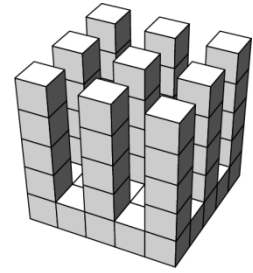


## Canguru Brasil 2014 – Nível S

### 3 pontos



1. Retirando alguns cubinhos de lado 1 de um cubo de lado 5, obtemos uma figura sólida composta de colunas de mesma altura sobre uma camada, como na ilustração ao lado. Quantos cubinhos foram retirados?

- (A) 56                      (B) 60                      (C) 64                      (D) 68                      (E) 80

2. Hoje é o dia de aniversário de Carla, Emília e Lília. A soma de suas idades é 44. De quanto será esta soma na próxima vez que for novamente um número de dois algarismos iguais?

- (A) 55                      (B) 66                      (C) 77                      (D) 88                      (E) 99

3. Se  $a^b = \frac{1}{2}$ , qual é o valor de  $a^{-3b}$ ?

- (A)  $\frac{1}{8}$                       (B) 8                      (C)  $-8$                       (D) 6                      (E)  $\frac{1}{6}$

4. Há 48 bolas iguais distribuídas em três cestas de diferentes tamanhos. A menor cesta e a maior cesta, juntas, contêm o dobro do número de bolas da cesta média. A menor cesta contém metade das bolas da cesta média. Quantas bolas há na cesta maior?

- (A) 16                      (B) 20                      (C) 24                      (D) 30                      (E) 32

5.  $\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = ?$

- (A) 1                      (B) 2                      (C)  $2^{1011}$                       (D)  $2^{2012}$                       (E)  $2^{2013}$

6. Qual das expressões a seguir não é divisível por  $b+1$ ?

- (A)  $2b+2$                       (B)  $b^2-1$                       (C)  $b^2+b$                       (D)  $-1-b$                       (E)  $b^2+1$

7. Quantos algarismos tem o número que é o resultado da multiplicação  $(2^{22})^5 \times (5^{55})^2$ ?

- (A) 22                      (B) 55                      (C) 77                      (D) 110                      (E) 111

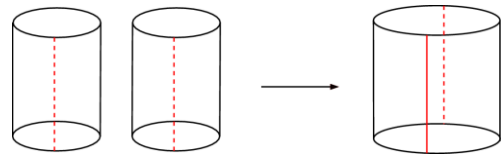
8. Juliana tem uma conta secreta de e-mail conhecida por apenas quatro amigas. Hoje ela recebeu oito e-mails nessa conta. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?

- (A) Juliana recebeu dois e-mails de cada amiga.  
(B) É impossível que Juliana tenha recebido os oito e-mails de uma única amiga.  
(C) Juliana recebeu pelo menos um e-mail de cada amiga.  
(D) Juliana recebeu pelo menos dois e-mails de uma de suas amigas.  
(E) Juliana recebeu pelo menos dois e-mails de duas amigas diferentes.

9. No número do ano 2014, os algarismos são diferentes e o último algarismo é maior do que a soma dos outros três algarismos. Antes de 2014, há quantos anos isto aconteceu pela última vez?

- (A) 5                      (B) 215                      (C) 305                      (D) 395                      (E) 485

10. O soldador Júlio abriu duas latas cilíndricas iguais paralelamente aos seus eixos (linhas tracejadas, na figura) e as soldou para formar uma lata maior. Se  $v$  é o volume de cada lata menor e  $V$  é o volume da lata maior, qual das relações a seguir é verdadeira?



- (A)  $V = 2v$       (B)  $V = 3v$       (C)  $V = 2\pi v$       (D)  $V = 4v$       (E)  $V = 8v$

**4 pontos**

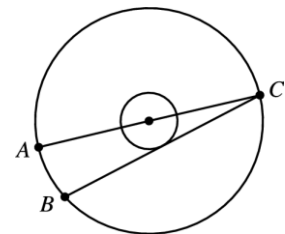
11. As dimensões de um bloco retangular são  $a, b, c$ , tais que  $a < b < c$ . Aumentando qualquer uma dessas medidas de um mesmo valor positivo, o volume do bloco aumenta. Em qual dos casos o aumento do volume do bloco é o maior?

- (A) Quando aumentamos  $a$ .      (B) Quando aumentamos  $b$ .  
 (C) Quando aumentamos  $c$ .      (D) É igual para as três dimensões.  
 (E) Depende dos valores iniciais de  $a, b$  e  $c$ .

12. Num campeonato de futebol, com quatro times  $A, B, C$  e  $D$ , o vencedor de cada partida ganhou 3 pontos e o perdedor 0 ponto; nos empates, ambos ganharam 1 ponto. Ao final do campeonato, em que todos os times jogaram exatamente uma vez contra os demais times, o time  $A$  terminou com 7 pontos e os times  $B$  e  $C$  terminaram com 4 pontos cada um. Com quantos pontos ficou o time  $D$ ?

- (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3      (E) 4

13. Na figura, os raios das circunferências concêntricas estão na razão de 1 para 3. A corda  $BC$  da circunferência maior é tangente à circunferência menor e a medida do segmento  $AB$  é 12. Qual é o raio da circunferência maior?



- (A) 13      (B) 18      (C) 21      (D) 24      (E) 26

14. Quantos ternos  $(a, b, c)$  de números inteiros tais que  $a > b > c > 1$  satisfazem  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$ ?

- (A) Nenhum      (B) 1      (C) 2      (D) 3      (E) Infinitos

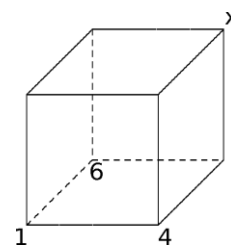
15. Sejam  $a, b, c$  números reais não nulos e  $n$  um inteiro positivo. Sabe-se que os números  $(-2)^{2n+3} a^{2n+2} b^{2n-1} c^{3n+2}$  e  $(-3)^{2n+2} a^{4n+1} b^{2n+5} c^{3n-4}$  têm o mesmo sinal. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A)  $a > 0$       (B)  $b > 0$       (C)  $c > 0$       (D)  $a < 0$       (E)  $b < 0$

16. Em seis semanas há  $n!$  segundos. Qual é o valor de  $n$ ?

- (A) 6      (B) 7      (C) 8      (D) 10      (E) 12

17. Os vértices de um cubo são numerados de 1 a 8 de tal forma que a soma dos quatro números dos vértices de cada face é a mesma para todas as faces. Os números 1, 4 e 6 foram atribuídos a alguns vértices conforme mostrado na figura. Qual é o número do vértice indicado pelo  $x$ ?

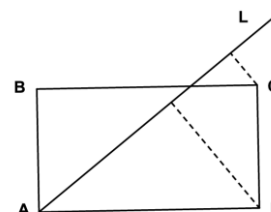


- (A) 2                      (B) 3                      (C) 5                      (D) 7                      (E) 8

18. O rótulo de uma embalagem de queijo cremoso indica que o mesmo contém 24% de gordura. O mesmo rótulo diz também que há 64% de gordura na parte sólida do queijo (o que sobra após a desidratação). Qual é a porcentagem de água no queijo?

- (A) 37,5%                      (B) 42%                      (C) 49%                      (D) 62,5%                      (E) 88%

19. Uma reta  $L$  passa pelo vértice  $A$  de um retângulo  $ABCD$ . A distância do ponto  $C$  à reta  $L$  é igual a 2 e a distância do ponto  $D$  à reta  $L$  é igual a 6. Se  $AD = 2 AB$ , qual é o valor de  $AD$  ?



- (A) 10                      (B) 12                      (C) 14                      (D) 16                      (E)  $4\sqrt{3}$

20. A função  $f(x) = ax + b$  satisfaz as igualdades  $f(f(f(1))) = 29$  e  $f(f(f(0))) = 2$ . Quanto vale  $a$ ?

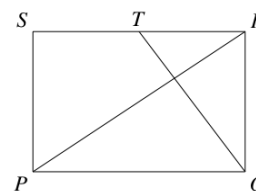
- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4                      (E) 5

### 5 pontos

21. Considere dez números inteiros positivos distintos, dentre os quais exatamente cinco são divisíveis por 5 e exatamente sete são divisíveis por 7. Seja  $M$  o maior desses dez números. Qual é o menor valor possível de  $M$ ?

- (A) 63                      (B) 75                      (C) 77                      (D) 105                      (E) nenhum dos anteriores

22. Na figura,  $T$  é o ponto médio do lado  $RS$  do retângulo  $PQRS$ . O segmento  $QT$  é perpendicular à diagonal  $PR$ . Qual é a razão  $PQ:QR$  ?

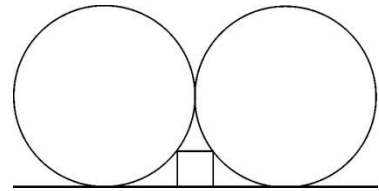


- (A) 2:1                      (B)  $\sqrt{3}:1$                       (C) 3:2                      (D) 5:4                      (E)  $\sqrt{2}:1$

23. Numa reserva ecológica há nove cangurus que são prateados ou dourados. Quando três desses cangurus se encontram ao acaso, a probabilidade de que nenhum deles seja prateado é igual a dois terços. Quantos deles são dourados?

- (A) 1                      (B) 3                      (C) 5                      (D) 6                      (E) 8

24. Um quadrado, apoiado sobre uma reta, tem os outros dois vértices sobre duas circunferências de raio 1 tangentes entre si e à reta de apoio, conforme figura ao lado. Quanto mede o lado do quadrado?



- (A)  $\frac{2}{5}$                       (B)  $\frac{1}{4}$                       (C)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$                       (D)  $\frac{1}{5}$                       (E)  $\frac{1}{2}$

25. Tom pretende escrever vários inteiros positivos distintos e menores do que 101. Além disso, o produto desses números não poderá ser divisível por 54. No máximo, quantos números ele conseguirá escrever?

- (A) 8                      (B) 17                      (C) 54                      (D) 68                      (E) 69

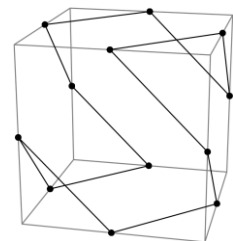
26. Dois polígonos regulares de lado 1 têm em comum apenas o lado  $AB$ . Um deles é o polígono de 15 lados  $ABCD\dots$  e o outro é o polígono de  $n$  lados  $ABZY\dots$ . Para qual valor de  $n$  a distância  $CZ$  é igual a 1?

- (A) 10                      (B) 12                      (C) 15                      (D) 16                      (E) 18

27. Nas igualdades  $k = (2014 + m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1$ , os números  $k, m, n$  são inteiros positivos. Quantos valores distintos  $m$  pode assumir?

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) infinitos

28. Podemos unir os pontos médios das arestas de um cubo para obter um polígono, conforme a figura. Um ângulo interno desse polígono em cada vértice é exatamente o ângulo formado pelos lados que se encontram nesse vértice. Qual é a soma das medidas de todos os ângulos internos desse polígono?



- (A)  $720^\circ$                       (B)  $1080^\circ$                       (C)  $1200^\circ$                       (D)  $1440^\circ$                       (E)  $1800^\circ$

29. A função  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  satisfaz as condições  $f(4) = 6$  e  $xf(x) = (x-3)f(x+1)$ . Qual é o valor de  $f(4)f(7)f(10)\dots f(2011)f(2014)$ ?

- (A) 2013                      (B) 2014                      (C)  $2013 \cdot 2014$                       (D) 2013!                      (E) 2014!

30. Numa floresta mágica perambulam somente três espécies de animais: leões, lobos e cabritos. Os lobos comem cabritos e os leões comem lobos e cabritos. Quando um lobo come um cabrito, transforma-se imediatamente em leão; quando um leão come um cabrito, torna-se um lobo e quando come um lobo, transforma-se em cabrito. Originalmente nessa floresta havia 17 cabritos, 55 lobos e 6 leões. Qual será o maior número possível de animais sobreviventes nessa floresta quando não for mais possível que algum animal coma outro?

- (A) 1                      (B) 6                      (C) 17                      (D) 23                      (E) 35