros iguais?

Faremos a permutação de 5 elementos, sendo que 1 deles se repete 2 vezes, então teremos:

$$\mathbf{P_5^2} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60 \text{ maneiras}$$

Exemplo 2: De quantas maneiras 3 pessoas poderiam ocupar 6 cadeiras em um cinema?

Faremos a permutação de 6 elementos, onde cada cadeira vazia conta como elemento e eles ainda são repetidos. Então teremos:

$$\mathbf{P_6^3} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120 \text{ maneiras}$$

Exemplo 3: Quantos anagramas conseguimos formar com a palavra **JEFFERSSON?**

Temos uma palavra com 10 letras e as letras **"E", "F" e "S"** se repetem 2 vezes cada. Então teremos:

$$\mathbf{P_{10}^{2,2,2}} = \frac{10!}{2!\ .\ 2!\ .\ 2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}.2.1.2.1}$$

$$\mathbf{P_{10}^{2,2,2}} = 453.600 \text{ anagramas}$$

PERMUTAÇÕES CIRCULARES:

Dá-se esse nome às permutações em que os elementos estão dispostos de maneira circular ou aproximadamente circular. Lembre-se novamente que, sendo uma permutação, os elementos envolvidos apenas trocarão de lugar entre si.

Eis a fórmula:

$$\boxed{(\mathbf{PC})_{\mathbf{n}} = (n-1)!}$$

Lê-se: Permutações circulares de n elementos.

Obs.: Não abordaremos *Permutações Circulares com Elementos Repetidos* neste material.

Exemplo 1: De quantas maneiras 6 pessoas poderiam se organizar a redor de uma mesa circular?

Faremos a permutação de 6 elementos diretamente pela fórmula:
$(PC)_6 = (6 – 1)! = 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$ maneiras.

Exemplo 2: Quantas são as maneiras possíveis de organizar 4 crianças ao redor de uma mesa quadrada de bordas iguais?

Faremos a permutação de 4 elementos diretamente pela fórmula:
$(PC)_4 = (4 – 1)! = 3! = 3 . 2 . 1 = 6$ maneiras.

COMBINAÇÕES SIMPLES:

Chamamos de combinações simples os agrupamentos que podemos formar com os elementos de um conjunto levando em consideração apenas sua natureza *sem repetir elemento algum*. Portanto, duas combinações diferem entre si apenas pela natureza e não pela ordem de seus elementos. Então agora, a **ORDEM NÃO** é importante!

$$\boxed{C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Lê-se: Combinações simples de ***n*** elementos tomados ***p*** a ***p***.

Exemplo 1: Quantas duplas de algarismos distintos podemos formar com os algarismos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?

Este exemplo foi comentado no início da nossa exposição e agora chegou o momento oportuno de solucioná-lo. Faremos a combinação de 10 elementos tomados 2 a 2, pela fórmula da combinação:

$$\mathbf{C_{10,2}} = \binom{\mathbf{10}}{\mathbf{2}} = \frac{10!}{2!\ .\ (10-2)!} = \frac{10!}{2!\ .\ 8!}$$

$$\mathbf{C_{5,2}} = \frac{10.9.\cancel{8!}}{2.1\ .\cancel{8!}} = 45 \text{ duplas}$$

Exemplo 2: Quantas vitaminas distintas são possíveis preparar com as seguintes frutas {banana, mamão, abacate, maçã, melão e uva}, levando-se em consideração que a vitamina deva apresentar 3 frutas?

$$\mathbf{C_{6,3}} = \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{3}} = \frac{6!}{3!\ .\ (6-3)!} = \frac{6!}{3!\ .\ 3!}$$

$$\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{3}} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{3.2.1.\cancel{3!}} = 20 \text{ vitaminas}$$

COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO:

É quando se permite que todos os n elementos possam aparecer repetidos em cada agrupamento até p vezes. Lembre-se novamente que, sendo uma combinação, apenas a natureza dos elementos interessa!
Eis a fórmula:

$$\boxed{(\mathbf{CR})_{\mathbf{n,p}} = C_{n+p-1,p} = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}}$$

Exemplo 1: Quantas duplas podemos formar com o seguinte conjunto S = {A, B, C, D}?

Aplicaremos a fórmula da combinação com repetição para **n=4** e **p=2**:

$$(\boldsymbol{CR})_{\mathbf{4,2}} = \mathrm{C}_{4+2-1;2} = \mathrm{C}_{5,2} = \frac{5!}{2!\ .\ (5-2)!}$$
$$\boldsymbol{C}_{\mathbf{5,2}} = \frac{5!}{2!\,.\,3!} = \frac{5.4.\cancel{3!}}{2.1.\cancel{3!}} = 10 \text{ duplas}$$

Exemplo 2: De quantas maneiras poderíamos comprar 3 guloseimas num mercadinho que disponibilizasse os seguintes produtos {chiclete, bala, pirulito, pipoca, rosquinha}?

Aplicaremos a fórmula da combinação com repetição para **n=5** e **p=3**:

$$(\mathbf{CR})_{\mathbf{5,3}} = \mathrm{C}_{5+3-1;3} = \mathrm{C}_{7,3} = \frac{7!}{3!\ .\ (7-3)!}$$
$$\boldsymbol{C}_{\mathbf{7,3}} = \frac{7!}{3!\,.\,4!} = \frac{7.6.5.\cancel{4!}}{3.2.1.\cancel{4!}} = 35 \text{ maneiras}$$

T.01 (EFOMM) Um decorador contemporâneo vai usar quatro “objetos” perfilados lado a lado como decoração de um ambiente. Ele dispõe de 4 copos transparentes azuis, 4 copos transparentes vermelhos, duas bolas amarelas e 3 bolas verdes. Cada “objeto” da decoração pode ser um copo vazio ou com 1 bola dentro. Considerando que a cor altera a opção do “objeto”, quantas maneiras distintas há de perfilar esses 4 “objetos”, levando-se em conta que a posição em que ele se encontra altera a decoração?

a) 1296
b) 1248
c) 1152
d) 1136
e) 1008

T.02 (EFOMM) Quantos anagramas é possível formar com a palavra **CARAVELAS**, não havendo duas vogais consecutivas e nem duas consoantes consecutivas?

a) 24
b) 120
c) 480
d) 1920
e) 3840

T.03 (EFOMM) A quantidade de anagramas da palavra MERCANTE que não possui vogais juntas é

a) 40320.
b) 38160.
c) 37920.
d) 7200.
e) 3600.

T.04 (EFOMM) Uma turma de alunos do 1º ano da EFOMM tem aulas às segundas, quartas e sextas, de 8h40 às 10h20 e de 10h30 às 12h. As matérias são Arquitetura Naval, Inglês e Cálculo, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos pode ser feito o horário dessa turma?

a) 9.
b) 18.
c) 36.
d) 48.
e) 54.

T.05 (EFOMM) O código Morse, desenvolvido por Samuel Morse, em 1835, é um sistema de representação que utiliza letras, números e sinais de pontuação através de um sinal codificado intermitentemente por pulsos elétricos, perturbações sonoras, sinais visuais ou sinais de rádio. Sabendo-se que um código semelhante ao código Morse trabalha com duas letras pré-estabelecidas, ponto e traço, e codifica com palavras de 1 a 4 letras, o número de palavras criadas é:

a) 10.
b) 15.
c) 20.
d) 25.
e) 30.

T.06 (EFOMM) Uma pessoa fará uma viagem e em cada uma de suas duas malas colocou um cadeado contendo um segredo formado por cinco dígitos. Cada dígito é escolhido dentre os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Na primeira mala, o segredo do cadeado começa e termina com dígito par e os demais são dígitos consecutivos em ordem crescente. Na segunda mala, o segredo do cadeado termina em dígito ímpar e apenas o 1º e o 2º dígitos são iguais entre si. Dessa maneira, se ela esquecer:

a) o segredo do cadeado da sua primeira mala deverá fazer no máximo $5^2 \times 8^3$ tentativas para abri-lo.

b) o segredo do cadeado da segunda mala, o número máximo de tentativas para abri-lo será de 1.890

c) apenas os três dígitos consecutivos em ordem crescente do cadeado da primeira mala, ela conseguirá abri-lo com, no máximo, 8 tentativas.

d) apenas os dois primeiros dígitos do cadeado da segunda mala, deverá tentar no máximo 10 vezes para abri-lo.

2. Probabilidade

Introdução e Conceito:

Probabilidade é a parte da matemática que estuda quantitativamente as chances ou possibilidades de algo ocorrer. Esta parte da matemática é a responsável por quantificar a possibilidade de realização de um evento aleatório, ou seja, é a quantificação de uma incerteza. Para compreendermos de forma plausível o conteúdo de Probabilidade, se faz necessário conhecer alguns conceitos importantes que nortearão todo o conteúdo. Esses conceitos são: experimentos, espaço amostral e eventos.

Experimento:

Chamamos de ***experimento***, em probabilidade, tudo (qualquer coisa) que pode ser feito ou realizado. Os experimentos podem ser de dois tipos: ***experimentos determinísticos*** e ***experimentos aleatórios***.

• ***Experimentos determinísticos*** são aqueles cujos resultados são previsíveis, isto é, podemos saber seus resultados mesmo antes de realizá-los.

Exemplo: De quantas maneiras poderíamos escolher 3 bolas pretas e 2 bolas vermelhas em uma urna?

• ***Experimentos aleatórios*** não podem ter seus resultados previstos antes de sua realização, isto é, mesmo se repetirmos esses experimentos nas mesmas condições, os resultados podem ser distintos. As leis que regem os experimentos aleatórios são as leis do acaso.

Exemplo: Retirar uma bola de uma urna contendo 3 bolas pretas e 2 bolas vermelhas e observar a sua cor.

Espaço Amostral:

É o conjunto cujos elementos são todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Um espaço amostral pode ser de dois tipos: ***equiprovável*** ou ***não-equiprovável***, ambos podendo ser finitos ou infinitos. Não abordaremos, neste material, problemas que envolvam espaço amostral infinito.
• ***Espaço amostral equiprovável*** é aquele no qual todos os seus elementos, individualmente, têm a mesma probabilidade de ocorrência.

Exemplo 1: lançar um dado para cima e observar o número da face voltada para cima. (Espaço amostral equiprovável finito).

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \therefore n(U) = 6$

Exemplo 2: Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima. (Espaço amostral equiprovável finito).

$U = \{K, C\} \therefore K = \text{cara}; C = \text{coroa} \therefore n(U) = 2$

Exemplo 3: Lançar uma moeda até sair a face "cara" voltada para cima. Observaremos em qual lançamento isto ocorrerá. (Espaço amostral equiprovável infinito).

U = {1, 2, 3, 4, ...}

• ***Espaço amostral não-equiprovável*** é aquele no qual nem todos os elementos, individualmente, têm a mesma probabilidade de ocorrência. Alguns têm mais ou menos probabilidade de ocorrer que outros.

Exemplo 1: lançar um dado para cima e observar o número da face voltada para cima. Sabe-se que a probabilidade de ocorrência da face 6 é o dobro da face 1 (Espaço amostral não – equiprovável finito).

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\therefore$ n(U) = 6
P(6) = 2.P(1)

EVENTO:

Chamamos de *evento*, em probabilidade, qualquer subconjunto de um espaço amostral. Naturalmente um evento pode ser um conjunto vazio (*evento impossível*) ou até mesmo o próprio espaço amostral (*evento certo*). É importante o aluno notar, neste momento, que sendo todos os eventos conjuntos, podemos realizar as operações tradicionais de conjuntos entre eles (união, intersecção, subtração, complementação, etc.) formando assim novos conjuntos ou eventos.

Exemplos: consideremos o seguinte experimento aleatório: lançamento de um dado não-viciado e a observação do número contido na sua face superior.

⇨ Para esse experimento, temos o seguinte espaço amostral: U = {1; 2; 3; 4; 5; 6}. Note que esse espaço amostral é equiprovável e tem seis elementos, ou seja, n(U) = 6. Dizemos, nesse exemplo, que são seis casos possíveis.

- Agora sejam os seguintes eventos:

a) Evento A: saída de número par.
A = {2; 4; 6} e n(A) = 3. Dizemos, nesse exemplo, que são três os casos favoráveis à ocorrência do evento A.

b) Evento B: saída de número maior que dois.
B = {3; 4; 5; 6} e n(B) = 4. Dizemos, nesse exemplo, que são quatro os casos favoráveis à ocorrência do evento B.

c) Evento C: saída de número primo.
C = {2; 3; 5} e n(C) = 3. Dizemos, nesse exemplo, que são três os casos favoráveis à ocorrência do evento C.

d) Evento A $\cup$ C (lê-se: A ou C): saída de número par ou primo.
A $\cup$ C = {2; 3; 4; 5; 6} e n(A $\cup$ C) = 5. Dizemos, nesse exemplo, que são cinco os casos favoráveis à ocorrência do evento A $\cup$ C.

e) Evento $A \cap C$ (lê-se: A e C): saída de número par e primo.
$A \cap C = \{2\}$ e $n(A \cap C) = 1$. Dizemos, nesse exemplo, que há apenas um caso favorável à ocorrência do evento $A \cap C$.

f) Evento $\bar{A} = U - A$ (lê-se: não A ou complementar de A): saída de número que não seja par.

$\bar{A} = \{1; 3; 5\}$ e $n(\bar{A}) = 3$. Dizemos, nesse exemplo, que são três os casos favoráveis à ocorrência do evento $\bar{A}$. Note que o evento $\bar{A}$ equivale a saída de número ímpar, que $A \cup \bar{A} = U$ e que $A \cap \bar{A} = \varnothing$.

Obs.:
a) quando dois eventos de um espaço amostral qualquer forem *exaustivos* (sua união é o próprio espaço amostral) e *disjuntos (sua intersecção é o vazio)*, dizemos que eles são complementares. Os eventos A e $\bar{A}$ são, portanto, complementares.

b) quando dois eventos de um espaço amostral qualquer forem disjuntos, eles são chamados de *mutuamente exclusivos*. Os eventos A e $\bar{A}$ são, portanto, mutuamente exclusivos e os eventos B e C não.

DEFINIÇÃO GERAL DE PROBABILIDADE:

Seja $U = \{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$ o espaço amostral de um experimento qualquer que pode ser equiprovável ou não. Sejam $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \ldots,$
{xn} os eventos unitários, individuais ou elementares desse espaço amostral.

• $0 \leq P(\{x_i\}) \leq 1$, para todo x_i com $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

• **<u>Definição</u>:**

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(\{X_1\}) = 1}$$

$$\boxed{P(\{X_1\}) + P(\{X_2\}) + P(\{X_3\}) + \cdots + P(\{X_n\})}$$

A probabilidade de qualquer evento unitário está sempre entre 0 (zero) e 1 (um), inclusive.
O somatório das probabilidades dos eventos unitários é constante e vale 1 (um).

> *A probabilidade de um evento qualquer ocorrer, é a soma das probabilidades de ocorrência de seus elementos (eventos unitários).*

DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE NUM ESPAÇO AMOSTRAL EQUIPROVÁVEL

Num espaço equiprovável, onde os todos os eventos unitários têm a mesma chance, a probabilidade de um evento A ocorrer é dada por:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{número de casos favoráveis ao evento A}}{\text{número de casos possíveis}}}$$

Exemplo 1: Uma moeda foi lançada. Qual a probabilidade de sair a face cara (K)?

U = {K, C} $\therefore$ n(U) = 2
A = {K} $\therefore$ n(A) = 1

$$\mathbf{P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{2}}$$

Exemplo 2 Considere um baralho com 52 cartas. Qual a probabilidade de:

a) Sair um rei de copas?

U = $\{2_C, 3_C, 4_C, ..., K_E\} \therefore$ 52 cartas $\therefore$ n(U) = 52
A = $\{K_C\} \therefore$ rei de copas $\therefore$ n(A) = 1

$$\mathbf{P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{52}}$$

b) Sair um rei?

U = $\{2_C, 3_C, 4_C, ..., K_E\} \therefore$ 52 cartas $\therefore$ n(U) = 52
A = $\{K_C, K_P, K_O, K_E\} \therefore$ n(A) = 4

$$\mathbf{P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL OU CONDICIONADA

Sejam A e B ($B \neq \emptyset$) dois eventos de um espaço amostral U equiprovável. Denomina-se probabilidade de **A condicionada a B** ou **probabilidade de A dado B**, indicada por P(A/B), a probabilidade de ocorrência de A sendo que B já ocorreu. Note que, nesse caso, temos um novo espaço amostral igual ao evento B e os únicos casos favoráveis a ocorrência de A, estão em $A \cap B$. Segue, portanto, a definição:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$

ou, de maneira equivalente:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Exemplo 1: Qual a probabilidade de lançarmos um dado honesto e obtermos a face 1, sabendo que a face será ímpar?

P(face 1|face ímpar) = 1/3

ou de maneira semelhante:

$$P(A|B) = \frac{1/6}{3/6} = 1/3$$

Note que o espaço amostral foi reduzido exatamente ao 2º evento.

Exemplo 2: Uma cidade cadastrou 400 pessoas pelo sexo e pelo estado civil. Os dados do cadastro estão na tabela abaixo:

	(S)	**(C)**	**(D)**	**(V)**
(M)	150	30	20	20
(F)	50	50	50	30

a) Ao sortear uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade que seja do sexo masculino, sabendo-se que é solteira e vice-versa?

P(M|S) = 150/200 = **3/4**
P(S|M) = 150/220 = **15/22**

b) Ao sortear uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade que seja desquitada, sabendo-se que é do sexo feminino e vice-versa?

P(D|F) = 50/180 = **5/18**
P(F|D) = 50/70 = **5/7**

T.01 (EFOMM) Um programa de auditório tem um jogo chamado "Porta Premiada", que funciona da seguinte maneira:

1º - há três portas: uma tem prêmios e duas estão vazias;

2º - o apresentador pede ao convidado que escolha uma das portas;

3º - após a escolha, o apresentador abre uma das duas portas não escolhidas. Como ele sabe qual é a premiada, abre uma vazia;

4º - depois de aberta uma das portas, ele pergunta ao convidado se deseja trocar de porta;

5º - finalmente, abre a porta do convidado para verificar se ganhou ou perdeu.

Analisando o jogo de forma puramente probabilística, verifique qua(l)(is) das estratégias abaixo tem a maior probabilidade de vencer o jogo.

I – Após escolher a porta, não trocá-la até o final do jogo.
II – Todas as probabilidades são iguais; não há estratégia melhor que a outra, ou seja, tanto faz trocar ou não a porta.
III – A melhor estratégia é sempre trocar a porta.
Sobre as estratégias I, II e III apresentadas, é correto afirmar que
a) somente a alternativa I está correta.
b) somente a alternativa II está correta.
c) somente a alternativa III está correta.
d) nenhuma alternativa está correta.
e) todas as alternativas apresentam circunstâncias com a mesma probabilidade de vencer.

T.02 (EFOMM) Um garoto dispõe de um único exemplar de cada poliedro de Platão existente. Para brincar, ele numerou cada vértice, face e aresta de cada poliedro sem repetir nenhum número. Em seguida, anotou esses números no próprio poliedro. Se ele sortear um dos números usados, aleatoriamente, qual será a probabilidade de o número sorteado representar um vértice?
a) 5/9
b) 5/14
c) 1/3
d) 5/19
e) 1/10

T.03 (EFOMM) Um atleta de tiro ao prato tem probabilidade de 0,9 de acertar o prato a cada novo lançamento. Analisando esse jogador antes do início da competição, após quantos lançamentos de pratos, a probabilidade de ele não ter acertado todos os tiros se tornará maior que a probabilidade de acertar todos?
a) 9
b) 8
c) 7
d) 6
e) 5

T.04 (EFOMM) Seis alunos da EFOMM – três paranaenses, dois cariocas e um alagoano – são colocados em uma fila aleatoriamente. Qual é a probabilidade, então, de que nenhum conterrâneo fique ao lado do outro?
a) 3/31
b) 1/36
c) 1/24
d) 1/12
e) 1/6

T.05 (EFOMM) Um dado cúbico, não viciado, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado três vezes. Em cada lançamento, anota-se o número obtido na face superior do dado, formando-se uma sequência (a, b, c). Qual é a probabilidade de que *b* seja sucessor de *a* e que *c* seja sucessor de *b* OU que *a*, *b* e *c* sejam primos?
a) 4/216
b) 27/216
c) 108/216
d) 31/216
e) 10/216

T.06 (EFOMM) Um juiz de futebol trapalhão tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma outra face vermelha. Depois de uma jogada violenta, o juiz mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um atleta. Se a face que o jogador vê é amarela, a probabilidade de a face voltada para o juiz ser vermelha será
a) 1/6
b) 1/3
c) 2/3
d) 1/2
e) 3/2

T.07 (EFOMM) Suponha um lote com dez peças, sendo duas defeituosas. Testam-se as peças, uma a uma, até que sejam encontradas as duas defeituosas. A probabilidade de que a última peça defeituosa seja encontrada no terceiro teste é igual a
a) 1/45.
b) 2/45.
c) 1/15.
d) 4/45.
e) 1/9.

T.08 (EFOMM 2017) Um cubo de lado 2a possui uma esfera circunscrita nele. Qual é a probabilidade de, ao ser sorteado um ponto interno da esfera, esse ponto ser interno ao cubo?
a) $\pi / 6$
b) $2\sqrt{3} / 3\pi$
c) $\pi\sqrt{3} / 6$
d) $2\pi / 6\sqrt{3}$
e) $1/2$

Gabarito

1. Análise Combinatória
01. d 02. c 03. d 04. d 05. e 06. c

2. Probabilidade
01. c 02. d 03. c 04. e 05. d 06. b 07. b 08. b