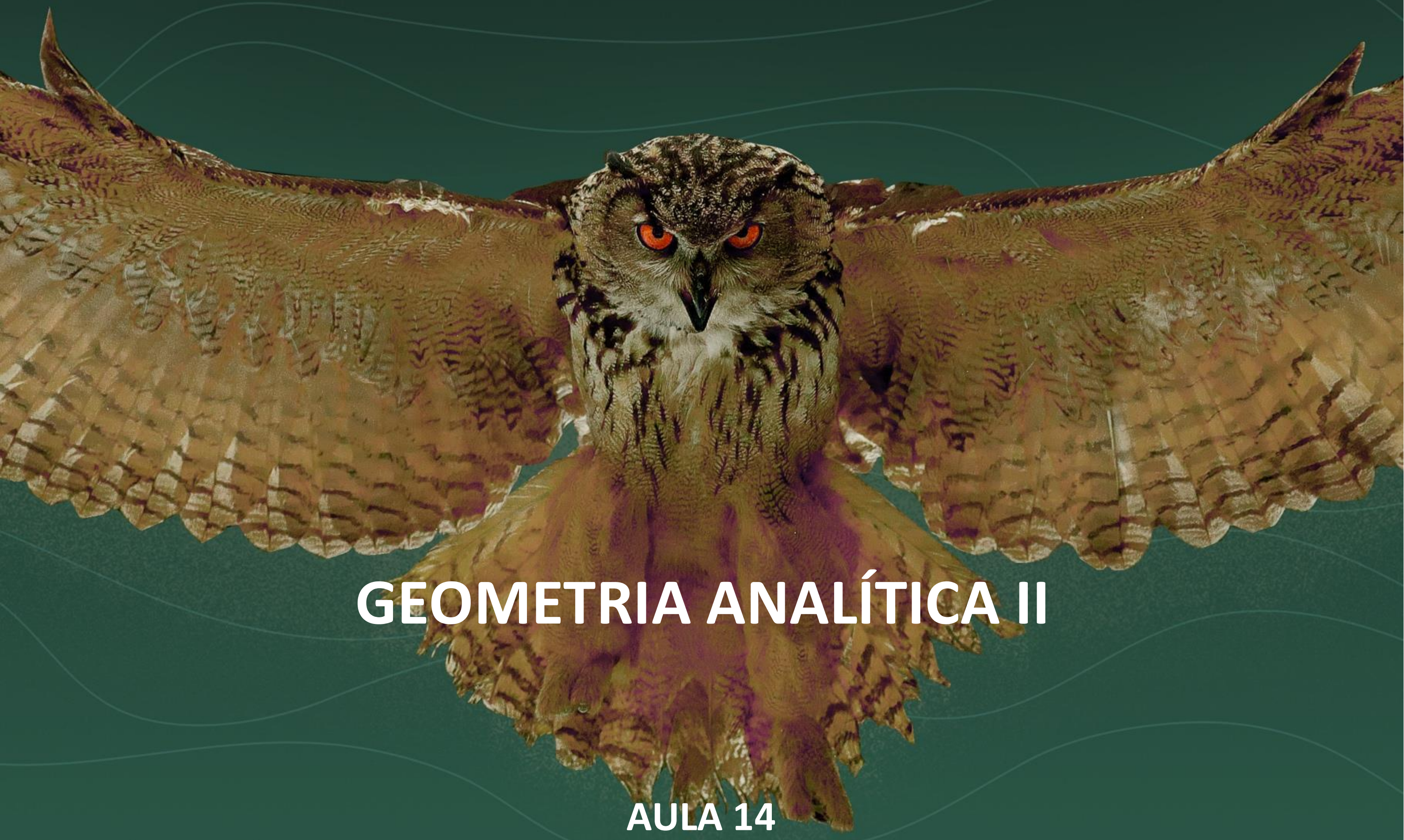
CURSO EXTENSIVO

ITA 2023



GEOMETRIA ANALÍTICA II

AULA 14

Prof. Victor So

Sumário

APRESENTAÇÃO

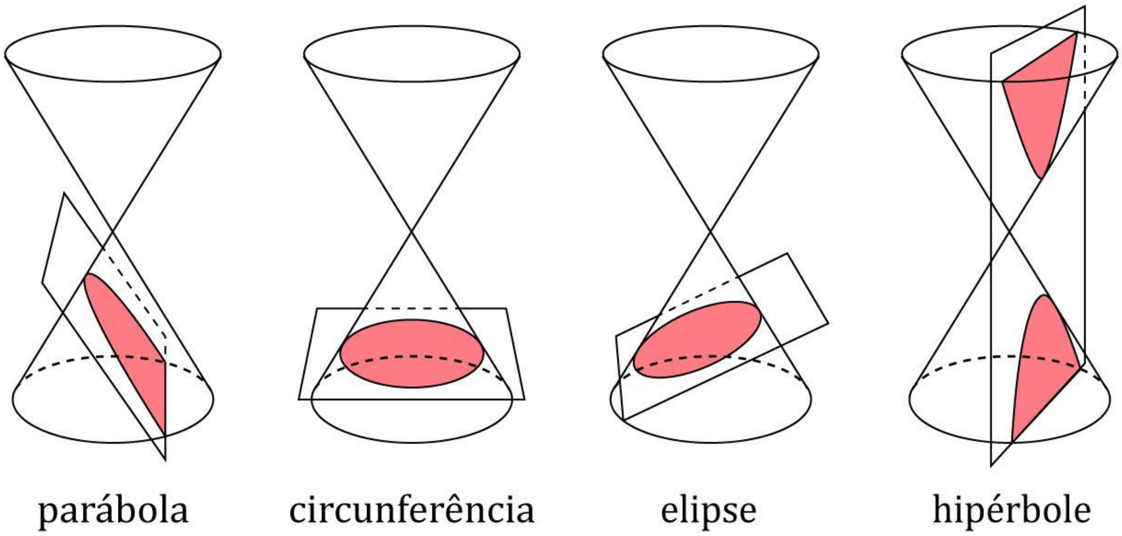
Nesta aula, veremos as equações das principais cônicas e os seus elementos. Também, estudaremos a interpretação geométrica de um sistema de inequações. A aula pode parecer extensa, e isso é devido à grande quantidade de assuntos que veremos, mas não se assuste!

Se você já é experiente no assunto, pule para a lista de exercícios e tente resolver todas as questões. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões, entre em contato no fórum de dúvidas ou se preferir:

/profvictorso

1. CÔNICAS

Vamos iniciar o estudo das cônicas. Essas figuras são lugares geométricos obtidos pela intersecção de um plano com cones retos duplos opostos pelo vértice. Vejas as figuras abaixo:



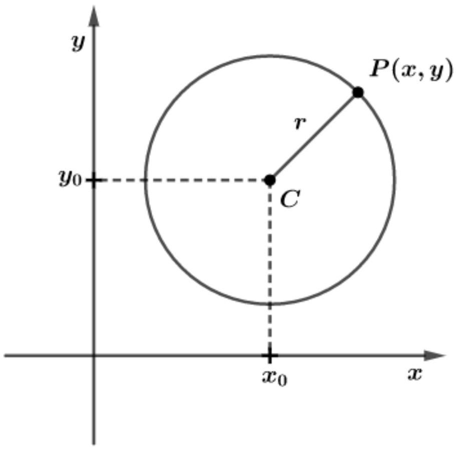
Perceba que a **elipse** é formada pela intersecção de um plano inclinado em relação às bases dos cones. Se esse plano for paralelo às bases, obtemos a figura de uma **circunferência**, e esse é um caso particular de elipse. Se o plano for paralelo à geratriz de um dos cones, obtemos uma **parábola** (dessa forma não formamos uma elipse). Por fim, a **hipérbole** é obtida passando-se um plano paralelo ao eixo de simetria dos cones. Além desses, temos as cônicas degeneradas: um ponto (elipse degenerada), uma reta (parábola degenerada), para de retas (hipérbole degenerada) ou o conjunto vazio.

Estudaremos a equação das principais cônicas.

1.1. CIRCUNFERÊNCIA

A circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto fixo. Esse ponto é chamado de centro da circunferência.

Seja λ a circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e r o seu raio. Se $P \in \lambda$, então, pela definição desse L.G., temos



$$\boxed{P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r}$$

Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer de λ, podemos aplicar a fórmula da distância entre dois pontos:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos a **equação reduzida da circunferência**:

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

Desenvolvendo-se a equação reduzida, obtemos a **equação geral da circunferência**:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0}$$

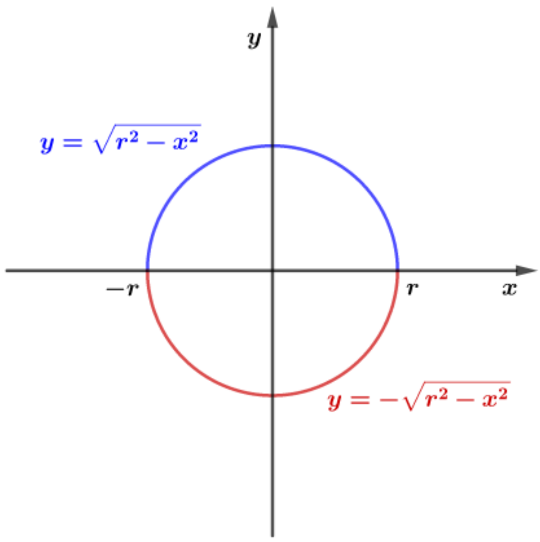
Usando a equação da circunferência, podemos escrever duas equações de semicircunferências. Vamos tomar a circunferência centrada na origem.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Isolando y:

$$y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Representando as curvas no gráfico, temos:



1.1.1. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

Dados um ponto $P(x_1, y_1)$ e uma circunferência $\lambda: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, para saber a posição relativa do ponto em relação à λ, basta substituir as coordenadas de P na expressão $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ e analisar o número encontrado com o raio ao quadrado. Desse modo:

- $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < r^2 \rightarrow P \text{ é } interior \text{ à } \lambda$
- $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2 \rightarrow P \in \lambda$
- $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 > r^2 \rightarrow P \text{ é } exterior \text{ à } \lambda$

Exemplo:

Seja a circunferência $\lambda: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$, qual a posição relativa do ponto $P(0, 3)$ em relação à λ?

Substituindo as coordenadas de P na circunferência:

$$(0 - 2)^2 + (3 - 1)^2 = 4 + 4 = 8 < 9$$

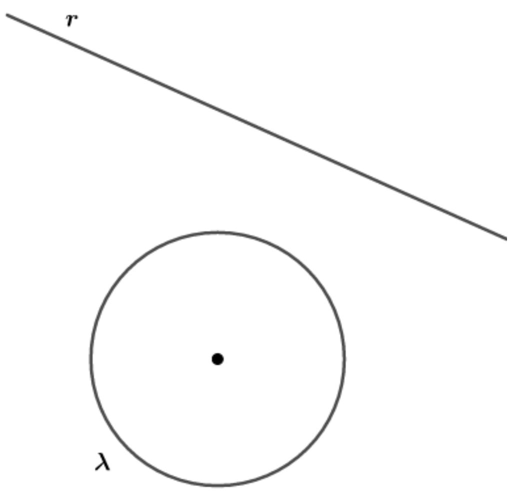
Assim, o ponto é interior à circunferência.

1.1.2. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS E CIRCUNFERÊNCIA

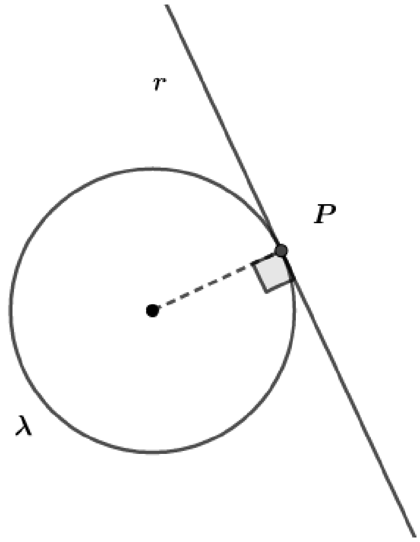
Dadas as equações de uma reta $r: ax + by + c = 0$ e de uma circunferência $\lambda: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, para saber a posição relativa da reta em relação à λ, basta isolar uma das variáveis da reta $(x \text{ ou } y)$ na equação da circunferência e verificar o valor do discriminante da equação.

Assim:

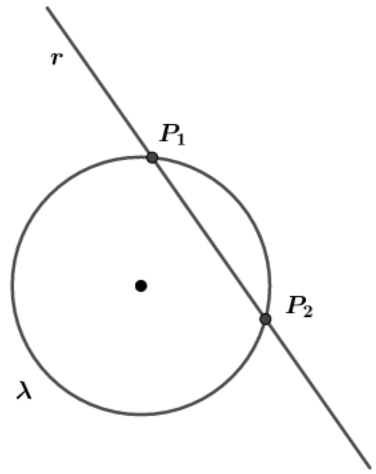
- $r \cap \lambda = \emptyset \Leftrightarrow \Delta < 0 \ (r \text{ é } exterior)$



- $r \cap \lambda = \{P\} \Leftrightarrow \Delta = 0 \ (r \text{ é } tangente)$



- $r \cap \lambda = \{P_1, P_2\} \Leftrightarrow \Delta > 0 \ (r \text{ é } secante)$



Exemplo:

Qual a posição relativa da reta $r: 2x + y - 1 = 0$ em relação à $\lambda: (x-1)^2 + y^2 = 9$?

Da reta r, temos $y = 1 - 2x$. Substituindo na equação de λ:

$$(x-1)^2 + (1-2x)^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 1 - 4x + 4x^2 = 9$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 6x - 7 = 0$$

Analisando o discriminante dessa equação, temos:

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 5 \cdot (-7) = 176 > 0$$

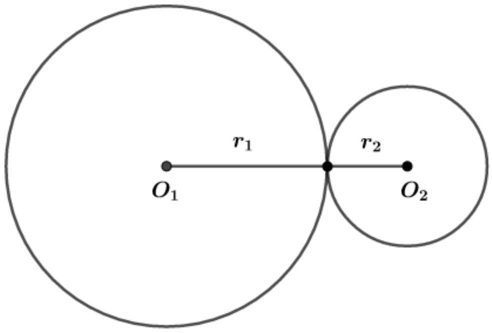
Portanto, temos duas soluções, logo, a reta intercepta a circunferência em dois pontos. Assim, r é secante à λ.

1.1.3. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

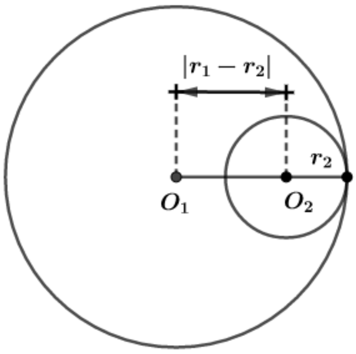
Dadas as circunferências $\lambda_1: (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r_1^2$ e $\lambda_2: (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = r_2^2$, para analisar a posição relativa entre as circunferências, devemos calcular a distância entre seus centros e fazer as seguintes comparações:

Seja O_1 o centro da circunferência λ_1 e O_2 o centro da circunferência λ_2.

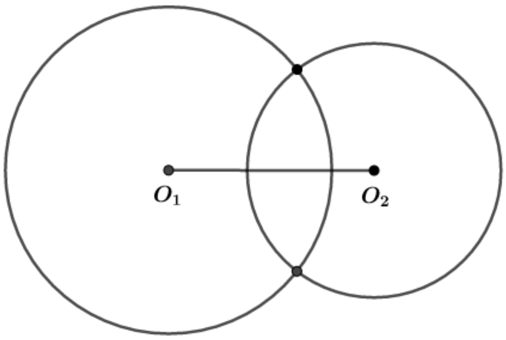
- $O_1O_2 = r_1 + r_2$ (λ_1 e λ_2 *são tangentes externamente*)



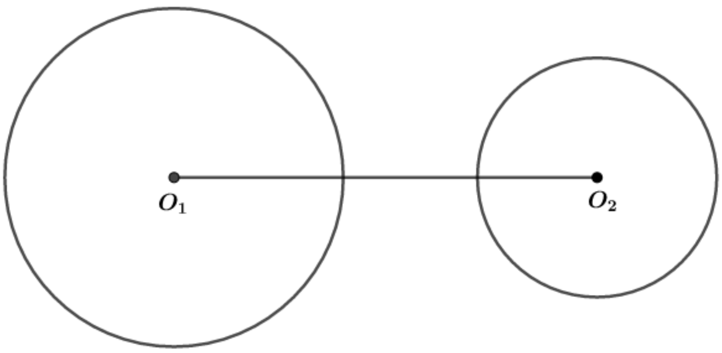
- $O_1O_2 = |r_1 - r_2|$ (λ_1 e λ_2 *são tangentes internamente*)



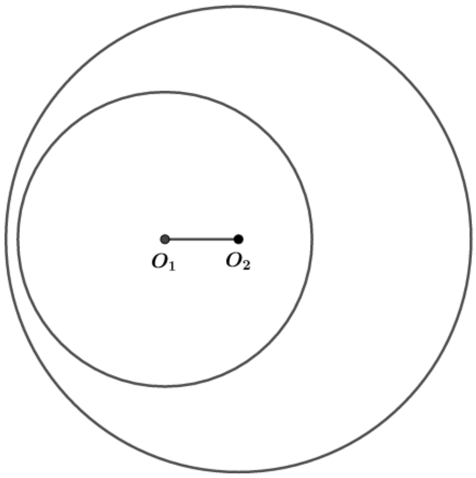
- $|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$ (λ_1 e λ_2 *são secantes*)



- $O_1O_2 > r_1 + r_2$ (*as duas circunferências são externas uma à outra*)

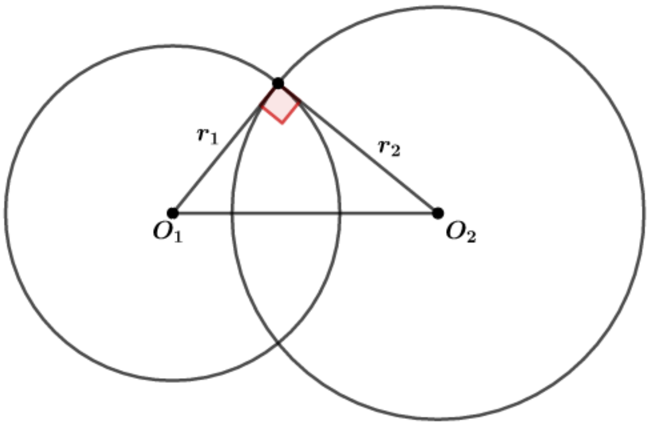


- $O_1O_2 < |r_1 - r_2|$ (*uma das circunferências é interna à outra*)



Quando duas circunferências satisfazem a seguinte relação:

$$O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2 \ (condição\ de\ ortogonalidade)$$



Dizemos que as circunferências são ortogonais entre si. Note que os pontos de intersecção das circunferências formam retas tangentes que passam pelo centro das circunferências.

1. Determine o raio e o centro das circunferências abaixo:

a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$

b) $x^2 + 6x + y^2 + 10y + 24 = 0$

Resolução:

Aqui, podemos escrever as equações gerais na forma reduzida para encontrar os dados pedidos.

a) Completando os quadrados:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

$$\Rightarrow C = (1, -2)$$

b) Completando os quadrados:

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 + 10y + 25 - 25 + 24 = 0$$

$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 10$$

$$r^2 = 10 \Rightarrow r = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow C = (-3, -5)$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{C = (1, -2)}$ e $\boldsymbol{r = 2}$ b) $\boldsymbol{C = (-3, -5)}$ e $\boldsymbol{r = \sqrt{10}}$

2. Determine as equações das seguintes circunferências, sabendo que C é o centro e r é o raio:

a) $C(-1, 2)$ e $r = \sqrt{3}$

b) $C(0, 5)$ e $r = 5$

Resolução:

Conhecendo-se o centro $C(x_0, y_0)$ e o raio r, podemos usar a equação reduzida da circunferência:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

a) $\left(x - (-1)\right)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{3}^2$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3$$

b) $(x-0)^2 + (y-5)^2 = 5^2$

$$x^2 + (y-5)^2 = 25$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3}$ b) $\boldsymbol{x^2 + (y-5)^2 = 25}$

3. Determine a posição relativa entre as circunferências abaixo sem esboçar o gráfico:

a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ e $x^2 + (y+2)^2 = 1$

b) $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 0$ e $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$

Resolução:

a) Os centros e os raios das circunferências são:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=1 \Rightarrow C_1=(2,3) \Rightarrow r_1=1$$
$$x^2+(y+2)^2=1 \Rightarrow C_2=(0,-2) \Rightarrow r_2=1$$

A soma dos raios resulta $r_1+r_2=2$ e a diferença $|r_1-r_2|=0$.

A distância entre os centros é

$$d_{C_1C_2}=\sqrt{(2-0)^2+(3+2)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}>2=r_1+r_2$$

Como a distância entre os centros é maior que a soma dos raios, temos que as circunferências são externas uma à outra.

b) Fatorando a primeira equação, obtemos:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2$$

Os centros e os raios das circunferências são:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2 \Rightarrow C_1=(-1,1) \Rightarrow r_1=\sqrt{2}$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=8 \Rightarrow C_2=(2,-2) \Rightarrow r_2=2\sqrt{2}$$

A soma e a diferença dos raios é

$$r_1+r_2=3\sqrt{2}$$
$$|r_1-r_2|=\sqrt{2}$$

A distância entre os centros é

$$d_{C_1C_2}=\sqrt{(-1-2)^2+(1+2)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}=r_1+r_2$$

Portanto, as circunferências são tangentes.

Gabarito: a) externas b) tangentes

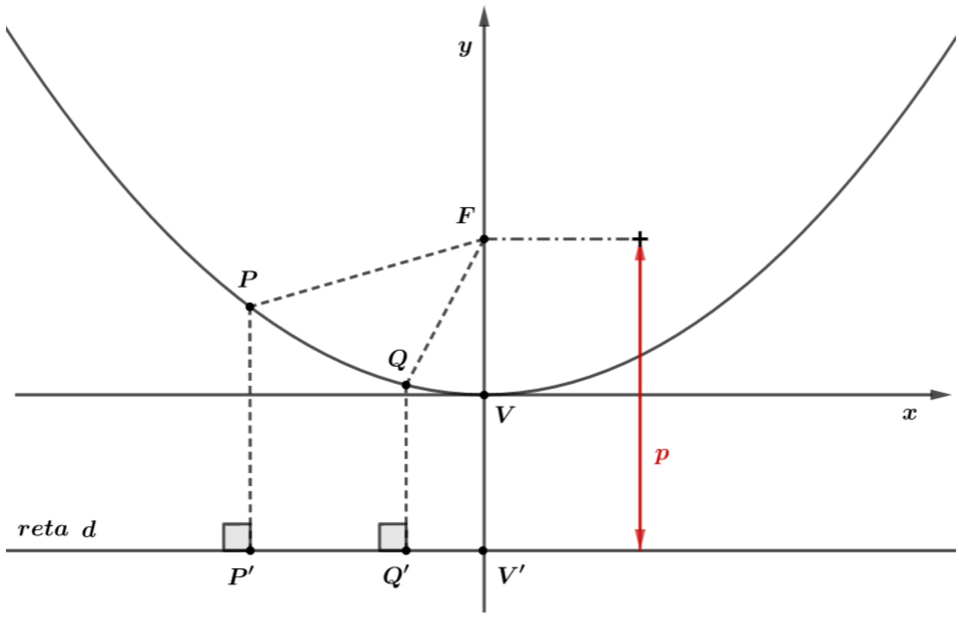
1.2. PARÁBOLA

A equação da parábola já nos é conhecida. Vamos entender melhor os elementos geométricos dessa figura.

Dada uma reta d e um ponto F tal que $F \notin d$, o lugar geométrico chamado de parábola é a figura formada por todos os pontos que equidistam de F e de d, isto é, se P é um ponto da parábola λ, então

$$\boxed{P \in \lambda \Leftrightarrow d_{PF}=d_{P,d}}$$

Observe a figura abaixo e veja as nomenclaturas dos principais elementos da parábola.



Elementos da parábola

$F \rightarrow foco$

$V \rightarrow vértice$

$d \rightarrow reta\ diretriz$

$p \rightarrow parâmetro$

Perceba que $P, Q \in parábola$ e $\overline{PF} = \overline{PP'}$ e $\overline{QF} = \overline{QQ'}$.

A distância do foco da parábola à reta diretriz é p e, por isso, temos

$$\boxed{\overline{VF} = \frac{p}{2}}$$

Outro ponto a se notar é que a reta que contém V e F é o eixo de simetria da parábola. Vamos deduzir a equação da parábola usando a definição desse lugar geométrico.

Vamos considerar apenas os casos mais simples.

Inicialmente, vamos deduzir a equação da figura acima. Ela é uma parábola com vértice na origem e possui eixo de simetria vertical. Assim, temos:

$$V = (0,0)\ e\ F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$$

$$d: y = -\frac{p}{2}$$

Pela definição do L.G., se $P \in \lambda$ (parábola), então:

$$P = (x,y) \xrightarrow{P`\in d} P' = \left(x, -\frac{p}{2}\right)$$

$$d_{PF} = d_{P,d} = d_{PP`}$$

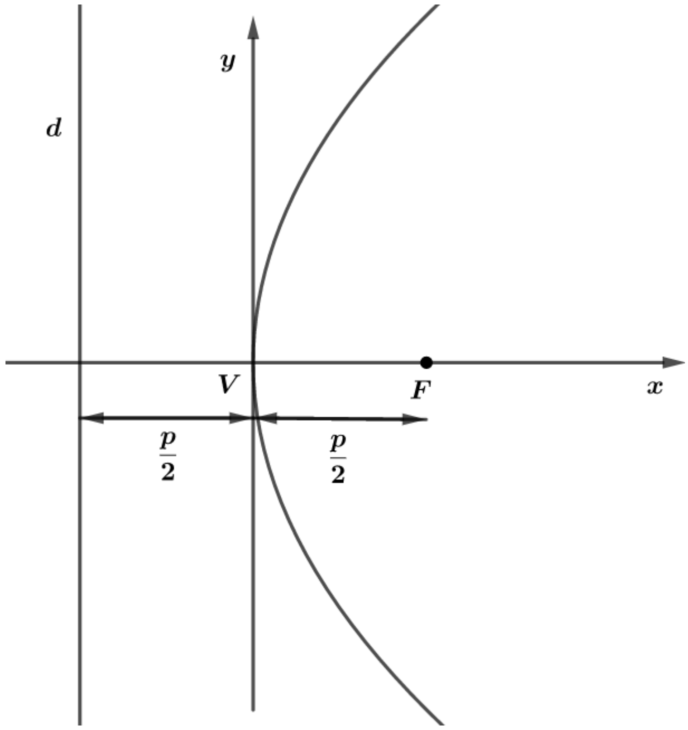
$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2} \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \left[\left(y + \frac{p}{2}\right) + \left(y - \frac{p}{2}\right)\right]\left[\left(y + \frac{p}{2}\right) - \left(y - \frac{p}{2}\right)\right]$$

$$\therefore \boxed{x^2 = 2py}$$

Essa é a equação reduzida da parábola, considerando que o ponto V é a origem do sistema e o seu eixo de simetria é vertical.

Da mesma forma, podemos provar que se o eixo de simetria for horizontal e o vértice for a origem, encontramos



$$\boxed{y^2 = 2px}$$

E se o vértice não estiver na origem?

Se isso ocorrer, podemos transladar a origem até o vértice e escrever a equação em função no novo sistema $x'O'y'$. Se $V = (x_0, y_0)$ e lembrando que $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, então

$$\boxed{x'^2 = 2py' \Rightarrow (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)}$$

$$\boxed{y'^2 = 2px' \Rightarrow (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)}$$

4. Determine o parâmetro da seguinte parábola:

$$8x - y^2 + 6y - 17 = 0$$

Resolução:

Fatorando a equação para obter a forma reduzida:

$$8x - (y^2 - 6y + 17) = 0$$

$$8x - [(y - 3)^2 - 9] - 17 = 0$$

$$8x - (y - 3)^2 - 8 = 0$$

$$8(x - 1) = (y - 3)^2$$

Lembrando que a equação reduzida da parábola é

$$2p(x - x_0) = (y - y_0)^2$$

Portanto:

$$2p = 8 \Rightarrow p = 4$$

Gabarito: $\boldsymbol{p = 4}$

5. Determine a distância entre o foco e o vértice da seguinte parábola:

$$x^2 + 2x - 2y + 5 = 0$$

Resolução:

Fatorando a equação para obter a forma reduzida:

$$(x^2 + 2x + 1) - 2y + 4 = 0$$
$$(x + 1)^2 = 2y - 4$$
$$(x + 1)^2 = 2(y - 2)$$

Lembrando que a equação reduzida da parábola é

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Portanto:

$$2p = 2 \Rightarrow p = 1$$

A distância entre o vértice e o foco é $p/2$, logo:

$$d_{VF} = 1/2$$

Gabarito: $d_{VF} = 1/2$

6. Sabendo que a reta diretriz da parábola λ é $y = -3$ e o seu foco é o ponto $(1, 2)$, determine a equação de λ, as coordenadas de seu vértice e seu parâmetro.

Resolução:

Aplicando a definição da parábola:

$$d_{PF} = d_{P,d}$$

Da reta, temos:

$$y + 3 = 0$$

Seja $P(x, y)$ o ponto da parábola, logo:

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = \frac{|y+3|}{\sqrt{1^2}}$$
$$(x - 1)^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 6y + 9$$
$$(x - 1)^2 = 10y + 5$$
$$(x - 1)^2 = 10(y + 1/2)$$

As coordenadas do vértice são dadas por:

$$V(1, -1/2)$$

O parâmetro é

$$2p = 10 \Rightarrow p = 5$$

Gabarito: $(x - 1)^2 = 10(y + 1/2)$; $V\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ e $p = 5$

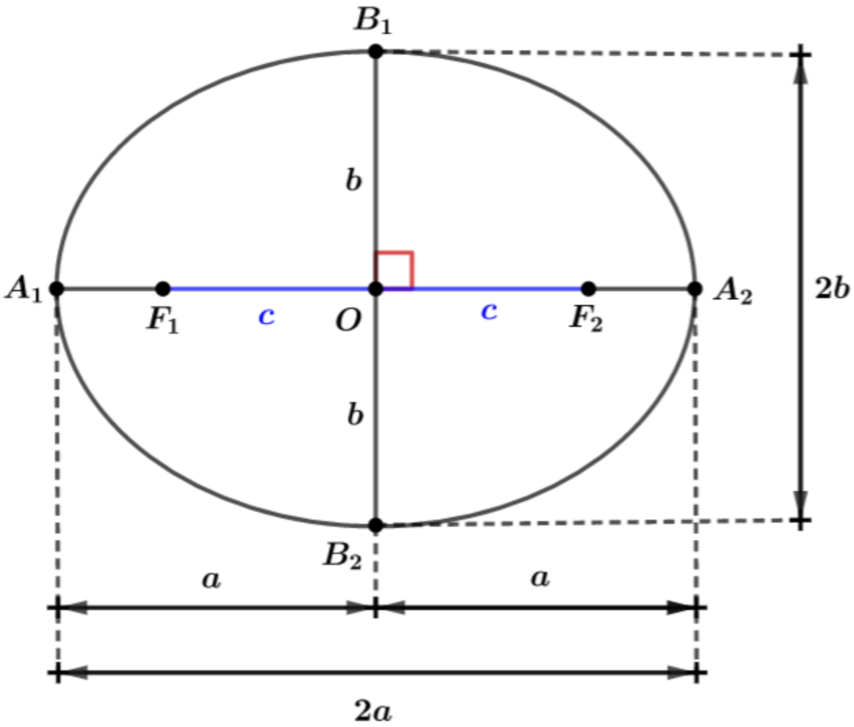
1.3. ELIPSE

A elipse é o lugar geométrico dos pontos P, pertencentes a um plano α, cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2, é constante. Chamamos esses pontos fixos de focos da elipse ou pontos focais e o ponto médio do segmento que liga esses focos é o centro da elipse.

Assim, a definição da elipse é

$$\boxed{PF_1 + PF_2 = constante}$$

Essa figura possui um eixo maior e um eixo menor, esses são os eixos de simetria da elipse. O diagrama a seguir mostra os principais elementos da elipse.



F_1 e $F_2 - pontos\ focais$

$O - centro\ da\ elipse$

$\overline{A_1A_2} - eixo\ maior$

$\overline{B_1B_2} - eixo\ menor$

$2c - distância\ focal$

$2a - medida\ do\ eixo\ maior$

$2b - medida\ do\ eixo\ menor$

1.3.1. RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA ELIPSE

A constante resultante da soma $PF_1 + PF_2$ é a medida do eixo maior, isto é, $2a$. Desse modo, temos:

$$\boxed{PF_1 + PF_2 = 2a}$$

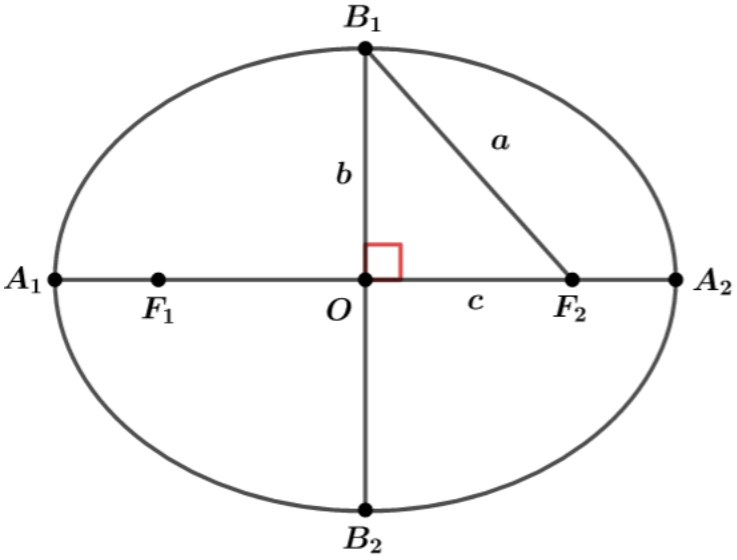
Como a elipse é simétrica em relação aos seus eixos, tomando-se o ponto B_1, vemos que

$$B_1F_1 = B_1F_2$$

Da definição da elipse:

$$B_1F_1 + B_1F_2 = 2a \Rightarrow B_1F_1 = B_1F_2 = a$$

Note que o eixo maior e o eixo menor são ortogonais entre si, logo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras e obter a **relação fundamental da elipse**:



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

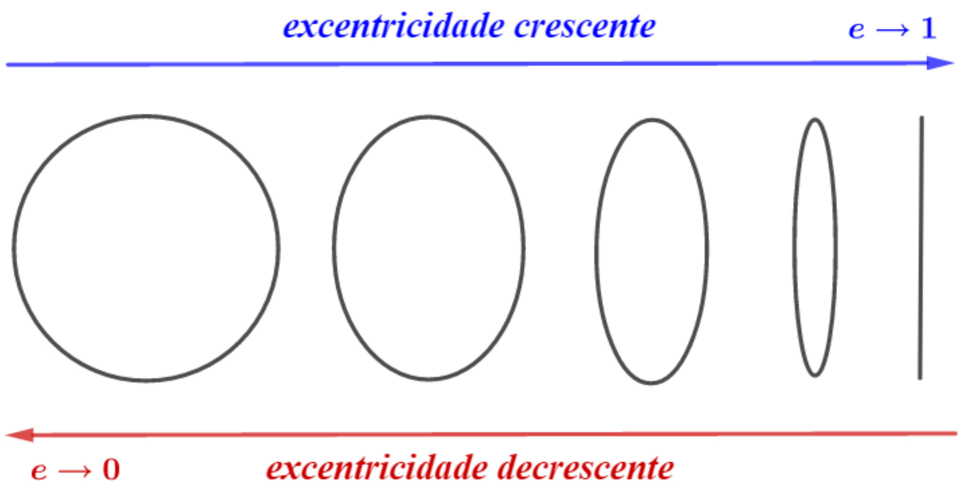
1.3.2. EXCENTRICIDADE DA ELIPSE

A excentricidade da elipse, indicada por e, é um número real positivo dado pela razão entre a metade da distância focal e a metade da medida do eixo maior, ou seja,

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

Note que e varia no intervalo entre 0 e 1, pois $a > c > 0$.

Veja o que acontece com a elipse, variando-se os valores da excentricidade.



Como podemos ver pela figura, quando e tende a 1, a elipse se aproxima de um segmento de reta. Por outro lado, quando e tende a zero, a elipse se aproxima de uma circunferência. Por que isso acontece? Quando a excentricidade tende a um dos extremos, temos que a semidistância focal c também tenderá ao mesmo valor, pois e é dada por c/a e, assim,

$$c \to 0 \Rightarrow e \to 0$$

$$c \to a \Rightarrow e \to 1$$

Note que c tendendo a zero implica que os pontos focais tendem ao centro da elipse e, consequentemente, o eixo maior e o eixo menor tendem a medidas iguais. Como esses são os eixos de simetria da elipse, ela se aproxima de uma circunferência.

Da mesma forma, c tendendo a a, implica que b tende a zero, pois da relação fundamental $a^2 = b^2 + c^2$. Assim, a elipse se degenera num segmento de reta.

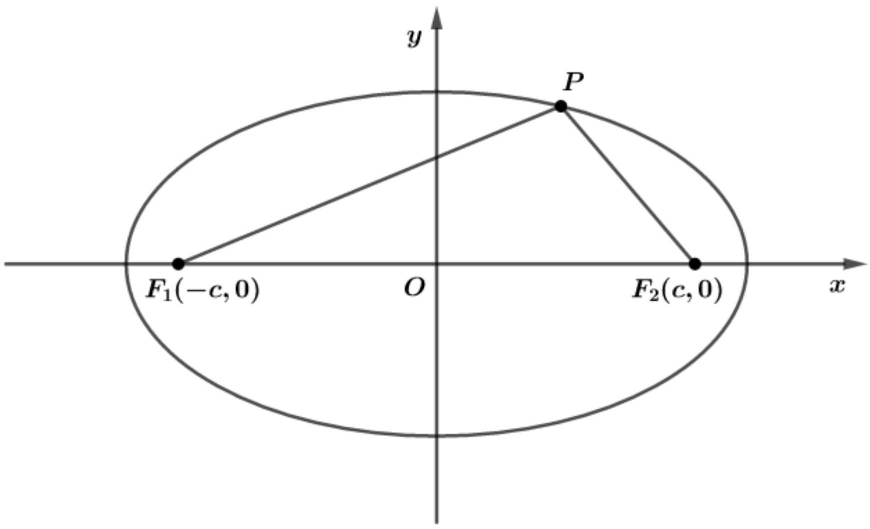
Podemos entender a elipse como uma circunferência "achatada". E quanto mais "achatada" for, maior será o número real e.

1.3.3. EQUAÇÃO REDUZIDA DA ELIPSE

Vamos deduzir a equação da elipse usando sua definição. Aprenderemos aqui as equações das elipses com eixo maior vertical e com eixo maior horizontal.

Sejam os pontos focais $F_1(-c, 0)$ e $F_2(0, c)$. Sabemos que se $P(x, y)$ é um ponto da elipse de focos F_1 e F_2, então

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$



Usando a fórmula de distância entre dois pontos:

$$\sqrt{\left(x - (-c)\right)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{\left(x - (-c)\right)^2 + (y - 0)^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$$

Elevando ao quadrado os dois membros da equação:

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=4a^2-4cx$$
$$a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=a^2-cx$$
$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$
$$a^2x^2\cancel{-2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2=a^4\cancel{-2a^2cx}+c^2x^2$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2=a^2(a^2-c^2)$$

Usando a relação fundamental $a^2=b^2+c^2$, temos $a^2-c^2=b^2$, logo:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividindo os dois membros da equação por a^2b^2, encontramos a **equação reduzida da elipse**:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

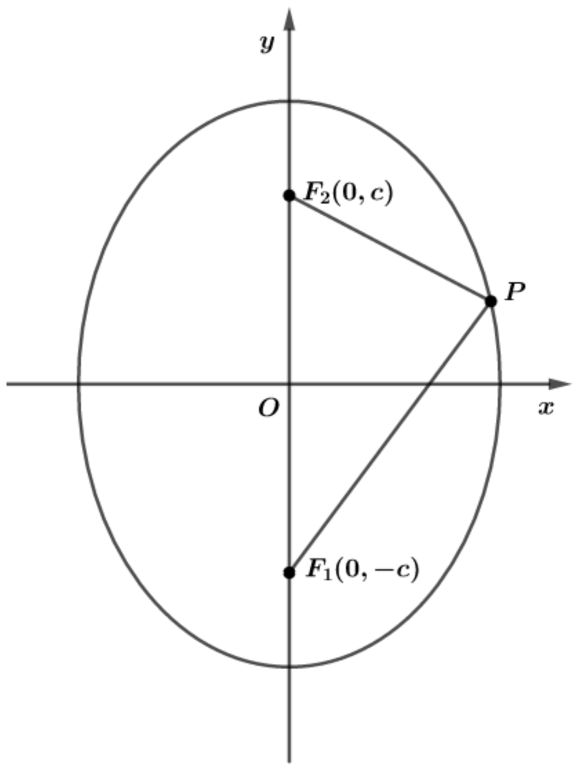
Essa é a equação da elipse com centro na origem e eixo maior na horizontal.

Perceba que se $a=b$, temos a equação reduzida da circunferência:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\Rightarrow x^2+y^2=a^2$$

Por isso, dizemos que a circunferência é um caso particular da elipse.

Vejamos agora a equação da elipse com eixo maior na vertical.



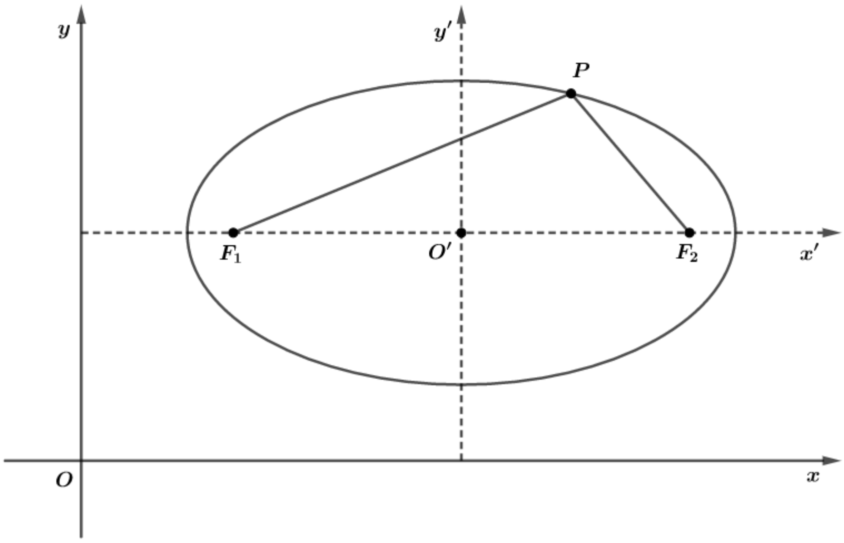
Usando a definição do lugar geométrico:

$$PF_1+PF_2=2a$$
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}=2a$$

Procedendo de forma análoga ao caso anterior, encontramos

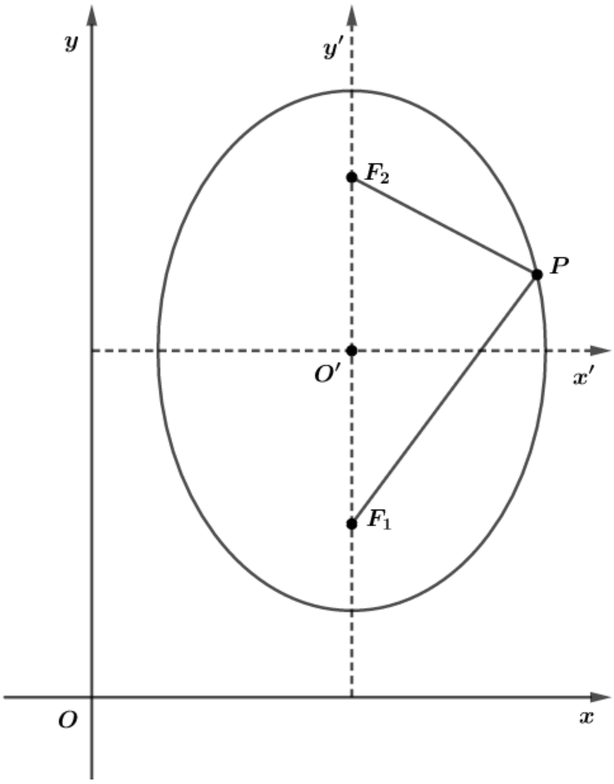
$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

Se o centro da elipse não estiver localizada na origem, podemos fazer artifício do sistema de eixos transladado:



$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$



$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1}$$

Como saber se a elipse possui eixo maior (ou eixo focal) paralelo ao eixo x ou ao eixo y?

Para saber isso, devemos observar a equação reduzida da elipse. Se o maior número estiver abaixo da variável x, então a elipse tem eixo paralelo ao eixo das abcissas. Se o maior número estiver abaixo da variável y, então o eixo maior é paralelo ao eixo das ordenadas.

Veja dois exemplos:

1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Nesse exemplo, perceba que $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$, pois $16 > 9$. Como 16 está abaixo de x^2, essa elipse possui eixo focal paralelo ao eixo x.

2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Aqui, temos $b^2 = 9$ e $a^2 = 16$. Como 16 está abaixo de y^2, essa elipse possui eixo focal paralelo ao eixo y.

Lembre-se, na elipse, a^2 sempre será o maior número da equação reduzida.

Podemos calcular a área da elipse pela seguinte fórmula:

$$A = \pi ab$$

Exemplo:

Considere a elipse dada por $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Determine a área da região interna dessa elipse.

Para calcular a área, basta ver que $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$. Assim, temos:

$$a = 4 \text{ e } b = 3$$

Logo:

$$A = \pi ab = \pi(4)(3) = 12\pi$$

Perceba que essa fórmula lembra muito a fórmula da área do círculo.

7. Dada a equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

Determine o centro, a medida do eixo maior, a medida do eixo menor e a distância focal.

Resolução:

Note que o maior número está abaixo da variável y, logo a elipse possui eixo de simetria vertical e:

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 2a = 10$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow 2b = 4$$

O centro é

$$O(0, 2)$$

Pela relação fundamental:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$25 = 4 + c^2$$

$$c^2 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21} \Rightarrow 2c = 2\sqrt{21}$$

Gabarito: centro $(\mathbf{0,2})$, $\mathbf{2a = 10, 2b = 4, 2c = 2\sqrt{21}}$

8. Determine a equação da elipse de excentricidade $1/2$, sabendo que seus focos são $F_1(-2,0)$ e $F_2(2,0)$.

Resolução:

Do enunciado, temos das coordenadas dos focos:

$$c = 2$$

A excentricidade é $e = 1/2$. Assim:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$$

O centro da elipse é o ponto médio do segmento F_1F_2, como F_1 e F_2 são simétricos em relação à origem e estão localizados no eixo x, temos como centro a origem.

Pela relação fundamental da elipse, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4^2 = b^2 + 2^2 \Rightarrow b = \sqrt{16-4} = 3\sqrt{2}$$

Como o eixo focal é horizontal, temos que o eixo maior está abaixo da variável x, logo, a equação reduzida é

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

Gabarito: $\mathbf{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1}$

9. Determine as coordenadas dos focos da elipse abaixo:

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

Resolução:

Inicialmente, devemos determinar as coordenadas do centro:

$$O(1,5)$$

Como o maior número está abaixo da variável y, temos que o eixo maior é vertical, logo temos que os focos serão dados por:

$$F_1(1, 5+c)\ e\ F_2(1, 5-c)$$

Da equação:

$$a^2 = 25\ e\ b^2 = 16$$

Pela relação fundamental:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 16 + c^2 \Rightarrow c^2 = 9 \therefore c = 3$$

Logo, os focos são:

$$F_1(1, 5+3)\ e\ F_2(1, 5-3)$$

$$F_1(1, 8)\ e\ F_2(1, 2)$$

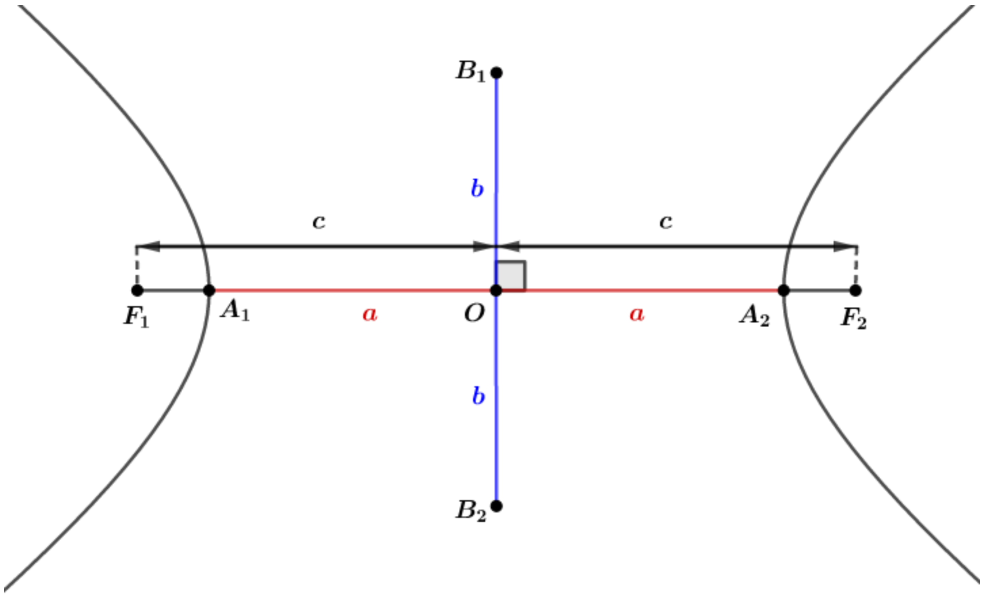
Gabarito: $F_1(1, 8)\ e\ F_2(1, 2)$

1.4. HIPÉRBOLE

A hipérbole é o lugar geométrico formado pelos pontos P do plano cujo módulo da diferença a dois pontos fixos, F_1 e F_2, é uma constante.

$$\boxed{|PF_1 - PF_2| = 2a}$$

Veja na figura os elementos da hipérbole.



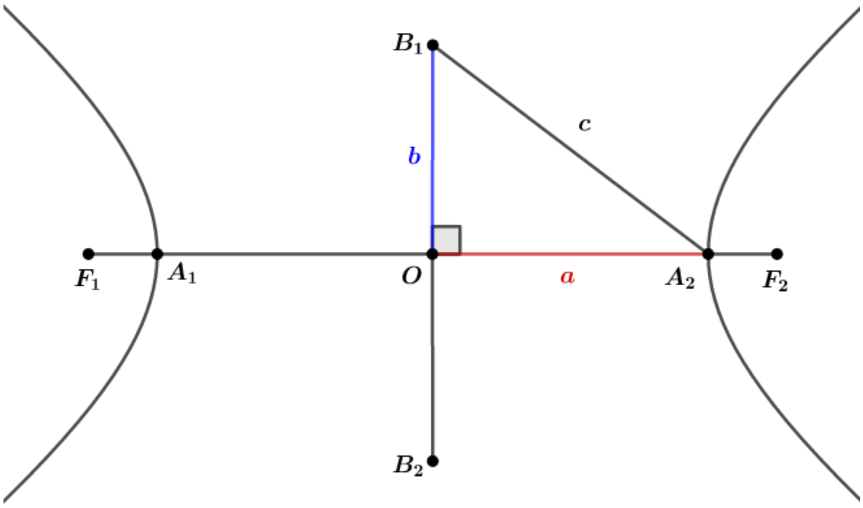
$$O - centro\ da\ hipérbole$$
$$F_1\ e\ F_2 - pontos\ focais$$
$$A_1A_2 - eixo\ real\ ou\ eixo\ transversal$$
$$B_1B_2 - eixo\ imaginário\ ou\ eixo\ conjugado$$
$$2c - distância\ focal$$
$$2a - medida\ do\ eixo\ real$$
$$2b - medida\ do\ eixo\ imaginário$$

Perceba que, ao contrário da elipse, o valor $2a$ é menor do que a distância dos focos, $2c$.

1.4.1. RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA HIPÉRBOLE

Sabendo que o eixo imaginário é perpendicular ao eixo real, temos que a relação fundamental da hipérbole é

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$



1.4.2. EXCENTRICIDADE DA HIPÉRBOLE

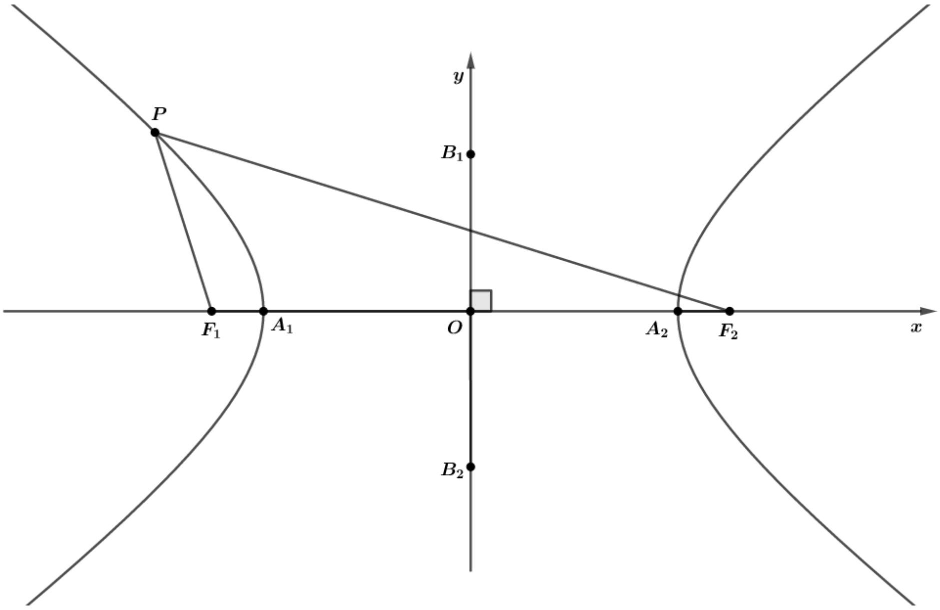
Da mesma forma como a elipse, a hipérbole também possui excentricidade e ela é calculada pela mesma razão

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

Como $c > a > 0$, temos que e é um número real positivo maior que 1.

1.4.3. EQUAÇÃO REDUZIDA DA HIPÉRBOLE

Vamos deduzir a equação da hipérbole. Inicialmente, consideremos uma hipérbole com eixo real na horizontal e centro na origem.



Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Pela definição desse lugar geométrico, temos:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

Usando a fórmula da distância entre dois pontos, podemos escrever:

$$\left|\sqrt{\left(x-(-c)\right)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

Desenvolvendo a equação e simplificando:

$$\sqrt{\left(x-(-c)\right)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{\left(x-(-c)\right)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 \cancel{-2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 \cancel{-2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 = a^2(c^2 - a^2)$$

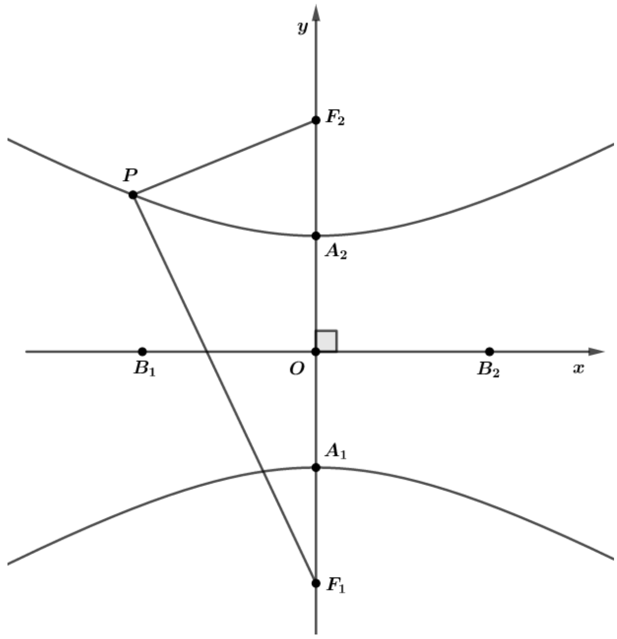
Usando a relação fundamental, temos $c^2 - a^2 = b^2$, logo:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Essa é a equação reduzida da elipse com eixo real na horizontal e centro na origem.

Se o eixo real estiver na vertical, a equação passa a ser



$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Se o centro da hipérbole não estiver na origem, basta usar o sistema de eixos transladados para encontrar a equação. Nesse caso, considerando como centro o ponto $C(x_0, y_0)$, temos:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1} \; eixo\ real\ horizontal$$

$$\boxed{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1} \; eixo\ real\ vertical$$

1.4.4. RETAS ASSÍNTOTAS

À medida que os pontos da hipérbole se afastam dos focos, a hipérbole tende a tangenciar duas retas, essas retas são chamadas de **retas assíntotas**.

Como fazemos para achar as retas assíntotas de uma hipérbole? Para isso, usamos a equação reduzida da hipérbole e igualamos a expressão do membro à esquerda a 0.

Vejamos um exemplo. Seja a hipérbole de equação reduzida dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Igualando a expressão da esquerda a 0, obtemos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 0$$

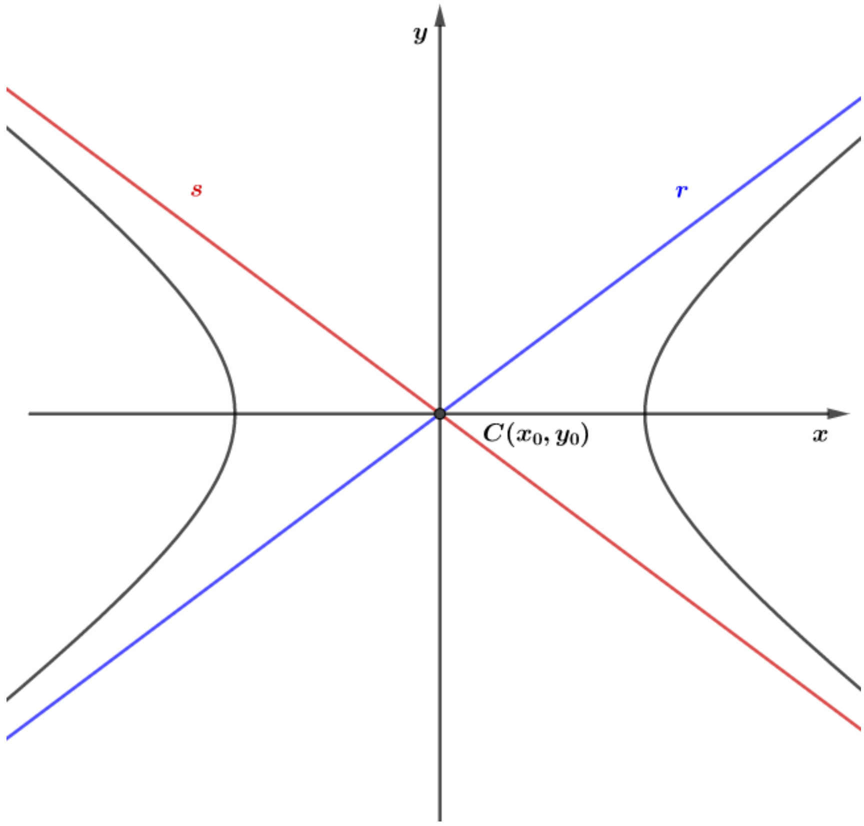
Agora, fatorando a diferença de quadrados, encontramos dois fatores:

$$\left[\frac{(x - x_0)}{a} - \frac{(y - y_0)}{b}\right]\left[\frac{(x - x_0)}{a} + \frac{(y - y_0)}{b}\right] = 0$$

Cada fator representa uma reta assíntota, portanto:

$$\begin{cases} r: \dfrac{(x-x_0)}{a} - \dfrac{(y-y_0)}{b} = 0 \\ s: \dfrac{(x-x_0)}{a} + \dfrac{(y-y_0)}{b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r: y = \dfrac{b}{a}x - \dfrac{b}{a}x_0 + y_0 \\ s: y = -\dfrac{b}{a}x + \dfrac{b}{a}x_0 + y_0 \end{cases}$$

Podemos ver pelo diagrama abaixo as retas assíntotas.



Note que as assíntotas passam pelo centro da hipérbole. Um outro modo de encontrar essas retas assíntotas é encontrar o coeficiente das retas assíntotas pela razão

$$m_r = \frac{b}{a}$$

$$m_s = -\frac{b}{a}$$

E substituir os coeficientes na equação da reta

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Vejamos um exemplo.

Seja a hipérbole dada por

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Encontre as retas assíntotas dessa hipérbole.

Pela equação dada, podemos ver que

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

Os coeficientes angulares das assíntotas são

$$m = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{3}{4}$$

O centro dessa hipérbole é o ponto $(0, 0)$, logo, as assíntotas são dadas por

$$r: y - 0 = \frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow r: y = \frac{3}{4}x$$

$$s: y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow s: y = -\frac{3}{4}x$$

Outra forma de encontrar essas retas é igualando a expressão à esquerda a zero e fatorá-la:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3}\right) = 0$$

Retas assíntotas:

$$r: \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 0 \Rightarrow r: y = \frac{3}{4}x$$

$$s: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 0 \Rightarrow s: y = -\frac{3}{4}x$$

10. Dada a equação

$$\frac{(x+1)^2}{100} - \frac{(y+3)^2}{125} = 1$$

Determine o centro, a medida do eixo real, a medida do eixo imaginário e a distância focal.

Resolução:

O centro é

$$O(-1, -3)$$

A medida do eixo real é:

$$a^2 = 100 \Rightarrow a = 10 \Rightarrow 2a = 20$$

A medida do eixo imaginário é:

$$b^2 = 125 \Rightarrow b = 5\sqrt{5} \Rightarrow 2b = 10\sqrt{5}$$

A distância focal é dada pela relação fundamental:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 100 + 125 = 225 \Rightarrow c = 15 \Rightarrow 2c = 30$$

Gabarito: centro $(-1, -3)$, $2a = 20, 2b = 10\sqrt{5}, 2c = 30$

11. Determine as coordenadas dos focos da hipérbole abaixo:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

Resolução:

Inicialmente, devemos determinar as coordenadas do centro:

$$O(0, -1)$$

Como a variável positiva é o x, temos que o eixo real é horizontal, logo seus focos são dados por:

$$F_1(c, -1) \ e \ F_2(-c, -1)$$

Da equação:

$$a^2 = 16 \ e \ b^2 = 9$$

Pela relação fundamental:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 9 = 25 \therefore c = 5$$

Logo, os focos são:

$$F_1(5, -1) \ e \ F_2(-5, -1)$$

Gabarito: $F_1(5, -1) \ e \ F_2(-5, -1)$

12. Determine as assíntotas da seguinte hipérbole:

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

Resolução:

Igualando a expressão da esquerda à zero e fatorando:

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{16} = 0$$

$$\left[\frac{x-2}{2} - \frac{(y+2)}{4}\right]\left[\frac{x-2}{2} + \frac{y+2}{4}\right] = 0$$

As assíntotas são:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} - \frac{(y+2)}{4} = 0 \\ \frac{x-2}{2} + \frac{y+2}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Gabarito: $2x - y - 6 = 0$ e $2x + y - 2 = 0$

13. Sabendo que a excentricidade da hipérbole é $5/3$ e seus focos são os pontos $F_1(0, 5)$ e $F_2(0, -5)$, determine a sua equação reduzida e encontre as equações das retas assíntotas.

Resolução:

Os focos estão localizados no eixo y, logo, seu eixo focal é vertical. Das coordenadas dos focos, temos $c = 5$.

Da excentricidade:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{5}{a} = \frac{5}{3} \Rightarrow a = 3$$

Usando a relação fundamental da hipérbole:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow b = 4$$

Como os focos são simétricos em relação à origem, temos como centro a própria origem. Portanto, a equação reduzida é:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1}$

1.5. RECONHECIMENTO DE UMA CÔNICA

Estudamos a equação das cônicas que podem ser cobradas na prova, resta aprender a identificar cada uma delas. As questões, normalmente, darão a equação geral da cônica e, para saber qual figura ela representa, devemos fatorar e analisar a sua equação reduzida. Vamos usar os exemplos abaixo para isso.

$\mathbf{1})\ x - 10y^2 + 60y - 90 = 0$

O primeiro passo é fatorar a equação. Note que temos apenas um termo linear em x e dois termos em y. Vamos fatorar os termos na variável y:

$$x - 10(y^2 - 6y) - 90 = 0$$

Agora, vamos completar a expressão quadrática $y^2 - 6y$ somando e subtraindo 9:

$$x - 10(y^2 - 6y + 9 - 9) - 90 = 0$$

$$x - 10[(y-3)^2 - 9] - 90 = 0$$

$$x - 10(y-3)^2 + 90 - 90 = 0$$

$$\boxed{\frac{x}{10} = (y-3)^2}$$

Essa é a equação de uma parábola da forma

$$2p(x - x_0) = (y - y_0)^2$$

Assim, o parâmetro dessa parábola é $2p = 1/10 \Rightarrow p = 1/20$ e seu vértice é $(0, 3)$.

$\mathbf{2})\ x^2 - 10x + y^2 + 4y + 28 = 0$

Aqui temos duas expressões quadráticas nas variáveis x e y. Vamos fatorar cada uma delas.

$$x^2 - 10x + 25 - 25 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 28 = 0$$
$$(x-5)^2 + (y+2)^2 - 25 - 4 + 28 = 0$$
$$\boxed{(x-5)^2 + (y+2)^2 = 1}$$

Essa é a equação de uma circunferência, pois é da forma

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Seu raio é 1 e seu centro é $(5, -2)$.

3) $16x^2 - 32x + 9y^2 - 36y - 92 = 0$

Novamente, vamos iniciar pela fatoração.

$$16(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) - 92 = 0$$

Completando os quadrados:

$$16(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) - 92 = 0$$
$$16[(x-1)^2 - 1] + 9[(y-2)^2 - 4] - 92 = 0$$
$$16(x-1)^2 - 16 + 9(y-2)^2 - 36 - 92 = 0$$
$$16(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 144$$
$$\frac{16(x-1)^2}{144} + \frac{9(y-2)^2}{144} = 1$$
$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1}$$

Encontramos a equação de uma elipse. Perceba que o maior número está abaixo da variável y, logo, ela possui eixo focal paralelo ao eixo y. Ela é da forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

As variáveis são $b^2 = 9 \Rightarrow \boxed{b = 3}$ e $a^2 = 16 \Rightarrow \boxed{a = 4}$, e seu centro é $(1, 2)$.

Da relação fundamental, encontramos a distância focal:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}\ (semidistância\ focal)$$
$$\boxed{2c = 2\sqrt{7}\ (distância\ focal)}$$

A excentricidade da elipse é

$$\boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}}$$

4) $5x^2 - 10x - 4y^2 - 495 = 0$

Fatorando a expressão do membro à esquerda:

$$5(x^2 - 2x) - 4y^2 - 495 = 0$$

$$5(x^2 - 2x + 1 - 1) - 4y^2 - 495 = 0$$

$$5[(x - 1)^2 - 1] - 4y^2 - 495 = 0$$

$$5(x - 1)^2 - 5 - 4y^2 - 495 = 0$$

$$5(x - 1)^2 - 4y^2 = 500$$

$$\frac{(x - 1)^2}{100} - \frac{y^2}{125} = 1$$

Essa é a equação de uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo x, pois o termo que está subtraindo é y^2. Ela é da forma

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Temos $a^2 = 100 \Rightarrow \boxed{a = 10}$ e $b^2 = 125 \Rightarrow \boxed{b = 5\sqrt{5}}$. Seu centro é $(1, 0)$.

Da relação fundamental:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{100 + 125} = \sqrt{225} \Rightarrow \boxed{c = 15}$$

A excentricidade dessa hipérbole é

$$\boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{15}{10} = 1{,}5}$$

1.6. PROBLEMAS DE TANGÊNCIA COM CÔNICAS

Com o que aprendemos até aqui, já conseguimos resolver diversos problemas de Geometria Analítica. Uma questão muito recorrente nas provas militares é sobre reta tangente às cônicas. Para resolver esse problema, devemos nos lembrar que, se a reta é tangente, o ponto de intersecção dela com a cônica é apenas um ponto. Dessa forma, vejamos como procedemos com um exemplo.

Seja a equação de cônica dada por $\lambda: x^2 + y^2 = 1$. Determine a equação da reta tangente à circunferência no ponto $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Resolução:

Dado que temos o ponto da reta tangente, podemos escrever a seguinte relação para a equação da reta tangente r:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = mx + y_0 - mx_0$$

Substituindo as coordenadas do ponto P na reta:

$$y = mx + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{m\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{r: y = mx + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - m)}$$

Agora, temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} \lambda: x^2 + y^2 = 1 \\ r: y = mx + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - m) \end{cases}$$

Fazendo a intersecção de r com λ, devemos encontrar apenas um ponto. Desse modo:

$$x^2 + \left(mx + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - m)\right)^2 = 1$$

Desenvolvendo e simplificando, encontramos:

$$(1 + m^2)x^2 + \sqrt{2}(1 - m)mx + \frac{m^2 - 2m - 1}{2} = 0$$

Essa é uma equação do segundo grau em x, para termos apenas uma solução, devemos ter $\Delta = 0$, logo:

$$\Delta = \left(\sqrt{2}(1 - m)m\right)^2 - 4 \cdot (1 + m^2) \cdot \left(\frac{m^2 - 2m - 1}{2}\right) = 0$$

Fazendo as contas e simplificando, obtemos:

$$(m + 1)^2 = 0 \Rightarrow m = -1$$

Substituindo esse valor na equação da reta:

$$y = (-1)x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - (-1)\right) \Rightarrow y = -x + \sqrt{2}$$

Portanto, a equação da reta tangente à circunferência no ponto $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é

$$\boxed{r: y = -x + \sqrt{2}}$$

Você deve ter notado que o problema de tangência acima se resumiu em encontrar o valor do coeficiente angular m da reta. Há um método mais fácil de encontrá-la, nesse usaremos um pouco de cálculo. Dado que temos um ponto da circunferência e queremos a reta tangente a ela nesse ponto, podemos calcular o coeficiente angular derivando-se a equação da circunferência (também funciona para qualquer equação de cônica, não apenas a circunferência), assim, analisemos a equação:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Nessa equação, temos duas variáveis (x e y), podemos derivá-la em relação à x.

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = \frac{d(1)}{dx}$$

Para o primeiro termo, temos:

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x$$

Para o segundo termo, temos uma função em y e queremos derivá-la em relação à x. Podemos de maneira simplificada, proceder da seguinte maneira:

$$\frac{dy^2}{dx} = \underbrace{\frac{dy^2}{dy}}_{2y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = 2y \cdot y'$$

*À princípio o método acima é informal, mas para a prova, faça desse modo.

E, por fim, a derivada de uma constante é zero, logo:

$$\frac{d(1)}{dx} = 0$$

Assim, obtemos:

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{x}{y}}$$

y' é o coeficiente angular que procuramos e (x, y) é a coordenada do ponto da circunferência. Substituindo os valores, encontramos:

$$m = y' = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \therefore \boxed{m = -1}$$

E esse é o mesmo resultado que encontramos sem o uso do cálculo.

Dado que qualquer cônica possui como equação geral:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Um bizu para aplicar a derivada nessa equação é decorar as seguintes derivadas:

$$\frac{d(Ax^2)}{dx} = A \cdot 2x$$
$$\frac{d(Bxy)}{dx} = B(y + xy')$$
$$\frac{d(Cy^2)}{dx} = C \cdot 2y \cdot y'$$
$$\frac{d(Dx)}{dx} = D$$
$$\frac{d(Ey)}{dx} = Ey'$$
$$\frac{d(F)}{dx} = 0$$

A maioria das questões podem ser resolvidas sem o uso de cálculo, por isso, não é obrigatório que você aprenda esse assunto. Mas essa ferramenta pode facilitar a resolução de algumas questões.

14. Determine as equações das retas que passam pelo ponto $P(0, -4)$ e são tangentes à circunferência $\lambda: (x + 2)^2 + y^2 = 9$.

Resolução:

A reta que passa pelo ponto P é

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 4 = mx \Rightarrow t: y = mx - 4$$

A reta é tangente à circunferência, então, substituindo-a na equação da circunferência, devemos encontrar apenas uma solução, isto é, $\Delta = 0$.

$$\lambda: (x + 2)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow \lambda: x^2 + 4x + y^2 - 5 = 0$$

Substituindo $y = mx - 4$ na equação acima:

$$x^2 + 4x + (mx - 4)^2 - 5 = 0$$
$$x^2 + 4x + m^2x^2 - 8mx + 11 = 0$$
$$(m^2 + 1)x^2 + 4(1 - 2m)x + 11 = 0$$

Encontramos uma equação do segundo grau em x, fazendo $\Delta = 0$, temos:

$$\Delta = 16 \cdot (1 - 2m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 11 = 0$$
$$4 \cdot (1 - 2m)^2 - 11 \cdot (m^2 + 1) = 0$$
$$4(4m^2 - 4m + 1) - 11(m^2 + 1) = 0$$
$$16m^2 - 16m + 4 - 11m^2 - 11 = 0$$
$$5m^2 - 16m - 7 = 0$$
$$m_1 = \frac{8+\sqrt{99}}{5} \; e \; m_2 = \frac{8-\sqrt{99}}{5}$$

Portanto, as equações das tangentes são:

$$t_1: y = \left(\frac{8+\sqrt{99}}{5}\right)x - 4$$
$$t_2: y = \left(\frac{8-\sqrt{99}}{5}\right)x - 4$$

Gabarito: $\boldsymbol{t_1: y = \left(\frac{8+\sqrt{99}}{5}\right)x - 4 \quad t_2: y = \left(\frac{8-\sqrt{99}}{5}\right)x - 4}$

2.CÔNICAS ROTACIONADAS

Vimos, no capítulo anterior, apenas a equação das cônicas com eixos paralelos aos eixos cartesianos. Mas além desses, podemos encontrar questões sobre cônicas rotacionadas. Vamos aprender a resolver problemas desse tipo.

Toda cônica possui uma equação geral da forma

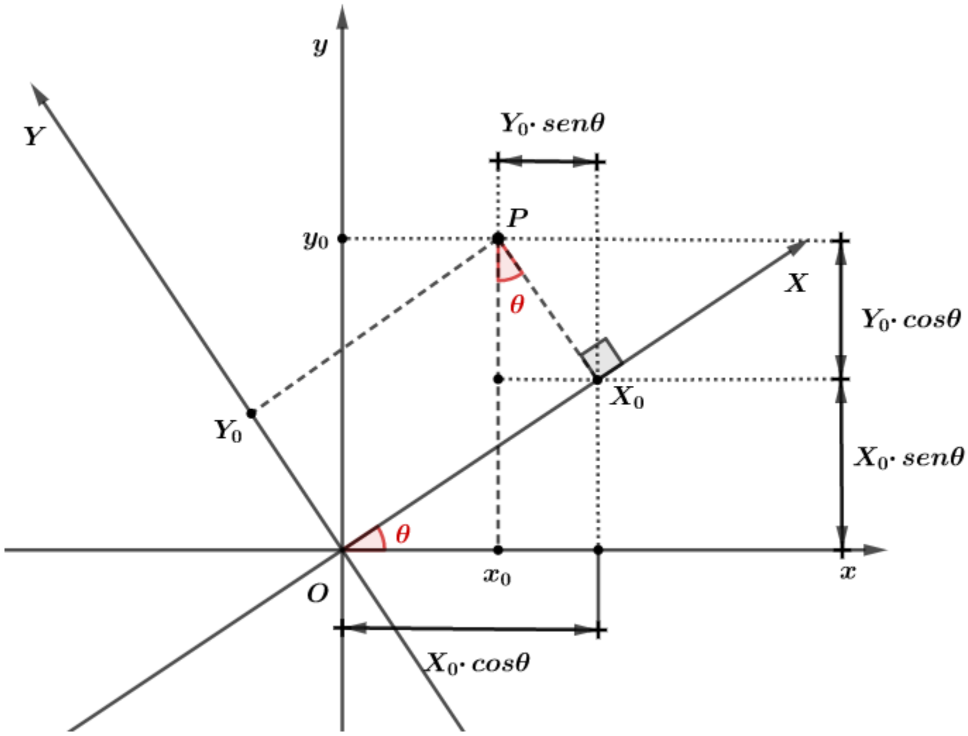
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Onde A, B, C, D, E e F são constantes reais.

As equações das cônicas que estudamos até aqui possuíam o coeficiente $B = 0$ e, por isso, bastava completar os quadrados para encontrar a equação reduzida e identificar o lugar geométrico. Mas se $B \neq 0$, temos cônicas de eixos não paralelos aos eixos coordenados e não podemos usar o método de completar quadrados para fatorar a equação da cônica. Para resolver esse problema, podemos fazer uso de um sistema coordenado rotacionado.

2.1. SISTEMA COORDENADO ROTACIONADO

Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto qualquer do plano representado pelo sistema cartesiano ortogonal xOy. Vamos rotacionar esse sistema de um ângulo θ no sentido anti-horário e obter uma relação entre as coordenadas do novo XOY e do antigo sistema xOy. Observe a figura abaixo.



Note que (X_0, Y_0) é a coordenada de P no sistema rotacionado.

Do diagrama, podemos escrever as seguintes relações:

$$X_0 \cdot \cos\theta = x_0 + Y_0 \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$y_0 = X_0 \cdot \operatorname{sen}\theta + Y_0 \cdot \cos\theta$$

Isolando as coordenadas x_0 e y_0, obtemos:

$$\begin{cases} x_0 = X_0 \cdot \cos\theta - Y_0 \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y_0 = X_0 \cdot \operatorname{sen}\theta + Y_0 \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Assim, dado um ponto $P(x, y)$ no plano cartesiano, se quisermos rotacionar o sistema de eixos do plano de um ângulo θ no sentido anti-horário e obter as coordenadas de P no novo sistema, basta fazer as seguintes transformações:

$$\boxed{\begin{cases} x = X \cdot \cos\theta - Y \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y = X \cdot \operatorname{sen}\theta + Y \cdot \cos\theta \end{cases}}$$

Podemos representar essa transformação usando matrizes:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}$$

Multiplicando a equação acima pela inversa da matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, obtemos:

$$\boxed{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

2.2. RESOLUÇÃO DE CÔNICAS ROTACIONADAS

Agora que aprendemos como rotacionar o sistema de eixos coordenados, podemos proceder à resolução das questões de cônicas rotacionadas. Tomemos o caso geral, onde $B \neq 0$.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como $B \neq 0$, não podemos simplesmente completar os quadrados para encontrar a equação reduzida. Nesse caso, devemos fazer as transformações

$$\begin{cases} x = X \cdot \cos\theta - Y \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y = X \cdot \operatorname{sen}\theta + Y \cdot \cos\theta \end{cases}$$

E encontrar um θ que zere o termo xy. Essa transformação rotacionará o sistema de eixos coordenados de um ângulo θ no sentido anti-horário de tal forma que a figura fique na forma de equação reduzida no novo sistema de eixos coordenados.

Assim, transformando as coordenadas, obtemos:

$$A(X \cdot \cos\theta - Y \cdot \operatorname{sen}\theta)^2 + B(X \cdot \cos\theta - Y \cdot \operatorname{sen}\theta)(X \cdot \operatorname{sen}\theta + Y \cdot \cos\theta)$$
$$+ C(X \cdot \operatorname{sen}\theta + Y \cdot \cos\theta)^2 + D(X \cdot \cos\theta - Y \cdot \operatorname{sen}\theta) + E(X \cdot \operatorname{sen}\theta + Y \cdot \cos\theta) + F = 0$$

Fazendo as contas e simplificando, encontramos a seguinte equação:

$$\left[Acos^2\theta + \frac{Bsen(2\theta)}{2} + Csen^2\theta\right]X^2 + (Dcos\theta + Esen\theta)X$$
$$+ \left[Asen^2\theta + \frac{Bsen(2\theta)}{2} + Ccos^2\theta\right]Y^2 + (-Dsen\theta + Ecos\theta)Y$$
$$+[(C - A)sen(2\theta) + Bcos(2\theta)]XY + F = 0$$

Queremos zerar o termo XY, logo, devemos ter

$$(C - A)sen(2\theta) + Bcos(2\theta) = 0$$

$$\boxed{\operatorname{cotg}(2\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{A - C}{B}}$$

Se $A \neq C$, podemos escrever

$$\boxed{\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C}}$$

Essa é a condição que o ângulo deve satisfazer para zerar o termo misto XY.

Vejamos um exemplo para praticar.

1) Determine o lugar geométrico definido pela equação

$$4x^2 - 8xy + 4y^2 - 9\sqrt{2}x + 7\sqrt{2}y + 16 = 0$$

Perceba que temos o termo misto xy na equação. Na notação da equação geral, temos

$$A = 4, B = -8, C = 4$$

Como $A = C$, para zerar o termo misto, devemos usar a seguinte relação

$$\text{cotg}(2\theta) = \frac{A - C}{B}$$

Substituindo os valores:

$$\text{cotg}(2\theta) = \frac{4 - 4}{-8} = 0 \Rightarrow 2\theta = 90° \Rightarrow \theta = 45°$$

Dessa forma, temos que rotacionar o sistema de um ângulo de $45°$. Usando a seguinte transformação

$$\begin{cases} x = X \cdot \cos 45° - Y \cdot \text{sen } 45° \\ y = X \cdot \text{sen } 45° + Y \cdot \cos 45° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$$

Encontramos

$$4\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)\right]^2 - 8\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)\right] + 4\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)\right]^2 - 9\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)\right]$$
$$+ 7\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)\right] + 16 = 0$$

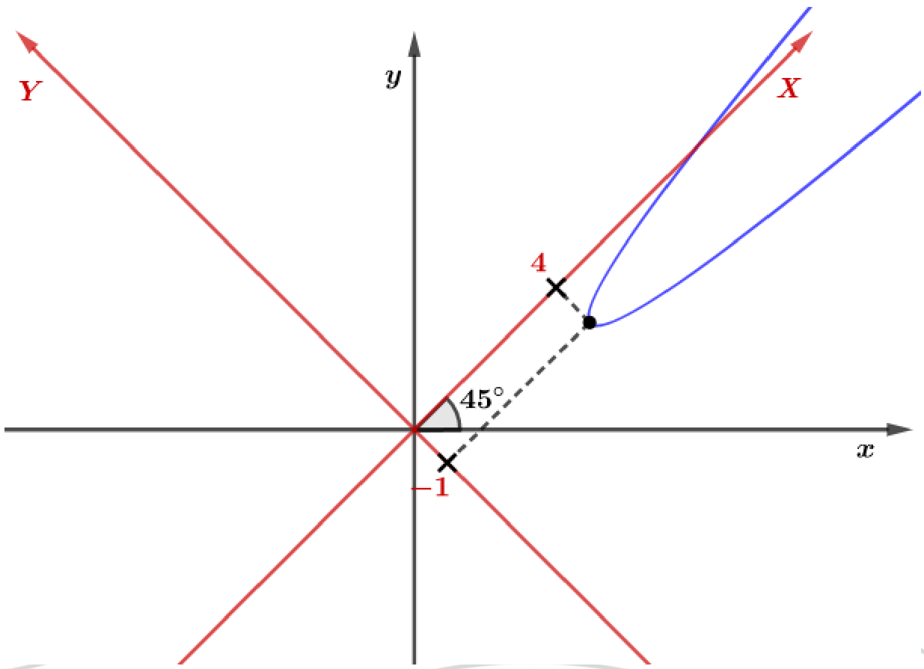
Fazendo as contas e simplificando, obtemos:

$$\boxed{\frac{X - 4}{4} = (Y + 1)^2}$$

Essa é a equação de uma parábola com eixo de simetria na horizontal e vértice $(4, -1)$, rotacionada de $45°$. O parâmetro dessa parábola é

$$2p = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{8}$$

O esboço dessa parábola é representado pela seguinte figura:

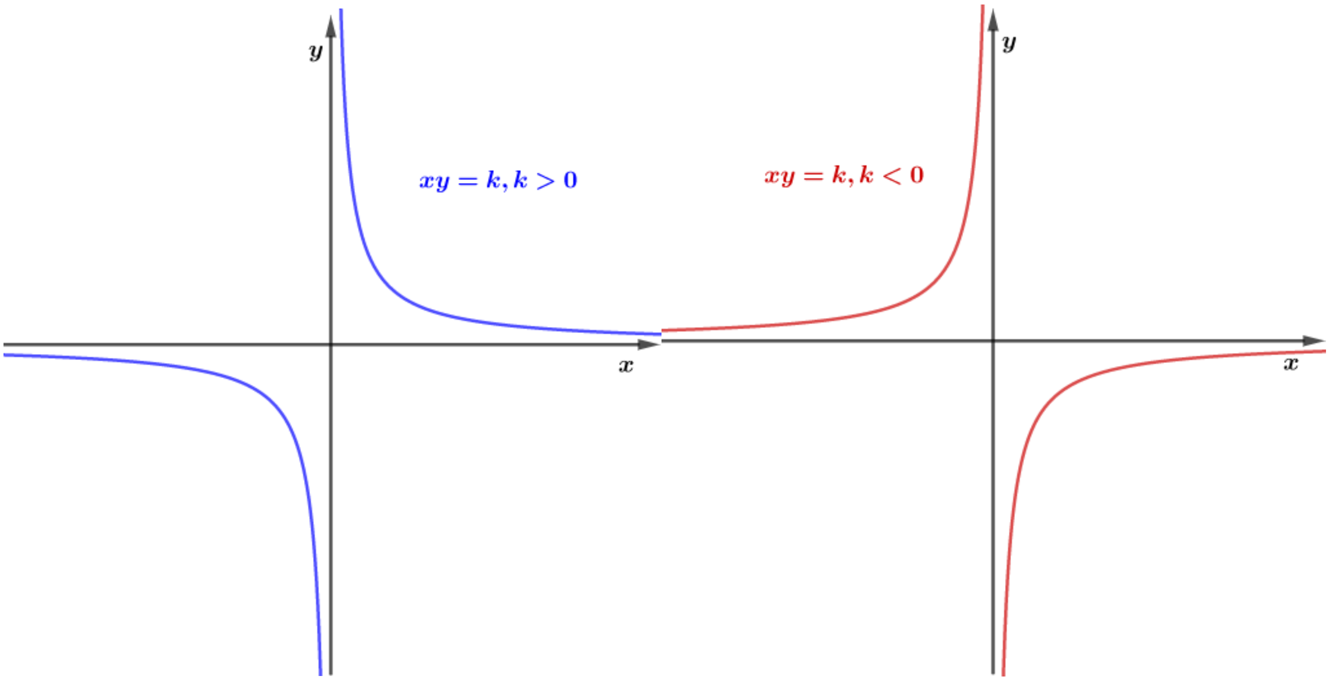


ATENÇÃO
DECORE!

Uma equação que pode ser cobrada nas provas é da seguinte hipérbole rotacionada:

$$xy = k, k \in \mathbb{R}^*$$

Essa hipérbole possui como retas assíntotas os próprios eixos coordenados.



Decore essa equação, pois caso ela seja cobrada, você ganhará tempo na prova!

2.3. CLASSIFICAÇÃO DAS CÔNICAS PELO DISCRIMINANTE

Dada uma equação geral de cônica da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Podemos classificar as cônicas pelo número $\boldsymbol{B^2 - 4AC}$, esse é conhecido como o **discriminante da equação da cônica**.

Veja a tabela abaixo as classificações.

Classificação das cônicas	
$\boldsymbol{B^2 - 4AC > 0}$	Hipérbole
$\boldsymbol{B^2 - 4AC < 0 \text{ e } A \neq C}$	Elipse
$\boldsymbol{B^2 - 4AC < 0 \text{ e } A = C}$	Circunferência

$B^2 - 4AC = 0$	Parábola

Nos casos em que a equação geral possui $B = 0$, podemos fatorar a equação geral para encontrar a equação reduzida pelo método de completar quadrados, fazendo isso, os termos que multiplicam x^2 e y^2, isto é, A e C, respectivamente, são colocados em evidência, e esses são os termos que determinam a equação reduzida da cônica. Veja para cada caso de cônica.

Parábola: a parábola possui apenas um termo elevado ao quadrado e, por isso, um dos números A ou C deve ser zero. Multiplicando-os encontramos sempre $AC = 0$.

Elipse: No caso da elipse, a equação reduzida é da forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Assim, os termos A e C da equação geral da elipse são necessariamente positivos e, portanto, o produto deles sempre deve resultar em um número positivo, ou seja, $AC > 0$.

Circunferência: Esse é um caso particular de elipse e, nesse caso, temos da sua equação geral $A = C$. Para ser elipse, sabemos que devemos ter $AC > 0$.

Hipérbole: Aqui, diferentemente da elipse, os termos quadráticos são subtraídos e, por isso, A e C da sua equação geral devem ter sinais opostos. Desse modo, o produto $AC < 0$.

Com os casos acima, vemos que para o caso onde $B = 0$, podemos classificar as cônicas pelo produto AC. Mas como fazemos a classificação se $B \neq 0$? Aí entra o discriminante da equação da cônica. Fazendo uma rotação de sistema usando as transformações

$$\begin{cases} x = X \cdot \cos\theta - Y \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y = X \cdot \operatorname{sen}\theta + Y \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Podemos reescrever $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ sem o termo misto xy:

$$A'X^2 + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

Fazendo as contas, podemos provar que

$$B^2 - 4AC = -4A'C'$$

Sabemos como classificar a cônica pelo produto $A'C'$. Como $B^2 - 4AC$ possui sinal oposto ao de $A'C'$, temos o resultado da tabela apresentada nesse tópico.

Tomemos o exemplo do tópico anterior para verificar por esse método a classificação da cônica.

$$4x^2 - 8xy + 4y^2 - 9\sqrt{2}x + 7\sqrt{2}y + 16 = 0$$

Nessa equação, temos $A = 4, B = -8$ e $C = 4$. Calculando o discriminante da cônica, obtemos:

$$B^2 - 4AC = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 - 64 = 0$$

$$\therefore B^2 - 4AC = 0$$

Portanto, como $B^2 - 4AC = 0$, temos que a equação representa uma parábola, o que condiz com o resultado que verificamos rotacionando-se o sistema.

15. Classifique as seguintes equações de cônicas:

a) $xy = 1$

b) $57x^2 - 14\sqrt{3}xy + 43y^2 - 576 = 0$

c) $6x^2 + 4\sqrt{3}xy + 2y^2 - 9x + 9\sqrt{3}y - 63 = 0$

Resolução:

Vamos usar o método do discriminante da cônica.

a) Temos $A = 0, B = 1$ e $C = 0$, logo:

$$B^2 - 4AC = 1^2 - 4 \cdot 0 \cdot 0 = 1 > 0$$

A equação é uma hipérbole.

b) Temos $A = 57, B = -14\sqrt{3}$ e $C = 43$, logo:

$$B^2 - 4AC = \left(14\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 57 \cdot 43 = -9216 < 0$$

Como $A \neq C$, temos que a equação representa uma elipse.

c) $A = 6, B = 4\sqrt{3}$ e $C = 2$

$$B^2 - 4AC = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 0$$

Como o discriminante é nulo, temos uma parábola.

Gabarito: a) hipérbole b) elipse c) parábola

16. Determine a excentricidade da cônica dada pela equação

$$57x^2 - 14\sqrt{3}xy + 43y^2 - 576 = 0$$

Resolução:

Note a presença do termo misto xy, assim, devemos rotacionar o sistema de um ângulo θ para zerar o termo misto. Esse ângulo deve satisfazer a seguinte relação:

$$cotg(2\theta) = \frac{A-C}{B}$$

Da equação, temos $A = 57, B = -14\sqrt{3}$ e $C = 43$, substituindo na relação acima:

$$cotg(2\theta) = \frac{57-43}{-14\sqrt{3}} = \frac{14}{-14\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg(2\theta) = -\sqrt{3}$$

$$2\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Agora, devemos transformar as coordenadas para o novo sistema. Para isso, podemos usar a matriz de rotação:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

Substituindo na equação:

$$57\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 - 14\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) + 43\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right)^2 - 576 = 0$$

Fazendo as contas e simplificando, obtemos:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Essa é a equação de uma elipse, com $a = 4$ e $b = 3$. Usando a relação fundamental:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

Portanto, a excentricidade é

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \boxed{e = \frac{\sqrt{7}}{4}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{e = \frac{\sqrt{7}}{4}}$

3. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS INEQUAÇÕES

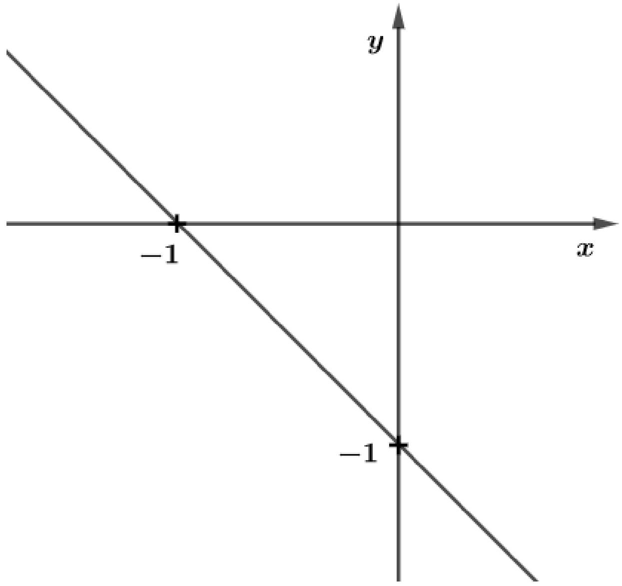
Estudamos inequações em aulas passadas, veremos aqui a interpretação geométrica das inequações.

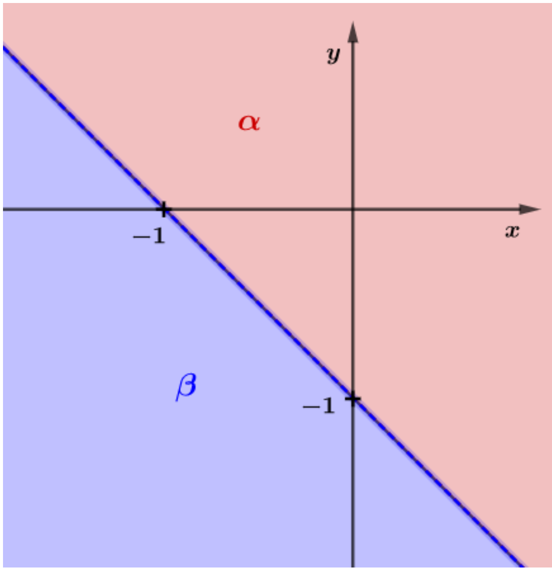
3.1. INEQUAÇÕES LINEARES

Sabemos da Geometria Plana que uma reta divide o plano em dois semiplanos. Assim, a inequação $ax + by + c > 0$ representa um semiplano. Vamos aprender a identificá-lo.

Tomemos a inequação $x + y + 1 > 0$, o que ela representa no plano cartesiano?

Para saber isso, podemos esboçar o gráfico da equação $x + y + 1 = 0$:





Perceba que a reta $x + y + 1 = 0$ divide o plano nos semiplanos α e β. Para saber qual a região da inequação $x + y + 1 > 0$, podemos testar a veracidade da inequação com um ponto qualquer. Vamos testar o ponto $P(0,0)$.

$$P(0,0) \Rightarrow 0 + 0 + 1 = 1 > 0 \; (verdadeiro)$$

Como a inequação é verdadeira para $P(0,0)$, temos que $P \in x + y + 1 > 0$. O ponto P está localizado na região α e, portanto, $x + y + 1 > 0$ é a região α.

FIQUE ATENTO!

Os pontos da reta $x + y + 1 = 0$ não fazem parte do plano α, pois a inequação não possui o símbolo de igualdade!

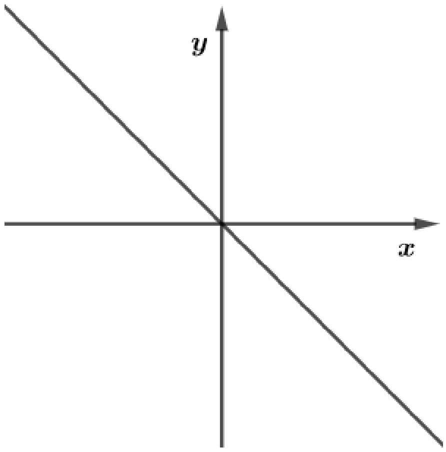
Vejamos outro exemplo.

Qual a região da inequação $x + y \leq 0$?

Nesse caso, note que $x + y \leq 0$ é igual à união da região $x + y < 0$ e da reta $x + y = 0$. Além do método que aprendemos, podemos analisar o gráfico de outro modo. Vamos isolar y da inequação:

$$y \leq -x$$

Representemos $y = -x$ no gráfico:



Agora, vamos testar os valores de x na inequação:

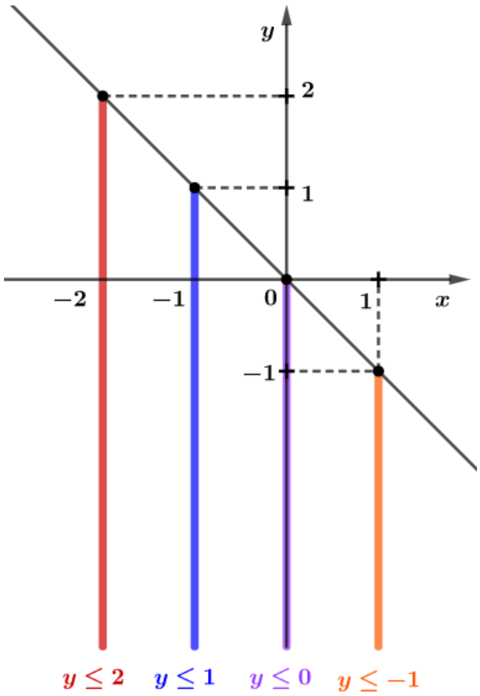
$$x = 1 \Rightarrow y \leq -1$$

$$x = 0 \Rightarrow y \leq 0$$

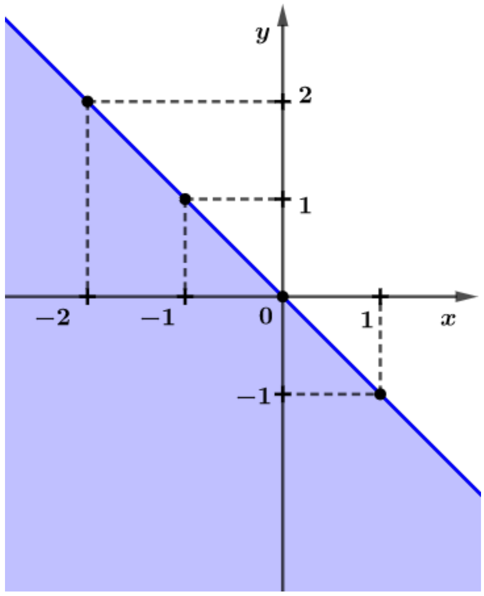
$$x = -1 \Rightarrow y \leq 1$$

$$x = -2 \Rightarrow y \leq 2$$

Representando essas coordenadas no plano, temos:



Perceba que qualquer x que tomarmos, o intervalo resultante será todos os pontos abaixo da reta. Desse modo, a inequação representa o semiplano formado pelos pontos abaixo da reta e os pontos da reta.



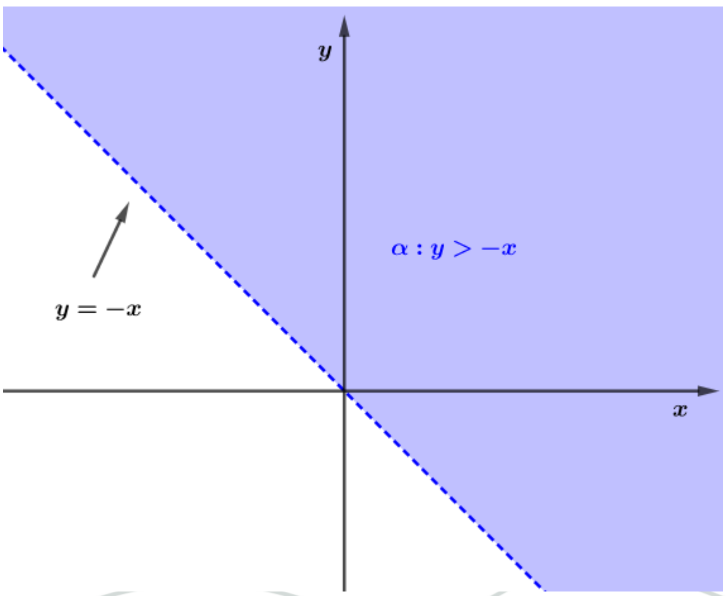
3.1.1. SISTEMA DE INEQUAÇÕES LINEARES

Um sistema de inequações lineares representa a região do plano delimitada pela região comum a cada inequação linear do sistema. Considere o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + y > 0 \\ -2x + 3y + 1 < 0 \end{cases}$$

Vamos esboçar a região delimitada pelo sistema. Inicialmente, devemos desenhar a região de cada inequação conforme acabamos de aprender e, por fim, fazemos a intersecção dessas regiões.

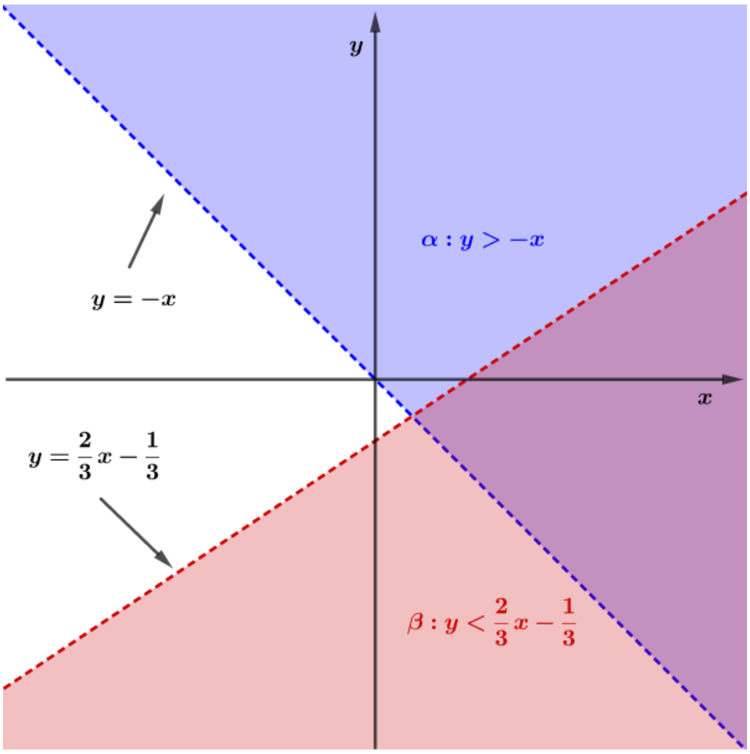
Começaremos por $x + y > 0$, isolando y, temos $y > -x$. Essa inequação representa a região do plano acima da reta $y = -x$ (perceba que a reta está em pontilhado para indicar que ela não faz parte do semiplano).



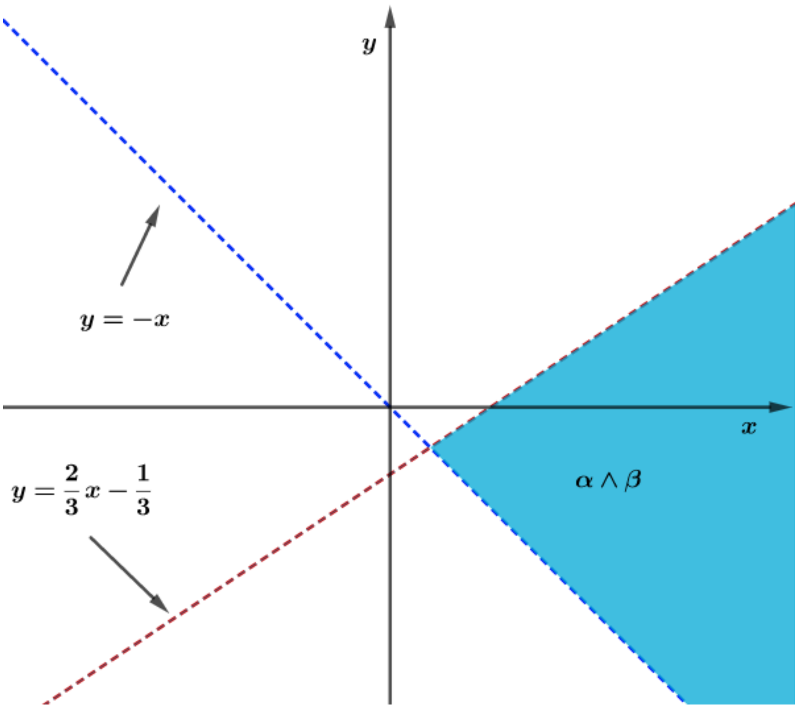
O próximo passo é esboçar $-2x + 3y + 1 < 0$, isolando y:

$$y < \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Essa inequação representa todos os pontos abaixo da reta $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.



Note que temos uma região comum às duas inequações. Essa é a solução do sistema.



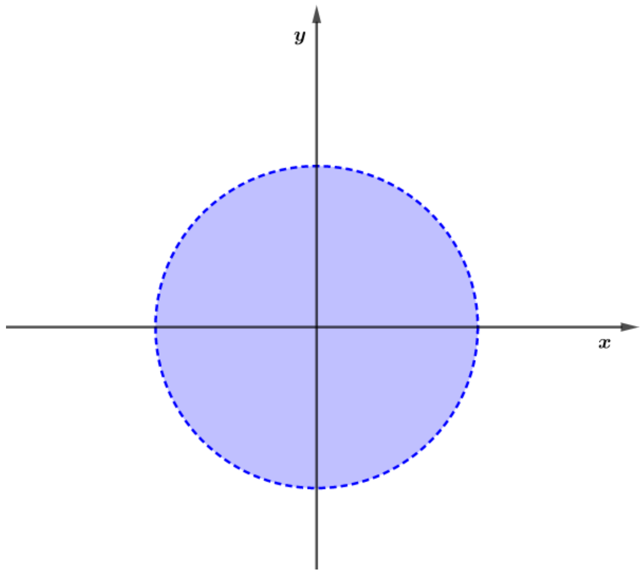
3.2. INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Da mesma forma como fizemos com as inequações lineares (retas), vamos analisar inequações quadráticas.

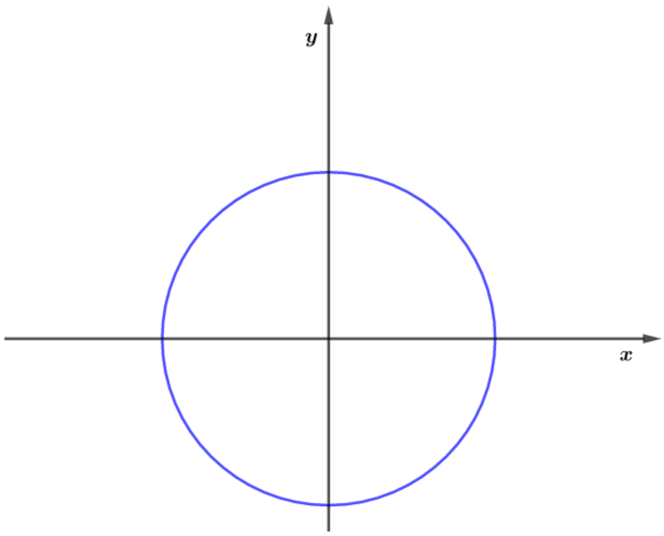
3.2.1. CIRCUNFERÊNCIA

Para analisar as inequações de circunferências, podemos usar o que aprendemos no tópico posição relativa entre ponto e circunferência. Assim, temos:

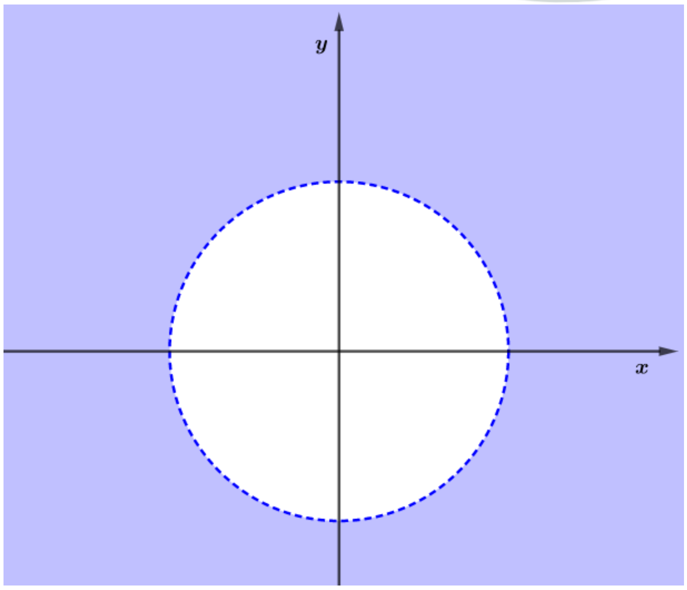
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$$
$$\rightarrow todos\ os\ pontos\ dentro\ da\ circunferência$$



$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$
$$\rightarrow pontos\ da\ circunferência$$

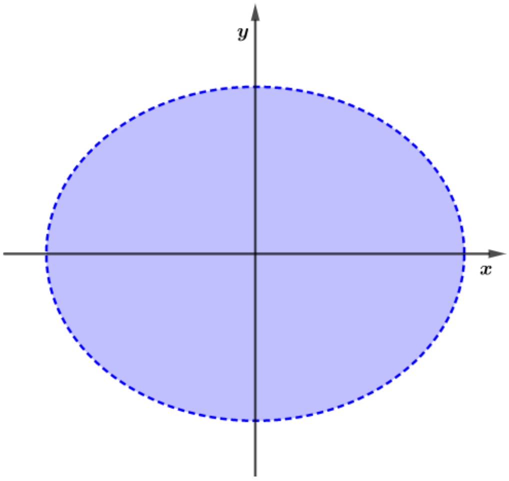


$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r^2$$
$$\rightarrow pontos\ fora\ da\ circunferência$$

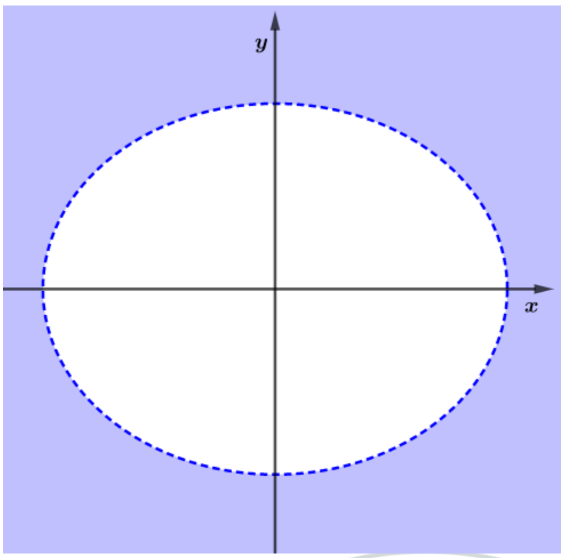


3.2.2. ELIPSE

Como a circunferência é um caso particular da elipse, as inequações envolvendo elipse serão análogas aos casos da circunferência.



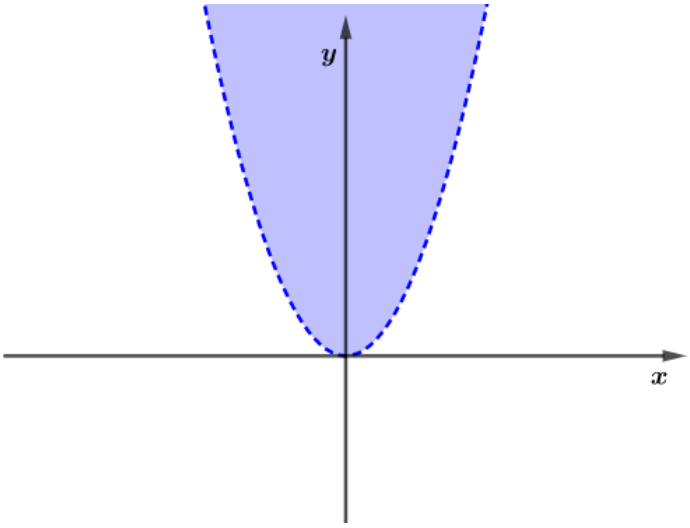
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} < 1$$
$$\rightarrow região\ interna\ da\ elipse$$



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} > 1$$
$$\rightarrow região\ externa\ da\ elipse$$

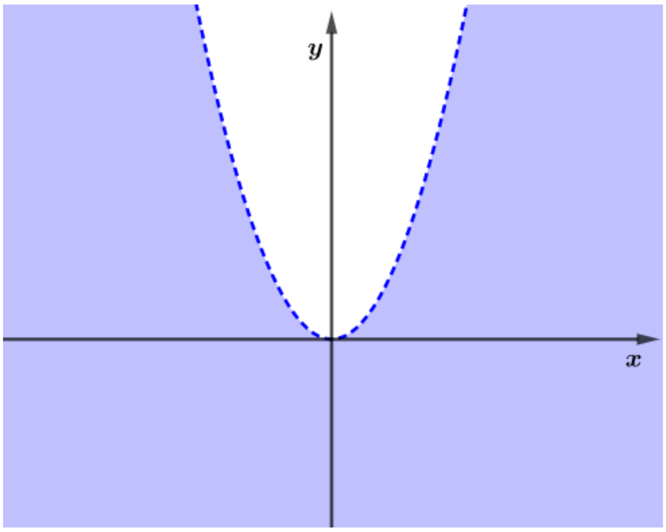
3.2.3. PARÁBOLA

Para a parábola, temos a região interna e a região externa.



$$2p(y-y_0) > (x-x_0)^2$$
$$\rightarrow \textit{região interna à parábola}$$

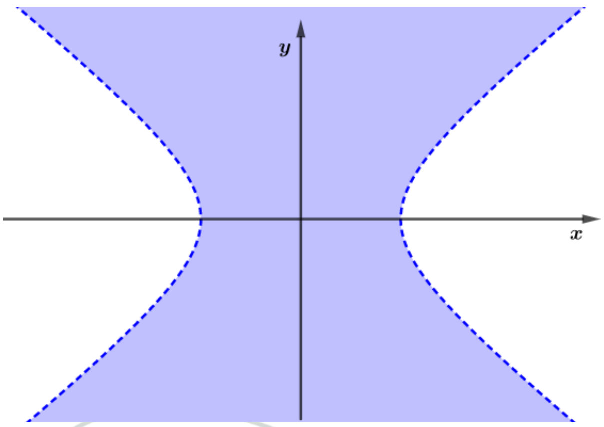
$$2p(y-y_0) < (x-x_0)^2$$
$$\rightarrow \textit{região externa à parábola}$$

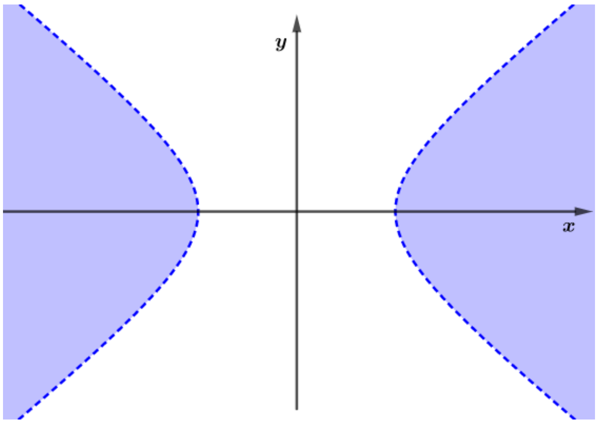


3.2.4. HIPÉRBOLE

Para a hipérbole, temos duas regiões definidas por cada curva e uma região entre as curvas.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} < 1$$
$$\rightarrow \textit{região entre as curvas}$$





$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}>1$$

$\rightarrow$ *duas regiões delimitadas pelas curvas*

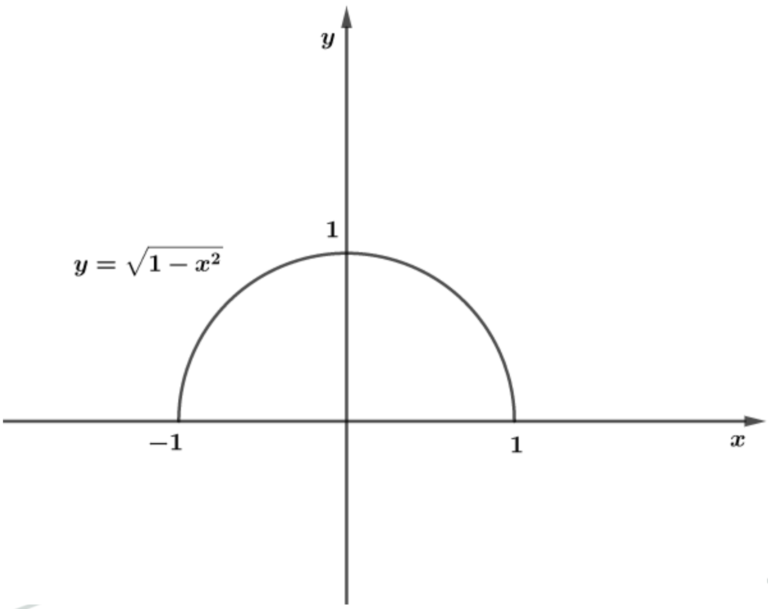
(ITA/2004) Determine os valores reais do parâmetro a para os quais existe um número real x satisfazendo $\sqrt{1-x^2} \geq a-x$.

Resolução:

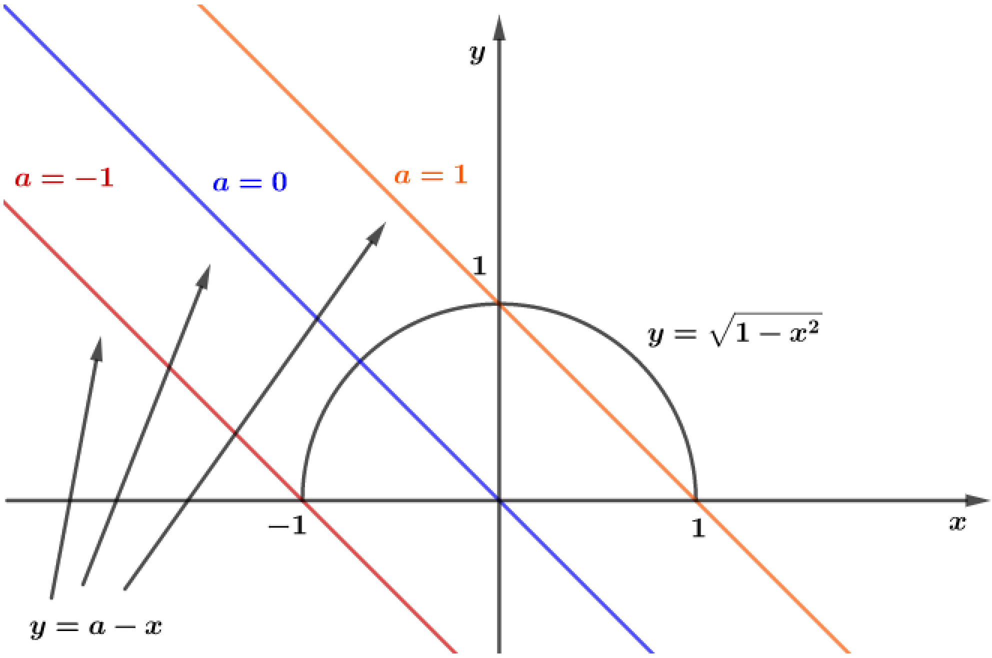
À primeira vista, esse problema aparenta ser um problema puramente algébrico. Mas podemos resolver a questão usando a Geometria Analítica. Observemos as expressões envolvidas e façamos $y=\sqrt{1-x^2}$ e $y=a-x$.

Note que $y=\sqrt{1-x^2}$ representa, no plano cartesiano, uma semicircunferência de raio 1 e $y=a-x$ é uma reta de coeficiente angular -1 e coeficiente linear a (parâmetro). Veja como o esboço do gráfico pode simplificar a resolução da questão.

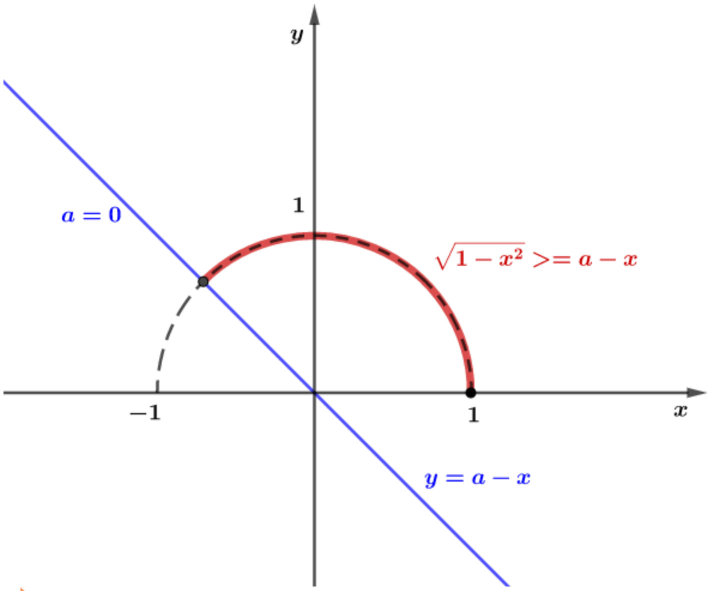
Inicialmente, desenhamos o esquema da semicircunferência.

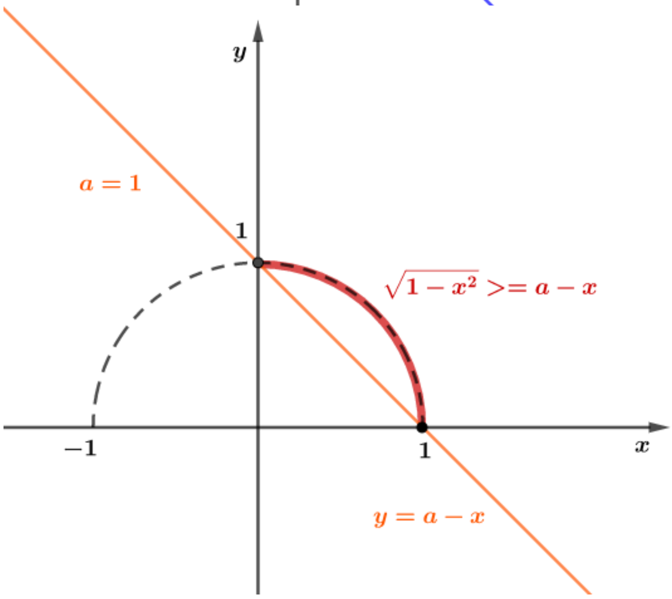


Agora, desenhamos a reta. Como a é um parâmetro, a reta $y = a - x$ pode transladar ao longo do eixo x desse modo:

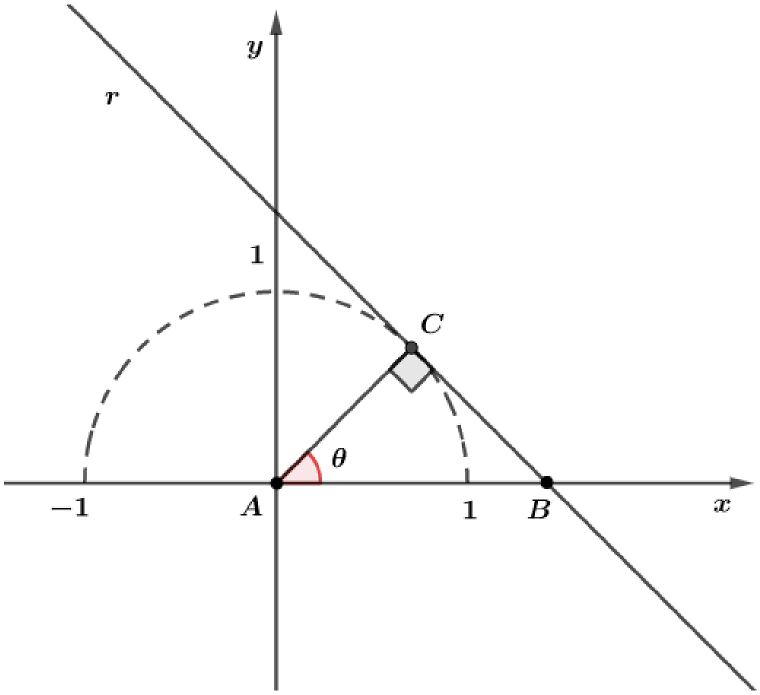


A questão pede os valores do parâmetro real a para que a inequação $\sqrt{1 - x^2} \geq a - x$ tenha solução real. Pelo gráfico acima, podemos ver que enquanto houver pontos da semicircunferência acima da reta $y = a - x$, teremos alguma solução real:





A curva em vermelho indica as soluções reais da inequação $\sqrt{1-x^2} \geq a - x$. Aumentando-se o valor de a, a reta translada para a direita. Assim, o problema se resume a encontrar o limite superior de a para que exista algum ponto da semicircunferência que ainda esteja acima da reta. Isso ocorrerá quando a reta tangenciar a semicircunferência no seu lado direito.



Note pela figura ao lado que ABC é um triângulo retângulo. Podemos encontrar o valor dos seus ângulos internos. Da reta $r: y = a - x$, temos como coeficiente angular $m_r = -1$. $\overline{AC}$ é perpendicular a essa reta, logo, o coeficiente da reta que contém $\overline{AC}$ é

$$m_{AC} = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-1} = 1$$

Sendo θ o ângulo da reta perpendicular, temos

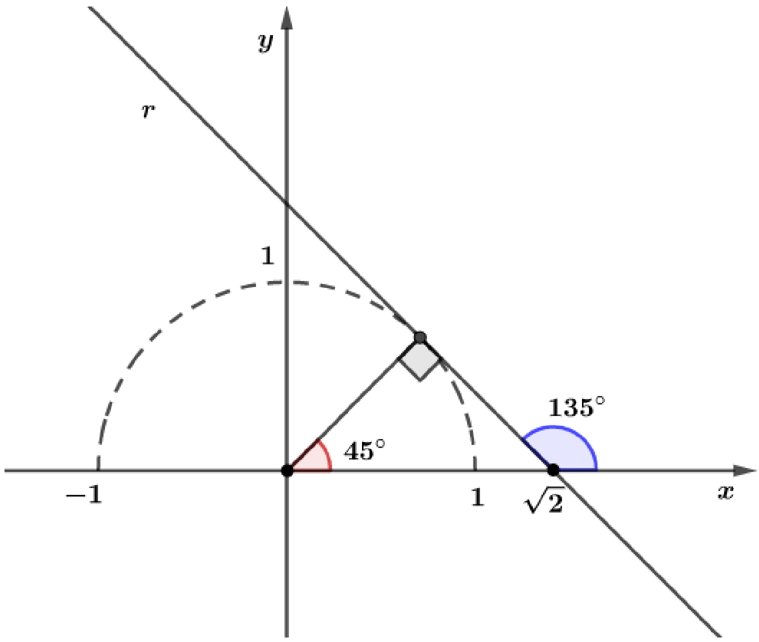
$$m_{AC} = \operatorname{tg}\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45°$$

Sabendo que AC é o raio da semicircunferência, temos

$$\cos\theta = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\cos\theta}$$

$$AB = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$$

Portanto, temos o seguinte esquema



A equação de r é

$$r: y = -x + a$$

Como $(\sqrt{2}, 0)$ é ponto da reta, temos

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -\sqrt{2} + a \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

Esse é o maior valor que a pode assumir para $\sqrt{1 - x^2} \geq a - x$ ter alguma solução real em x.

Portanto, para $a \leq \sqrt{2}$, a inequação possui solução real.

17. Calcule a área delimitada pelo seguinte sistema de inequações abaixo:

a) $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

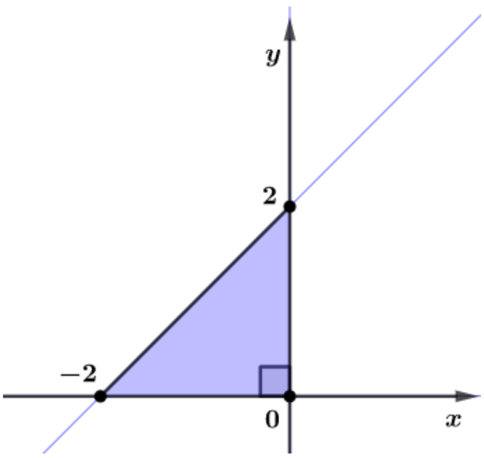
b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \\ x + y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Resolução:

a) Nesse sistema, perceba que $x \leq 0$ e $y \geq 0$ representam os pontos do segundo quadrante. Assim, vamos analisar a primeira inequação.

$$x - y + 2 \geq 0 \Rightarrow y \leq x + 2$$

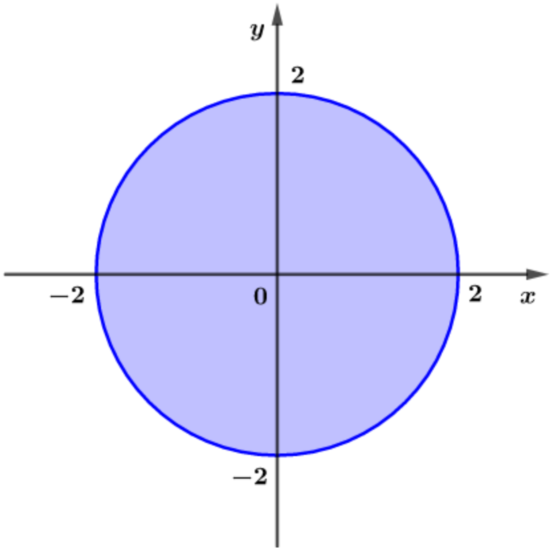
Para essa inequação, temos como reta $y = x + 2$. Essa reta possui coeficiente angular $m = 1$, então, o ângulo que essa reta forma com o eixo x é $45°$ e ela cruza o eixo y no ponto 2. A inequação pede todos os pontos abaixo dessa reta (pois a desigualdade é $\leq$), fazendo a intersecção das regiões definidas pelas três inequações, encontramos a seguinte figura:



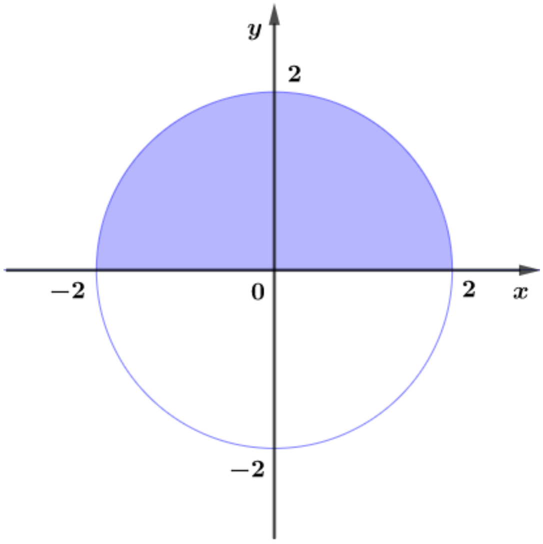
Essa figura é um triângulo retângulo isósceles de base e altura igual a 2. Dessa forma, a área é dada por:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

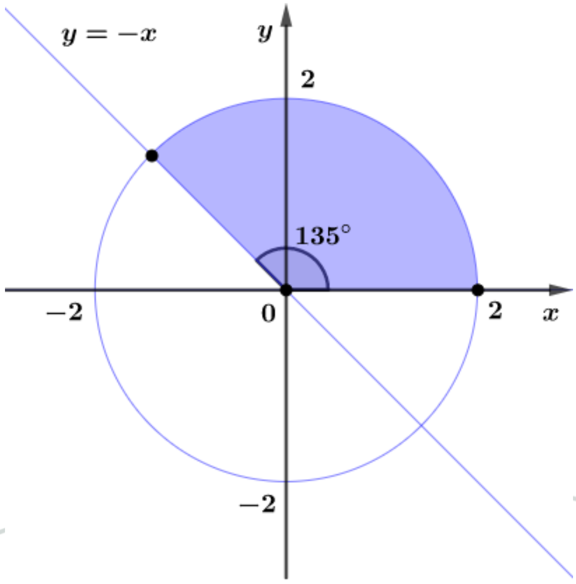
b) Da primeira inequação, temos $x^2 + y^2 \leq 4$. Ela representa um círculo de raio 2 centrado na origem.



A inequação $y \geq 0$ pede todos os pontos do primeiro e segundo quadrantes incluindo o eixo das abcissas. Assim, temos um semicírculo.



A segunda inequação é um semiplano dividido pela reta $y = -x$, queremos os pontos $y \geq -x$, logo, são os pontos acima dessa reta. Dessa forma, temos a seguinte figura:



Essa região é um setor circular com ângulo central $135°$. Vamos calcular a área do círculo:

$$S_c = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

Perceba que a região é a soma de um setor circular de $90°$ com um setor circular de $45°$, o setor circular de $90°$ é $1/4$ da área do círculo:

$$S_1 = \frac{4\pi}{4} = \pi$$

A área do setor circular de $45°$ é metade da área de S_1, logo:

$$S_2 = \frac{S_1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, a área pedida é

$$S = S_1 + S_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Gabarito: a) $S = 2$ b) $S = 3\pi/2$

4. NOÇÕES ELEMENTARES DE CÁLCULO

Vamos dar uma breve noção de Cálculo Diferencial e Integral. No primeiro ano do ensino superior, você verá toda demonstração e todo rigor das notações do Cálculo. Aqui, daremos apenas as informações necessárias para que você acumule mais uma ferramenta no seu arsenal de conhecimento.

Para isso, relembre alguns conceitos de funções da matemática. Dizemos que uma função é bijetora quando ela é injetora e sobrejetora. Conhecer bem todas as propriedades e saber trabalhar com funções é fundamental para compreender essa matéria.

O primeiro tema do Cálculo que iremos abordar é o conceito de Limite.

4.1. LIMITE

Dada a função $f(x)$ definida para $x \in I - \{a\}$, onde I é um intervalo aberto que contém o número real a. Chamamos de L o limite de $f(x)$ quando x tende a a, escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Exemplo 1: $f(x) = x^3$, $\lim_{x \to 2} f(x) = 8$.

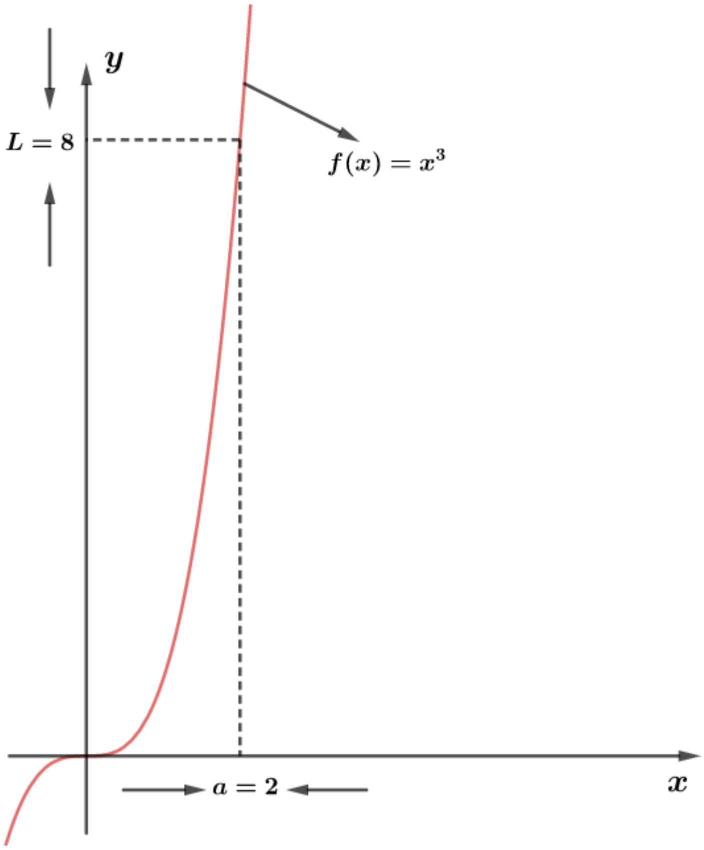


Figura 1: Gráfico da função x^3 utilizada no exemplo 1.

Exemplo 2: $f(x) = \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m}$, $\lim_{x \to a} f(x) = ?$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \lim_{x \to a} \left[\frac{(x-a)}{(x-a)} \frac{(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})}{(x^{m-1} + x^{m-2}a + \cdots + a^{m-1})} \right]$$

Note que $x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}$ tem n termos e $x^{m-1} + x^{m-2}a + \cdots + a^{m-1}$ tem m termos, então:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \frac{n}{m} \cdot a^{n-m}}$$

Algumas propriedades do limite:

- **P1) Unicidade do limite**: se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.
  Caso $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ ($x \to a^-$ significa x tendendo a a pela esquerda) e $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$ ($x \to a^+$ significa x tendendo a a pela direita), com $L_1 \neq L_2$, dizemos que não existe o limite de $f(x)$ quando x tende a a. Exemplo:

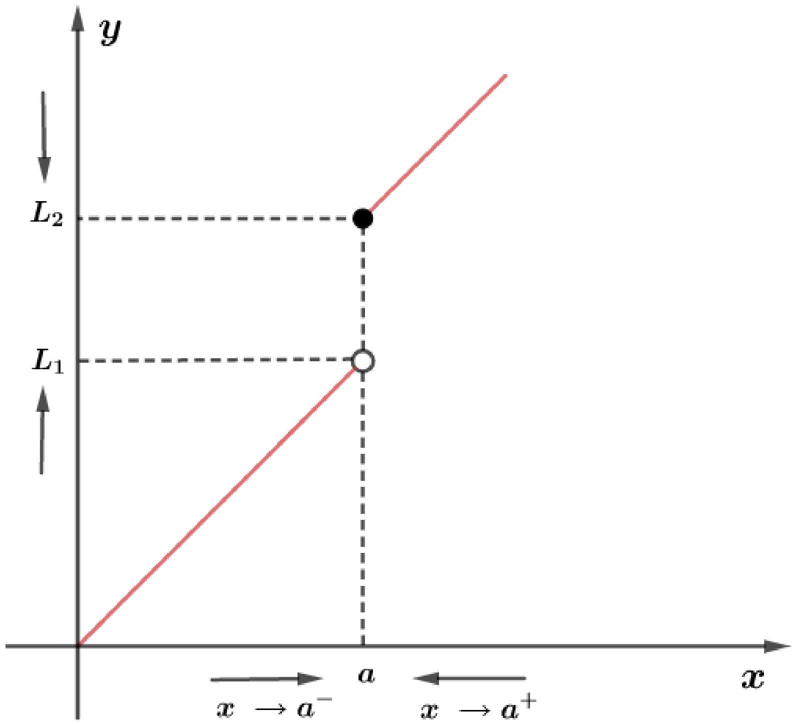


Figura 2: Exemplo de função na qual o limite não existe quando x tende a a. Entretanto, $f(a)$ existe e é igual a L_2.

- **P2) Limite de uma função constante:** se $f(x) = c$ definida dos reais nos reais, então $\lim_{x\to a} c = c$.
- **P3)** se $k \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), então $\lim_{x\to a}[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x\to a} f(x) = k \cdot L$.
- **P4)** se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = L \pm M$.
- **P5)** se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = L \cdot M$.
- **P6)** se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a}(f)^n(x) = L^n, n \in \mathbb{N}^*$.
- **P7)** se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0$, então $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$.
- **P8)** se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{L} = \sqrt[n]{L}$ com $L \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$ou $L < 0$ e n impar.
- **P9)** o limite de uma função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, com $a_i \in \mathbb{R}$, para x tendendo a a é igual ao valor numérico de $f(x)$ para $x = a$.

Alguns limites fundamentais:

- $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$
- $\lim_{x\to a}\left(\frac{senx - sena}{x-a}\right) = \cos(a)$
- $\lim_{x\to a}\left(\frac{cosx - cosa}{x-a}\right) = -sen(a)$
- $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $a > 0 \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x - 1}{x}\right) = \ln a$.

Exemplos:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{x}$:

$\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2\left(\frac{sen(2x)}{2x}\right) = 2\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{2x}$ se $y = 2x$ quando $x \to 0$, então $y \to 0$ também. Então: $\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{2x} = \lim_{y\to 0}\frac{sen(y)}{y} = 1$. Logo: $\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{2x} = 2\cdot 1 = 2$.

2. $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}$**:**

Fazendo $y = \frac{x}{3}$, se $x \to \infty$, então $y \to \infty$, logo: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{3}{3y}\right)^{3y} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^3 = e^3$.

Dada uma função definida em um intervalo aberto I e a um elemento de I, dizemos que f é contínua em a, quando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Nosso objetivo não é sabermos tudo de limite, mas apenas ter uma noção. Por isso, não vamos nos estender muito nesse assunto.

4.2. DERIVADAS

Dada f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I. Denota-se derivada de f no ponto x_0 o limite:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

se este limite existe e for finito.

Comumente, indicamos a derivada de f no ponto x_0 com as seguintes notações:

$$f'(x_0)\ ou\ \left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}\ ou\ Df(x_0)$$

Chamamos a diferença $\Delta x = x - x_0$ de **acréscimo** ou **incremento da variável** $\boldsymbol{x}$ relativamente ao ponto x_0. Da mesma forma, chamamos de **acréscimo** ou **incremento da função f** relativamente ao ponto x_0.

Denotamos por **razão incremental de f** relativamente ao ponto x_0 o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

É comum indicar a derivada de f no ponto x_0 das seguintes maneiras:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\ ou\ \boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}\ ou\ \boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

4.2.1. REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA DERIVADA

Dada f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I. Vamos admitir que f é derivada no intervalo aberto I, isto é, existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in I$.

Podemos representar graficamente por:

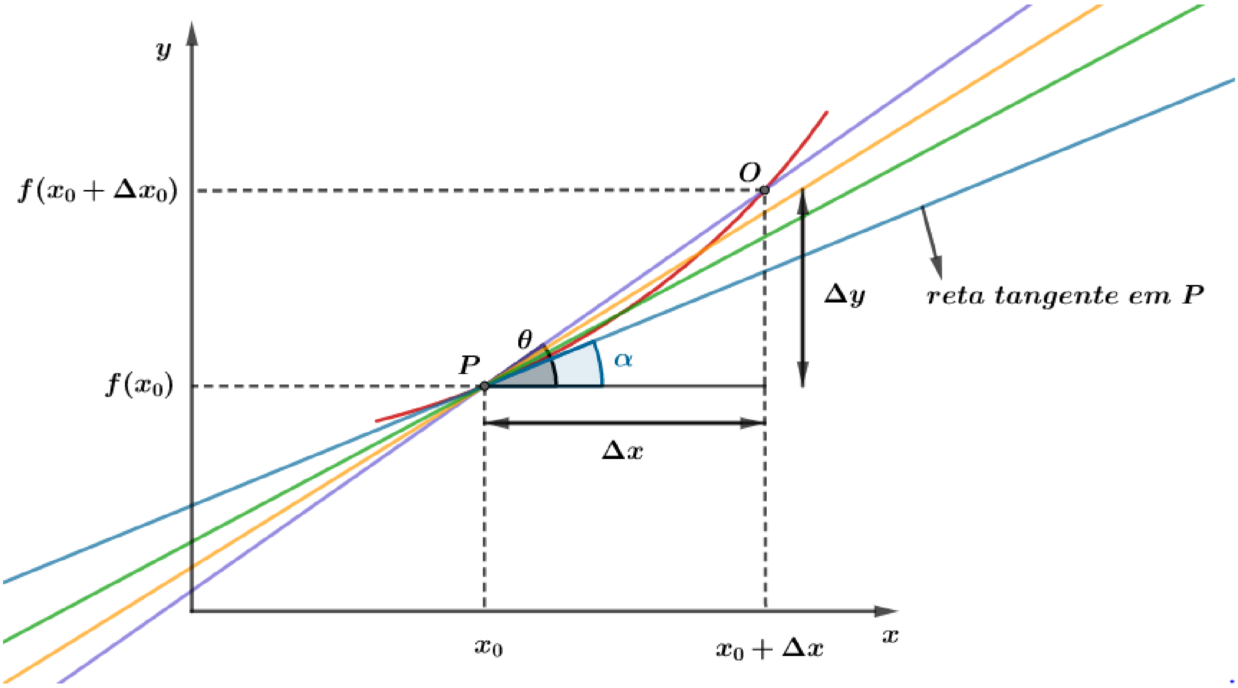


Figura 3: Interpretação geométrica da derivada de uma função em um dado ponto.

Note que a reta secante em vermelho possui coeficiente angular $tg\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Logo, $tg\theta$ é a razão incremental de f em relação ao ponto x_0.

Desde que f é contínua em I, à medida que vamos caminhando com O as retas secantes se aproximam cada vez mais da reta tangente à curva no ponto P. No limite teremos que:

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = tg\alpha}$$

Chamamos $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ de variação instantânea relativamente ao ponto x_0.

Algumas derivadas elementares:

- $f(x) = cte \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- $f(x) = senx \Rightarrow f'(x) = cosx$
- $f(x) = cosx \Rightarrow f'(x) = -senx$
- $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$, quando $a = e$ (e é o número de Euller), então $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \ln e = e^x \cdot 1 \therefore \boxed{f'(x) = e^x}$
- $f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Algumas regras de derivação importantes. Vamos considerar duas funções $u(x)$ e $v(x)$ deriváveis em um intervalo aberto. Temos as seguintes regras:

- **Derivada da soma**: se $f(x) = u(x) + v(x)$, então:

$$\boxed{f'(x) = u'(x) + v'(x)}$$

- **Derivada do produto**: se $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, então:

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

- **Derivada da função multiplicada por uma constante:** se $f(x) = k \cdot u(x)$, então:

$$\boxed{f'(x) = k \cdot u'(x)}$$

- **Derivada do quociente:** se $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, com $v(x) \neq 0$ em I, então:

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}}$$

- **Derivada de uma função composta (regra da cadeia):**

$$\boxed{F(x) = f\big(g(x)\big) \Rightarrow F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)}$$

Exemplo 1: $F(x) = \cos(2x)$. Definindo as funções que estabelece a composição das funções, temos:

$$f(x) = 2x \text{ e } g(x) = \cos(x), \text{ logo:}$$

$$f'(x) = 2 \text{ e } g'(x) = -sen(x)$$

Se $F(x) = g\big(f(x)\big) = \cos\big(f(x)\big) = \cos(2x)$, então:

$$F'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$$

$$F'(x) = -sen\big(f(x)\big) \cdot 2$$

$$\boxed{F'(x) = -sen(2x) \cdot 2}$$

Exemplo 2: $F(x) = \cos^3 x$. Definindo as funções que estabelece a composição das funções, temos:

$$f(x) = \cos(x) \text{ e } g(x) = [x]^3$$

Então:

$$f'(x) = -sen(x) \text{ e } g'(x) = 3 \cdot x^2$$

Se $F(x) = g\big(f(x)\big) = g(\cos(x)) = \cos^3 x$, então:

$$F'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 3 \cdot [f(x)]^2 \cdot \big(-sen(x)\big)$$

$$F'(x) = 3 \cdot \cos^2 x \cdot \big(-sen(x)\big)$$

$$\boxed{F'(x) = -3 \cdot \cos^2(x) \cdot sen(x)}$$

4.2.2. DETERMINAÇÃO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

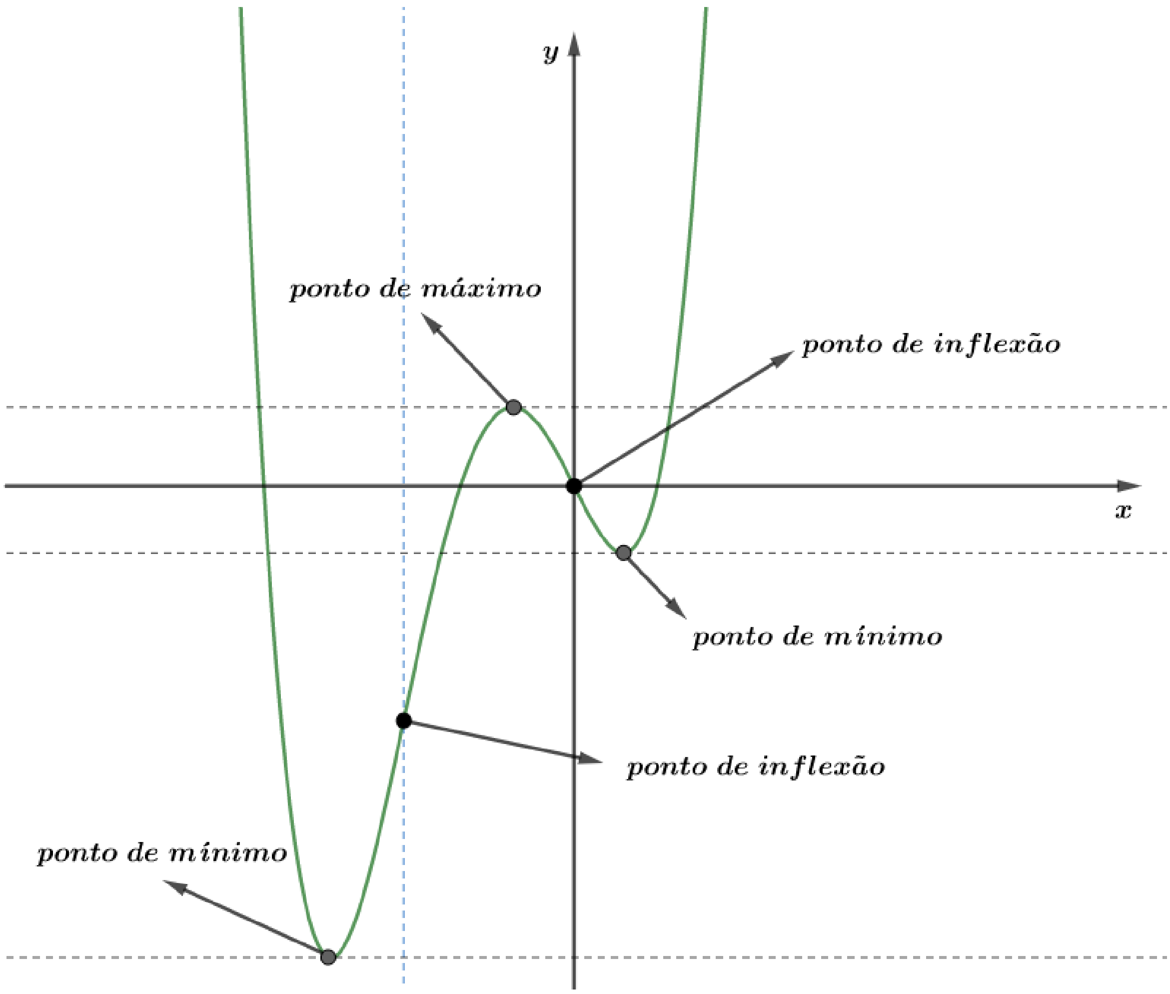
Dada uma função f uma função contínua e derivável até f'' em um dado intervalo I. Se $f'(x_0) = 0$, então:

- x_0 é **ponto de máximo local** quando: $f''(x_0) < 0$.
- x_0 é **ponto de mínimo local** quando: $f''(x_0) > 0$.

Se f admite f''' (derivada até a terceira ordem), então:

- x_0 é **ponto de inflexão** se: $f''(x_0) = 0 \; e \; f'''(x_0) \neq 0$.

Exemplo gráfico da função $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x$.



4.3. NOÇÕES DE CÁLCULO INTEGRAL

A razão que levou à criação do Cálculo Integral surgiu com a necessidade de calcular áreas de figuras onde os contornos não eram linhas retas.

Para introduzirmos a ideia da integral, vamos admitir conhecida a área de um retângulo definido por uma função constante $f(x) = h$ tal que $h > 0$, então:

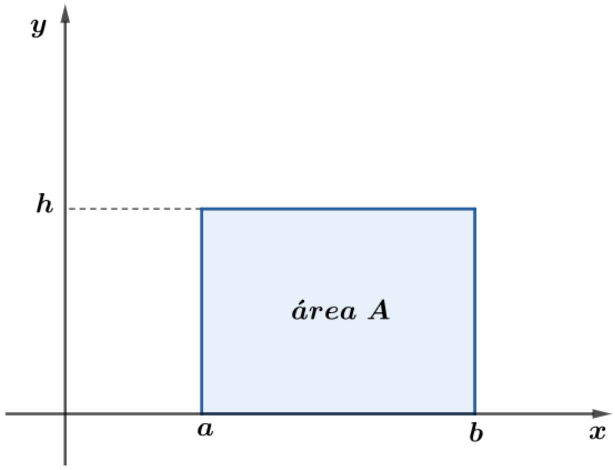


Figura 4: Área de um retângulo.

Assim, temos que a área desejada vale $A = h \cdot (b - a)$.

Contudo, caso $f(x)$ não fosse constante, um caminho para procurarmos o valor da área abaixo da curva no intervalo $[a, b]$ seria dividirmos o intervalo em subintervalos suficientemente pequenos de tal maneira que podemos considerar neles $f(x)$ constantes, fazendo uma boa aproximação.

Podemos aplicar essa ideia da seguinte forma:

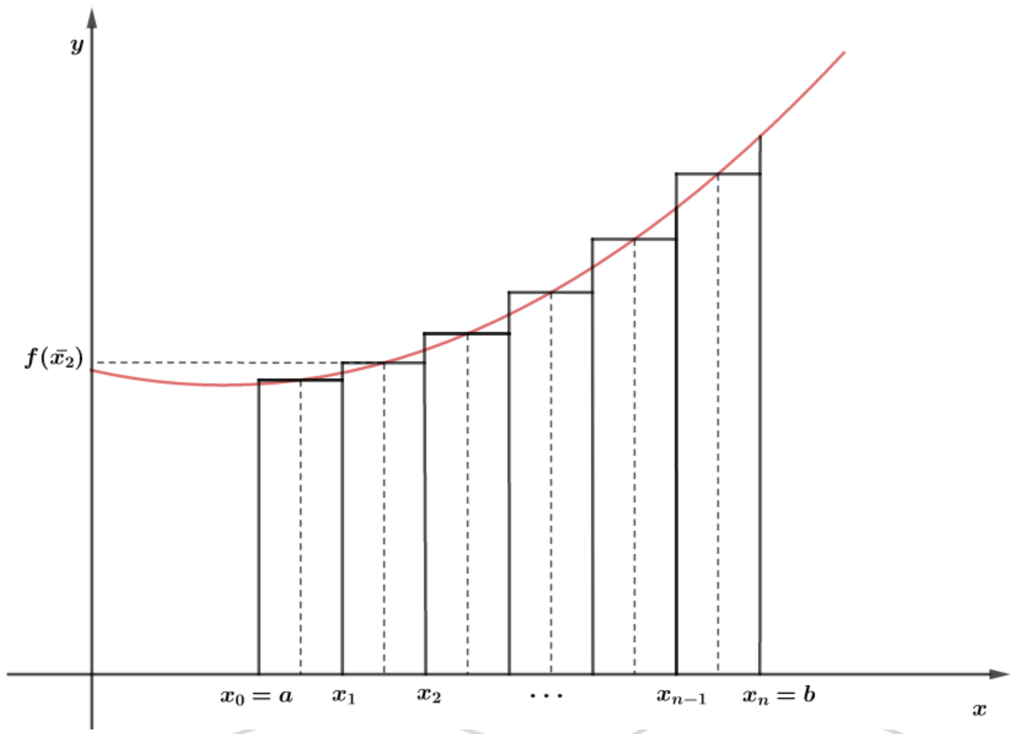


Figura 5: Área abaixo da curva de a até b, sendo aproximada pela soma de n áreas de retângulos.

Note que ao dividir $[a, b]$ em subintervalos, temos as seguintes condições:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Observe que os n subintervalos possuem comprimento de $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Tomando $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e admitindo $f(x)$ constante e igual a $f(\bar{x}_i)$ em $[x_{i-1}, x\_i]$, então temos que a área de cada retângulo pequenino é dada por:

$$f(\bar{x}_i) \cdot \Delta_i x$$

Assim, podemos aproximar a área delimitada pela curva pela soma desses retângulos pequeninos:

$$A \cong f(\bar{x}_1) \cdot \Delta_1 x + f(\bar{x}_2) \cdot \Delta_2 x + \cdots + f(\bar{x}_i) \cdot \Delta_i x + \cdots + f(\bar{x}_n) \cdot \Delta x_n$$

De outra forma, podemos representar essa soma por uma notação mais enxuta:

$$\boxed{A \cong \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \cdot \Delta_i x}$$

Analisando essa equação, cada vez que dividimos nosso intervalo $[a, b]$ em mais retângulos, estamos aproximando a soma das áreas dos retângulos à área desejada. Dessa forma, quando pegamos intervalos $(\Delta_i x)$ tão pequenos quanto desejamos, a soma das pequenas áreas deixa de ser chamada de somatórios discretos e passa ser chamada de integral de f em $[a, b]$ e representado por $\int_a^b f(x)dx$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \cdot \Delta_i x}$$

Podemos usar a integral para calcular área de figuras curvas, como, por exemplo, $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Nosso objetivo aqui não é dar um curso completo de Cálculo, apenas aprender um método bastante prático para resolver questões de Matemática. Por isso, vamos apresentar alguns resultados úteis para nosso curso.

Teorema Fundamenta do Cálculo:

Se $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, então $A'(x) = f(x)$ $\left(\text{ou } f(x) = \frac{dA(x)}{dx}\right)$.

De modo geral, dizemos que a integral é indefinida quando fazemos apenas o processo de antiderivação, isto é, não definimos seu valor numérico para um intervalo fechado.

Exemplo:

$$f(x) = \frac{x^5}{5} + 2 \text{ e } g(x) = x^4$$

Note que ao fazer temos:

$$f'^{(x)} = 5 \cdot \frac{x^{5-1}}{5} = x^4 = g(x)$$

Isto mostra que:

$$f'(x) = g(x)$$

Chamamos f de **primitiva** de g ou de **integral indefinida** de g.

Entretanto, quando vamos fazer $\int x^4 dx$, devemos levar em consideração uma possível constante que existia e se perdeu no processo de derivação:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

Essa constante C será encontrada de acordo com alguma informação do problema.

Assim, quando estamos procurando a primitiva $F(x)$ devemos buscar a função tal que $F'(x) = f(x)$.

Algumas integrais indefinidas conhecidas:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq 1$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$
- $\int \cos(ax) = \frac{sen(ax)}{a} + C$
- $\int sen(ax) = -\frac{\cos(ax)}{a} + C$
- $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$

Por outro lado, para integral definida temos que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemplo: $\int_0^2 x^3 \, dx$?

Vamos pensar inicialmente na primitiva:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

Como os limites de integração são $[0,4]$, então temos que:

$$\int_0^2 x^3 \, dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_0^2 = \left(\frac{2^4}{4} + C\right) - \left(\frac{0^4}{4} + C\right) = 4.$$

Para o cálculo da integral indefinida, não interessa quem é a constante C pois ela será cancelada ao efetuar $F(b) - F(a)$.

4.4. LISTA DE NOÇÕES DE CÁLCULO

1. (Exercício de fixação)

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 2}(4x^2 - 5x + 6)$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+3}{2x-3}$

c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{3x-2}$

d) $\lim_{x\to a}\frac{senx-sena}{x-a}$

e) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

2. **(Exercício de fixação)**

Determine a equação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x$ no seu ponto de abscissa $x = -2$.

3. **(Exercício de fixação)**

Um ponto material se move sobre uma reta com velocidade descrita por $v = \sqrt[3]{2t}$ (SI), no instante de tempo t. Determine a aceleração do ponto no instante $t = 3\ s$.

4. **(Exercício de fixação)**

Encontre a reta tangente ao gráfico de $f(x) = sen(x)$, para $x = \frac{\pi}{3}$.

5. **(Exercício de fixação)**

Um ponto material movendo sobre uma linha reta de acordo com a equação horária $s(t) = 2\cos(3t)$ (SI). Determine a velocidade no instante $t = \frac{\pi}{3}\ s$ e a aceleração no instante $t = \frac{\pi}{3}\ s$.

6. **(Exercício de fixação)**

Utilizando as regras de derivação, calcule a derivada de cada uma das funções:

a) $f(x) = sen^n(x), n \in \mathbb{N}^*$

b) $f(x) = sen^4 4x$

c) $f(x) = sen(\cos(x))$

d) $f(x) = \log_2 x$

e) a derivada da inversa da função $f(x) = x^3 + x$, no ponto $x_1 = 1$.

7. **(Exercício de fixação)**

Calcule os pontos de máximos, de mínimos e de inflexão da função $f(x) = 2x^3 - 8x$.

8. **(Exercício de fixação)**

Calcule as integrais indefinidas:

a) $\int (x^3 + \cos x)dx$

b) $\int (3senx + 4cosx)dx$

c) $\int \frac{(x^2-1)}{x^2} dx$

9. **(Exercício de fixação)**

Calcule $\int_0^{2\pi} senx\, dx.$

10. **(Exercício de fixação)**

Calcule a região entre as curvas $y = x^2$ **e** $y = -x^2 + 6x.$

4.5. GABARITO SEM COMENTÁRIOS

1. a) 12 b) -2 c) $-3/5$ d) $cos\ a$ e) e^2
2. $y = -6x - 4$
3. $0,20\ m/s^2$
4. $y = \frac{x}{2} + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$
5. 0 e $18\ m/s^2$
6. a) $n \cdot sen^{n-1}(x) \cdot \cos x$ b) $16 \cdot sen^3(4x) \cdot \cos 4x$ c) $-sen(x) \cdot \cos(cos(x))$ d) $\frac{1}{x \cdot \ln 2}$ e) $\frac{1}{4}$
7. máximos locais: $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ e $f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$; mínimos locais $x = +\sqrt{\frac{4}{3}}$ e $f\left(+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$; ponto de inflexão $(0,0)$.
8. a) $\frac{x^4}{4} + sen(x) + C$; b) $= -3\cos x + 4\ sen\ x + C$; c) $x + \frac{1}{x} + C$
9. 0
10. $9\ u.a.$

4.6. LISTA NOÇÕES DE CÁLCULO COMENTADA

1. **(Exercício de fixação)**

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 2}(4x^2-5x+6)$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+3}{2x-3}$

c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{3x-2}$

d) $\lim_{x\to a}\frac{senx-sena}{x-a}$

e) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

Comentários:

a) utilizando a propriedade do limite para função polinomial ($f(x)=4x^2-5x+6$), temos que o limite será dado pelo $f(2)$, então:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=4\cdot 2^2-5\cdot 2+6=12$$

b) utilizando a propriedade do limite do quociente de duas funções ($f(x)=x^2-2x+3$ e $g(x)=2x-3$), temos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+3}{2x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 1} x^2-2x+3}{\lim\limits_{x\to 1} 2x-3}=\frac{f(1)}{g(1)}=\frac{2}{-1}=-2$$

c) semelhante ao item b), temos o quociente de duas funções $f(x)=x^2-x+1$ e $g(x)=3x-2$. Assim, teremos:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{3x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to -1} x^2-x+1}{\lim\limits_{x\to -1} 3x-2}=\frac{f(-1)}{g(-1)}=\frac{3}{-5}=-\frac{3}{5}$$

d) utilizando a transformação trigonométrica de soma em produtos, temos que:

$$senx-sena=2\cdot sen\left(\frac{x-a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

Assim, podemos reescrever o limite da seguinte forma:

$$\lim_{x\to a}\frac{senx-sena}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left[2\cdot sen\left(\frac{x-a}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\right]}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

Lembrando do limite trigonométrico fundamental $\lim_{t\to b}\frac{sen(t)}{t}=1$, podemos utilizar a propriedade do limite do produto de duas funções:

$$\lim_{x\to a}\frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)=\lim_{x\to a}\frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)=1\cdot\cos a=\cos a$$

e) vamos manipular algebricamente a função da qual queremos conhecer o limite quando x tende ao mais infinito até chegarmos em algo que remete ao limite exponencial fundamental:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e}{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right)^{-1}}=\frac{e}{\frac{1}{e}}=e^2$$

Gabarito: a) 12 b) -2 c) $-3/5$ d) $\cos a$ e) e^2

2. (Exercício de fixação)

Determine a equação da reta tangente à curva $y=x^2-2x$ no seu ponto de abscissa $x=-2$.

Comentários:

De acordo com a interpretação geométrica da derivada, sabemos que a derivada é a reta tangente no ponto e que o coeficiente angular dessa reta é o valor da derivada nesse ponto. Logo, temos que:

$$y=x^2-2x\Rightarrow y'=2x-2$$

Para $x=-2$, temos que:

$$y'=2(-2)-2=-6$$

Da geometria analítica, a equação da reta pode ser dada por:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

Quando $x=-2$ temos $y=8$, então:

$$y-8=-6(x-(-2))$$

$$\therefore \boxed{y=-6x-4}$$

Gabarito: $y=-6x-4$

3. (Exercício de fixação)

Um ponto material se move sobre uma reta com velocidade descrita por $v=\sqrt[3]{2t}$ (SI), no instante de tempo t. Determine a aceleração do ponto no instante $t=3\ s$.

Comentários:

Sabemos da cinemática que $a=\frac{dv}{dt}$. Portanto, basta derivarmos a função da velocidade em relação ao tempo e aplicarmos ao ponto de interesse:

$$v=\sqrt[3]{2t}=(2t)^{1/3}\Rightarrow v'=\frac{1}{3}(2t)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(2)$$

Note que não podemos esquecer da regra da cadeia, já que estamos derivando $2t$ e não apenas t.

$$a(t)=v'(t)=\frac{2}{3}(2t)^{-\frac{2}{3}}$$

$$a(3)=\frac{2}{3}(2\cdot 3)^{-2/3}$$

$$a(3)=0{,}20\ m/s^2$$

Gabarito: $0,20\ m/s^2$

4. (Exercício de fixação)

Encontre a reta tangente ao gráfico de $f(x) = sen(x)$, para $x = \frac{\pi}{3}$.

Comentários:

Calculando a derivada da função f temos que:

$$f(x) = sen(x) \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

Para $x = \frac{\pi}{3}$ temos $y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Portanto, a equação da reta é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$$

Gabarito: $y = \frac{x}{2} + \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$

---

5. (Exercício de fixação)

Um ponto material movendo sobre uma linha reta de acordo com a equação horária $s(t) = 2\cos(3t)$ (SI). Determine a velocidade no instante $t = \frac{\pi}{3}$ s e a aceleração no instante $t = \frac{\pi}{3}$ s.

Comentários:

De acordo com a cinemática, sabemos que:

$$v = \frac{ds}{dt} \; e \; a = \frac{dv}{dt}$$

Portanto, devemos calcular as funções derivadas da equação horária do móvel:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2 \cdot \left(-sen(3t)\right) \cdot 3$$

Note que devemos usar a regra da cadeia, já que se trata de uma composição de funções.

$$\boxed{v(t) = -6 \cdot sen(3t)}$$

Para $t = \frac{\pi}{3}$ s, temos que:

$$v\left(\frac{\pi}{3}\right) = -6 \cdot sen\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = -6 \cdot sen(\pi) = -6 \cdot 0 = 0$$

A equação horária da aceleração é dada por:

$$a = \frac{dv}{dt} = -6 \cdot (\cos(3t)) \cdot 3$$

$$a(t) = -18 \cdot \cos(3t)$$

Para $t = \frac{\pi}{3}$ s, temos:

$$a\left(\frac{\pi}{3}\right) = -18 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = -18 \cdot \cos(\pi) = -18 \cdot (-1) = 18\, m/s^2$$

Gabarito: 0 e $18\ m/s^2$

---

6. **(Exercício de fixação)**

Utilizando as regras de derivação, calcule a derivada de cada uma das funções:

a) $f(x) = sen^n(x), n \in \mathbb{N}^*$

b) $f(x) = sen^4 4x$

c) $f(x) = sen(\cos(x))$

d) $f(x) = \log_2 x$

e) a derivada da inversa da função $f(x) = x^3 + x$, no ponto $x_1 = 1$.

Comentários:

a) Utilizando as regras de derivação, temos que:

$$g(x) = sen(x) \text{ e } h(x) = x^n$$
$$g'(x) = \cos x \;\; e \; h(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Note que $f(x) = h\big(g(x)\big)$. Pela regra da cadeia, temos:

$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = n \cdot sen^{n-1}(x) \cdot \cos x$

A partir de agora utilizaremos a regra da cadeia direto, tendo em mente que derivamos a função como se não houvesse composição e multiplica pela derivada da função que está dentro da composição e assim sucessivamente.

b) $f(x) = sen^4 4x \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot sen^3 4x \cdot \cos 4x \cdot 4 = 16 \cdot sen^3(4x) \cdot \cos 4x$

c) $f(x) = sen(\cos x) \Rightarrow f'(x) = \cos(\cos(x)) \cdot \big(-sen(x)\big) = -sen(x) \cdot \cos(cos(x))$

d) $f(x) = \log_2 x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$

e) $y = x^3 + x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2+1}$

Para $x_1 = 1$, temos que:

$$\left[\frac{dx}{dy}\right]_{x=x_1} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{4}$$

Gabarito: a) $n \cdot sen^{n-1}(x) \cdot \cos x$ b) $16 \cdot sen^3(4x) \cdot \cos 4x$ c) $-sen(x) \cdot \cos(\cos(x))$ d) $\frac{1}{x \cdot \ln 2}$ e) $\frac{1}{4}$

---

7. **(Exercício de fixação)**

Calcule os pontos de máximos, de mínimos e de inflexão da função $f(x) = 2x^3 - 8x$.

Comentários:

Para os máximos, temos que:

$$f'(x) = 0 \;\; e \; f''(x) < 0$$

$$f'(x) = 6x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$f''(x) = 12x$$

Para $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ temos que $f''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) < 0$. Portanto, em $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ temos um máximo local.

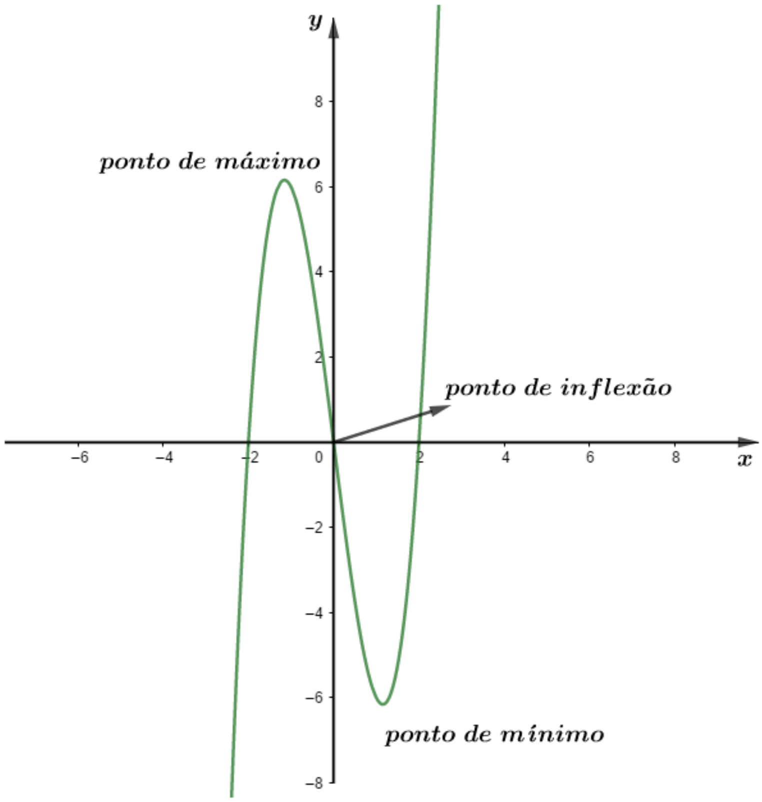
Para $x = +\sqrt{\frac{4}{3}}$ temos que $f''\left(+\sqrt{\frac{4}{3}}\right) > 0$. Portanto, em $x = +\sqrt{\frac{4}{3}}$ temos um mínimo local.

Para acharmos o ponto de inflexão, devemos ter que:

$$f''(x) = 0 \; e \; f'''(x) \neq 0$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'''(x) = 12 \neq 0$$



Gabarito: máximos locais: $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ e $f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$; mínimos locais $x = +\sqrt{\frac{4}{3}}$ e $f\left(+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$; ponto de inflexão $(0, 0)$.

---

8. (Exercício de fixação)

Calcule as integrais indefinidas:

a) $\int (x^3 + \cos x)dx$

b) $\int (3senx + 4cosx)dx$

c) $\int \frac{(x^2-1)}{x^2}dx$

Comentários:

a) $\int(x^3+\cos x)dx = \int x^3dx + \int cosxdx = \frac{x^4}{4} + C_1 + sen(x) + C_2 = \frac{x^4}{4} + sen(x) + C$

b) $\int(3senx + 4cosx)dx = \int(3senx)dx + \int(4cosx)dx = 3\int senxdx + 4\int cosxdx =$ $-3\cos x + 4\, sen\, x + C$

c) $\int \frac{(x^2-1)}{x^2}dx = \int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int 1\cdot dx - \int \frac{1}{x^2}dx = x + C_1 - (-x^{-1}) + C_2 = x + \frac{1}{x} + C$

Gabarito: a) $\frac{x^4}{4} + sen(x) + C$; b) $= -3\cos x + 4\, sen\, x + C$; c) $x + \frac{1}{x} + C$

---

9. (Exercício de fixação)

Calcule $\int_0^{2\pi} senx\, dx$.

Comentários:

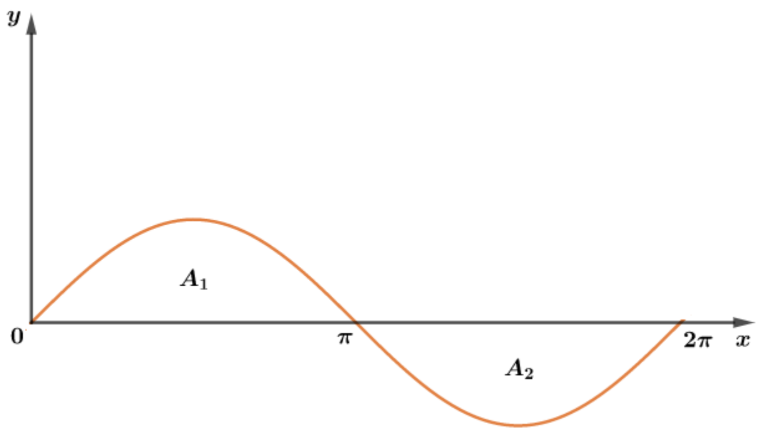
Podemos escrever a primitiva de $sen\ x$ da seguinte forma:

$$\int (senx)dx = -\cos x$$

Portanto:

$$\int_0^{2\pi} (senx)dx = -(\cos x)|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 \ = 1 - 1 = 0$$

Quando fazemos o gráfico da função $sen(x)$, temos que a área do gráfico é a mesma na parte de cima e na parte de baixo do eixo x:



Se dividirmos em dois intervalos de integração, $[0, \pi]$ e $[\pi, 2\pi]$, temos:

$$A_1 = \int_0^{\pi} (senx)dx = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (senx)dx = -\cos(2\pi) + \cos(\pi) = -1 + (-1) = -2$$

Dessa forma, temos que a área de 0 a 2π é $A_1 + A_2 = 0$.

Generalizando o resultado, se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$ e $f(x) \leq 0$ em $[b, c]$, então:

$$\int_a^c f(x)dx = A_1 + (-A_2) = A_1 - A_2$$

Além disso, temos o seguinte resultado: se a função é **ímpar** e contínua no intervalo $[-x_0, x_0]$, então:

$$\int_{-x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$$

Gabarito: $\int_0^{2\pi} (\boldsymbol{senx})\boldsymbol{dx} = \mathbf{0}$

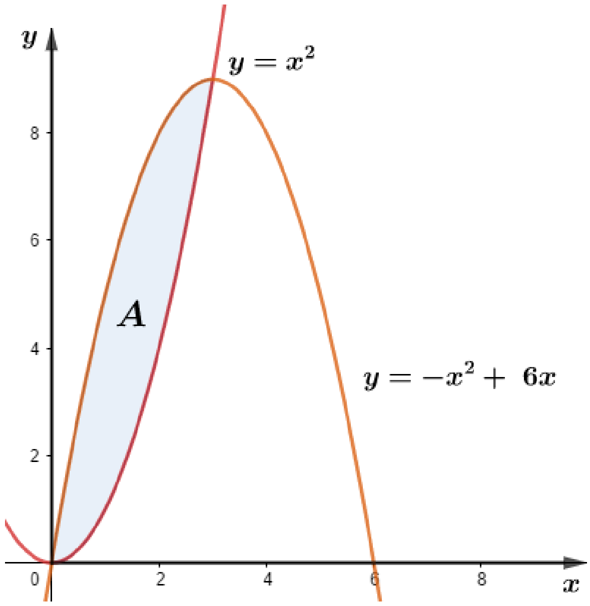
---

10. (Exercício de fixação)

Calcule a região entre as curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 6x$.

Comentários:

Graficamente, temos a área desejada:



O ponto de encontro das curvas pode ser encontrado fazendo a intersecção das curvas:

$$x^2 = -x^2 + 6x \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Logo, nossos limites de integração vão de 0 a 3. Portanto, temos que a área desejada é:

$$A = \int_0^3 (-x^2 + 6x)dx - \int_0^3 x^2 dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x)dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right)\Big|_0^3 = 9\,u.a.$$

Gabarito: $\mathbf{9}\ \boldsymbol{u.a}$.

---

5. QUESTÕES NÍVEL 1

1. (EEAR/2018)

Se $A(x, y)$ pertence ao conjunto dos pontos do plano cartesiano que distam d do ponto $C(x_0, y_0)$, sendo $d > 2$, então

a) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + d^2 = 0$

b) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = d^2$

c) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 2d$

d) $y - y_0 = d(x - x_0)$

2. (EEAR/2017)

As posições dos pontos $A(1,7)$ *e* $B(7,1)$ em relação à circunferência de equação $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 16$ são, respectivamente,

a) Interna e interna

b) Interna e externa

c) Externa e interna

d) Externa e externa

3. (EEAR/2017)

Seja $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$ a equação reduzida de uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R. Assim, $a + b + R$ é igual a

a) 18

b) 15

c) 12

d) 9

4. (EEAR/2016)

Para que uma circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - mx - 4y - c = 0$ tenha centro $C(1,2)$ e raio $R = 5$, os valores de m *e de* c são respectivamente

a) -1 e -10

b) -2 e 25

c) 1 e -20

d) 2 e 20

5. (EEAR/2015)

Seja O o centro da circunferência $\alpha: (x-1)^2+(y-3)^2=9$. O ponto $P(3,2)$ é

a) Interior a α, estando mais próximo de α que de O

b) Interior a α, estando mais próximo de O do que de α

c) Pertencente a α

d) Exterior a α

6. (EEAR/2014)

Se $C(a,b)$ e r são, respectivamente, o centro e o raio da circunferência de equação $(x-2)^2+(y+1)^2=16$, o valor de $a+b+r$ é

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

7. (EEAR/2011)

A parábola $y=x^2$ intercepta a circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{2}$ nos pontos

a) $(-1,1)\ e\ (2,4)$

b) $(-1,1)\ e\ (1,1)$

c) $(-2,4)\ e\ (2,4)$

d) $(-2,4)\ e\ (1,1)$

8. (EEAR/2011)

Dados os pontos $B(1,2)$ e $C(0,1)$ e uma circunferência λ de equação $x^2+y^2-3x-4=0$, é correto afirmar que

a) B é interior a $\lambda\ e\ C$ é exterior a λ

b) B é exterior a λ e C é interior a λ

c) $B\ e\ C$ são exteriores a λ

d) $B\ e\ C$ são interiores a λ

9. (EEAR/2010)

Considere a circunferência de equação $(x-2)^2+(y-4)^2=9$ e uma reta r secante a ela. Uma possível distância entre r e o centro da circunferência é

a) 5,67

b) 4,63

c) 3,58

d) 2,93

10. (EEAR/2009)

Se o ponto $Q(2,1)$ pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$, então o valor de k é

a) 6

b) 3

c) -7

d) -10

11. (EEAR/2007)

Para que a reta de equação $y = \sqrt{3}x + n$ seja tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, o valor de n deve ser

a) -3 ou 3

b) -2 ou 2

c) -3 ou 3

d) -4 ou 4

12. (EEAR/2007)

Se a distância entre uma reta t e o centro da circunferência $(\lambda:)\ x^2 + (y-2)^2 = 16$ é $\sqrt{17}$, então t e λ são

a) Secantes

b) Tangentes

c) Exteriores

d) Interiores

13. (EEAR/2006)

Se uma circunferência tem centro $C(1,0)$ e raio 1 e outra tem equação $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$, então essas circunferências são

a) Secantes

b) Externas

c) Tangentes internas

d) Tangentes externas

14. (EEAR/2006)

Se a circunferência de equação $x^2 + by^2 + cx + dy + k = 0$ tem centro $C(1, -3)$ e raio $\sqrt{3}$, então $b + c + d + k$ é igual a:

a) 12

b) 11

c) 10

d) 9

15. (EEAR/2005)

O raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 1 = 0$ é igual a

a) 5

b) 4

c) 6

d) 7

16. (EEAR/2004)

Uma circunferência tem centro $(4, 3)$ e passa pela origem. A equação da dessa circunferência é

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 25$

d) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

17. (EEAR/2003)

A equação da circunferência em que os pontos $M(-3, 2)$ e $N(5, 4)$ são extremos de um diâmetro é

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 - 17 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 7 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 5 = 0$

18. (EEAR/2003)

Uma corda é determinada pela reta $x - y = 0$ sobre a circunferência $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$. A área da menor região determinada por essa corda e o círculo é

a) $4\pi - 8$

b) $4\pi - 16$

c) $4\pi - 2$

d) $4\pi - 4$

19. (EEAR/2003)

O maior valor inteiro de k para que a equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$ represente uma circunferência é

a) 14

b) 13

c) 12

d) 10

20. (EEAR/2003)

Sendo $C(3, -2)$ o centro de uma circunferência de raio igual a 4, então sua equação normal ou geral é

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 3 = 0$

21. (EEAR/2002)

Dadas a reta de equação $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x = 0$. A área do triângulo determinado pelo centro da circunferência e os pontos de intersecção entre a reta e ela, em unidades de área, é igual a

a) $\sqrt{3}$

b) 3

c) $3\sqrt{3}$

d) 6

22. (EEAR/2002)

No plano cartesiano, os pontos $A(1,0)$ e $B(0,2)$ são de uma mesma circunferência. Se o centro dessa circunferência é ponto da reta $y = 3 - x$, então suas coordenadas são

a) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $(1,2)$

c) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

d) $(0,3)$

23. (EEAR/2002)

A distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ à bissetriz do $II^{\underline{o}}$ e $IV^{\underline{o}}$ quadrantes, vale

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{3}/2$

c) $\sqrt{7}/2$

d) $7\sqrt{2}/2$

24. (EEAR/2002)

Seja uma circunferência com centro sobre a reta $y = 3x$. Se a circunferência é tangente à reta $y = x$ na ordenada 4, então as coordenadas do centro da circunferência são

a) $(4,12)$

b) $(2,6)$

c) $(3,9)$

d) $(5,15)$

25. (EEAR/2001)

Considere as circunferências que passam pelos pontos $(0,0)$ e $(2,0)$ e que são tangentes à reta $y = x + 2$ as coordenadas dos centros dessas circunferências são

a) $(1,1)$ e $(1,-7)$

b) $(1,1)$ e $(-7,1)$

c) $(1,-7)$ e $(1,7)$

d) $(1,-7)$ e $(-1,7)$

26. (EEAR/2001)

No sistema de coordenadas cartesianas, a equação $x^2 + y^2 = ax + by$, onde a e b são números reais não nulos, representa uma circunferência de raio

a) $\sqrt{a^2 + b^2}/2$

b) $\sqrt{a^2 + b^2}$

c) $(a + b)/2$

d) $a + b$

27. (EEAR/2001)

A circunferência $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ e a reta $x - 3y - 2 = 0$ possuem ___ ponto(s) em comum

a) 2

b) 1

c) Infinitos

d) Nenhum

28. (EEAR/2000)

A posição dos pontos $P(3, 2)$ e $Q(1, 1)$ em relação à circunferência $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ é:

a) P é interior e Q exterior

b) P é exterior e Q é interior

c) P e Q são interiores

d) P e Q são exteriores

29. (ESA/2016)

A equação da circunferência de centro $(1, 2)$ e raio 3 é:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 14 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 14 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 14 = 0$

30. (ESA/2014)

Em um sistema de coordenadas cartesianas no plano, considere os pontos $O(0, 0)$ e $A(8, 0)$. A equação do conjunto dos pontos $P(x, y)$ desse plano sabendo que a distância de O a P é o triplo da distância de P a A, é uma

a) Circunferência de centro $(9, 0)$ e raio 3

b) Elipse de focos $(6, 0)$ e $(12, 0)$, e eixo menor 6

c) Hipérbole de focos $(3, 0)$ e $(15, 0)$, e eixo real 6

d) Parábola de vértice $(9, 3)$, que intercepta o eixo das abscissas nos pontos $(6, 0)$ e $(12, 0)$

e) Reta que passa pelos pontos $(6, 0)$ e $(9, 3)$

31. (ESA/2013)

Dada a equação da circunferência é: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, sendo as coordenadas do centro e r a medida do raio, identifique a equação geral da circunferência de centro $(2, 3)$ e raio igual a 5

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 - 4xy - 12 = 0$

c) $x^2 - 4x = -16$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

e) $y^2 - 6y = -9$

32. (ESA/2011)

A reta $y = mx + 2$ é tangente à circunferência de equação $(x - 4)^2 + y^2 = 4$. A soma dos possíveis valores de m é:

a) 0

b) 4/3

c) -4/3

d) -3/4

e) 2

33. (ESA/2008)

As equações $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 64$ e $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 25$ representam duas circunferências cuja posição relativa no plano permite afirmar que são

a) Interiores (sem ponto de intersecção)

b) Tangentes interiores

c) Secantes

d) Tangentes exteriores

e) Exteriores (sem ponto de intersecção)

34. (ESPCEX/2011)

Uma circunferência tem centro no eixo das abscissas, passa pelo ponto $(4, 4)$ e não intercepta o eixo das ordenadas. Se a área do círculo definido por essa circunferência é 17π, a abscissa de seu centro é

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

35. (ESPCEX/2016)

Seja C a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$. Considere em C a corda MN cujo ponto médio é $P(-1, -1)$. O comprimento de MN (em unidade de comprimento) é igual a

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{3}$

e) 2

36. (ESPCEX/2015)

Considere a circunferência que passa pelos pontos $(0, 0)$, $(0, 6)$ e $(4, 0)$ em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Sabendo que os pontos $(0, 6)$ e $(4, 0)$ pertencem a uma reta que passa pelo centro dessa circunferência, uma das retas tangentes a essa circunferência, que passa pelo ponto $(3, -2)$, tem por equação

a) $3x - 2y - 13 = 0$

b) $2x - 3y - 12 = 0$

c) $2x - y - 8 = 0$

d) $x - 5y - 13 = 0$

e) $8x + 3y - 18 = 0$

37. (ESPCEX/2013)

Sejam dados a circunferência $\lambda: x^2 + y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$ e o ponto P, que é simétrico de $(-1, 1)$ em relação ao eixo das abscissas. Determine a equação da circunferência concêntrica a λ e que passa pelo ponto P

a) $\lambda: x^2 + y^2 + 4x + 10y + 16 = 0$

b) $\lambda: x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0$

c) $\lambda: x^2 - y^2 + 4x - 5y + 16 = 0$

d) $\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 5y + 12 = 0$

e) $\lambda: x^2 - y^2 - 4x - 10y - 17 = 0$

38. (ESPCEX/2012)

Considere a circunferência $(\lambda) x^2 + y^2 - 4x = 0$ e o ponto $P(1, \sqrt{3})$. Se a reta t é tangente a λ no ponto P, então a abscissa do ponto de intersecção de t com o eixo horizontal do sistema de coordenadas cartesianas é

a) -2

b) $2 + \sqrt{3}$

c) 3

d) $3 + \sqrt{3}$

e) $3 + 3\sqrt{3}$

39. (ESPCEX/2011)

O ponto da circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ que tem ordenada máxima é

a) $(0, -6)$

b) $(-1, -3)$

c) $(-1, 0)$

d) $(2, 3)$

e) $(2, -3)$

40. (ESPCEX/2017)

Uma elipse tem centro na origem e vértices em $(2a, 0)$ e $(0, a)$, com $a > 0$. A área do quadrado inscrito nessa elipse é

a) $16a^2/5$

b) $4a^2/5$

c) $12a^2/5$

d) $8a^2/5$

e) $20a^2/5$

41. (ESPCEX/2016)

Os valores reais de n para os quais a reta $(t)\ y = x + n$ seja tangente à elipse de equação $2x^2 + 3y^2 = 6$ são iguais a

a) $-\sqrt{5}\ e\ \sqrt{5}$

b) $-\sqrt{3}\ e\ \sqrt{3}$

c) $-3\ e\ 3$

d) $-2\ e\ 2$

e) $-5\ e\ 5$

42. (ESPCEX/2015)

Considere as afirmações:

I. Uma elipse tem como focos os pontos $F_1(-3,0), F_2(3,0)$ e a medida do eixo maior é 8. Sua equação é $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

II. Os focos de uma hipérbole são $F_1(-10,0), F_2(10,0)$ e sua excentricidade é $\frac{5}{3}$. Sua equação é $16x^2-9y^2=576$.

III. A parábola $8x=-y^2+6y-9$ tem como vértice o ponto $V(3,0)$.

Com base nessas afirmações, assinale a alternativa correta.

a) Todas as afirmações são falsas

b) Apenas as afirmações I e III são falsas

c) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras

d) Todas as afirmações são verdadeiras

e) Apenas a afirmação III é verdadeira

43. (ESPCEX/2014)

Uma reta t passa pelo ponto $A(-3,0)$ e é tangente à parábola de equação $x=3y^2$ no ponto P. Assinale a alternativa que apresenta uma solução correta de acordo com essas informações

a) $t: 2x-15+6=0\ e\ P(12,2)$

b) $t: y=0\ e\ P(0,0)$

c) $t: 2x+15y+6=0\ e\ P(12,-2)$

d) $t: x+6y+3=0\ e\ P(3,-1)$

e) $t: x-10y+3=0\ e\ P(27,3)$

44. (ESPCEX/2013)

Sobre a curva $9x^2+25y^2-36x+50y-164=0$, assinale a alternativa correta

a) Seu centro é $(-2,1)$

b) A medida do seu eixo maior é 25

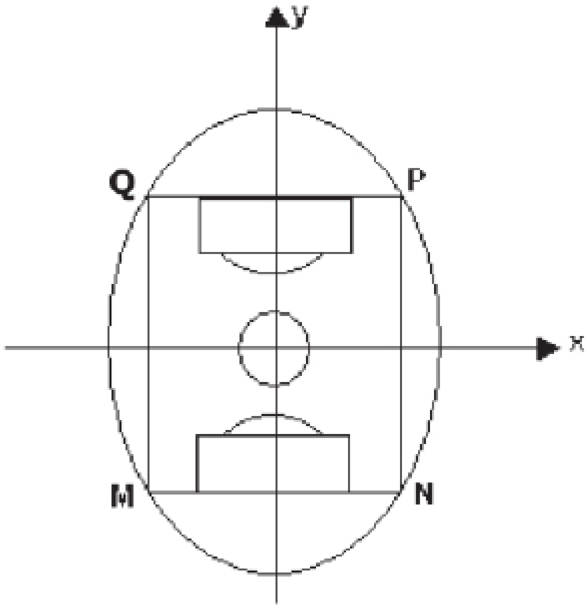
c) A medida do seu eixo menor é 9

d) A distância focal é 4

e) Sua excentricidade é $0,8$

45. (ESPCEX/2011)

Num estádio de futebol em forma de elipse, o gramado é o retângulo $MNPQ$, inscrito na cônica, conforme mostra a figura. Escolhendo o sistema de coordenadas cartesianas indicado e tomando o metro como unidade, a elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{36^2}+\frac{y^2}{60^2}=1$. Sabe-se também que os focos da elipse estão situados em lados do retângulo $MNPQ$.



Assim, a distância entre as retas $MN\ e\ PQ$ é

a) 48m

b) 68m

c) 84m

d) 92m

e) 96m

46. (ESPCEX/2011)

A representação no sistema cartesiano ortogonal da equação $9x^2-y^2=36x+8y-11$ é dada por

a) Duas retas concorrentes

b) Uma circunferência

c) Uma elipse

d) Uma parábola

e) Uma hipérbole

47. (ESPCEX/2011)

O ponto $P(a, 1/3)$ pertence à parábola $x = (y^2 + 3)/3$. A equação da reta perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares que passa por P é:

a) $27x + 27y - 37 = 0$

b) $37x + 27y - 27 = 0$

c) $27x + 37y - 27 = 0$

d) $27x + 27y - 9 = 0$

e) $27x + 37y - 9 = 0$

GABARITO

1. b
2. c
3. c
4. d
5. a
6. b
7. b
8. d
9. d
10. c
11. d
12. c
13. d
14. a
15. a
16. d
17. c
18. a
19. c
20. b
21. a
22. c
23. d
24. b
25. a
26. a
27. d
28. b

29. b
30. a
31. d
32. c
33. d
34. c
35. c
36. a
37. b
38. a
39. c
40. a
41. a
42. c
43. d
44. e
45. e
46. e
47. a

RESOLUÇÃO

1. (EEAR/2018)

Se $A(x, y)$ pertence ao conjunto dos pontos do plano cartesiano que distam d do ponto $C(x_0, y_0)$, sendo $d > 2$, então

a) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + d^2 = 0$

b) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = d^2$

c) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 2d$

d) $y - y_0 = d(x - x_0)$

Comentários

Do estudo da geometria analítica, temos que a distância entre um ponto $A(x, y)$ desse conjunto e o ponto C é dada por:

$$AC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Mas $AC = d$, logo:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = d^2$$

Gabarito: “b”.

2. (EEAR/2017)

As posições dos pontos $A(1,7)$ e $B(7,1)$ em relação à circunferência de equação $(x-6)^2+(y-2)^2=16$ são, respectivamente,

a) Interna e interna

b) Interna e externa

c) Externa e interna

d) Externa e externa

Comentários

Para avaliar a posição dos pontos em relação à circunferência devemos identificar o raio e o centro dessa circunferência.

Observando a equação, temos:

$$C=(6,2)$$

$$r=4$$

Veja que:

$$AC=\sqrt{(1-6)^2+(7-2)^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$$

Como $AC>r$, então A é exterior à circunferência.

$$BC=\sqrt{(7-6)^2+(1-2)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

Como $BC<4$, então B é interior à circunferência.

Gabarito: "c".

---

3. (EEAR/2017)

Seja $(x-1)^2+(y-6)^2=25$ a equação reduzida de uma circunferência de centro $C(a,b)$ e raio R. Assim, $a+b+R$ é igual a

a) 18

b) 15

c) 12

d) 9

Comentários

Observando a equação:

$$C=(1,6)$$

E:

$$R=5$$

Portanto:

$$a+b+R=1+6+5=12$$

Gabarito: "c".

---

4. (EEAR/2016)

Para que uma circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - mx - 4y - c = 0$ tenha centro $C(1, 2)$ e raio $R = 5$, os valores de m e de c são respectivamente

a) -1 e -10

b) -2 e 25

c) 1 e -20

d) 2 e 20

Comentários

Completando os quadrados:

$$x^2 - 2 \cdot \frac{m}{2} x + \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{4} + y^2 - 2 \cdot 2y + 4 - 4 - c = 0$$

Ou seja:

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 - \frac{m^2}{4} - 4 - c = 0$$

A coordenada x do centro é 1, logo:

$$\frac{m}{2} = 1 \Rightarrow m = 2$$

Como o raio é 5, temos que:

$$\frac{2^2}{4} + 4 + c = 25 \Rightarrow c = 20$$

Gabarito: "d".

---

5. (EEAR/2015)

Seja O o centro da circunferência $\alpha: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$. O ponto $P(3, 2)$ é

a) Interior a α, estando mais próximo de α que de O

b) Interior a α, estando mais próximo de O do que de α

c) Pertencente a α

d) Exterior a α

Comentários

Observando a equação, veja que ela possui raio 3 e centro $O(1,3)$. A distância de P ao centro é:

$$PO = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

Como $\sqrt{5} < 3$, o ponto é interior à circunferência.

Veja ainda que $\sqrt{5} > 3/2$, isso significa que P está mais próximo de α que de O.

Gabarito: "a".

---

6. (EEAR/2014)

Se $C(a,b)$ e r são, respectivamente, o centro e o raio da circunferência de equação $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$, o valor de $a+b+r$ é

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

Comentários

Observando a equação, temos:

$$C(2,-1)\ e\ r = \sqrt{16} = 4$$

Do que segue que:

$$a + b + r = 2 - 1 + 4 = 5$$

Gabarito: "b".

---

7. **(EEAR/2011)**

A parábola $y = x^2$ intercepta a circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{2}$ nos pontos

a) $(-1,1)\ e\ (2,4)$

b) $(-1,1)\ e\ (1,1)$

c) $(-2,4)\ e\ (2,4)$

d) $(-2,4)\ e\ (1,1)$

Comentários

A circunferência de centro $(0{,}0)$ e raio $\sqrt{2}$ possui equação:

$$x^2 + y^2 = 2$$

Substituindo o x^2 da parábola:

$$y + y^2 = 2$$

Resolvendo para y:

$$y = 1\ ou\ y = -2$$

Veja que $y = x^2 \geq 0$, do que segue que $y = 1$. Disso, temos que $|x| = 1$, isto é, $x = \pm 1$.

Os pontos são, portanto: $(1{,}1)\ e\ (-1{,}1)$.

Gabarito: "b".

---

8. **(EEAR/2011)**

Dados os pontos $B(1,2)$ e $C(0,1)$ e uma circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$, é correto afirmar que

a) B é interior a λ e C é exterior a λ

b) B é exterior a λ e C é interior a λ

c) $B\ e\ C$ são exteriores a λ

d) $B\ e\ C$ são interiores a λ

Comentários

Primeiramente precisamos completar os quadrados na equação da circunferência:

$$x^2 - 2\cdot\frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + y^2 - 4 = 0$$

Ou seja:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

Veja que ela possui centro $O(3/2{,}0)$ e raio $5/2$.

Vamos calcular as distâncias de $B\ e\ O$ a λ:

$$BO = \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (2-0)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$BO < \frac{5}{2}$$

Logo, B é interior a λ.

Distância entre $C\ e\ O$:

$$CO = \sqrt{\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + (1-0)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Veja que $CO < 5/2$, do que temos que C é interior a λ.

Gabarito: "d".

---

9. **(EEAR/2010)**

Considere a circunferência de equação $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$ e uma reta r secante a ela. Uma possível distância entre r e o centro da circunferência é

a) 5,67

b) 4,63

c) 3,58

d) 2,93

Comentários

Uma condição necessária para que uma reta seja secante à circunferência é que a distância do centro dessa circunferência à reta seja menor que o raio.

O raio da circunferência vale $\sqrt{9} = 3$, do que temos que, dentre as alternativas, a única distância possível é 2,93.

Gabarito: "d".

---

10. **(EEAR/2009)**

Se o ponto $Q(2,1)$ pertence à circunferência de equação $x^2+y^2+4x-6y+k=0$, então o valor de k é

a) 6

b) 3

c) -7

d) -10

Comentários

Se Q pertence à circunferência, então temos que:

$$2^2+1^2+4\cdot 2-6\cdot 1+k=0\Rightarrow k=-7$$

Gabarito: "c".

---

11. (EEAR/2007)

Para que a reta de equação $y=\sqrt{3}x+n$ seja tangente à circunferência de equação $x^2+y^2=4$, o valor de n deve ser

a) -3 ou 3

b) -2 ou 2

c) -3 ou 3

d) -4 ou 4

Comentários

Para que haja a tangência, a distância da reta ao centro da circunferência deve ser igual ao raio:

$$2=\left|\frac{\sqrt{3}\cdot 0-0+n}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{n}{2}\right|\Rightarrow n=\pm 4$$

Gabarito: "d".

---

12. (EEAR/2007)

Se a distância entre uma reta t e o centro da circunferência $(\lambda:)\ x^2+(y-2)^2=16$ é $\sqrt{17}$, então t e λ são

a) Secantes

b) Tangentes

c) Exteriores

d) Interiores

Comentários

O raio dessa circunferência vale $\sqrt{16}=4$. Como $\sqrt{17}>4$, isto é, a distância da reta ao centro da circunferência é maior que o raio, a reta deve ser exterior à circunferência.

Gabarito: “c”.

---

13. (EEAR/2006)

Se uma circunferência tem centro $C(1,0)$ e raio 1 e outra tem equação $x^2+y^2-2x-8y+8=0$, então essas circunferências são

a) Secantes

b) Externas

c) Tangentes internas

d) Tangentes externas

Comentários

Completando os quadrados da segunda circunferência:

$$x^2-2x+1-1+y^2-2\cdot 4y+16-16+8=0$$

Ou seja:

$$(x-1)^2+(y-4)^2=9$$

O centro da segunda circunferência é $C_1(1,4)$. A distância entre os centros dessas circunferências vale:

$$CC_1=\sqrt{(1-1)^2+(0-4)^2}=4$$

O raio da primeira vale 1 e o raio da segunda vale $\sqrt{9}=3$, a soma dos raios é 4, que é igual à distância entre os centros. Disso, temos que as circunferências são tangentes externas.

Gabarito: “d”.

---

14. (EEAR/2006)

Se a circunferência de equação $x^2+by^2+cx+dy+k=0$ tem centro $C(1,-3)$ e raio $\sqrt{3}$, então $b+c+d+k$ é igual a:

a) 12

b) 11

c) 10

d) 9

Comentários

Como a equação é uma circunferência, os coeficientes de x^2 e y^2 devem ser iguais:

$$1=b$$

Completando os quadrados da equação da circunferência:

$$x^2+2\frac{c}{2}x+\frac{c^2}{4}-\frac{c^2}{4}+y^2+2\frac{d}{2}y+\frac{d^2}{4}-\frac{d^2}{4}+k=0$$

Ou seja:

$$\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\left(y+\frac{d}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}+\frac{d^2}{4}-k$$

As coordenadas do centro são $(1,-3)$, então:

$$-\frac{c}{2}=1\Rightarrow c=-2$$

$$-\frac{d}{2}=-3\Rightarrow d=6$$

Além disso:

$$\frac{c^2}{4}+\frac{d^2}{4}-k=\sqrt{3}^2\Rightarrow\frac{4}{4}+\frac{36}{4}-k=3\Rightarrow k=7$$

Por fim:

$$b+c+d+k=1-2+6+7=12$$

Gabarito: "a".

---

15. (EEAR/2005)

O raio da circunferência de equação $x^2+y^2-2x+10y+1=0$ é igual a

a) 5

b) 4

c) 6

d) 7

Comentários

Para identificar o raio, precisamos escrever a equação em sua forma reduzida:

$$x^2-2x+1-1+y^2+2\cdot 5y+25-25+1=0$$

$$(x-1)^2+(y+5)^2=25$$

Logo, o raio vale:

$$\sqrt{25}=5$$

Gabarito: "a".

---

16. (EEAR/2004)

Uma circunferência tem centro $(4,3)$ e passa pela origem. A equação da dessa circunferência é

a) $x^2+y^2=25$

b) $x^2+y^2+8x+6y=0$

c) $x^2+y^2-8x-6y=25$

d) $x^2+y^2-8x-6y=0$

Comentários

Sua equação reduzida é:

$$(x-4)^2+(y-3)^2=r^2$$

Além disso, como ela passa pela origem:

$$(0-4)^2+(0-3)^2=r^2 \Rightarrow r=5$$

Do que segue que:

$$(x-4)^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow x^2-8x+16+y^2-6y+9=25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-8x-6y=0$$

Gabarito: “d”.

---

17. (EEAR/2003)

A equação da circunferência em que os pontos $M(-3,2)$ e $N(5,4)$ são extremos de um diâmetro é

a) $x^2+y^2=25$

b) $x^2+y^2-17=0$

c) $x^2+y^2-2x-6y-7=0$

d) $x^2+y^2-2x-6y-5=0$

Comentários

Como são extremos de um diâmetro, temos duas informações que determinam a circunferência:

1ª: o ponto médio de MN é o centro da circunferência:

$$C=\frac{M+N}{2}=\frac{(-3,2)+(5,4)}{2}=\frac{(2,6)}{2}=(1,3)$$

2ª: a metade da distância entre eles é o raio:

$$MN=\sqrt{(-3-5)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{17}$$

Do que temos que $r=\sqrt{17}$.

Por fim, a equação da circunferência:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=17 \Rightarrow x^2+y^2-2x-6y-7=0$$

Gabarito: “c”.

---

18. (EEAR/2003)

Uma corda é determinada pela reta $x-y=0$ sobre a circunferência $(x-2)^2+(y+2)^2=16$. A área da menor região determinada por essa corda e o círculo é

a) $4\pi-8$

b) $4\pi-16$

c) $4\pi-2$

d) $4\pi-4$

Comentários

O primeiro passo é encontrar os pontos de intersecção entre a circunferência e a reta. Da equação da reta, temos:

$$x = y$$

Assim:

$$(x-2)^2 + (x+2)^2 = 16 \Rightarrow 2x^2 + 8 = 16 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

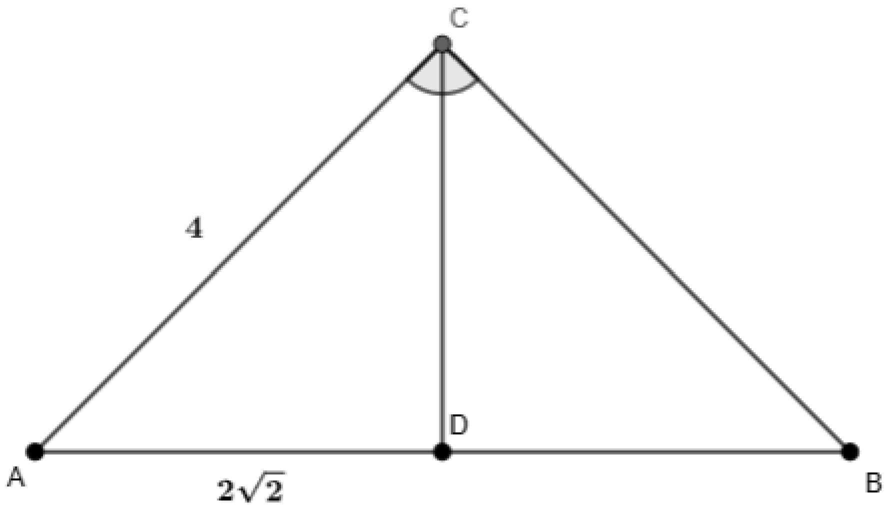
Assim os pontos de intersecção são:

$$A(2,2)\ e\ B(-2,-2)$$

A distância entre $A\ e\ B$:

$$AB = \sqrt{\left(2-(-2)\right)^2 + \left(2-(-2)\right)^2} = 4\sqrt{2}$$

A reta determina uma corda de tamanho $4\sqrt{2}$ em uma circunferência de raio 4, disso temos o triângulo ABC, onde C é o centro da circunferência:



Observe, na figura acima, que $sen\left(A\hat{C}D\right) = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A\hat{C}D = 45° \Rightarrow A\hat{C}B = 90°$. A área procurada corresponde à área do setor circular subtraída da área do triângulo ABC:

$$Área\ do\ setor = \frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 = 4\pi$$

$$Área\ do\ triângulo\ ABC = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

Ou seja:

$$4\pi - 8$$

Gabarito: “a”.

---

19. (EEAR/2003)

O maior valor inteiro de k para que a equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$ represente uma circunferência é

a) 14

b) 13

c) 12

d) 10

Comentários

O primeiro passo é completar os quadrados:

$$x^2 + 2 \cdot 2x + 4 - 4 + y^2 - 2 \cdot 3y + 9 - 9 + k = 0$$

Ou seja:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13 - k$$

Para que essa equação possa representar a equação de uma circunferência, temos que $13 - k = r^2 > 0 \Rightarrow k < 13$.

Assim, o maior valor inteiro para k é $k = 12$.

Gabarito: "c".

---

20. (EEAR/2003)

Sendo $C(3,-2)$ o centro de uma circunferência de raio igual a 4, então sua equação normal ou geral é

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 3 = 0$

Comentários

A partir dos dados fornecidos, temos que sua equação reduzida é:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$$

Desenvolvendo as potências:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

Gabarito: "b".

---

21. (EEAR/2002)

Dadas a reta de equação $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x = 0$. A área do triângulo determinado pelo centro da circunferência e os pontos de intersecção entre a reta e ela, em unidades de área, é igual a

a) $\sqrt{3}$

b) 3

c) $3\sqrt{3}$

d) 6

Comentários

O primeiro passo é encontrar os pontos de intersecção. Para isso, da equação da reta, temos:

$$y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 x^2 = \frac{x^2}{3}$$

Assim:

$$x^2 + \frac{x^2}{3} - 4x = 0 \Rightarrow \frac{4x^2}{3} - 4x = 0 \Rightarrow 4x\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 0$$

Ou seja:

$$x = 0 \; ou \; x = 3$$

Do que segue que:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0 = 0 \; ou \; y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = \sqrt{3}$$

Os pontos são: $(0,0) \; ou \; (3, \sqrt{3})$.

Para encontrarmos o centro devemos completar os quadrados:

$$x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$

O centro é, portanto, $(2,0)$. Do estudo da geometria analítica, temos que a área de um triângulo dados seus vértices, é:

$$\frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|-2\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$$

Gabarito: "a".

---

22. (EEAR/2002)

No plano cartesiano, os pontos $A(1,0)$ e $B(0,2)$ são de uma mesma circunferência. Se o centro dessa circunferência é ponto da reta $y = 3 - x$, então suas coordenadas são

a) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $(1, 2)$

c) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

d) $(0, 3)$

Comentários

Seja $C(x, y)$ o centro dessa circunferência. Como ele pertence à reta, temos:

$$y = 3 - x$$

Logo:

$$C(x, 3 - x)$$

Se A e B são pontos dessa circunferência, temos que:

$$AC = BC$$

Isto é:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (3-x-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (3-x-2)^2}$$

$$(x-1)^2 + (3-x)^2 = x^2 + (1-x)^2 \Rightarrow 9 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Assim, suas coordenadas são:

$$C\left(\frac{3}{2}, 3 - \frac{3}{2}\right) = C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Gabarito: "c".

---

23. (EEAR/2002)

A distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ à bissetriz do $II^{\underline{o}}$ e $IV^{\underline{o}}$ quadrantes, vale

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{3}/2$

c) $\sqrt{7}/2$

d) $7\sqrt{2}/2$

Comentários

A bissetriz do IIº e IVº quadrantes é a reta:

$$y = -x \Rightarrow y + x = 0$$

Para encontrar o centro da circunferência devemos completar os quadrados na equação geral:

$$x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 + y^2 - 2 \cdot 4y + 16 - 16 + 21 = 0$$

Ou seja:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$$

O seu centro é o ponto $(3,4)$. Do que segue que:

$$d = \left|\frac{3+4}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Gabarito: "d".

---

24. (EEAR/2002)

Seja uma circunferência com centro sobre a reta $y = 3x$. Se a circunferência é tangente à reta $y = x$ na ordenada 4, então as coordenadas do centro da circunferência são

a) $(4, 12)$

b) $(2, 6)$

c) $(3, 9)$

d) $(5, 15)$

Comentários

Se ela é tangente à reta $y = x$ na ordenada 4, a abscissa do ponto de tangência é:

$$x = 4$$

Assim:

$$P(4,4)$$

É o ponto de tangência.

A reta perpendicular à reta $y = x$ no ponto P encontra a reta $y = 3x$ no centro da circunferência, pela tangência.

Como o coeficiente angular de $y = x$ é 1, o coeficiente angular da perpendicular é -1 e ela é do tipo:

$$y = -x + b$$

Como ela passa por P:

$$4 = -4 + b \Rightarrow b = 8$$

E a reta é:

$$y = -x + 8$$

Fazendo a intersecção com a reta $y = 3x$:

$$3x = -x + 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 6$$

Por fim, a coordenada do centro é:

$$(2,6)$$

Gabarito: "b".

---

25. (EEAR/2001)

Considere as circunferências que passam pelos pontos $(0, 0)$ e $(2, 0)$ e que são tangentes à reta $y = x + 2$ as coordenadas dos centros dessas circunferências são

a) $(1, 1)\ e\ (1, -7)$

b) $(1, 1)\ e\ (-7, 1)$

c) $(1, -7)\ e\ (1, 7)$

d) $(1, -7)\ e\ (-1, 7)$

Comentários

Seja $C(a, b)$ o centro dessa circunferência. Sua equação reduzida é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Como os pontos $(0,0)\ e\ (2,0)$ pertencem a essa circunferência, temos:

$$a^2 + b^2 = r^2$$

$$(2 - a)^2 + b^2 = r^2$$

Subtraindo membro a membro, temos:

$$a^2 - (2-a)^2 = 0 \Rightarrow 2(2a-2) = 0 \Rightarrow a = 1$$

Disso, temos que:

$$1 + b^2 = r^2$$

Como ela é tangente à reta $y = x + 2$, a seguinte equação:

$$(x-1)^2 + (x+2-b)^2 = 1 + b^2$$

Possui discriminante nulo, já que há somente um ponto de intersecção. Logo:

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + 4 + b^2 + 2(2x - bx - 2b) = 1 + b^2$$

O ainda:

$$2x^2 + 2(1-b)x + 4(1-b) = 0$$

$$\Delta = 4(1-b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4(1-b) = 0 \Rightarrow 4(1-b)(1-b-8) = 0$$

Disso, temos que:

$$b = 1 \; ou \; b = -7$$

As circunferências possuem centros:

$$(1,1) \; e \; (1,-7)$$

Gabarito: "a".

---

26. (EEAR/2001)

No sistema de coordenadas cartesianas, a equação $x^2 + y^2 = ax + by$, onde a e b são números reais não nulos, representa uma circunferência de raio

a) $\sqrt{a^2+b^2}/2$

b) $\sqrt{a^2+b^2}$

c) $(a+b)/2$

d) $a+b$

Comentários

O primeiro passo é completar o quadrado:

$$x^2 + 2\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + y^2 + 2\frac{b}{2}y + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$$

Disso, temos:

$$r^2 = \frac{a^2+b^2}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

Gabarito: "a".

---

27. (EEAR/2001)

A circunferência $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$ e a reta $x - 3y - 2 = 0$ possuem ___ ponto(s) em comum

a) 2

b) 1

c) Infinitos

d) Nenhum

Comentários

Seu centro é $(-2,1)$ e seu raio é $r = 1$. A distância do centro à reta:

$$d = \left|\frac{-2 - 3 \cdot 1 - 2}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\frac{-7}{\sqrt{10}}\right| = \frac{7}{\sqrt{10}}$$

Veja que $\frac{7}{\sqrt{10}} > 1$, ou seja, a reta é externa à circunferência, de modo que não há ponto de intersecção.

Gabarito: "d".

---

28. (EEAR/2000)

A posição dos pontos $P(3,2)$ e $Q(1,1)$ em relação à circunferência $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ é:

a) P é interior e Q exterior

b) P é exterior e Q é interior

c) P e Q são interiores

d) P e Q são exteriores

Comentários

O centro dessa circunferência é o ponto $O(1,1)$ e seu raio $\sqrt{4} = 2$.

A distância dos pontos dados ao centro:

$$OP = \sqrt{(1-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$OQ = \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2} = 0$$

Como $\sqrt{5} > 2$, P é exterior à circunferência. $Q = O$, logo, é interior à circunferência.

Gabarito: "b".

---

29. (ESA/2016)

A equação da circunferência de centro $(1,2)$ e raio 3 é:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 14 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 14 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 14 = 0$

Comentário

A sua equação reduzida é:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=9$$

Desenvolvendo os quadrados:

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4=9 \Rightarrow x^2+y^2-2x-4y-4=0$$

Gabarito: “b”.

---

30. (ESA/2014)

Em um sistema de coordenadas cartesianas no plano, considere os pontos $O(0,0)$ e $A(8,0)$. A equação do conjunto dos pontos $P(x,y)$ desse plano sabendo que a distância de O a P é o triplo da distância de P a A, é uma

a) **Circunferência de centro $(9,0)$ e raio 3**

b) **Elipse de focos $(6,0)$ e $(12,0)$, e eixo menor 6**

c) **Hipérbole de focos $(3,0)$ e $(15,0)$, e eixo real 6**

d) **Parábola de vértice $(9,3)$, que intercepta o eixo das abscissas nos pontos $(6,0)$ e $(12,0)$**

e) **Reta que passa pelos pontos $(6,0)$ e $(9,3)$**

Comentário

Temos que:

$$OP=3AP \Rightarrow OP^2=9AP^2$$

Logo:

$$(x-0)^2+(y-0)^2=9[(x-8)^2+(y-0)^2] \Rightarrow x^2+y^2=9x^2-9\cdot 16x+9\cdot 64+9y^2$$

Ou seja:

$$8x^2+8y^2-9\cdot 16x+9\cdot 64=0 \Rightarrow x^2+y^2-18x+72=0$$

Completando o quadrado de x:

$$(x-9)^2+y^2=9$$

Que corresponde a uma circunferência de centro $(9,0)$ e raio $\sqrt{9}=3$.

Gabarito: “a”.

---

31. (ESA/2013)

Dada a equação da circunferência é: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, sendo as coordenadas do centro e r a medida do raio, identifique a equação geral da circunferência de centro $(2,3)$ e raio igual a 5

a) $x^2+y^2=25$

b) $x^2+y^2-4xy-12=0$

c) $x^2-4x=-16$

d) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

e) $y^2-6y=-9$

Comentário

A equação reduzida pode ser expressa por:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25$$

Desenvolvendo os quadrados:

$$x^2-4x+4+y^2-6y+9=25 \Rightarrow x^2+y^2-4x-6y-12=0$$

Gabarito: “d”.

---

32. (ESA/2011)

A reta $y=mx+2$ é tangente à circunferência de equação $(x-4)^2+y^2=4$. A soma dos possíveis valores de m é:

a) 0

b) 4/3

c) -4/3

d) -3/4

e) 2

Comentário

O centro dessa equação é o ponto $(4{,}0)$ e o seu raio é $\sqrt{4}=2$. Para que a reta seja tangente à circunferência, a distância entre ela e o centro da circunferência deve ser igual ao raio:

$$2=\left|\frac{m\cdot 4-0+2}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\right| \Rightarrow 4(m^2+1)=(4m+2)^2 \Rightarrow 4m^2+4=16m^2+16m+4$$

Ou seja:

$$12m^2+16m=0 \Rightarrow 4m(3m+4)=0 \Rightarrow m=0 \; ou \; m=-\frac{4}{3}$$

A soma dos valores é:

$$0+\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}$$

Gabarito: “c”.

---

33. (ESA/2008)

As equações $(x+1)^2+(y-4)^2=64 \; e \; (x-4)^2+(y+8)^2=25$ representam duas circunferências cuja posição relativa no plano permite afirmar que são

a) Interiores (sem ponto de intersecção)

b) Tangentes interiores

c) Secantes

d) Tangentes exteriores

e) Exteriores (sem ponto de intersecção)

Comentário

Os seus centros são os pontos $(-1,4)\; e \;(4,-8)$. A distância entre eles é dada por:

$$\sqrt{(-1-4)^2+(4-(-8))^2}=\sqrt{25+144}=13$$

Os seus raios são $\sqrt{64} = 8\ e\ \sqrt{25} = 5$. Como a distância entre os centros é igual à soma dos raios:

$$8 + 5 = 13$$

Elas são tangentes externas.

Gabarito: "d".

---

34. (ESPCEX/2011)

Uma circunferência tem centro no eixo das abscissas, passa pelo ponto $(4, 4)$ e não intercepta o eixo das ordenadas. Se a área do círculo definido por essa circunferência é 17π, a abscissa de seu centro é

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

Comentário

A área de uma circunferência, em função de seu raio, é dada por:

$$\pi r^2 = 17\pi \Rightarrow r^2 = 17$$

Como seu centro está sobre o eixo das abscissas, suas coordenadas são do tipo:

$$C(a, 0)$$

A sua equação reduzida é dada por:

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2 = 17$$

Como ela passa por $(4,4)$:

$$(4 - a)^2 + 4^2 = 17 \Rightarrow (a - 4)^2 = 1 \Rightarrow a = 5\ ou\ a = 3$$

Como seu raio é $\sqrt{17}$, para que ele não intercepte o eixo das abscissas, a distância do centro ao eixo y maior que o raio:

$$a > \sqrt{17}$$

Logo, $a = 5$.

Gabarito: "c".

---

35. (ESPCEX/2016)

Seja C a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$. Considere em C a corda MN cujo ponto médio é $P(-1, -1)$. O comprimento de MN (em unidade de comprimento) é igual a

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{3}$

e) 2

Comentário

O primeiro passo é identificar o centro e o raio da circunferência. Para isso, vamos completar os quadrados:

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 2 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 3$$

Seu centro é $O(-1,-2)$ e seu raio é $\sqrt{3}$.

Como MN é corda da circunferência, temos o triângulo OMN e o triângulo retângulo OPM, retângulo em P, pois OMN é isósceles. Como M está sobre a circunferência, temos que:

$$OM = \sqrt{3}$$

Veja que:

$$OP = \sqrt{(-1-(-1))^2 + (-2-(-1))^2} = 1$$

Por Pitágoras:

$$PM^2 + OP^2 = OM^2 \Rightarrow PM^2 + 1 = 3 \Rightarrow PM = \sqrt{2}$$

Como $PM = PN$, temos:

$$MN = PM + PN = 2\sqrt{2}$$

Gabarito: "c".

---

36. (ESPCEX/2015)

Considere a circunferência que passa pelos pontos $(0,0)$, $(0,6)$ e $(4,0)$ em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Sabendo que os pontos $(0,6)$ e $(4,0)$ pertencem a uma reta que passa pelo centro dessa circunferência, uma das retas tangentes a essa circunferência, que passa pelo ponto $(3,-2)$, tem por equação

a) $3x - 2y - 13 = 0$

b) $2x - 3y - 12 = 0$

c) $2x - y - 8 = 0$

d) $x - 5y - 13 = 0$

e) $8x + 3y - 18 = 0$

Comentários

Observe que esse triângulo é retângulo em $(0,0)$ com catetos 6 e 4. O centro dessa circunferência é o ponto médio da hipotenusa, isto é:

$$C = \frac{(0,6) + (4,0)}{2} = (2,3)$$

Seu raio é a metade da hipotenusa, isto é:

$$r = \frac{\sqrt{4^2 + 6^2}}{2} = \sqrt{13}$$

Seja $y = mx + b$ essa reta tangente, podemos dizer que a distância entre C e essa reta é igual ao raio, isto é:

$$\sqrt{13} = \left|\frac{2m - 3 + b}{\sqrt{m^2 + 1}}\right|$$

Como $(3, -2)$ pertence à reta:

$$-2 = 3m + b \Rightarrow b = -2 - 3m$$

Logo:

$$\sqrt{13} = \left|\frac{2m - 3 - 2 - 3m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| \Rightarrow 13 = \frac{(m + 5)^2}{m^2 + 1} \Rightarrow 13m^2 + 13 = m^2 + 10m + 25$$

Ou seja:

$$6m^2 - 5m - 6 = 0$$

Resolvendo para m:

$$m = \frac{3}{2}\ ou\ m = -\frac{2}{3}$$

Do que segue que:

$$m = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{13}{2}$$

$$m = -\frac{2}{3} \Rightarrow b = -2 - 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

As retas são:

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2} \Rightarrow 3x - 2y - 13 = 0\ ou\ y = -\frac{2}{3}x$$

Gabarito: "a".

---

37. (ESPCEX/2013)

Sejam dados a circunferência $\lambda: x^2 + y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$ e o ponto P, que é simétrico de $(-1, 1)$ em relação ao eixo das abscissas. Determine a equação da circunferência concêntrica a λ e que passa pelo ponto P

a) $\lambda: x^2 + y^2 + 4x + 10y + 16 = 0$

b) $\lambda: x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0$

c) $\lambda: x^2 - y^2 + 4x - 5y + 16 = 0$

d) $\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 5y + 12 = 0$

e) $\lambda: x^2 - y^2 - 4x - 10y - 17 = 0$

Comentários

O primeiro passo é completar os quadrados da equação da circunferência:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 + 10y + 25 = 0$$

Ou seja:

$$(x+2)^2 + (y+5)^2 = 4$$

Seu centro é, portanto, $(-2,-5)$.

Como P é simétrico de $(-1,1)$ em relação ao eixo das abcissas, temos que ele é dado por:

$$P(-1,-1)$$

A equação reduzida da circunferência procurada é dada por:

$$(x+2)^2 + (y+5)^2 = r^2$$

Como ela passa por P:

$$(-1+2)^2 + (-1+5)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 1 + 16 = 17$$

Logo:

$$(x+2)^2 + (y+5)^2 = 17$$

Desenvolvendo os quadrados:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = 17 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0$$

Gabarito: "b".

---

38. (ESPCEX/2012)

Considere a circunferência $(\lambda) x^2 + y^2 - 4x = 0$ e o ponto $P(1, \sqrt{3})$. Se a reta t é tangente a λ no ponto P, então a abscissa do ponto de intersecção de t com o eixo horizontal do sistema de coordenadas cartesianas é

a) -2

b) $2 + \sqrt{3}$

c) 3

d) $3 + \sqrt{3}$

e) $3 + 3\sqrt{3}$

Comentários

Se t é tangente à circunferência e sua equação reduzida é da forma $mx - y + b = 0$, temos que a distância entre t e o centro de λ é igual ao raio da circunferência.

Completando os quadrados na equação da circunferência, temos:

$$(x-2)^2 + y^2 = 2^2$$

Seu centro é $(2,0)$ e seu raio vale 2. Disso:

$$2 = \left|\frac{2m + b}{\sqrt{m^2 + 1}}\right|$$

Como P está sobre a reta, temos:

$$m - \sqrt{3} + b = 0 \Rightarrow b = \sqrt{3} - m$$

Logo:

$$2^2 = \frac{\left(2m + \sqrt{3} - m\right)^2}{m^2 + 1} \Rightarrow 4(m^2 + 1) = m^2 + 2\sqrt{3}m + 3$$

Ou ainda:

$$3m^2 - 2\sqrt{3}m + 1 = 0 \Rightarrow 3\left(m - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0$$

Resolvendo para m, vem:

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Do que temos que:

$$b = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Assim, a reta t é dada por:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

O eixo horizontal é a reta $y = 0$, logo:

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -2$$

O ponto é, portanto:

$$(-2,0)$$

Gabarito: “a”.

---

39. (ESPCEX/2011)

O ponto da circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ que tem ordenada máxima é

a) $(0, -6)$

b) $(-1, -3)$

c) $(-1, 0)$

d) $(2, 3)$

e) $(2, -3)$

Comentários

O primeiro passo é completar os quadrados para obter a equação reduzida:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

Veja que $(x + 1)^2 \geq 0$ e que:

$$(x + 1)^2 = 9 - (y + 3)^2 \geq 0$$

Isto é:

$$3 \geq |y + 3| \Rightarrow 3 \geq y + 3 \geq -3 \Rightarrow 0 \geq y \geq -6$$

Do que segue que o ponto de ordenada máxima tem ordenada 0 e sua abscissa é, portanto:

$$(x+1)^2+9=9 \Rightarrow x=-1$$

O ponto é:

$$(-1,0)$$

Gabarito: "c".

---

40. (ESPCEX/2017)

Uma elipse tem centro na origem e vértices em $(2a,0)$ e $(0,a)$, com $a>0$. A área do quadrado inscrito nessa elipse é

a) $16a^2/5$

b) $4a^2/5$

c) $12a^2/5$

d) $8a^2/5$

e) $20a^2/5$

Comentários

O centro dessa elipse é a origem, do que segue que sua equação é do tipo:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Seu eixo maior está sobre o eixo x, e mede $2\cdot 2a=4a$ e seu eixo menor está sobre o eixo y, do que segue que ele mede $2\cdot a$.

Portanto, a equação fica:

$$\frac{x^2}{(2a)^2}+\frac{y^2}{(a)^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

O vértice superior direito do quadrado possui coordenadas $\left(\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)$ e está sobre a elipse. Disso, temos que:

$$\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{4a^2}+\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{L^2}{4}\left(\frac{1}{4a^2}+\frac{4}{4a^2}\right)=1 \Rightarrow L^2=\frac{16a^2}{5}$$

A área do quadrado é dada por L^2, do que segue que ela vale:

$$A=L^2=\frac{16a^2}{5}$$

Gabarito: "a".

---

41. (ESPCEX/2016)

Os valores reais de n para os quais a reta (t) $y=x+n$ seja tangente à elipse de equação $2x^2+3y^2=6$ são iguais a

a) $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$

b) $-\sqrt{3}\ e\ \sqrt{3}$

c) $-3\ e\ 3$

d) $-2\ e\ 2$

e) $-5\ e\ 5$

Comentários

Substituindo y da reta na elipse:

$$2x^2 + 3(x+n)^2 = 6$$

$$2x^2 + 3(x^2 + 2nx + n^2) = 6 \Rightarrow 5x^2 + 6nx + 3n^2 - 6 = 0$$

Queremos que a reta seja tangente à elipse, do que segue que o discriminante da equação acima deve ser nulo (apenas uma raiz real):

$$\Delta = (6n)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (3n^2 - 6) = 0 \Rightarrow -24n^2 + 120 = 0 \Rightarrow n^2 = \frac{120}{24} = 5$$

Ou seja:

$$n = \pm\sqrt{5}$$

Gabarito: “a”.

---

42. (ESPCEX/2015)

Considere as afirmações:

I. **Uma elipse tem como focos os pontos $F_1(-3,0), F_2(3,0)$ e a medida do eixo maior é 8. Sua equação é $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.**

II. **Os focos de uma hipérbole são $F_1(-10,0), F_2(10,0)$ e sua excentricidade é $\frac{5}{3}$. Sua equação é $16x^2 - 9y^2 = 576$.**

III. **A parábola $8x = -y^2 + 6y - 9$ tem como vértice o ponto $V(3,0)$.**

Com base nessas afirmações, assinale a alternativa correta.

a) Todas as afirmações são falsas

b) Apenas as afirmações I e III são falsas

c) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras

d) Todas as afirmações são verdadeiras

e) Apenas a afirmação III é verdadeira

Comentários

Vamos analisar cada afirmação:

Afirmação I:

A semidistância focal vale $c = 3$ e o semieixo maior vale $a = \frac{8}{2} = 4$. Disso, seu semieixo menor vale:

$$b^2 + 3^2 = 4^2 \Rightarrow b^2 = 7$$

O seu centro é o ponto médio de F_1F_2, isto é, $(0,0)$ do que segue que sua equação é:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$$

Verdadeira.

Afirmação II:

A semidistância focal vale $c=10$. Da sua excentricidade, temos:

$$\frac{5}{3}=\frac{10}{a} \Rightarrow a=6$$

Além disso:

$$6^2+b^2=10^2 \Rightarrow b=8$$

Assim, sua equação é dada por:

$$\frac{x^2}{6^2}-\frac{y^2}{8^2}=1 \Rightarrow 64x^2-36y^2=48^2 \Rightarrow 16x^2-9y^2=576$$

Verdadeira.

Afirmação III:

Completando o quadrado do lado direito:

$$8(x-0)=-(y^2-6y+9)=-(y-3)^2$$

Logo, o vértice da parábola é o ponto $(0,3)$.

Falsa.

Gabarito: "c".

---

43. (ESPCEX/2014)

Uma reta t passa pelo ponto $A(-3,0)$ e é tangente à parábola de equação $x=3y^2$ no ponto P. Assinale a alternativa que apresenta uma solução correta de acordo com essas informações

a) $t: 2x-15+6=0 \ e \ P(12,2)$

b) $t: y=0 \ e \ P(0,0)$

c) $t: 2x+15y+6=0 \ e \ P(12,-2)$

d) $t: x+6y+3=0 \ e \ P(3,-1)$

e) $t: x-10y+3=0 \ e \ P(27,3)$

Comentários

Seja $t: y=mx+b$ a equação reduzida da reta t. Como ela passa por A, temos:

$$0=-3m+b \Rightarrow b=3m$$

Ou seja:

$$y=mx+3m$$

Substituindo na equação da parábola:

$$x=3(mx+3m)^2 \Rightarrow x=3(m^2x^2+6m^2x+9m^2)$$

$$3m^2x^2 + (18m^2 - 1)x + 27m^2 = 0$$

Da tangência, temos que o discriminante deve ser nulo:

$$\Delta = (18m^2 - 1)^2 - 4 \cdot 27m^2 \cdot 3m^2 = 0$$

$$\Delta = (18m^2 - 1)^2 - (18m^2)^2 = 0 \Rightarrow (18m^2 - 1 - 18m^2)(18m^2 - 1 + 18m^2) = 0$$

Disso, temos que:

$$36m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm\frac{1}{6}$$

Assim, $b = \pm\frac{1}{2}$ e temos duas retas possíveis:

$$t_1: y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\ ou\ x - 6y + 3 = 0\ \ (m = \frac{1}{6})$$

$$t_2: y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{2} \Rightarrow x + 6y + 3 = 0\ \ (m = -\frac{1}{6})$$

Os pontos de tangência são, usando que $m^2 = 1/36$:

$$3 \cdot \frac{1}{36}x^2 + \left(18 \cdot \frac{1}{36} - 1\right)x + \frac{27}{36} = 0 \Rightarrow \frac{1}{12}(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$m = 1/6$:

$$y = \frac{3}{6} + \frac{1}{2} = 1$$

$$P(3,1)$$

$m = -1/6$:

$$y = -\frac{3}{6} - \frac{1}{2} = -1$$

$$P(3,-1)$$

Gabarito: "d".

---

44. (ESPCEX/2013)

Sobre a curva $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$, assinale a alternativa correta

a) Seu centro é $(-2, 1)$

b) A medida do seu eixo maior é 25

c) A medida do seu eixo menor é 9

d) A distância focal é 4

e) Sua excentricidade é $0,8$

Comentários

Vamos completar os quadrados para identificar a cônica:

$$9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 25(y^2 + 2y + 1 - 1) - 164 = 0$$

$$9(x-2)^2 - 36 + 25(y+1)^2 - 25 - 164 = 0$$

$$9(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 225$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{225}{9}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{225}{25}} = 1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$$

Seu semieixo maior vale $a = 5$ e seu semieixo menor vale $b = 3$, do que temos que sua semidistância focal é:

$$c^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow c = 4$$

Assim, sua excentricidade é dada por:

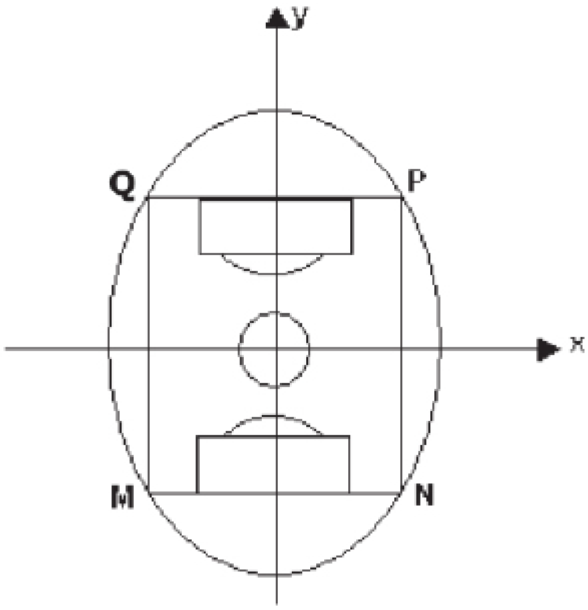
$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Gabarito: "e".

---

45. (ESPCEX/2011)

Num estádio de futebol em forma de elipse, o gramado é o retângulo $MNPQ$, inscrito na cônica, conforme mostra a figura. Escolhendo o sistema de coordenadas cartesianas indicado e tomando o metro como unidade, a elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{36^2} + \frac{y^2}{60^2} = 1$. Sabe-se também que os focos da elipse estão situados em lados do retângulo $MNPQ$.



Assim, a distância entre as retas MN e PQ é

a) **48m**

b) **68m**

c) **84m**

d) **92m**

e) **96m**

Comentários

Os focos da elipse estão situados nos pontos médios de $QP\ e\ MN$. Disso, temos que, sendo c a semidistância focal:

$$QM = PN = 2c$$

Da equação da elipse, $a = 60\ e\ b = 36$, do que segue que:

$$c^2 + 36^2 = 60^2 \Rightarrow c = 48$$

Veja que a distância entre MN e PQ vale $QM = PN = 2c = 2 \cdot 48 = 96$.

Gabarito: "e".

---

46. (ESPCEX/2011)

A representação no sistema cartesiano ortogonal da equação $9x^2 - y^2 = 36x + 8y - 11$ é dada por

a) **Duas retas concorrentes**

b) **Uma circunferência**

c) **Uma elipse**

d) **Uma parábola**

e) **Uma hipérbole**

Comentários

Vamos completar os quadrados para identificar a provável cônica:

$$9x^2 - 36x - y^2 - 8y + 11 = 0 \Rightarrow 9(x^2 - 4x + 4 - 4) - (y^2 + 8y + 16) + 11 = 0$$

Ou ainda:

$$9(x-2)^2 - (y+4)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - \frac{(y+4)^2}{9} = 1$$

Que corresponde à equação de uma hipérbole.

Gabarito: "e".

---

47. (ESPCEX/2011)

O ponto $P(a, 1/3)$ pertence à parábola $x = (y^2 + 3)/3$. A equação da reta perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares que passa por P é:

a) $27x + 27y - 37 = 0$

b) $37x + 27y - 27 = 0$

c) $27x + 37y - 27 = 0$

d) $27x + 27y - 9 = 0$

e) $27x + 37y - 9 = 0$

Comentários

Como P pertence à parábola, temos:

$$a=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2+3}{3}=\frac{28}{27}$$

E o ponto P é $\left(\frac{28}{27},\frac{1}{3}\right)$.

A bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta $y=x$, de coeficiente angular 1. Disso, segue que a reta buscada possui coeficiente angular -1, pois:

$$1\cdot(-1)=-1$$

Isto é:

$$y=-x+b$$

Como ela passa por P:

$$\frac{1}{3}=-\frac{28}{27}+b\Rightarrow b=\frac{37}{27}$$

Logo:

$$y=-x+\frac{37}{27}\Rightarrow 27x+27y-37=0$$

Gabarito: "a".

---

6. QUESTÕES NÍVEL 2

48. (AFA/2020)

O ponto da reta $r: x+3y-10=0$ que está mais próximo da origem do sistema cartesiano é também exterior à circunferência $\lambda: 2x^2+2y^2+4x-12y+k-4=0$, com $k\in\mathbb{Z}$.

É correto afirmar que dentre os possíveis valores de k:

a) existem 8 elementos.

b) três são números primos.

c) há um elemento que é um quadrado perfeito.

d) existem números negativos.

49. (AFA/2019)

Considere no plano cartesiano os pontos $A(2,0)$ e $B(6,-4)$ que são simétricos em relação à reta r.

Se essa reta r determina na circunferência $x^2+y^2-12x-4y+32=0$ uma corda que mede n unidades de comprimento, então n pertence ao intervalo

a) $[4,5[$

b) $[3,4[$

c) $[2, 3[$

d) $[1, 2[$

50. (AFA/2019)

No plano cartesiano, os focos F_1 e F_2 da elipse $\alpha: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ são pontos diametralmente opostos da circunferência λ e coincidem com as extremidades do eixo real da uma hipérbole equilátera β.

É INCORRETO afirmar que:

a) $\alpha \cap \beta \cap \lambda = \emptyset$

b) $\lambda \cap \beta = \{F_1, F_2\}$

c) $\alpha \cap \beta = \{A, B, C, D\}$, sendo A, B, C, D pontos distintos

d) $\alpha \cap \lambda \neq \emptyset$

51. (AFA/2018)

Considere no plano cartesiano a circunferência λ tangente à bissetriz dos quadrantes ímpares no ponto $A(1, 1)$. Sabendo que a reta $t : x - y + 4 = 0$ tangencia λ no ponto B, marque a opção correta.

a) A soma das coordenadas de B é igual a 3.

b) $P(-1, 2)$ é exterior a λ.

c) O ponto de λ mais próximo da origem é $Q\left(0, 2 - \sqrt{2}\right)$.

d) A bissetriz dos quadrantes pares é exterior a λ.

52. (AFA/2018)

No plano cartesiano, os pontos $P(x, y)$ satisfazem a equação $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ da curva de λ.

Se F_1 e F_2 são os focos de λ, tais que a abscissa de F_1 é menor que a abscissa de F_2, é INCORRETO afirmar que

a) a soma das distâncias de P a F_1 e de P a F_2 é igual a 10.

b) F_1 coincide com o centro da curva $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$.

c) F_2 é exterior a $x^2 + y^2 = 25$.

d) o ponto de abscissa máxima de λ pertence à reta $y = x - 8$.

53. (AFA/2017)

Seja $\lambda: 3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + k = 0$, uma circunferência que no plano cartesiano tem intersecção vazia com os eixos coordenados.

Considerando $k \in \mathbb{R}$, é correto afirmar que:

a) P $\left(\frac{k}{3}, \frac{k}{3}\right)$ é inferior a λ.

b) existem apenas dois valores inteiros para k.

c) a reta $r: x = k$ intersecta λ.

d) se c é o comprimento de λ, então $c > 2\,\pi$ unidades de comprimento.

54. (AFA/2016)

Analise as proporções abaixo e escreva V para a(s) verdadeira(s) e F para a(s) falsa(s).

I.( ) A distância entre o vértice e o foco da parábola $y^2 + 4x - 4 = 0$ é igual a 1 unidade de comprimento.

II.( ) Numa hipérbole equilátera, as assíntotas são perpendiculares entre si.

III.( ) A equação $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ representa uma elipse que tem um dos focos no ponto $P(1, 4)$

A sequência correta é

a) F-F-V

b) V-F-V

c) F-V-F

d) V-V-F

55. (AFA/2015)

Considere no plano cartesiano um triângulo equilátero ABC em que:

- os vértices B, de abscissa positiva, e C, de abscissa negativa, estão sobre o eixo $\overrightarrow{OX}$;

- possui baricentro no ponto $G\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Considere também, nesse mesmo plano cartesiano, a circunferência λ_1 inscrita e a circunferência λ_2 circunscrita ao triângulo ABC.

Analise as proposições abaixo e escreva (V) para verdadeira e (F) para falsa.

( ) A reta r, suporte do lado AB, passa pelo ponto $(-1, b)$, em que b é o dobro do oposto do coeficiente angular de r;

( ) O círculo delimitado por λ_2 contém o ponto $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$;

( ) O ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares de abscissa $\frac{\sqrt{3}}{3}$ pertence a λ_1.

A sequência correta é

a) V-F-V

b) F-F-V

c) V-F-F

d) F-V-F

56. (AFA/2015)

Considerando a circunferência de equação $\lambda: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$, é correto afirmar que

a) λ é concêntrica com $\alpha: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

b) o ponto $O(0,0)$ é exterior a λ

c) a reta $r: x - y + 3 = 0$ é tangente a λ

d) λ é simétrica da circunferência $\beta: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$, em relação ao ponto $O(0,0)$.

57. (AFA/2014)

A circunferência λ é tangente à reta $r: y = \frac{3}{4}x$ e também é tangente ao eixo das abscissas no ponto de abscissa 6.

Dentre as equações abaixo, a que representa uma parábola que contém a origem do plano cartesiano e o centro de λ é

a) $12(y-x) + x^2 = 0$

b) $3y^2 - 12y + 2x = 0$

c) $2y^2 - 3x = 0$

d) $12y - x^2 = 0$

58. (AFA/2013)

Sobre a circunferência de menor raio possível que circunscreve a elipse da equação $x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 88 = 0$ é correto afirmar que

a) tem raio igual a 1.

b) tangencia o eixo das abscissas.

c) é secante ao eixo das ordenadas.

d) intercepta a reta de equação $4x - y = 0$.

59. (AFA/2012)

No plano cartesiano, a circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$, determina no eixo das ordenadas uma corda de comprimento $l = 8$.

Dessa forma, é correto afirmar que

a) λ é a tangente ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$

b) o raio de λ é igual a $\sqrt{k}$

c) $P(k, -1) \in \lambda$

d) λ é secante à reta $x = k$

60. (AFA/2010)

Considere as circunferências dadas pela equação $x^2 + y^2 = \frac{1}{b^2}$ $(b \in \mathbb{R}^*)$.

A circunferência que circunscreve um quadrado de área igual a 1250 é tal que b pertence ao intervalo

a) $]0, \frac{1}{30}[$

b) $]\frac{1}{30}, \frac{1}{28}[$

c) $]\frac{1}{28}, \frac{1}{26}[$

d) $]\frac{1}{26}, \frac{1}{24}[$

61. (EFOMM/2021)

Uma circunferência tem seu centro sobre a reta parametrizada por:

$$r: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = t - 1 \end{cases}$$

Se os pontos $A(2, 4)$ e $B(-1, 3)$ também pertencem a essa circunferência, assinale a alternativa que corresponda ao centro dessa circunferência.

a) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $(1, 1)$

c) $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

d) $(0, 3)$

e) $(1, 2)$

62. (EFOMM/2019)

A equação $(x^2\ /144) + (y^2/\ 225) = 1$ representa uma

a) elipse com focos em $(0, 9)$ e $(0, -9)$.

b) circunferência de raio igual 9.

c) parábola.

d) hipérbole.

e) elipse com centro em $[12, 15]$.

63. (EFOMM/2017)

Sejam as circunferências $c_1: x^2 + y^2 - 16 = 0$ e $c_2: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$. Considere A e B os pontos de intersecção dessas circunferências. Determine a distância ente A e B.

a) $2\sqrt{7}$

b) $\sqrt{14}$

c) $2\sqrt{14}$

d) $\sqrt{7}$

e) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

64. (EFOMM/2016)

Quanto a posição relativa, podemos classificar as circunferências $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ e $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$

a) secantes.

b) tangentes internas.

c) tangentes externas.

d) externas.

e) internas.

65. (EFOMM/2015)

Seja C uma circunferência de raio 2 centrada na origem do plano xy. Um ponto P do 1º quadrante fixado sobre C determina um segmento OP, onde O é a origem, que forma um ângulo de $\pi/4$ radianos com o eixo das abscissas. Pode-se afirmar que a reta tangente ao gráfico de C passando por P é dada por

a) $x + y - 2 = 0$.

b) $\sqrt{2}+y-1=0$.

c) $-\sqrt{2}+y-2=0$

d) $x+y-2\sqrt{2}=0$

e) $x-y-2\sqrt{2}=0$

66. (EFOMM/2013)

Um muro será construído para isolar a área de uma escola que está situada a $2\ km$ de distância da estação de metrô. Esse muro será erguido ao longo de todos os pontos P, tais que a razão entre a distância de P à estação do metrô e a distância de P à escola é constante e igual a $\sqrt{2}$. Em razão disso, dois postes, com uma câmera cada, serão fixados nos pontos do muro que estão sobre a reta que passa pela escola e é perpendicular à reta que passa pelo metrô e pela escola. Então, a distância entre os postes, em km, será:

a) 2.

b) $2\sqrt{2}$.

c) $2\sqrt{3}$.

d) 4.

e) $2\sqrt{5}$.

67. (EFOMM/2013)

Um ponto $P=(x,y)$, no primeiro quadrante do plano xy, situa-se no gráfico de $y=x^2$. Se θ é o ângulo de inclinação da reta que passa por P e pela origem, então o valor da expressão $1+y$ (onde y é a ordenada de P) é:

a) $cos\theta$.

b) $\cos^2\theta$.

c) $\sec^2\theta$.

d) $tg^2\theta$.

e) $sen\theta$.

68. (EFOMM/2006)

O valor de b para que a reta $y=x+b$ não intercepte os ramos da hipérbole $x^2-y^2=1$ é

a) -1

b) 0

c) 1

d) 2

e) $\sqrt{2}$

69. (EFOMM/2006)

O centro da circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 + 16x - 4y + 12 = 0$ é o ponto de coordenadas:

a) $(-8, 2)$

b) $(-16, 4)$

c) $(8, -2)$

d) $(4, -1)$

e) $(16, -4)$

70. (EN/2021)

Seja uma elipse centrada na origem de focos $A(0;\ -4)$ e B. Considere $C(4; 4)$ e P pontos sobre a elipse. Dado o ponto $D(3; 2)$, considere m a distância de D a P e n a distância de P a um dos focos. O menor valor possível de $m + n$ é:

a) $2 \cdot (2 + \frac{\sqrt{5}}{2})$

b) $(2 + \frac{\sqrt{5}}{2})$

c) $2 \cdot (2 - \frac{\sqrt{5}}{2})$

d) $2 \cdot (2 + \sqrt{5})$

e) $(2 + \sqrt{5})$

71. (Escola Naval/2018)

Sejam a elipse de equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ e o ponto $P(8, 0)$. Duas retas r e s, que passam por P, tangenciam a elipse nos pontos A e B, respectivamente. Sendo assim, a área do triângulo ABP é igual a:

a) 40

b) $15\sqrt{3}$

c) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{35\sqrt{15}}{4}$

e) $21\sqrt{3}$

72. (Escola Naval/2018)

Seja a família de funções reais f, definidas por $f(x) = 2x^2 + bx + 3$, sendo $b \in \mathbb{R}$ e, seja a função real g, definida pelo lugar geométrico dos pontos extremos das funções f. Sendo assim, o valor de $g(7)$ é:

a) 101

b) -101

c) 95

d) -95

e) -98

73. (Escola Naval/2018)

O lugar geométrico dos pontos P do plano de mesma potência em relação a duas circunferências não concêntricas é chamado eixo radical. Seja C_1 a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 64$ e C_2 a circunferência de equação $(x + 24)^2 + y^2 = 16$. Sejam a e b as distâncias do eixo radical a cada uma das circunferências, assinale a opção que apresenta o valor de $|a - b|$.

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{5}{2}$

c) 2

d) 1

e) $\frac{1}{2}$

74. (Escola Naval/2017)

Seja $P(x, y)$ um ponto da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de focos F_1 e F_2 e excentricidade e. Calcule $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ e assinale a opção correta.

a) $ex^2 + a(1 + 2e^2)$

b) $e^2x - a^2(1 + e)$

c) $e^2x^2 + a^2(1 - 2e)$

d) $e^2x - a(1 + e^2)$

e) $e^2x^2 + a^2(1 - 2e^2)$

75. (Escola Naval/2016)

A área da região limitada pelos gráficos das funções $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = |x|$ e $y = \frac{3\sqrt{2}+2x}{4}$ é igual a:

a) $\frac{3\sqrt{2}}{4}(3\pi - 2)$

b) $\frac{3}{4}(\pi - 2)$

c) $\frac{3}{4}(\pi - 2\sqrt{2})$

d) $\frac{3}{4}(3\pi - 2)$

e) $\frac{3}{4}(3\pi - 2\sqrt{2})$

76. (Escola Naval/2015)

As retas $r_1: 2x - y + 1 = 0$; $r_2: x + y + 3 = 0$ e $r_3: \alpha x + y - 5 = 0$ concorrrem em um mesmo ponto P para determinado valor de $\alpha \in \mathbb{R}$. Sendo assim, pode-se afirmar que o valor da expressão $\cos\left(\frac{\alpha\pi}{3}\right) - 3sen^3\left[\frac{(-3-\alpha)\pi}{8}\right] - \frac{5\sqrt{3}}{2}tg\left(-\frac{\alpha\pi}{6}\right)$ é

a) $3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

b) $2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $2 + \frac{\sqrt{2}}{8}$

d) $3 + \frac{\sqrt{2}}{4}$

e) $3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

77. (Escola Naval/2014)

Quantas unidades de área possui a região plana limitada pela curva de equação $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$ e pelas retas $2y + x - 3 = 0$, $2y - x + 3 = 0$ e $x = 2$?

a) $\pi + \frac{1}{2}$

b) $\pi + \frac{3}{2}$

c) $\frac{\pi}{2} + 1$

d) $\pi + 3$

e) $\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}$

78. (Escola Naval/2014)

Sejam $y = m_1x + b_1$ e $y = m_2x + b_2$ as equações das retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 - 16y + 12 = 0$ que passam pelo ponto $P(0,0)$. O valor de $(m_1^2 + m_2^2)$ é

a) 1

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{2}$

d) 2

e) $\frac{5}{2}$

79. (Escola Naval/2014)

A equação da circunferência tangente às retas $y = x$ e $y = -x$ nos pontos $(3,3)$ e $(-3,3)$ é

a) $x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0$

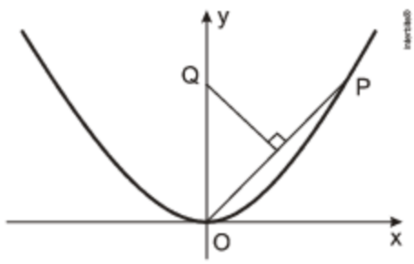
c) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 16x + 20 = 0$

80. (Escola naval/2013)

A figura abaixo mostra um ponto $P \neq O$, O origem, sobre a parábola $y = x^2$ e o ponto Q, interseção da mediatriz do segmento OP com o eixo y. À medida que P tende à origem ao longo da parábola, o ponto Q se aproxima do ponto:



a) $(0,0)$

b) $\left(0,\frac{1}{8}\right)$

c) $\left(0,\frac{1}{6}\right)$

d) $\left(0,\frac{1}{4}\right)$

e) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

81. (Escola Naval/2013)

Quantas unidades de área possui a região plana limitada pela curva de equação $y = -\sqrt{3 - x^2 - 2x}$ e a reta $y = x - 1$?

a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$

b) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$

c) $3\pi + 2$

d) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

e) $\pi - 2$

82. (Escola Naval/2013)

Quantas unidades de área possui a região plana limitada pela curva de equação $y = -\sqrt{-(x^2 + 6x + 8)}$ e pela reta $y = x + 2$?

a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$

b) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$

c) $\frac{\pi}{2} + 1s$

d) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

e) $\pi - 2$

83. (Escola Naval/2013)

A reta no $\mathbb{R}^2$ de equação $2y - 3x = 0$ intercepta o gráfico da função $f(x) = |x|\frac{x^2-1}{x}$ nos pontos P e Q. Qual a distância entre P e Q?

a) $2\sqrt{15}$

b) $2\sqrt{13}$

c) $2\sqrt{7}$

d) $\sqrt{7}$

e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

84. (Escola Naval/2013)

A equação $4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$, no plano xy, representa

a) duas retas

b) uma circunferência

c) uma elipse

d) uma hipérbole

e) uma parábola

85. (Escola Naval/2012)

Considere a sequência $(a, b, 2)$ uma progressão aritmética e a sequência $(b, a, 2)$ uma progressão geométrica não constante, $a, b \in \mathbb{R}$. A equação da reta que passa pelo ponto (a, b) e pelo vértice da curva $y^2 - 2y + x + 3 = 0$ é

a) $6y - x - 4 = 0$

b) $2x - 4y - 1 = 0$

c) $2x - 4y + 1 = 0$

d) $x + 2y = 0$

e) $x - 2y = 0$

GABARITO

48. b
49. a
50. d
51. c
52. b
53. b
54. d
55. a
56. d
57. b
58. b
59. a
60. d
61. a

62. a
63. b
64. a
65. d
66. d
67. c
68. b
69. a
70. a
71. b
72. d
73. c
74. e
75. d
76. e
77. e
78. c
79. b
80. e
81. e
82. d
83. b
84. d
85. d

RESOLUÇÃO

48. (AFA/2020)

O ponto da reta $r: x + 3y - 10 = 0$ que está mais próximo da origem do sistema cartesiano é também exterior à circunferência $\lambda: 2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + k - 4 = 0$, com $k \in \mathbb{Z}$.

É correto afirmar que dentre os possíveis valores de k:

a) existem 8 elementos.

b) três são números primos.

c) há um elemento que é um quadrado perfeito.

d) existem números negativos.

Comentários

O ponto da reta r mais próximo da origem é aquele que é interseção da reta perpendicular à r que passa pela origem. Chamemos essa reta de $p: y = ax$, veja que ela passa pela origem (o ponto (0,0) satisfaz a equação de p). Queremos que $p \perp r$, o que implica que o produto de seus coeficientes angulares é -1:

$$a \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \boxed{p: y = 3x}$$

$$\Rightarrow r \cap p: \begin{cases} y = 3x \\ x + 3y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 3 \cdot 3x = 10 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{r \cap p = X = (1,3)}$$

É dada no enunciado a circunferência λ de equação:

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + k - 4 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + 2x + 1) + 2(y^2 - 6y + 9) = 24 - k$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = \frac{24-k}{2} = R^2 (*)$$

Como $R^2 > 0 \Rightarrow 24 - k > 0 \Rightarrow \boxed{k < 24}\ (**)$

É dito que $X = (1,3)$ é exterior à circunferência e, portanto, a distância dele ao centro da circunferência deve ser maior que o raio. Lembrando que o lado esquerdo de $(*)$ corresponde ao valor dessa distância ao quadrado, substituindo o ponto X:

$$(x_X + 1)^2 + (y_X - 3)^2 = (1+1)^2 + (3-3)^2 > \frac{24-k}{2} \Rightarrow 4 > \frac{24-k}{2}$$

$$\Rightarrow 8 > 24 - k \Rightarrow \boxed{k > 16}\ (***)$$

Assim, de $(**)\ e\ (***)$:

$$16 < k < 24$$

Assim, como $k \in \mathbb{Z}$, ele pode ser $17, 18, 19, 20, 21, 22, 23$. Assim, a alternativa verdadeira sobre esses números é a alternativa b), pois temos 17, 19 e 23 como únicos números primos.

Gabarito: “b”

---

49. (AFA/2019)

Considere no plano cartesiano os pontos $A(2,0)$ e $B(6,-4)$ que são simétricos em relação à reta r.

Se essa reta r determina na circunferência $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 32 = 0$ uma corda que mede n unidades de comprimento, então n pertence ao intervalo

a) $[4, 5[$

b) $[3, 4[$

c) $[2, 3[$

d) $[1, 2[$

Comentários

O conceito de simetria de dois pontos em relação à uma reta r implica que a reta t que une esses pontos A e B seja perpendicular à r, e que se cruzem no ponto médio de t. A reta que passa por A e B satisfaz:

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_A}{x - x_A} \Rightarrow \frac{0-(-4)}{2-6} = \frac{y-0}{x-2} \Rightarrow 4x - 8 = -4y \Rightarrow \boxed{t: y = 2 - x}$$

Essa reta $t \perp r$, e o ponto médio M do segmento AB pertence à r.

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(2,0)+(6,-4)}{2} = (4,-2) \in r$$

Se chamarmos a equação de $r: y = ax + b$, como $r \perp t$ então o produto de seus coeficientes angulares é -1:

$$r \perp t \Rightarrow a \cdot -1 = -1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$M \in r \Rightarrow (4,-2)\ satisfaz\ a\ equação\ de\ r \Rightarrow -2 = 4 + b \Rightarrow \boxed{b = -6}$$

Assim, sabemos a equação de $r: y = x - 6$. Queremos saber quanto mede a corda que r determina em λ. Para isso basta acharmos os pontos de intersecção de λ e r, isto é, os pontos que satisfazem:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 4y + 32 = 0 \Rightarrow (x-6)^2 + (y-2)^2 = 8 \\ y = x - 6 \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira:

$$y^2 + (y-2)^2 = 8 \Rightarrow 2y^2 - 4y + 4 = 8 \Rightarrow y^2 - 2y + 2 = 4 \Rightarrow (y-1)^2 = 3$$

$$\Rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{3}$$

Assim, os pontos possíveis são:

$$y_1 = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x_1 = y_1 + 6 = 7 + \sqrt{3}$$

$$y_2 = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow x_2 = y_2 + 6 = 7 - \sqrt{3}$$

Assim, $A = \left(7+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)\ e\ B = \left(7-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\right)$

Portanto, a corda desejada é:

$$AB = \sqrt{\left(7-\sqrt{3}-\left(7+\sqrt{3}\right)\right)^2 + \left(1-\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{6}$$

Assim, $n = 2\sqrt{6} \approx 4{,}9$. Portanto, a corda está entre 4 e 5.

Gabarito "a"

---

50. (AFA/2019)

No plano cartesiano, os focos $F_1\ e\ F_2$ da elipse $\alpha: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ são pontos diametralmente opostos da circunferência λ e coincidem com as extremidades do eixo real da uma hipérbole equilátera β.

É INCORRETO afirmar que:

a) $\alpha \cap \beta \cap \lambda = \emptyset$

b) $\boldsymbol{\lambda \cap \beta = \{F_1, F_2\}}$

c) $\boldsymbol{\alpha \cap \beta = \{A, B, C, D\}}$**, sendo** $\boldsymbol{A, B, C, D}$ **pontos distintos**

d) $\boldsymbol{\alpha \cap \lambda \neq \emptyset}$

Comentários

A elipse dada é $\alpha: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$. Portanto, podemos dizer que os semieixos maior e menor são:

$$a = \sqrt{36} = 6 \text{ e } b = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = 32 + c^2 \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

Em que a distância focal é $2c$. Portanto, os focos dessa elipse são $(-c, 0)\ e\ (c, 0) = (-2,0)\ e\ = (-2,0)$. Se esses pontos são diametralmente opostos na circunferência, então o ponto médio entre eles $(0,0)$ é o centro dessa circunferência e seu raio mede 2.

Até agora, fica óbvio que a circunferência e a elipse não se intersectam, pois ambas têm como centro a origem, e o raio da circunferência tanto é menor que o semieixo maior quanto que o semieixo menor.

Porém isso já nos garante resolver a questão e marcar a alternativa d) como incorreta, uma vez que não há intersecção entre $\alpha\ e\ \lambda$, isto é:

$$\alpha \cap \lambda = \emptyset$$

Gabarito "d"

---

51. (AFA/2018)

Considere no plano cartesiano a circunferência $\boldsymbol{\lambda}$ **tangente à bissetriz dos quadrantes ímpares no ponto** $\boldsymbol{A(1,1)}$**. Sabendo que a reta** $\boldsymbol{t : x - y + 4 = 0}$ **tangencia** $\boldsymbol{\lambda}$ **no ponto** $\boldsymbol{B}$**, marque a opção correta.**

a) A soma das coordenadas de $\boldsymbol{B}$ **é igual a 3.**

b) $\boldsymbol{P(-1, 2)}$ **é exterior a** $\boldsymbol{\lambda}$**.**

c) O ponto de $\boldsymbol{\lambda}$ **mais próximo da origem é** $\boldsymbol{Q\left(0, 2 - \sqrt{2}\right)}$**.**

d) A bissetriz dos quadrantes pares é exterior a $\boldsymbol{\lambda}$**.**

Comentários

Perceba que a circunferência λ tangencia duas retas: a bissetriz dos quadrantes ímpares $(y - x = 0$ e a reta $t: y - x = 4$. Portanto, vemos que essas retas nunca se interceptam, isto é, são paralelas.

Quando temos uma circunferência que tangencia duas retas paralelas distintas, existe um diâmetro dessa circunferência cujas extremidades são esses pontos de tangência, sendo assim, perpendicular a essas duas retas.

Assim, para achar o ponto B, basta nós acharmos a reta $p: y = ax + b$ perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares $(y = x)$ e que passa por $A(1,1)$. Sabemos que o produto dos coeficientes angulares precisa ser -1:

$$1 \cdot a = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$A(1,1) \in p \Rightarrow 1 = -1 + b \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow p: y = 2 - x \Rightarrow y + x = 2$$

Calculando agora o ponto $B = t \cap p$:

$$\begin{cases} y + x = 2 \\ y - x = 4 \end{cases} \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow \boxed{y = 3} \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

Logo, $B = (-1,3)$

Assim: a) errada, pois $B = (-1,3) \Rightarrow -1 + 3 = 2 \neq 3$

Se estamos interessados em calcular a equação de λ, basta encontrarmos a distância $AB = 2R$, sabendo que o centro de λ (x_0, y_0) é o ponto médio de AB:

$$(x_0, y_0) = \frac{A + B}{2} = \frac{(1,1) + (-1,3)}{2} = (0,2)$$

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2R = 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{R = \sqrt{2}}$$

Assim, a equação da circunferência é:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{\lambda:\ x^2 + (y-2)^2 = 2}$$

Letra b): $P(-1,2)$ estará fora de λ apenas se a distância deste ao centro for maior que o raio:

$$(-1)^2 + (2-2)^2 = 1 < 2 = R^2$$

Portanto, é uma alternativa falsa. O ponto é interno à circunferência.

Letra c): O ponto da circunferência mais próximo da origem é o ponto de intersecção do segmento que liga a origem ao centro de λ com a própria circunferência λ. Isso pode ser provado por desigualdade triangular.

Como o centro é $(0,2)$ e a origem é $(0,0)$ esse segmento está contido no eixo ordenado, onde $x = 0$. Portanto esse ponto é da forma $(0, y)$. Aplicando na equação da circunferência:

$$(y-2)^2 = 2 \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{2}$$

Como queremos aquele ponto com menor módulo: $y = 2 - \sqrt{2}$. Assim, esse ponto mais próximo é $\left(0, 2 - \sqrt{2}\right)$. Portanto, a alternativa c) é correta.

Letra d): Falsa. Basta ver que se resolver sistema da intersecção da bissetriz dos quadrantes pares $(y + x = 0)$ com a circunferência $\lambda: x^2 + (y-2)^2 = 2$, achará pelo menos um ponto de interseção. Isto garante que essa reta não é externa à λ.

Gabarito: "c"

52. (AFA/2018)

No plano cartesiano, os pontos $P(x,y)$ satisfazem a equação $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$ da curva de λ.

Se F_1 e F_2 são os focos de λ, tais que a abscissa de F_1é menor que a abscissa de F_2, é INCORRETO afirmar que

a) a soma das distâncias de P a F_1 e de P a F_2 é igual a 10.

b) F_1 coincide com o centro da curva $x^2+y^2+6x-4y=0$.

c) F_2 é exterior a $x^2+y^2=25$.

d) o ponto de abscissa máxima de λ pertence à reta $y=x-8$.

Comentários

Uma equação de uma elipse centrada em (x_0,y_0), com eixos paralelos aos eixos coordenados, de semieixo maior a, semieixo menor b e distância focal $2c$ é dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$
$$a^2=b^2+c^2$$

Se $a>b$, as posições dos focos são dadas por (x_0-c,y_0) e (x_0+c,y_0).

Portanto, equação dada é de uma elipse de centro em $(1,-2)$ com semieixo maior igual a 5, semieixo menor igual a 3. Vamos calcular o valor de c:

$$a^2=b^2+c^2\Rightarrow 25=9+c^2\Rightarrow c=4$$

Portanto, os focos são $F_1(1-4,-2)=\boxed{F_1(-3,-2)}$ e $F_2(1+4,-2)=\boxed{F_2(5,-2)}$

Letra a): Verdadeira, pois essa é a definição dos pontos que satisfazem a elipse: a soma das distâncias de P aos focos é igual ao eixo maior $(2a=2\cdot 5=10)$.

Letra b): vamos calcular o centro da curva

$$x^2+y^2+6x-4y=0\Rightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=13$$
$$Centro:(-3,2)\neq F_1$$

Portanto, b) é incorreta! Alternativa que deve ser marcada.

Letra c): $F_2(5,-2)$ é exterior a $x^2+y^2=25\Leftrightarrow 5^2+(-2)^2>25$, que é fato. Portanto, alternativa correta.

Letra d): Pelo formato de ume elipse, é imediato saber que quando a abscissa é máxima, o ponto está no eixo maior, isto é $P(x,y_0)=P(x,-2)$. Aplicando na equação:

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(-2+2)^2}{9}=1\Rightarrow x-1=\pm 5\Rightarrow x_{Max}=1+5=6$$

Portanto, o ponto de abscissa máxima é $(6,-2)$. Esse ponto satisfaz $y=x-8$. Portanto, alternativa verdadeira.

Gabarito "b"

53. (AFA/2017)

Seja $\lambda: 3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + k = 0$, uma circunferência que no plano cartesiano tem intersecção vazia com os eixos coordenados.

Considerando $k \in \mathbb{R}$, é correto afirmar que:

a) P $\left(\frac{k}{3}, \frac{k}{3}\right)$ é inferior a λ.

b) existem apenas dois valores inteiros para k.

c) a reta $r: x = k$ intersecta λ.

d) se c é o comprimento de λ, então $c > 2\pi$ unidades de comprimento.

Comentários

Se a circunferência não tem intersecção com os eixos coordenados, então o centro dela precisa distar mais que o seu próprio raio dos eixos coordenados. Isso significa que os módulos de suas coordenadas devem ser maiores que o raio. Vamos identificar essas coordenadas do centro:

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + k = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{k}{3} = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + \frac{k}{3} - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 - \frac{k}{3}$$

Assim, o centro dessa circunferência é $(1,2)$ e o seu raio mede $R = \sqrt{5 - \frac{k}{3}}$

$$\Rightarrow 5 - \frac{k}{3} > 0 \Rightarrow \boxed{k < 15}$$

Como a menor coordenada do centro é 1, temos que o raio tem que ser menor que 1:

$$\sqrt{5 - \frac{k}{3}} < 1 \Rightarrow 5 - \frac{k}{3} < 1 \Rightarrow \boxed{k > 12}$$

Assim, vemos que a letra b) está correta, pois há apenas dois valores inteiros de k possíveis: $13 \ e \ 14$.

Gabarito: "b"

---

54. (AFA/2016)

Analise as proporções abaixo e escreva V para a(s) verdadeira(s) e F para a(s) falsa(s).

I.( ) A distância entre o vértice e o foco da parábola $y^2 + 4x - 4 = 0$ é igual a 1 unidade de comprimento.

II.( ) Numa hipérbole equilátera, as assíntotas são perpendiculares entre si.

III.( ) A equação $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ representa uma elipse que tem um dos focos no ponto $P(1,4)$

A sequência correta é

a) F-F-V

b) V-F-V

c) F-V-F

d) V-V-F

Comentários

I. A parábola dada tem equação:

$$y^2 = 4(x-1)$$

Sabendo que a equação geral para parábolas desse tipo, com vértice (x_v, y_v) é:

$$(y-y_v)^2 = 2p(x-x_v)$$

Onde $\frac{p}{2}$ é a distância do foco ao vértice. Portanto, vemos que o vértice é $(1,0)$ e que $p = 2 \Rightarrow \frac{p}{2} = 1$. Portanto, a distância do vértice ao foco da parábola é, de fato, 1. Verdadeira!

II. Uma hipérbole equilátera é da forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; onde \; a = b$$

As assíntotas são dadas por $y = \pm\frac{b}{a}x$. Como $b = a \Rightarrow y = \pm x$, que são as bissetrizes do quadrante par e ímpar, que são perpendiculares entre si. Portanto, afirmativa verdadeira.

III. Ajeitando a equação:

$$2(x^2-2x+1) + (y^2-4y+4) - 2 = 0 \Rightarrow 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$

Portanto, nessa elipse $a^2 = 2, b^2 = 1$, o semieixo maior é na vertical, e os focos também:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2 = 1 + c^2 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Portanto, os focos são $F_1(1, 2-1) = F_1(1,1) \; e \; F_2(1, 2+1) = F_2(1,3)$.

Assim, essa alternativa é falsa.

A ordem correta é VVF.

Gabarito: “d”

---

55. (AFA/2015)

Considere no plano cartesiano um triângulo equilátero ABC em que:

- os vértices B, de abscissa positiva, e C, de abscissa negativa, estão sobre o eixo $\overrightarrow{OX}$;

- possui baricentro no ponto $G\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Considere também, nesse mesmo plano cartesiano, a circunferência λ_1 inscrita e a circunferência λ_2 circunscrita ao triângulo ABC.

Analise as proposições abaixo e escreva (V) para verdadeira e (F) para falsa.

( ) A reta r, suporte do lado AB, passa pelo ponto $(-1, b)$, em que b é o dobro do oposto do coeficiente angular de r;

( ) O círculo delimitado por λ_2 contém o ponto $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$;

( ) O ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares de abscissa $\frac{\sqrt{3}}{3}$ pertence a λ_1.

A sequência correta é

a) V-F-V

b) F-F-V

c) V-F-F

d) F-V-F

Comentários

Sabe-se que, num triângulo retângulo, o baricentro é exatamente o incentro e o circuncentro do triângulo. Além disso, a projeção do baricentro em qualquer lado do triângulo equilátero incide no ponto médio deste. Como o baricentro está no eixo y, e o lado BC está no eixo x, então o eixo y é mediatriz do lado BC. Isso implica que os lados B e C são simétricos: $B = \left(\frac{l}{2}, 0\right)$ e $C = \left(-\frac{l}{2}, 0\right)$. Além disso, implica também que o vértice $A = \left(0, \frac{l\sqrt{3}}{2}\right)$, pelo $sen\ 60°$.

A fórmula da Geometria Analítica para o baricentro, em coordenadas cartesianas é:

$$G = \frac{A + B + C}{3} \Rightarrow G = \frac{\left(0, \frac{l\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{l}{2}, 0\right) + \left(-\frac{l}{2}, 0\right)}{3} = \left(0, \frac{l\sqrt{3}}{6}\right) = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow l = 2$$

Assim, sabemos agora o valor do lado do triângulo e os seus vértices. Assim, podemos analisar a alternativa I:

I. A reta r que contém $A\left(0, \sqrt{3}\right)$ e $B(1,0)$ é tal que o coeficiente angular é constante e igual a:

$$\frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \Rightarrow \frac{y - 0}{x - 1} = \frac{\sqrt{3} - 0}{0 - 1} \Rightarrow -y = \sqrt{3}(x - 1) \Rightarrow \boxed{r: y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}}$$

O ponto $(-1, b)$ é tal que b é o dobro do oposto do coeficiente angular de r. Como o coeficiente angular de r é $-\sqrt{3} \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$. Vejamos se r passa por $\left(-1, 2\sqrt{3}\right)$:

$$2\sqrt{3} = -\sqrt{3}(-1) + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow FATO$$

Portanto, afirmativa <u>verdadeira</u>!

Sabemos que o raio de λ_1 é a distância de $G\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ao ponto médio de BC (origem):

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

O raio de λ_2 é a distância de G ao vértice A. Como estão ambos no eixo y:

$$r_2 = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Assim, podemos calcular as equações de λ_1 e λ_2, ambas centradas em $G\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$\lambda_1: x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\lambda_2: x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

Analisando a afirmativa II:

II. O círculo delimitado por λ_2 é todo (x, y) que satisfaz:

$$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 < \frac{4}{3}$$

Verificando para $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$:

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{4}{3} < \frac{4}{3}, ABSURDO$$

Portanto, alternativa falsa!

III. A bissetriz dos quadrantes ímpares: $y = x$. Se a abscissa é $\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Assim,

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \in \lambda_1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}, FATO!$$

Portanto, afirmativa verdadeira!

Ordem correta: VFV

Gabarito: "a"

---

56. (AFA/2015)

Considerando a circunferência de equação $\lambda: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$, é correto afirmar que

a) λ é concêntrica com $\alpha: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

b) o ponto $O(0,0)$ é exterior a λ

c) a reta $r: x - y + 3 = 0$ é tangente a λ

d) λ é simétrica da circunferência $\beta: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$, em relação ao ponto $O(0,0)$.

Comentários

Ajeitando a equação da circunferência:

$$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)-9=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=3^2$$

Portanto, temos uma circunferência de centro $(-1,2)$ e raio 3.

Letra a) é falsa, pois o centro de α é $(1,2)$.

Letra b) é falsa, pois a distância da origem para o centro de λ é menor que 3 (raio de λ).

Letra c) é falsa também, pois $x-y+3=0 \Rightarrow x+1=y-2$. Substituindo na equação da circunferência, encontraremos dois pontos de intersecção. Portanto, não pode ser uma reta tangente.

Letra d) é verdadeira, pois β é uma circunferência de mesmo raio que λ, e possui o centro $(1,-2)$, que é simétrico ao centro de λ $(-1,2)$ em relação à origem.

Gabarito: "d"

---

57. (AFA/2014)

A circunferência λ é tangente à reta r: $y=\frac{3}{4}x$ e também é tangente ao eixo das abscissas no ponto de abscissa 6.

Dentre as equações abaixo, a que representa uma parábola que contém a origem do plano cartesiano e o centro de λ é

a) $12(y-x)+x^2=0$

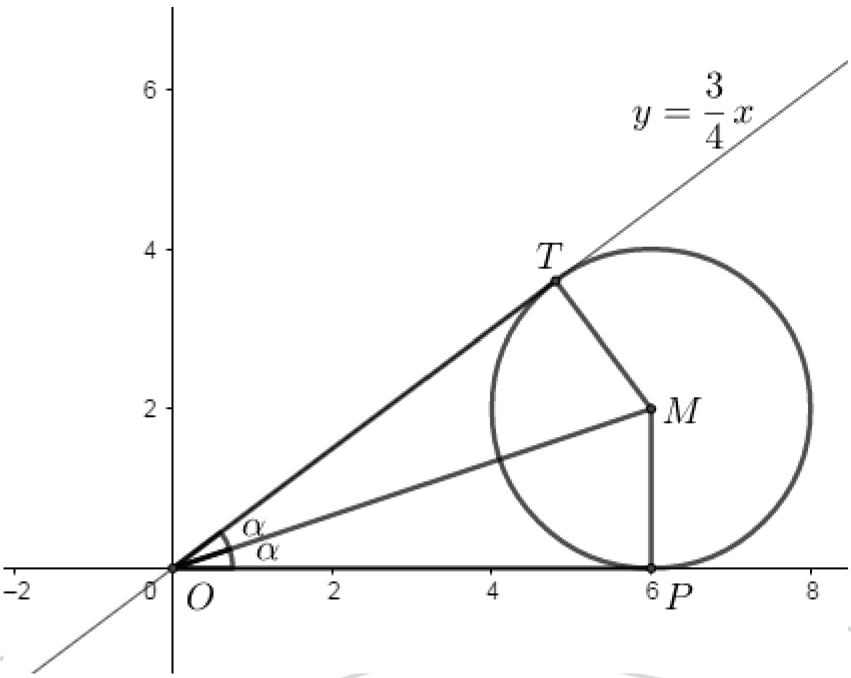
b) $3y^2-12y+2x=0$

c) $2y^2-3x=0$

d) $12y-x^2=0$

Comentários

Fazendo um esquema gráfico do que o enunciado fala:



Veja que os triângulos OTM e OMP são iguais, pois são triângulos retângulos (em T e P) e possui o mesmo cateto (raio do círculo) e uma mesma hipotenusa (OM). Sabemos, do coeficiente angular da reta:

$$tg\ 2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3 - 3tg^2\alpha = 8tg\alpha \Rightarrow 3tg^2\alpha + 8tg\alpha - 3 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau em $tg\alpha$, sabendo que apenas ficaremos com o resultado positivo:

$$tg\alpha = \frac{-8 + \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

Assim:

$$tg\alpha = \frac{R}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 2$$

Portanto, a coordenada do centro é $(6,2)$ e seu raio é 2.

Assim, como todas as alternativas contém a origem, queremos achar a que contém o centro $(6,2)$. Apenas b) satisfaz. Portanto, é a alternativa correta.

Gabarito: “b”

---

58. (AFA/2013)

Sobre a circunferência de menor raio possível que circunscreve a elipse da equação $x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 88 = 0$ é correto afirmar que

a) tem raio igual a 1.

b) tangencia o eixo das abscissas.

c) é secante ao eixo das ordenadas.

d) intercepta a reta de equação $4x - y = 0$.

Comentários

Se a circunferência circunscreve a elipse, então o diâmetro da circunferência deve ser igual ao eixo maior da elipse, a fim de que a circunferência tangencie a elipse.

Vamos achar o eixo maior da elipse. Reescrevendo a equação dada:

$$x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 88 = 0 \Rightarrow (x^2 - 8x + 16) + 9(y^2 - 6y + 9) - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + 9(y-3)^2 = 9 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$$

Portanto, vemos que o semieixo maior é tal que $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$. Portanto, o eixo maior é $2a = 6$. Queremos que seja igual ao diâmetro da circunferência:

$$6 = 2R \Rightarrow R = 3$$

Portanto, o raio é igual a 3 e seu centro é o mesmo da elipse: $(4,3)$. Assim, como o raio é 3 e a ordenada do centro é 3, então podemos dizer que a circunferência tangencia o eixo das abscissas, conforme a letra b), que é a correta.

Gabarito: "b"

59. (AFA/2012)

No plano cartesiano, a circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$, determina no eixo das ordenadas uma corda de comprimento $l = 8$.

Dessa forma, é correto afirmar que

a) λ é a tangente ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$

b) o raio de λ é igual a $\sqrt{k}$

c) $P(k, -1) \in \lambda$

d) λ é secante à reta $x = k$

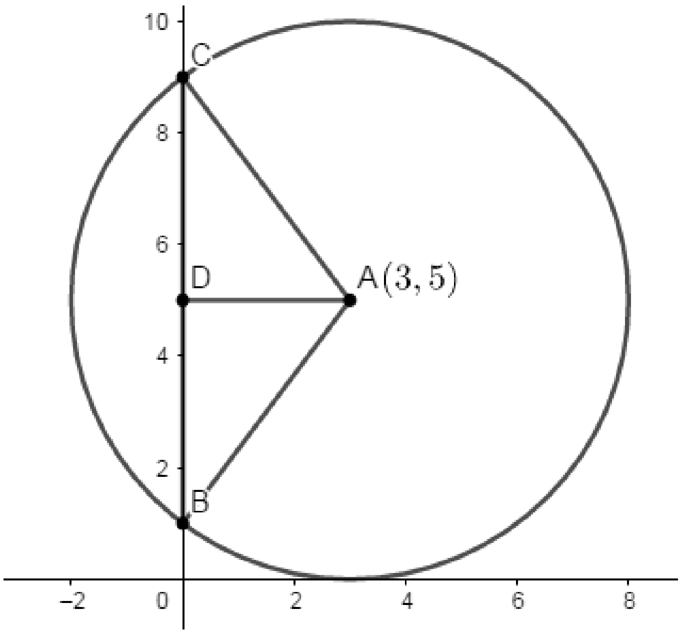
Comentários

Vamos escrever adequadamente a equação da circunferência para acharmos o seu centro:

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + k = 0 \Rightarrow (x^2 - 6x + 9)^2 + (y^2 - 10y + 25) + k - 34 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 = 34 - k$$

Portanto, o centro é $(3,5)$. O eixo ordenado determina uma corda de 8 unidades de comprimento, então a projeção do centro na corda atinge seu ponto médio, como mostrado na figura abaixo:



Assim, como o triângulo DBA da figura é retângulo com catetos $DB = \frac{8}{2} = 4$ e $AD = x_A = 3$, então, por Pitágoras:

$$AB^2 = R^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow \boxed{R = 5}$$

Assim, o raio da circunferência é 5 e, portanto, ela tangencia o eixo das abscissas, sendo a letra a) a alternativa correta.

Como $R^2 = 34 - k$ na equação da circunferência, então:

$$34 - k = 25 \Rightarrow k = 9$$

O que já confirma que as letras b) e c) estão erradas. A letra d) está errada pois a reta $x = 9$ não intersecta a circunferência, até porque todos os seus pontos estão distantes em x do centro de 6 unidades, valor maior que o raio.

Gabarito: “a”

---

60. (AFA/2010)

Considere as circunferências dadas pela equação $x^2 + y^2 = \frac{1}{b^2}$ $(b \in \mathbb{R}^*)$.

A circunferência que circunscreve um quadrado de área igual a 1250 é tal que b pertence ao intervalo

a) $]0, \frac{1}{30}[$

b) $]\frac{1}{30}, \frac{1}{28}[$

c) $]\frac{1}{28}, \frac{1}{26}[$

d) $]\frac{1}{26}, \frac{1}{24}[$

Comentários

Se uma circunferência circunscreve um quadrado, quer dizer que o quadrado está inscrito nela. Nessas condições, sabemos que a diagonal do quadrado é o diâmetro da circunferência. A área do quadrado é 1250, portanto, seu lado mede:

$$1250 = l^2 \Rightarrow l^2 = 25 \cdot 5 \cdot 10 \Rightarrow l = 25\sqrt{2}$$

Portanto, a diagonal do quadrado é, pelo teorema de Pitágoras, tal que:

$$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 1250 + 1250 = 2500 \Rightarrow d = 50$$

Como a diagonal do quadrado é o diâmetro da circunferência:

$$50 = 2R \Rightarrow R = 25$$

Portanto, o raio é 25. Porém, na representação da equação analítica da circunferência:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{b^2} \Rightarrow \frac{1}{b} = R \Rightarrow \frac{1}{b} = 25 \Rightarrow b = \frac{1}{25}$$

Assim, dentre as alternativas, o intervalo que contém b é $\frac{1}{26} < \frac{1}{25} < \frac{1}{24}$, letra d).

Gabarito: “d”

---

61. (EFOMM/2021)

Uma circunferência tem seu centro sobre a reta parametrizada por:

$$r: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = t - 1 \end{cases}$$

Se os pontos $A(2, 4)$ e $B(-1, 3)$ também pertencem a essa circunferência, assinale a alternativa que corresponda ao centro dessa circunferência.

a) $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

b) $(1,1)$

c) $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$

d) $(0,3)$

e) $(1,2)$

Comentários

Se $A(2,4)$ e $B(-1,3)$ pertencem à circunferência e o centro $O(x,y)$ é o centro que está na reta

$$r:\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t - 1 \end{cases}$$

Temos que a distância de A a O e a distância de B a O são iguais ao raio da circunferência, logo:

$$d_{AO} = d_{BO}$$

$$(d_{AO})^2 = (d_{BO})^2$$

$$(2-x)^2 + (4-y)^2 = (-1-x)^2 + (3-y)^2$$

$$\left(2-(3-t)\right)^2 + \left(4-(t-1)\right)^2 = \left(-1-(3-t)\right)^2 + \left(3-(t-1)\right)^2$$

$$(t-1)^2 + (5-t)^2 = (t-4)^2 + (4-t)^2$$

$$t^2 - 2t + 1 + t^2 - 10t + 25 = 2t^2 - 16t + 32$$

$$4t = 6$$

$$t = \frac{3}{2}$$

Portanto, o centro é dado por:

$$O(x,y) = (3-t, t-1) = \left(3 - \frac{3}{2}, \frac{3}{2} - 1\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Gabarito: A

---

62. (EFOMM/2019)

A equação $(x^2\ /144) + (y^2/\ 225) = 1$ representa uma

a) elipse com focos em $(0,9)$ e $(0,-9)$.

b) circunferência de raio igual 9.

c) parábola.

d) hipérbole.

e) elipse com centro em $[12,15]$.

Comentários

A equação:

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{225}=1$$

é uma elipse centrada na origem, de semieixo maior $a=\sqrt{225}=15$, situado no eixo y, e de semieixo menor $b=\sqrt{144}=12$, situado no eixo x. Portanto, calculando a metade da distância focal:

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 225=144+c^2 \Rightarrow c^2=81 \Rightarrow c=9$$

Portanto, como o eixo maior está situado no eixo y, então os focos também estão. Suas coordenadas são $(0,c)\ e\ (0,-c)$:

$$F_1=(0,-9)\ \ F_2=(0{,}9)$$

Assim, a alternativa correta é a letra a).

Gabarito: “a”

---

63. (EFOMM/2017)

Sejam as circunferências $c_1: x^2+y^2-16=0$ e $c_2: (x-2)^2+(y+2)^2=4$. Considere A e B os pontos de intersecção dessas circunferências. Determine a distância ente A e B.

a) $2\sqrt{7}$

b) $\sqrt{14}$

c) $2\sqrt{14}$

d) $\sqrt{7}$

e) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

Comentários

Os pontos de interseção desejados devem satisfazer às duas equações das circunferências:

$$\begin{cases} x^2+y^2-16=0 \\ (x-2)^2+(y+2)^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-16=0 \\ x^2-4x+y^2+4y+4=0 \end{cases}$$

Subtraindo ambas equações:

$$\Rightarrow 4y-4x+20=0 \Rightarrow y=x-5$$

A equação acima é da reta que passa por AB. Substituindo em c_1:

$$x^2+(x-5)^2-16=0 \Rightarrow 2x^2-10x+9=0$$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot 2\cdot 9}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow y=x-5=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}-\frac{10}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{7}}{2}$$

Portanto, os pontos são $A=\left(\frac{5+\sqrt{7}}{2},\frac{-5+\sqrt{7}}{2}\right)$ e $B=\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2},\frac{-5-\sqrt{7}}{2}\right)$

A distância entre eles é:

$$d(A,B)=\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}-\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{-5+\sqrt{7}}{2}-\left(\frac{-5-\sqrt{7}}{2}\right)\right)^2}=\sqrt{14}$$

Gabarito: “b”

---

64. (EFOMM/2016)

Quanto a posição relativa, podemos classificar as circunferências $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ e $x^2+y^2-8x+15=0$

a) secantes.

b) tangentes internas.

c) tangentes externas.

d) externas.

e) internas.

Comentários

Analisando $(x-2)^2+(y-3)^2=9$, vemos que se trata de uma circunferência de centro $C_1(2,3)$ e raio 3. Vamos agora analisar melhor a segunda equação:

$$x^2+y^2-8x+15=0\Rightarrow(x^2-8x+16)+y^2-1=0\Rightarrow(x-4)^2+y^2=1$$

Portanto a segunda circunferência possui centro $C_2(4,0)$ e raio 1. Se calcularmos a distância entre os centros dessas circunferências:

$$d(C_1,C_2)=\sqrt{(4-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

Porém a soma dos raios é $1+3=4$, que é maior que a distância entre os centros $(4=\sqrt{16}>\sqrt{13})$. Isso significa que elas não podem ser tangentes (caso em que a distância entre os centros seria igual à soma dos raios), nem tampouco externas (caso em que a soma dos raios seria menor que a distância entre os centros). As circunferências são, portanto, secantes.

Gabarito: “a”

---

65. (EFOMM/2015)

Seja C uma circunferência de raio 2 centrada na origem do plano xy. Um ponto P do 1º quadrante fixado sobre C determina um segmento OP, onde O é a origem, que forma um ângulo de $\pi/4$ radianos com o eixo das abscissas. Pode-se afirmar que a reta tangente ao gráfico de C passando por P é dada por

a) $x+y-2=0$.

b) $\sqrt{2}+y-1=0$.

c) $-\sqrt{2}+y-2=0$

d) $x+y-2\sqrt{2}=0$

e) $x-y-2\sqrt{2}=0$

Comentários

A reta tangente à uma circunferência é perpendicular ao raio. Como P está sobre a circunferência, então OP é raio. Portanto, a reta que queremos achar é perpendicular à reta OP e passa por P. Como OP passa pela origem e o ângulo entre OP e o eixo das abscissas é $\frac{\pi}{4}$, então:

$$OP: y = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot x \Rightarrow y = x$$

O ponto P é tal que:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{x_P}{OP} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x_P}{2} \Rightarrow x_P = \sqrt{2} \Rightarrow y_P = x_P = \sqrt{2}$$

Logo: $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Como queremos uma reta $p: y = ax + b$ perpendicular à OP, então o produto dos coeficientes angulares deve ser -1:

$$a \cdot 1 = -1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow p: y = -x + b$$

Como passa por $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \Rightarrow$

$$\sqrt{2} = -\sqrt{2} + b \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow p: y = -x + 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{p: x + y - 2\sqrt{2} = 0}$$

Gabarito: "d"

---

66. (EFOMM/2013)

Um muro será construído para isolar a área de uma escola que está situada a $2\ km$ de distância da estação de metrô. Esse muro será erguido ao longo de todos os pontos P, tais que a razão entre a distância de P à estação do metrô e a distância de P à escola é constante e igual a $\sqrt{2}$. Em razão disso, dois postes, com uma câmera cada, serão fixados nos pontos do muro que estão sobre a reta que passa pela escola e é perpendicular à reta que passa pelo metrô e pela escola. Então, a distância entre os postes, em km, será:

a) 2.

b) $2\sqrt{2}$.

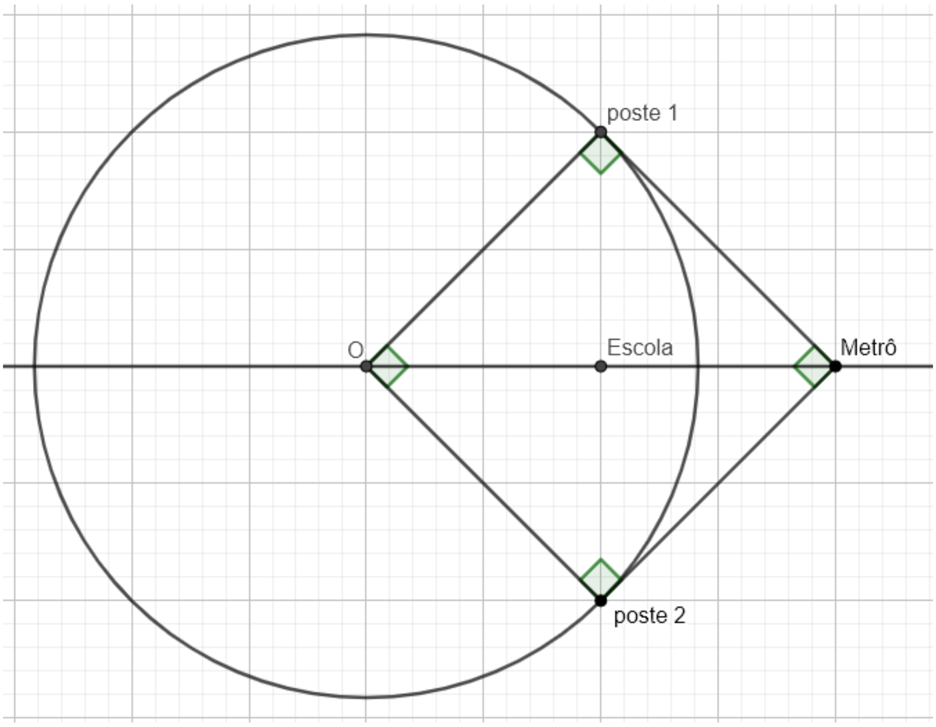
c) $2\sqrt{3}$.

d) 4.

e) $2\sqrt{5}$.

Comentários

O lugar geométrico no qual é será construído o muro é uma circunferência, chamada circunferência de Apolônio, caracterizada por fixar a razão entre as distâncias a dois certos pontos.



Sendo a escola localizada em $E = (0{,}0)$, o metrô em $M = (2{,}0)$, onde as coordenadas são dadas em quilômetros, o lugar geométrico dos pontos P é:

$$\sqrt{2} \cdot |\overrightarrow{EP}| = |\overrightarrow{MP}| \Leftrightarrow 2 \cdot (x^2 + y^2) = (x-2)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 4 = 8$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

Como o raio da circunferência de Apolônio é $\sqrt{2}$ vezes maior que a distância entre a escola e o metrô, conclui-se que os postes, o metrô e o centro da circunferência formam um quadrado, como na figura acima. Desta forma, segue que a distância entre os postes é o dobro da distância entre a escola e o metrô, isto é, $d_{postes} = 2 \cdot d_{EM} = 2 \cdot 2km = 4km$.

Gabarito: “d”

---

67. (EFOMM/2013)

Um ponto $P = (x, y)$, no primeiro quadrante do plano xy, situa-se no gráfico de $y = x^2$. Se θ é o ângulo de inclinação da reta que passa por P e pela origem, então o valor da expressão $1 + y$ (onde y é a ordenada de P) é:

a) $cos\theta$.

b) $\cos^2\theta$.

c) $\sec^2\theta$.

d) $tg^2\theta$.

e) $sen\theta$.

Comentários

A reta é que passa por P e pela origem é dada por $y = tg\theta \cdot x$, por definição de equação da reta pela sua inclinação. Como P está sobre a parábola $y = x^2$, então suas coordenadas são $P(x, x^2)$. Além disso, como satisfaz à equação da reta e à parábola simultaneamente:

$$y = tg\theta \cdot x \Rightarrow x^2 = tg\theta \cdot x \Rightarrow x = tg\theta$$

Assim, a ordenada do ponto P é $y = x^2 = tg^2\theta$. A questão pede o valor de $1 + y$:

$$1 + y = \boxed{1 + tg^2\theta = sec^2\theta}$$

Gabarito: “c”

---

68. (EFOMM/2006)

O valor de b para que a reta $y = x + b$ não intercepte os ramos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ é

a) -1

b) 0

c) 1

d) 2

e) $\sqrt{2}$

Comentários

Perceba que a reta dada é paralela à assíntota à hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ $(y = x)$. Lembre-se que uma hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ possui assíntotas da forma $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Porém, a reta assíntota, por definição, já não toca os ramos da hipérbole, de modo que, se for transladada verticalmente (somar b na sua equação), passará a tocar. Assim, queremos que a reta continue sendo a própria assíntota, isto é, que:

$$y = x \Rightarrow b = 0$$

Gabarito: “b”

---

69. (EFOMM/2006)

O centro da circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 + 16x - 4y + 12 = 0$ é o ponto de coordenadas:

a) $(-8, 2)$

b) $(-16, 4)$

c) $(8, -2)$

d) $(4, -1)$

e) $(16, -4)$

Comentários

Sabendo que uma circunferência de centro (x_0, y_0) e raio R, possui equação geral dada por:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Ajeitando a equação da circunferência para identificar os centros:

$$x^2 + y^2 + 16x - 4y + 12 = 0 \Rightarrow (x^2 + 16x + 64) + (y^2 - 4y + 4) = 56$$

$$\Rightarrow (x + 8)^2 + (y - 2)^2 = 56$$

Portanto, é uma circunferência de centro em $(-8,2)$.

Gabarito: "a"

---

70. (EN/2021)

Seja uma elipse centrada na origem de focos $A(0;\ -4)$ e B. Considere $C(4;4)$ e P pontos sobre a elipse. Dado o ponto $D(3;2)$, considere m a distância de D a P e n a distância de P a um dos focos. O menor valor possível de $m + n$ é:

a) $2 \cdot (2 + \frac{\sqrt{5}}{2})$

b) $(2 + \frac{\sqrt{5}}{2})$

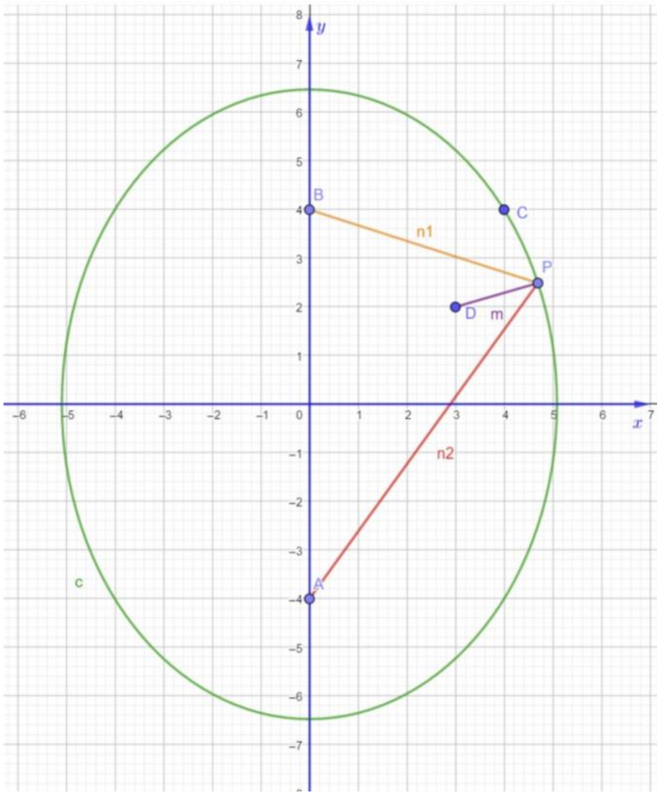
c) $2 \cdot (2 - \frac{\sqrt{5}}{2})$

d) $2 \cdot (2 + \sqrt{5})$

e) $(2 + \sqrt{5})$

Comentários

Se um dos focos é o ponto $A(0; -4)$ e a elipse está centrada na origem, então o outro foco é o ponto $B(0; 4)$. Fazendo um esboço da situação, temos:



Sabemos que a elipse possui eixo maior na vertical e o seu centro está na origem, logo sua equação é dada por:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Como $C(4,4)$ pertence à elipse, temos:

$$\frac{4^2}{b^2}+\frac{4^2}{a^2}=1\ (eq.I)$$

Dos focos, temos $c=4$. Da relação fundamental da elipse:

$$a^2=b^2+c^2=b^2+16\Rightarrow b^2=a^2-16$$

Assim, temos na equação I:

$$\frac{16}{a^2-16}+\frac{16}{a^2}=1$$

$$16a^2+16(a^2-16)=a^2(a^2-16)$$

$$16a^2+16a^2-256=a^4-16a^2$$

$$a^4-48a^2+256=0$$

Encontrando as raízes em função da a^2:

$$a^2=24\pm\sqrt{320}=24\pm 8\sqrt{5}$$

Como $a^2>0$ e $b^2>0$, temos:

$$a^2=24+8\sqrt{5}$$

*Caso tomássemos o valor $a^2=24-8\sqrt{5}$, isso acarretaria em $b^2<0$.

$$a = \sqrt{4(6 + 2\sqrt{5})} = 2\sqrt{6 + \sqrt{5}} = 2\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2} = 2(1 + \sqrt{5})$$

Note que n_1 e n_2 são as distâncias do ponto P até os focos A e B. Para termos o menor valor de $m + n$, devemos usar o foco B. Assim, temos:

$$n_1 + n_2 = 2a \Rightarrow n_2 = 2a - n_1 \;\; (eq.II)$$

Veja que nos pontos A, P e D, temos:

$$AP \leq AD + PD$$

$$n_2 \leq \sqrt{(0-3)^2 + (-4-2)^2} + m$$

Usando a equação II:

$$2a - n_1 \leq \sqrt{45} + m$$

$$\Rightarrow m + n_1 \geq 2a - 3\sqrt{5}$$

Usando $a = 2(1 + \sqrt{5})$:

$$\Rightarrow m + n_1 \geq 4 + 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow m + n_1 \geq 4 + \sqrt{5}$$

Portanto, o menor valor da soma ocorre quando:

$$m + n = 4 + \sqrt{5}$$

Gabarito: A

---

71. (Escola Naval/2018)

Sejam a elipse de equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ e o ponto $P(8,0)$. Duas retas r e s, que passam por P, tangenciam a elipse nos pontos A e B, respectivamente. Sendo assim, a área do triângulo ABP é igual a:

a) 40

b) $15\sqrt{3}$

c) $\frac{80\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{35\sqrt{15}}{4}$

e) $21\sqrt{3}$

Comentários

Seja a reta tangente passando por $P(8,0)$ $t: y = a(x-8)$. Perceba que tem essa forma pois quando $x = 8$ a função deve ser nula. Assim, aplicando na equação da hipérbole, só deve haver uma solução em x, isto é, o Δ deve ser nulo:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{[a(x-8)]^2}{25} = 1 \Rightarrow 25x^2 + 16a^2x^2 - 16^2a^2x + 16 \cdot 64a^2 - 400 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 16^4a^4 - 4 \cdot (25 + 16a^2)(16 \cdot 64a^2 - 400) = 0$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 16^2 a^4 - (25 + 16a^2)(64a^2 - 25) = 0 \Rightarrow -25 \cdot 64a^2 + 25 \cdot 25 + 25 \cdot 16a^2 = 0$$

$$\Rightarrow 48a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm \frac{5}{4\sqrt{3}} = \pm \frac{5\sqrt{3}}{12}$$

Assim, como $\Delta = 0$, a solução em x é:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{16^2 a^2}{2(25 + 16a^2)} = \frac{\frac{400}{3}}{2\left(25 + \frac{25}{3}\right)} = \frac{\frac{400}{3}}{\frac{200}{3}} = 2$$

Assim, a ordenada desses pontos são:

$$y = a(x-8) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{5\sqrt{3}}{12}(2-8) = -\frac{6}{12} \cdot 5\sqrt{3} = -\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y_2 = -\frac{5\sqrt{3}}{12}(2-8) = \frac{6}{12} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Portanto, queremos a área do triângulo cujos vértices são $\left(2, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right), \left(2, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ e $(8,0)$. Como dois dos pontos são simétricos em relação ao eixo x e o terceiro ponto está no eixo x $(8,0)$, fica fácil calcular a área desse triângulo usando como base o segmento que vai de $\left(2, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ a $\left(2, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, medindo $5\sqrt{3}$ e como altura do triângulo o segmento que vai do ponto $x = 2$ até $x = 8$, medindo 6. Portanto:

$$Área = \frac{5\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 15\sqrt{3}$$

Gabarito: "b"

---

72. (Escola Naval/2018)

Seja a família de funções reais f, definidas por $f(x) = 2x^2 + bx + 3$, sendo $b \in \mathbb{R}$ e, seja a função real g, definida pelo lugar geométrico dos pontos extremos das funções f. Sendo assim, o valor de $g(7)$ é:

a) 101

b) -101

c) 95

d) -95

e) -98

Comentários

As funções f são funções polinomiais do segundo grau, para as quais existe fórmula para o ponto extremo (de vértice):

$$x_v = -\frac{b}{2a}, y_v = -\frac{\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac$$

Logo, com $a = 2, b = b, c = 3$, temos:

$$x_v(b) = -\frac{b}{4}, y_v(b) = -\frac{(b^2 - 24)}{8}$$

Colocando y em função de x:

$$y_v = -\frac{16}{8} \cdot \left(\left(\frac{b}{4}\right)^2 - \frac{24}{16}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{b}{4}\right)^2 + 3 = -2x_v^2 + 3$$

Logo $g(x) = -2x^2 + 3$.

Portanto, $g(7) = -2 \cdot 7^2 + 3 = -95$.

Gabarito: "d"

---

73. (Escola Naval/2018)

O lugar geométrico dos pontos P do plano de mesma potência em relação a duas circunferências não concêntricas é chamado eixo radical. Seja C_1 a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 64$ e C_2 a circunferência de equação $(x + 24)^2 + y^2 = 16$. Sejam a e b as distâncias do eixo radical a cada uma das circunferências, assinale a opção que apresenta o valor de $|a - b|$.

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{5}{2}$

c) 2

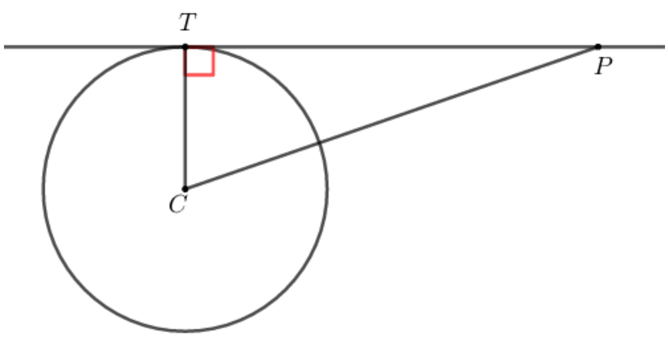
d) 1

e) $\frac{1}{2}$

Comentários

Um ponto P tem mesma potência com relação a duas circunferências quando a distância entre ele e os pontos de tangência nas circunferências são iguais. Podemos escrever o quadrado dessas circunferências em função da distância entre P e os centros e os respectivos raios das circunferências.

Se chamarmos de T_1 o ponto de tangência em C_1 da reta PT_1 e T_2 o ponto de tangência em C_2 da reta PT_2. Queremos que $PT_1 = PT_2$. Mas veja a seguinte imagem genérica da situação:



Como o triângulo CTP é retângulo: $PT^2 = PC^2 - CT^2 = PC^2 - R^2$, onde R é o raio do círculo. Portanto, aplicando no nosso caso em particular:

$$PT_1^2 = PC_1^2 - R_1^2 \ e \ PT_2^2 = PC_2^2 - R_2^2$$

$$\Rightarrow PT_1^2 = PT_2^2 \Rightarrow \boxed{PC_1^2 - R_1^2 = PC_2^2 - R_2^2}$$

Portanto, vamos achar os pontos $P(x,y)$ que satisfazem a relação enquadrada acima. Primeiramente vamos achar quem são os centros e os raios das circunferências por meio de suas equações:

$$C_1: x^2 + y^2 = 64 \Rightarrow C_1(0,0) \ e \ R_1 = \sqrt{64} = 8$$

$$C_2: (x+24)^2 + y^2 = 16 \Rightarrow C_2(-24,0) \ e \ R_2 = \sqrt{16} = 4$$

Agora, escrevendo a distância de $P(x,y)$ a $C_1(0,0) \ e \ C_2(-24,0)$:

$$PC_1^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = x^2 + y^2$$

$$PC_2^2 = (x+24)^2 + y^2$$

Assim, substituindo tudo na equação emoldurada:

$$PC_1^2 - R_1^2 = PC_2^2 - R_2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 64 = (x+24)^2 + y^2 - 16$$

$$\Rightarrow -64 = 48x + 24^2 - 16 \Rightarrow x = -\frac{624}{48} = -13$$

Assim, o eixo radical é a reta vertical $x = -13$. Assim, a distância dos centros até essa reta é nada mais que o módulo da subtração de suas abcissas:

$$a = |-13 - (-24)| = 24 - 13 = 11$$

$$b = |0 - 13| = 13$$

$$|a - b| = |11 - 13| = 2$$

Gabarito: "c"

---

74. (Escola Naval/2017)

Seja $P(x,y)$ um ponto da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de focos F_1 e F_2 e excentricidade e. Calcule $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ e assinale a opção correta.

a) $ex^2 + a(1 + 2e^2)$

b) $e^2x - a^2(1 + e)$

c) $e^2x^2 + a^2(1 - 2e)$

d) $e^2x - a(1 + e^2)$

e) $e^2x^2 + a^2(1 - 2e^2)$

Comentários

As coordenadas dos focos são $F_1 = (c,0)$ e $F_2(-c,0)$ para uma elipse centrada na origem tal como dada no enunciado, onde $a^2 = b^2 + c^2$ e $e = c/a$.

$$\overrightarrow{PF_1} = (F_1 - P) = (c,0) - (x,y) = (c - x, -y)$$

$$\overrightarrow{PF_2} = (F_2 - P) = (-c,0) - (x,y) = (-c - x, -y)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (c - x)(-c - x) + (-y)(-y) = x^2 - c^2 + y^2$$

Mas como $e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = ea$. Como $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + a^2e^2 \Rightarrow b^2 = a^2(1 - e^2)$. Além disso, da equação da elipse, temos que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = a^2(1 - e^2) - (1 - e^2)x^2$$

$$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = x^2 - a^2e^2 + y^2 = x^2 - a^2e^2 + (a^2 - a^2e^2) - (1 - e^2)x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = e^2x^2 + a^2(1 - 2e^2)}$$

Gabarito: "e"

75. (Escola Naval/2016)

A área da região limitada pelos gráficos das funções $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = |x|$ e $y = \frac{3\sqrt{2} + 2x}{4}$ é igual a:

a) $\frac{3\sqrt{2}}{4}(3\pi - 2)$

b) $\frac{3}{4}(\pi - 2)$

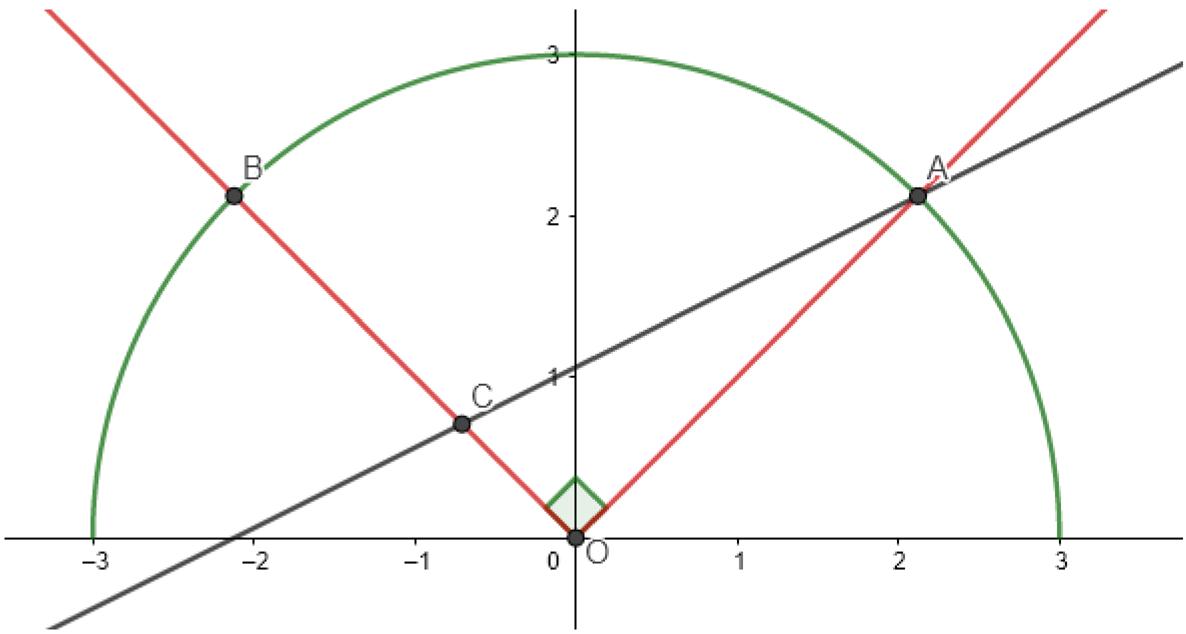
c) $\frac{3}{4}(\pi - 2\sqrt{2})$

d) $\frac{3}{4}(3\pi - 2)$

e) $\frac{3}{4}(3\pi - 2\sqrt{2})$

Comentários

Temos o seguinte esboço para as funções acima:



Repare que as três funções se encontram no ponto $A = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

A área da região ABC é a área do setor circular de $90°$ AOB menos a área do triângulo retângulo AOC:

$$S_{ABC}=S_{AOB}-S_{AOC}=\pi\cdot|\overrightarrow{OA}|^2\cdot\frac{90°}{360°}-\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|$$

Vamos calcular o ponto C:

$$\begin{cases} y=-x \\ y=\dfrac{3\sqrt{2}+2x}{4}\end{cases}\Rightarrow -4x=3\sqrt{2}+2x\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow C=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Logo, $|\overrightarrow{OC}|=\left|\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}=1$

Portanto:

$$S_{ABC}=\pi\cdot 3^2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1=\frac{9}{4}\pi-\frac{3}{2}=\frac{3}{4}(3\pi-2)$$

Gabarito: "d"

---

76. (Escola Naval/2015)

As retas $r_1: 2x-y+1=0$; $r_2: x+y+3=0$ e $r_3: \alpha x+y-5=0$ concorrrem em um mesmo ponto P para determinado valor de $\alpha\in\mathbb{R}$. Sendo assim, pode-se afirmar que o valor da expressão $\cos\left(\frac{\alpha\pi}{3}\right)-3sen^3\left[\frac{(-3-\alpha)\pi}{8}\right]-\frac{5\sqrt{3}}{2}tg\left(-\frac{\alpha\pi}{6}\right)$ é

a) $3\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

b) $2-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

c)$2+\frac{\sqrt{2}}{8}$

d)$3+\frac{\sqrt{2}}{4}$

e) $3\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

Comentários

Vamos calcular a interseção das retas r_1 e r_2, já que a questão quer que analisemos a concorrência das três retas em um único ponto. Vamos assim descobrir que ponto é esse:

$$\begin{cases}2x-y+1=0\\ x+y+3=0\end{cases}\Rightarrow 3x+4=0\Rightarrow x=-\frac{4}{3}\Rightarrow y=-3-x=-3+\frac{4}{3}\Rightarrow y=-\frac{5}{3}$$

Portanto, o ponto de interseção é $P\left(-\frac{4}{3},-\frac{5}{3}\right)$. Queremos que esse ponto satisfaça a equação de r_3, a fim de que ele também concorra nesse ponto:

$$\alpha x+y-5=0\Rightarrow\alpha\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)-5=0\Rightarrow -4\alpha-5-15=0\Rightarrow -4\alpha=20$$

$$\Rightarrow\alpha=-5$$

Portanto, agora, queremos saber o valor da expressão:

$$\cos\left(\frac{\alpha\pi}{3}\right)-3sen^3\left[\frac{(-3-\alpha)\pi}{8}\right]-\frac{5\sqrt{3}}{2}tg\left(-\frac{\alpha\pi}{6}\right)$$

Por partes:

$$\cos\left(\frac{\alpha\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{-5\pi}{3}\right) = \cos(-300°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$3sen^3\left[\frac{(-3-\alpha)\pi}{8}\right] = 3sen^3\left[\frac{(-3+5)\pi}{8}\right] = 3sen^3\left[\frac{\pi}{4}\right] = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}tg\left(-\frac{\alpha\pi}{6}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}tg\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{5}{2}$$

Portanto, a expressão é:

$$\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} - \left(-\frac{5}{2}\right) = 3 - \frac{3\sqrt{2}}{4} = 3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Gabarito: "e"

---

77. (Escola Naval/2014)

Quantas unidades de área possui a região plana limitada pela curva de equação $x = 1 - \sqrt{1-y^2}$ e pelas retas $2y + x - 3 = 0$, $2y - x + 3 = 0$ e $x = 2$?

a) $\pi + \frac{1}{2}$

b) $\pi + \frac{3}{2}$

c) $\frac{\pi}{2} + 1$

d) $\pi + 3$

e) $\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}$

Comentários

Abaixo, há um esboço das curvas definidas no enunciado.

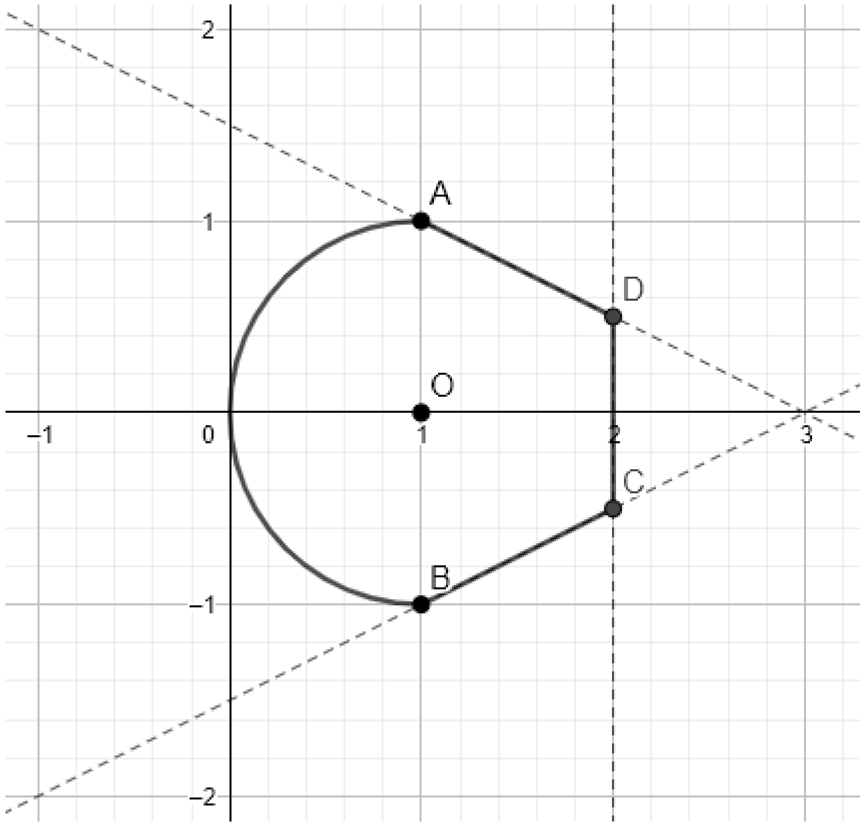
$$x = 1 - \sqrt{1-y^2} \Rightarrow (x-1)^2 = 1 - y^2 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1^2$$

$\Rightarrow$ a primeira curva está contida numa circunferência de raio 1 (na verdade, é uma semicircunferência.

A área da região encapsulada pelas curvas é a área do semicírculo de extremidades A e B somada com a área do trapézio $ABCD$. Portanto:

$$S = S_{AB} + S_{ABCD} = \frac{\pi\cdot OA^2}{2} + \frac{(AB+CD)\cdot h}{2} = \frac{\pi\cdot 1^2}{2} + \frac{(2+1)\cdot 1}{2} = \frac{\pi+3}{2}$$

Logo, o gabarito é a alternativa "e".



Gabarito: "e".

---

78. (Escola Naval/2014)

Sejam $y = m_1x + b_1$ e $y = m_2x + b_2$ as equações das retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 - 16y + 12 = 0$ que passam pelo ponto $P(0, 0)$. O valor de $(m_1^2 + m_2^2)$ é

a) 1

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{2}$

d) 2

e) $\frac{5}{2}$

Comentários

Se as retas tangentes passam pela origem, então são da forma:

$$y = mx$$

Assim, na equação da elipse:

$$x^2 + 4y^2 - 16y + 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 4m^2x^2 - 16mx + 12 = 0$$

O Δ dessa equação em função de x deve ser nulo, para que não haja mais que um ponto de interseção entre a reta e a curva (isto é, pra que seja tangente):

$$\Delta = 16^2m^2 - 4(1 + 4m^2) \cdot 12 = 0$$

$$\Rightarrow 64m^2 - 48 = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$$

Como queremos:

$$m_1^2 + m_2^2 = 2m^2 = \frac{3}{2}$$

Gabarito: “c”

79. (Escola Naval/2014)

A equação da circunferência tangente às retas $y = x$ e $y = -x$ nos pontos $(3,3)$ e $(-3,3)$ é

a) $x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 16x + 20 = 0$

Comentários

Se essas retas tangenciam a circunferência nos pontos dados, então as retas perpendiculares à elas passando pelos mesmos pontos de tangência se cruzarão no centro.

Vamos calcular a reta $p: y = ax + b$ perpendicular à $y = x$ que passa por (3,3). O produto dos coeficientes angulares deve ser -1:

$$a \cdot 1 = -1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = -x + b$$

$$(3,3) \in p \Rightarrow 3 = -3 + b \Rightarrow b = 6 \Rightarrow p: \boxed{y = -x + 6}$$

Vamos calcular a reta $m: y = cx + d$ perpendicular à $y = -x$ que passa por (-3,3). O produto dos coeficientes angulares deve ser -1:

$$c \cdot -1 = -1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = x + d$$

$$(-3,3) \in m \Rightarrow 3 = -3 + d \Rightarrow d = 6 \Rightarrow \boxed{y = x + 6}$$

$$\Rightarrow p \cap m: \begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x + 6 \end{cases} \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 0$$

Portanto, o centro da circunferência é $(0,6)$, e o raio é igual à distância entre $(3,3)\ e\ (0,6)$:

$$R = \sqrt{(3-0)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Agora, já sabendo as coordenadas do centro $(x_0, y_0) = (0,6)$ e a medida do raio $R = 3\sqrt{2}$, a equação da circunferência é:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow x^2 + (y - 6)^2 = 18$$

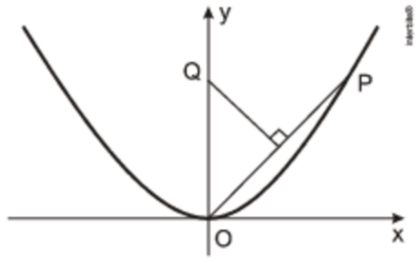
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12y + 36 = 18$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0}$$

Gabarito: “b”

80. (Escola naval/2013)

A figura abaixo mostra um ponto $P \neq O$, O origem, sobre a parábola $y = x^2$ e o ponto Q, interseção da mediatriz do segmento OP com o eixo y. À medida que P tende à origem ao longo da parábola, o ponto Q se aproxima do ponto:



a) $(0, 0)$

b) $\left(0, \frac{1}{8}\right)$

c) $\left(0, \frac{1}{6}\right)$

d) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

e) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Comentários

O ponto P pode ser parametrizado por: $P = (t, t^2)$

O ponto Q é caracterizado por ter coordenada $x_Q = 0$ e estar sobre a mediatriz do segmento OP, ou seja, ter a mesma distância aos pontos O e P. Portanto, sendo $Q = (0, q)$, temos:

$$|\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{QP}| \Rightarrow |\overrightarrow{OQ}|^2 = |\overrightarrow{QP}|^2 \Rightarrow (q-0)^2 + (0-0)^2 = (t-0)^2 + (t^2 - q)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 = t^2 + t^4 - 2t^2 q + q^2 \Rightarrow q = \frac{t^2 + t^4}{2t^2} = \frac{1 + t^2}{2} \Rightarrow Q = \left(0, \frac{1+t^2}{2}\right).$$

Quando P tende à origem, t tende a zero, isto é, $P \to O \Leftrightarrow t \to 0 \Leftrightarrow Q \to \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Gabarito: "e"

---

81. (Escola Naval/2013)

Quantas unidades de área possui a região plana limitada pela curva de equação $y = -\sqrt{3 - x^2 - 2x}$ e a reta $y = x - 1$?

a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$

b) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$

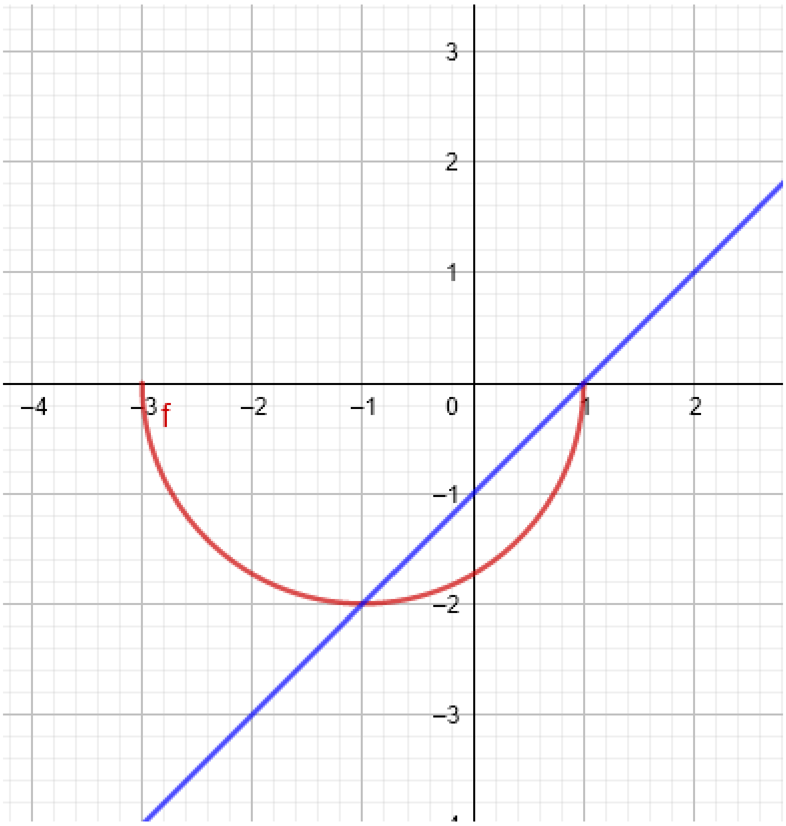
c) $3\pi + 2$

d) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

e) $\pi - 2$

Comentários

Para a primeira curva: $y^2 = 3 - x^2 - 2x \Leftrightarrow y^2 + (x^2 + 2x + 1) = 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow$ está contida numa circunferência centrada em $(-1,0)$ de raio 2 (na verdade é a semicircunferência inferior). Esboçando num gráfico:



A área pedida é a área de um segmento circular de $90°$ de abertura e raio 2. Logo, é a área do setor circular de $\frac{1}{4}$ de circunferência menos a do triângulo retângulo isósceles de cateto 2:

$$S = \frac{1}{4} \cdot \pi(2)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \pi - 2$$

Gabarito: “e”

---

82. (Escola Naval/2013)

Quantas unidades de área possui a região plana limitada pela curva de equação $y = -\sqrt{-(x^2 + 6x + 8)}$ e pela reta $y = x + 2$?

a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$

b) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$

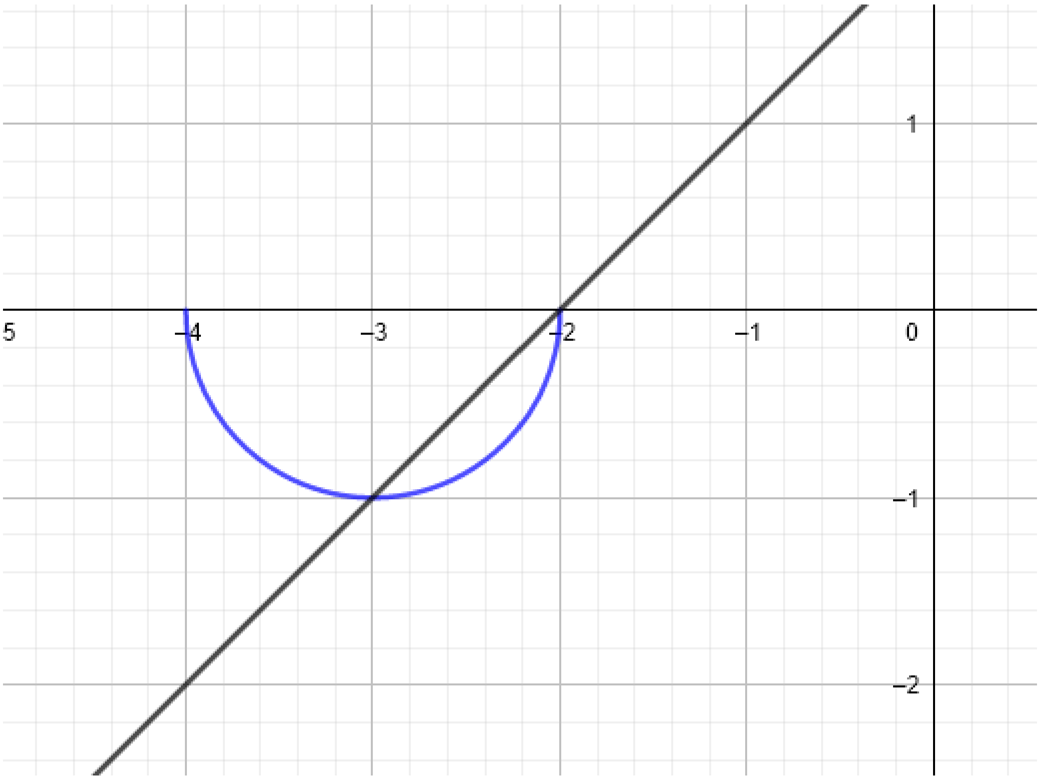
c) $\frac{\pi}{2} + 1s$

d) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

e) $\pi - 2$

Comentários

Para a primeira curva: $y^2 = -(x^2 + 6x + 8) \Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow$ a primeira curva é um semicírculo inferior de raio 1 centrado em $(-3,0)$. Fazendo um esboço:



Logo a área pedida é a área do segmento circular de raio 1 e abertura $90°$:

$$S = \frac{1}{4}\pi(1)^2 - \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Gabarito: "d"

---

83. (Escola Naval/2013)

A reta no $\mathbb{R}^2$ de equação $2y - 3x = 0$ intercepta o gráfico da função $f(x) = |x|\frac{x^2-1}{x}$ nos pontos P e Q. Qual a distância entre P e Q?

a) $2\sqrt{15}$

b) $2\sqrt{13}$

c) $2\sqrt{7}$

d) $\sqrt{7}$

e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Comentários

Suponha $x > 0$:

$$\Rightarrow f(x) = |x|\frac{x^2-1}{x} = x^2 - 1$$

A interseção ocorre quando $y = \frac{3}{2}x$:

$$\frac{3}{2}x = x^2 - 1 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4 \cdot 2(-2) = 25$$

$$\Rightarrow x = \frac{3+5}{2 \cdot 2} = 2$$

Veja que só consideramos x positivo como solução. Assim, esse primeiro ponto de interseção é:

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x = 3 \Rightarrow P = (2,3)$$

Agora, suponha $x < 0$:

$$f(x) = |x|\frac{x^2 - 1}{x} = -(x^2 - 1) = 1 - x^2$$

A interseção com a reta ocorre quando:

$$y = \frac{3}{2}x \Rightarrow \frac{3}{2}x = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$$

$$x = \frac{-3-5}{2 \cdot 2} = -2$$

$$\Rightarrow y = \frac{3x}{2} = -3$$

Assim, $Q = (-2, -3)$. A distância pedida é:

$$PQ = \sqrt{(2-(-2))^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Gabarito: "b"

---

84. (Escola Naval/2013)

A equação $4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$, no plano xy, representa

a) duas retas

b) uma circunferência

c) uma elipse

d) uma hipérbole

e) uma parábola

Comentários

Reescrevendo a equação, buscando agrupar os trinômios de quadrados perfeitos, somando e subtraindo algumas constantes numéricas para completar os quadrados:

$$4(x^2 - 8x + 16) - (y^2 - 8y + 16) - 48 + 52 = 0$$

$$\Rightarrow 4(x-4)^2 - (y-4)^2 = -4$$

$$\Rightarrow (y-4)^2 - 4(x-4)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(y-4)^2}{4} - (x-4)^2 = 1}$$

Essa é uma equação de uma hipérbole de centro em $(4,4)$ e eixo vertical.

Gabarito: "d"

85. (Escola Naval/2012)

Considere a sequência $(a, b, 2)$ uma progressão aritmética e a sequência $(b, a, 2)$ uma progressão geométrica não constante, $a, b \in \mathbb{R}$. A equação da reta que passa pelo ponto (a, b) e pelo vértice da curva $y^2 - 2y + x + 3 = 0$ é

a) $6y - x - 4 = 0$

b) $2x - 4y - 1 = 0$

c) $2x - 4y + 1 = 0$

d) $x + 2y = 0$

e) $x - 2y = 0$

Comentários

Se $(a, b, 2)$ é uma PA, então: $2b = a + 2$, pois $b = a + r$ e $2 = a + 2r$, onde r é a razão da progressão aritmética. Além disso, se $(b, a, 2)$ é uma PG, então $a^2 = 2b$. Portanto, temos:

$$\begin{cases} 2b = a + 2 \\ a^2 = 2b \end{cases} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \; ou \; a = -1$$

Se $a = 2$, teremos uma PA e uma PG constantes. Não é desejado. Portanto, $a = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$.

Portanto, a reta pedida passa pelo ponto $(a, b) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$. Ela também passa pelo vértice da seguinte curva:

$$y^2 - 2y + x + 3 = 0 \Rightarrow -(y - 1)^2 = (x + 2)$$

Essa curva é uma parábola de vértice em $(-2,1)$ como pode-se observar na equação acima.

Assim, queremos a reta que passa pelos pontos $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e $(-2,1)$:

$$r: y = cx + d$$

$$\left(-1, \frac{1}{2}\right) \in r \Rightarrow \frac{1}{2} = -c + d$$

$$(-2,1) \in r \Rightarrow 1 = -2c + d$$

Subtraindo as equações acima:

$$\frac{1}{2} = -c \Rightarrow c = -\frac{1}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2} + c = 0$$

$$\Rightarrow r: y = -\frac{x}{2} \Rightarrow \boxed{x + 2y = 0}$$

Gabarito: "d"

7. QUESTÕES NÍVEL 3

86. (ITA/2021)

Determine todos os pontos (x, y) que pertencem à circunferência de centro $(5, 0)$ e raio 5, que satisfazem a equação:

$$\sqrt{3x - y - 4} = \sqrt{x^2 - 7x - 5y - 4}$$

87. (ITA/2020)

Seja λ a circunferência que passa pelos pontos $P = (1, 1), Q = (13, 1)$ e $R = (7, 9)$. Determine:

a) A equação de λ.

b) Os vértices do quadrado $ABCD$ circunscrito a λ, sabendo que R é o ponto médio de $\overline{AB}$.

88. (ITA/2020)

Sejam a e b dois números reais. Sabendo que o conjunto dos números reais k para os quais a reta $y = kx$ intersecta a parábola $y = x^2 + ax + b$ é igual a $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$, determine os números a e b.

89. (ITA/2019)

Seja γ a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. Se r e s são duas retas que se interceptam no ponto $P = (1, 3)$ e são tangentes a γ, então o cosseno do ângulo entre r e s é igual a

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

90. (ITA/2019)

Seja F o foco da parábola de equação $(y - 5)^2 = 4(x - 7)$, e sejam A e B os focos da elipse da equação $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1$. Determine o lugar geométrico formado pelos pontos P do plano tais que a área do triângulo ABP seja numericamente igual ao dobro da distância de P a F.

91. (ITA/2018)

Considere a definição: duas circunferências são ortogonais quando se interceptam em dois pontos distintos e nesses pontos suas tangentes são perpendiculares. Com relação às circunferências $C_1: x^2 + (y+4)^2 = 7, C_2: x^2 + y^2 = 9$ e $C_3: (x-5)^2 + y^2 = 16$, podemos afirmar que

a) somente C_1 e C_2 são ortogonais.

b) somente C_1 e C_3 são ortogonais.

c) C_2 é ortogonal a C_1 e a C_3.

d) C_1, C_2 e C_3 são ortogonais duas a duas.

e) não há ortogonalidade entre as circunferências.

92. (ITA/2018)

No plano cartesiano são dadas as circunferências $C_1: x^2 + y^2 = 1$ e $C_2: (x-4)^2 + y^2 = 4$. Determine o centro e o raio de uma circunferência C tangente simultaneamente a C_1 e C_2, passando pelo ponto $A = (3, \sqrt{3})$.

93. (ITA/2017)

Sejam $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \left||x| - 1\right|\}$ e $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y+1)^2 \leq 25\}$. A área da região $S_1 \cap S_2$ é

a) $\frac{25}{4}\pi - 2$

b) $\frac{25}{4}\pi - 1$

c) $\frac{25}{4}\pi$

d) $\frac{75}{4}\pi - 1$

e) $\frac{75}{4}\pi - 2$

94. (ITA/2016)

Considere as circunferências $\lambda_1: x^2 + y^2 - 8x + 4y = 20$ e $\lambda_2: x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$. O triângulo ABC satisfaz as seguintes propriedades:

a) o lado $\overline{AB}$ coincide com a corda comum a λ_1 e λ_2;

b) o vértice B pertence ao primeiro quadrante;

c) o vértice C pertence a λ_1 e a reta que contém $\overline{AC}$ é tangente a λ_2.

Determine as coordenadas do vértice C.

95. (ITA/2016)

Se P e Q são pontos que pertencem à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e à reta $y = 2(1 - x)$, então o valor do cosseno do ângulo $P\hat{O}Q$ é igual a

a) $-\frac{3}{5}$

b) $-\frac{3}{7}$

c) $-\frac{2}{5}$

d) $-\frac{4}{5}$

e) $-\frac{1}{7}$

96. (ITA/2016)

Sejam S um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e $P = (a, b)$ um ponto de $\mathbb{R}^2$. Define-se distância de P a S, $d(P, S)$, como a menor das distâncias $d(P, Q)$, com $Q \in S$: $d(P, S) = min\{d(P, Q): Q \in S\}$.

Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x = 0 \text{ e } y \geq 2\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = 0\}$.

a) Determine $d(P, S_1)$ quando $P = (1, 4)$ e $d(Q, S_1)$ quando $Q = (-3, 0)$.

b) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de S_1 e de S_2.

97. (ITA/2015)

Considere uma circunferência C, no primeiro quadrante, tangente ao eixo Ox e à reta $r: x - y = 0$. Sabendo-se que a potência do ponto $O = (0, 0)$ em relação a essa circunferência é igual a 4, então o centro e o raio de C são, respectivamente, iguais a

a) $\left(2, 2\sqrt{2} - 2\right)$ e $2\sqrt{2} - 2$

b) $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$

c) $\left(2, \sqrt{2} - 1\right)$ e $\sqrt{2} - 1$

d) $\left(2, 2 - \sqrt{2}\right)$ e $2 - \sqrt{2}0$

e) $\left(2, 4\sqrt{2} - 4\right)$ e $4\sqrt{2} - 4$

98. (ITA/2015)

Considere as afirmações a seguir:

I. O lugar geométrico do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, com comprimento l fixado, cujos extremos se deslocam livremente sobre os eixos coordenados é uma circunferência.

II. O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que $6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0$ é um conjunto finito no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

III. Os pontos $(2, 3)$, $(4, -1)$ e $(3, 1)$ pertencem a uma circunferência.

Destas, é (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) I e II.

e) I e III.

99. (ITA/2014)

A equação do círculo localizado no 1º quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas r: $2x - 2y + 5 = 0$ e s: $x + y - 4 = 0$ é

a) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right)^2 = 4$

b) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 = 4$

c) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right)^2 = 4$

d) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4$

e) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = 4$

100. (ITA/2013)

Determine a área da figura plana situada no primeiro quadrante e delimitada pelas curvas

$$(y - x - 2)\left(y + \frac{x}{2} - 2\right) = 0 \text{ e } x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$$

101.(ITA/2013)

Sobre a parábola definida pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ pode-se afirmar que

a) ela não admite reta tangente paralela ao eixo Ox.

b) ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox.

c) ela admite duas retas tangentes paralelas ao eixo Ox.

d) a abscissa do vértice da parábola é $x = -1$.

e) a abscissa do vértice da parábola é $x = -\frac{2}{3}$.

102.(ITA/2011)

Sejam m e n inteiros tais que $\frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$ é a equação $36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0$ representa uma circunferência de raio $r = 1\ cm$ e centro C localizado no segundo quadrante. Se A e B são os pontos onde a circunferência cruza o eixo Oy, a área do triângulo ABC, em cm^2, é igual a

a) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{9}$

103. (ITA/2010)

Um triângulo equilátero tem os vértices nos pontos A, B e C do plano xOy, sendo $B = (2, 1)$ e $C = (5, 5)$. Das seguintes afirmações:

I. A se encontra sobre a reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$,

II. A está na intersecção da reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$ com a circunferência $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$,

III. A pertence às circunferências $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ e $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{75}{4}$,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) I.

b) II.

c) III.

d) I e II.

e) II e III.

104. (ITA/2010)

Considere as circunferências $C_1: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ e $C_2: (x-10)^2 + (y-11)^2 = 9$. Seja r uma reta tangente interna a C_1 e C_2, isto é, r tangência C_1 e C_2 e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros O_1 de C_1 e O_2 de C_2. Os pontos de tangência definem um segmento sobre r que mede

a) $5\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{5}$

c) $3\sqrt{6}$

d) $\frac{25}{3}$

e) 9

105. (ITA/2010)

Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são $A = (1, 1)$, $B = (1, 7)$ e $C = (5, 4)$ no plano xOy.

106. (ITA/2008)

Dada a cônica λ: $x^2 - y^2 = 1$, qual das retas abaixo é perpendicular à λ no ponto $P = (2, \sqrt{3})$?

a) $y = \sqrt{3}x - 1$

b) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$

d) $y = -\frac{\sqrt{3}}{5}x - 7$

e) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - 4$

107.(ITA/2008)

Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos $(2, 5), (-1, 2)$ e tal que a, b, c formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto $(2, 5)$.

108.(ITA/2007)

Considere, no plano cartesiano xy, duas circunferências C_1 e C_2, que se tangenciam exteriormente em P: $(5, 10)$. O ponto Q: $(10, 12)$ é o centro de C_1. Determine o raio da circunferência C_2, sabendo que ela tangencia a reta definida pela equação $x = y$.

109.(ITA/2006)

Sejam a reta s: $12x - 5y + 7 = 0$ e a circunferência C: $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$. A reta p, que é perpendicular a s e é secante a C, corta o eixo Oy num ponto cuja ordenada pertence ao seguinte intervalo

a) $(-91/12, -81/12)$

b) $(-81/12, -74/12)$

c) $(-74/12, 30/12)$

d) $(30/12, 74/12)$

e) $(75/12, 91/12)$

110. (ITA/2006)

Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

111. (ITA/2006)

Os focos de uma elipse são $F_1(0, -6)$ e $F_2(0, 6)$. Os pontos $A(0, 9)$ e $B(x, 3)$, $x > 0$, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B, F_1 e F_2 é igual a

a) $22\sqrt{10}$

b) $18\sqrt{10}$

c) $15\sqrt{10}$

d) $12\sqrt{10}$

e) $6\sqrt{10}$

112. (ITA/2005)

Uma circunferência passa pelos pontos $A = (0, 2), B = (0, 8)$ e $C = (8, 8)$.

Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são

a) $(0, 5)$ e 6.

b) $(5, 4)$ e 5.

c) $(4, 8)$ e $5,5$.

d) $(4, 5)$ e 5.

e) $(4, 6)$e 5.

113. (ITA/2005)

Seja C a circunferência de centro na origem, passando pelo ponto $P = (3, 4)$. Se t é a reta tangente a C por P, determine a circunferência C' de menor raio, com centro sobre o eixo x e tangente simultaneamente à reta t e à circunferência C.

114. (ITA/2005)

A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos $(1,0)$ e $(0,-2)$ são, respectivamente,

a) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

115. (ITA/2004)

Sejam os pontos A: $(2,0)$, B: $(4,0)$ e P: $(3,5+2\sqrt{2})$.

a) Determine a equação da circunferência C, cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos A e B e é tangente ao eixo y.

b) Determine as equações das retas tangentes à circunferência C que passam pelo ponto P.

116. (ITA/2004)

Sejam r e s duas retas que se interceptam segundo um ângulo de $60°$. Seja C, uma circunferência de 3 cm de raio, cujo centro O se situa em s, a 5 cm de r.

Determine o raio da menor circunferência tangente à C, e à reta r, cujo centro também se situa na reta s.

117. (ITA/2003)

A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}$, é igual a:

a) $\sqrt{6}$

b) $5/2$

c) $2\sqrt{2}$

d) 3

e) $10/3$

118. (ITA/2003)

Sabe-se que uma elipse de equação $\left(\frac{x^2}{a^2}\right)+\left(\frac{y^2}{b^2}\right)=1$ tangencia internamente a circunferência de equação $x^2+y^2=5$ e que a reta de equação $3x+2y=6$ é tangente à elipse no ponto P. Determine as coordenadas de P.

119. (ITA/2003)

Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangentes ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si de 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:

a) de uma elipse.

b) de uma parábola.

c) de uma hipérbole.

d) de duas retas concorrentes.

e) da reta $y=-x$.

120. (ITA/2002)

Considere o seguinte raciocínio de cunho cartesiano: "Se a circunferência de centro $C=(h;0)$ e raio r intercepta a curva $y=+\sqrt{x}, x>0$, no ponto $A=(a,\sqrt{a})$ de forma que o segmento $\overline{AC}$ seja perpendicular à reta tangente à curva em A, então $x=a$ é raiz dupla da equação em x que se obtém da intersecção da curva com a circunferência."

Use este raciocínio para mostrar que o coeficiente angular dessa reta tangente em A é $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

121. (ITA/2001)

O coeficiente angular da reta tangente à elipse

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

no primeiro quadrante e que corta o eixo das abscissas no ponto $P=(8,0)$ é

a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

e) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

122. (ITA/2001)

Seja o ponto $A = (r, 0), r > 0$. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ tais que é de $3r^2$ a diferença entre o quadrado da distância de P a A e o dobro do quadrado da distância de P à reta $y = -r$, é:

a) uma circunferência centrada em $(r, -2r)$ com raio r.

b) uma elipse centrada em $(r, -2r)$ com semieixos valendo r e $2r$.

c) uma parábola com vértice em $(r, -r)$.

d) duas retas paralelas distando $r\sqrt{3}$ uma da outra.

e) uma hipérbole centrada em $(r, -2r)$ com semieixos valendo r.

123.(ITA/2000)

Duas retas r_1 e r_2 são paralelas à reta $3x - y = 37$ e tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$. Se d é a distância de r_1 até a origem e d_2 é a distância de r_2 até a origem, então $d_1 + d_2$ é igual a

a) $\sqrt{12}$.

b) $\sqrt{15}$.

c) $\sqrt{7}$.

d) $\sqrt{10}$.

e) $\sqrt{5}$.

124. (ITA/1999)

Pelo ponto $C: (4, -4)$ são traçadas duas retas que tangenciam a parábola $y = (x - 4)^2 + 2$ nos pontos A e B. A distância do ponto C à reta determinada por A e B é:

a) $6\sqrt{12}$

b) $\sqrt{12}$

c) 12

d) 8

e) 6

125. (ITA/1999)

Considere a circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ e a elipse E de equação $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$. Então:

a) C e E interceptam-se em dois pontos distintos.

b) C e E interceptam-se em quatro pontos distintos.

c) C e E são tangentes exteriormente.

d) C e E são tangentes interiormente.

e) C e E têm o mesmo centro e não se interceptam.

126.(ITA/1998)

Considere a hipérbole H e a parábola T, cujas equações são, respectivamente,

$5(x+3)^2 - 4(y-2)^2 = -20$ e $(y-3)^2 = 4(x-1)$.

Então, o lugar geométrico dos pontos P, cuja soma dos quadrados das distâncias de P a cada um dos focos da hipérbole H é igual ao triplo do quadrado da distância de P ao vértice da parábola T, é:

a) A elipse de equação $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$.

b) A hipérbole de equação $\frac{(y+1)^2}{5} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$.

c) O par de retas dadas por $y = \pm(3x - 1)$.

d) A parábola de equação $y^2 = 4x + 4$.

e) A circunferência centrada em $(9, 5)$ e raio $\sqrt{120}$.

127. (ITA/1997)

Seja $m \in \mathbb{R}_+^*$ tal que a reta $x - 3y - m = 0$ determina, na circunferência $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$, uma corda de comprimento 6. O valor de m é

a) $10 + 4\sqrt{10}$

b) $2 + \sqrt{3}$

c) $5 - \sqrt{2}$

d) $6 + \sqrt{10}$

e) 3

128. (ITA/1997)

Seja A o ponto de intersecção das retas r e s dadas, respectivamente, pelas equações $x+y=3$ e $x-y=-3$. Sejam B e C pontos situados no primeiro quadrante com $B \in r$ e $C \in s$. Sabendo que $d(A,B)=d(A,C)=\sqrt{2}$, então a reta passando por B e C é dada pela equação

a) $2x+3y=1$

b) $y=1$

c) $y=2$

d) $x=1$

e) $x=2$

129.(ITA/1996)

Sabendo que o ponto $(2,1)$ é o ponto médio de uma corda AB da circunferência $(x-1)^2+y^2=4$, então a equação da reta que contém A e B é dada por:

a) $y=2x-3$

b) $y=x-1$

c) $y=-x+3$

d) $y=\frac{3x}{2}-2$

e) $y=-\frac{1}{2}x+2$

130. (ITA/1996)

São dadas as retas $(r)\ x-y+1+\sqrt{2}=0$ e $(s) x\sqrt{3}+y-2+\sqrt{3}=0$ e a circunferência $(C) x^2+2x+y^2=0$. Sobre a posição relativa desses três elementos, podemos afirmar que:

a) r e s são paralelas entre si e ambas são tangentes à C.

b) r e s são perpendiculares entre si e nenhuma delas é tangente à C.

c) r e s são concorrentes, r é tangente à C e s não é tangente à C.

d) r e s são concorrentes, s é tangente à C e r não é tangente à C.

e) r e s são concorrentes e ambas são tangentes à C.

131. (ITA/1996)

Tangenciando externamente a elipse tal que ε_1: $9x^2+4y^2-72x-24y+144=0$, considere uma elipse ε_2 de eixo maior sobre a reta que suporta o eixo menor de ε_1 e cujos eixos têm a mesma medida que os eixos de ε_1. Sabendo que ε_2 está inteiramente contida no primeiro quadrante, o centro de ε_2 é:

a) $(7,3)$

b) $(8,2)$

c) $(8,3)$

d) $(9,3)$

e) $(9,2)$

132. (ITA/1996)

São dadas as parábolas $p_1: y = -x^2 - 4x - 1$ e $p_2: y = x^2 - 3x + \frac{11}{4}$ cujos vértices são denotados, respectivamente, por V_1 e V_2. Sabendo que r é a reta que contém V_1 e V_2, então a distância de r até à origem é:

a) $\frac{5}{\sqrt{26}}$

b) $\frac{7}{\sqrt{26}}$

c) $\frac{7}{\sqrt{50}}$

d) $\frac{17}{\sqrt{50}}$

e) $\frac{11}{\sqrt{74}}$

133.(ITA/1995)

Uma reta t do plano cartesiano xOy tem coeficiente angular $2a$ e tangencia a parábola $y = x^2 - 1$ no ponto de coordenadas (a, b). Se $(c, 0)$ e $(0, d)$ são as coordenadas de dois pontos de t tais que $c > 0$ e $c = -2d$, então a/b é igual a:

a) $-4/15$

b) $-5/16$

c) $-3/16$

d) $-6/15$

e) $-7/15$

134.(IME/2021)

No que diz respeito à posição relativa das circunferências representadas pelas equações

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 11$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y = -16$$

pode-se afirmar que elas são:

a) exteriores.

b) tangentes exteriores.

c) tangentes interiores.

d) concêntricas.

e) secantes.

135. (IME/2021)

Considere as retas que contêm o ponto $C(3, 3)$ e interceptam os eixos coordenados x e y nos pontos A e B, respectivamente. O ponto P pertence à reta AB e sua distância do ponto A é a terça parte do comprimento do segmento AB. Identifique o lugar geométrico do ponto P e escreva a sua equação.

136. (IME/2020)

O lugar geométrico definido pela equação $x^2 + 3y^2 + 5 = 2x - xy - 4y$ representa

a) uma elipse.

b) uma hipérbole.

c) uma circunferência.

d) um conjunto vazio.

e) duas retas paralelas.

137. (IME/2020)

Os pontos $A(-5, 0)$ e $B(5, 0)$ definem um dos lados do triângulo ABC. A bissetriz interna do ângulo correspondente ao vértice C é paralela à reta de equação $14x - 2y + 1 = 0$. Determine o valor da excentricidade do lugar geométrico definido pelo vértice C deste triângulo.

138. (IME/2020)

Sobre uma reta r são marcados três pontos distintos A, B e C, sendo que C é um ponto externo ao segmento de reta $\overline{AB}$. Determine o lugar geométrico das interseções das retas tangentes a partir de A e B a qualquer circunferência tangente à reta r no ponto C. Justifique sua resposta.

139. (IME/2019)

Uma hipérbole equilátera de eixo igual a 4, com centro na origem, eixos paralelos aos eixos coordenados e focos no eixo das abscissas sofre uma rotação de $45°$ no sentido anti-horário em torno da origem. A equação dessa hipérbole após a rotação é:

a) $xy = 2$

b) $x^2 + xy - y^2 = 4$

c) $x^2 - y^2 = 2$

d) $xy = -2$

e) $x^2 - y^2 = -2$

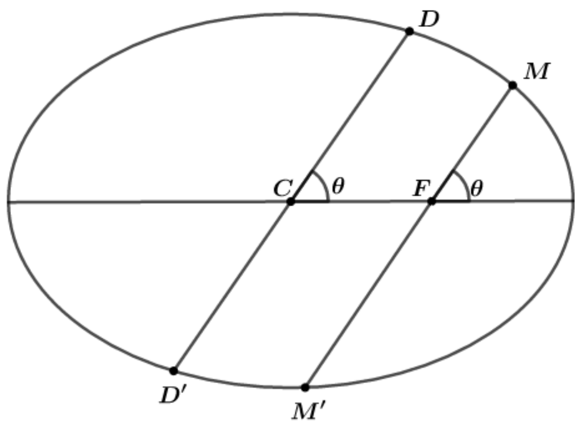
140. (IME/2019)

A reta r é normal à cônica C, de equação $9x^2 - 4y^2 = 36$, no ponto $A = \left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ e intercepta o eixo das abcissas no ponto B. Sabendo que F é o foco da cônica C mais próximo ao ponto A, determine a área do triângulo ABF.

141. (IME/2018)

Considere a elipse abaixo, onde DD' é uma corda passando pelo seu centro, MM' uma corda focal e o eixo maior da elipse é $2a$.

Prove que: $DD'^2 = MM' \cdot 2a$



142.(IME/2018)

Seja uma elipse com focos no eixo OX e centrada na origem. Seus eixos medem 10 e 20/3. Considere uma hipérbole tal que os focos da elipse são os vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são os vértices da elipse. As parábolas que passam pelas interseções entre a elipse e a hipérbole e que são tangentes ao eixo OY, na origem, têm as seguintes equações:

a) $y^2 = \pm 2\frac{\sqrt{35}}{7}x$

b) $y^2 = \pm 4\frac{\sqrt{5}}{7}x$

c) $y^2 = \pm 6\frac{\sqrt{5}}{7}x$

d) $y^2 = \pm 6\frac{\sqrt{35}}{7}x$

e) $y^2 = \pm 8\frac{\sqrt{35}}{63}x$

143. (IME/2017)

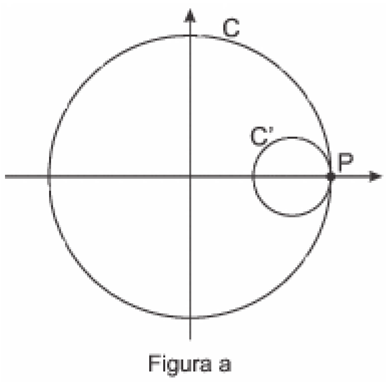
Um triângulo ABC tem o seu vértice A na origem do sistema cartesiano, seu baricentro é o ponto $D(3, 2)$ e seu circuncentro é o ponto $E(55/18, 5/6)$. Determine:

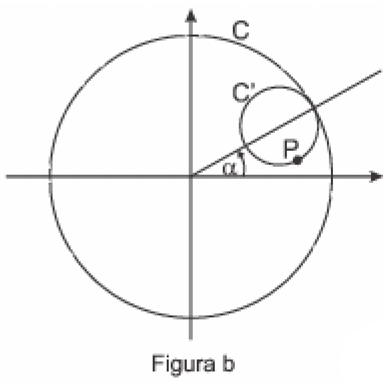
- a equação da circunferência circunscrita ao triângulo ABC;

- as coordenadas dos vértices B e C.

144. (IME/2016)

A circunferência C tem equação $x^2 + y^2 = 16$. Seja C' uma circunferência de raio 1 que se desloca tangenciando internamente a circunferência C, sem escorregamento entre os pontos de contato, ou seja, C' rola internamente sobre C.





Define-se o ponto P sobre C' de forma que no início do movimento de C' o ponto P coincide com o ponto de tangência $(4, 0)$, conforme figura a. Após certo deslocamento, o ângulo de entre o eixo x e a reta que une o centro das circunferências é α, conforme figura b.

- Determine as coordenadas do ponto P marcado sobre C' em função do ângulo α.

- Determine a equação em coordenadas cartesianas do lugar geométrico do ponto P quando a varia no intervalo $[0, 2\pi)$.

145.(IME/2015)

Pelo ponto P de coordenadas $(-1, 0)$ traçam-se as tangentes t e s à parábola $y^2 = 2x$. A reta t intercepta a parábola em A e a reta s intercepta a parábola em B. Pelos pontos A e B traçam-se paralelas às tangentes encontrando a parábola em outros pontos C e D, respectivamente. Calcule o valor da razão AB/CD.

146. (IME/2015)

Sejam r a circunferência que passa pelos pontos $(6, 7)$, $(4, 1)$ e $(8, 5)$ e t a reta tangente à r, que passa por $(0, -1)$ e o ponto de tangência tem ordenada 5. A menor distância do ponto $P(-1, 4)$ à reta t é:

a) $3\sqrt{2}$

b) 4

c) $2\sqrt{3}$

d) 3

e) $4\sqrt{10}/5$

147.(IME/2015)

Determine o produto dos valores máximo e mínimo de y que satisfazem às inequações dadas para algum valor de x.

$$2x^2 - 12x + 10 \leq 5y \leq 10 - 2x$$

a) $-3, 2$

b) $-1, 6$

c) 0

d) $1, 6$

e) $3, 2$

148. (IME/2014)

Uma elipse cujo centro encontra-se na origem e cujos eixos são paralelos ao sistema de eixos cartesianos possui comprimento da semidistância focal igual a $\sqrt{3}$ e excentricidade igual a $\sqrt{3}/2$. Considere que os pontos A, B, C e D representam as interseções da elipse com as retas de equações $y = x$ e $y = -x$. A área do quadrilátero $ABCD$ é

a) 8

b) 16

c) $16/3$

d) $16/5$

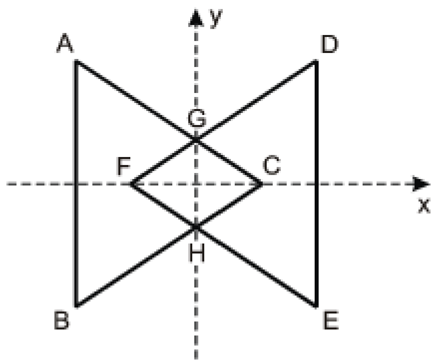
e) $16/7$

149.(IME/2012)

É dada uma parábola de parâmetro p. Traça-se a corda focal MN, que possui uma inclinação de 60° em relação ao eixo de simetria da parábola. A projeção do ponto M sobre a diretriz é o ponto Q, e o prolongamento da corda MN intercepta a diretriz no ponto R. Determine o perímetro do triângulo MQR em função de p, sabendo que N encontra-se no interior do segmento MR.

150. (IME/2012)

Os triângulos ABC e DEF são equiláteros com lados iguais a m. A área da figura $FHCG$ é igual à metade da área da figura $ABHFG$. Determine a equação da elipse de centro na origem e eixos formados pelos segmentos FC e GH.



a) $48x^2 + 36y^2 - \sqrt{2}m^2 = 0$

b) $8x^2 + 16y^2 - \sqrt{3}m^2 = 0$

c) $16x^2 + 48y^2 - 3m^2 = 0$

d) $8x^2 + 24y^2 - m^2 = 0$

e) $16x^2 - 24y^2 - m^2 = 0$

151. (IME/2011)

Determine o valor da excentricidade da cônica dada pela equação $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$.

152.(IME/2010)

Uma hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$ tem centro na origem e passa pelo ponto $(\sqrt{5}, 1)$.

A equação de uma reta tangente a esta hipérbole e paralela a $y = 2x$ é:

a) $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 6$

b) $y = -2x + 3\sqrt{3}$

c) $3y = 6x + 2\sqrt{3}$

d) $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 4$

e) $y = 2x + \sqrt{3}$

153. (IME/2010)

Seja M um ponto de uma elipse com centro O e focos F e F'. A reta r é tangente à elipse no ponto M e s é uma reta, que passa por O, paralela a r. As retas suportes dos raios vetores MF e MF' interceptam a reta s em H e H', respectivamente. Sabendo que o segmento FH mede 2 cm, o comprimento $F'H'$ é:

a) 0,5 cm

b) 1,0 cm

c) 1,5 cm

d) 2,0 cm

e) 3,0 cm

154. (IME/2004)

Considere a parábola P de equação $y = ax^2$, com $a > 0$ e um ponto A de coordenadas (x_0, y_0) satisfazendo a $y_0 < ax_0^2$. Seja S a área do triângulo ATT', onde T e T' são os pontos de contato das tangentes a P passando por A.

a) Calcule o valor da área S em função de a, x_0 e y_0.

b) Calcule a equação do lugar geométrico do ponto A, admitindo que a área S seja constante.

c) Identifique a cônica representada pela equação obtida no item anterior.

GABARITO

$\mathbb{C} \Rightarrow S = \{(0; 0), (10; 0), (2; -4), (8; -4)\}$

86. $\mathbb{R} \Rightarrow S = \{(10; 0), (2; -4), (8; -4)\}$

87. a) $(x-7)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{625}{16}$ b) $A\left(\frac{3}{4}, 9\right)$ $B\left(\frac{53}{4}, 9\right)$ $C\left(\frac{53}{4}, \frac{-7}{2}\right)$ $D\left(\frac{3}{4}, \frac{-7}{2}\right)$

88. $a = 4$ e $b = 1$

89. a

90. $\frac{(x-8)^2}{3} + \frac{(y-6)^2}{4} = 1$

91. c

92. $r = \frac{11}{2}$ e $C = (\frac{1}{4}, \frac{15\sqrt{3}}{4})$
93. a
94. $C = \left(\frac{38}{5}, -\frac{36}{5}\right)$
95. a
96. a) $d(P, S_1) = 1; d(Q, S_1) = \sqrt{13}$; b) $|y| = |x|, se\ y \geq 2\ e\ y = \frac{x^2}{4} + 1, se\ y < 2$
97. a
98. a
99. d
100. $Área\ pedida = \frac{9\pi}{4} - \frac{3}{2}$
101. b
102. d
103. e
104. a
105. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{9}{4}$
106. e
107. $d(V, r) = \frac{1}{\sqrt{5}}$
108. $r = \frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{58}-3}$
109. c
110. $F_1F_2 = 10$
111. d
112. d
113. $\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{16}$
114. e
115. Item a) $(x - 3)^2 + \left(y - 2\sqrt{2}\right)^2 = 9$; Item b) $y = \frac{4}{3}x + 1 + 2\sqrt{2}$ ou $y = -\frac{4}{3}x + 9 + 2\sqrt{2}$.
116. $r = 29 - 16\sqrt{3}$
117. b
118. $P = \left(\frac{8}{9}, \frac{5}{3}\right)$
119. c
120. Demonstração.
121. d
122. e
123. e
124. c
125. c
126. e
127. a
128. b
129. c
130. e
131. d
132. e
133. a
134. e
135. União de duas hipérboles rotacionadas $(x - 2)(y - 1) = 2$ e $(x - 4)(y + 1) = -4$

136.d
137.Hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$
138.Elipse
139.a
140.$S_{ABF} = \frac{117\sqrt{5}-12\sqrt{65}}{16}$
141.Demonstração.
142.e
143.Item a) $\left(x-\frac{55}{18}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\left(\frac{5\sqrt{130}}{18}\right)^2$; Item b) $B=(3,4)$ e $C=(6,2)$
144.$P=\left(4\cos^3(\alpha), 4sen^3(\alpha)\right)$; $\left(\frac{x_P}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y_P}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=1$
145.$\frac{AB}{CD}=\frac{1}{3}$
146.e
147.a
148.d
149.$2p(\sqrt{3}+3)$
150.d
151.$e=\frac{\sqrt{5}}{2}$
152.a
153.d
154.a) $S=\frac{2(ax_0^2-y_0)\sqrt{a^2x_0^2-ay_0}}{a}$ b) $y_0=ax_0^2-\frac{\sqrt[3]{2aS^2}}{2}$ c) Parábola P transladada de $-\frac{\sqrt[3]{2aS^2}}{2}$

RESOLUÇÃO

86. (ITA/2021)

Determine todos os pontos (x,y) que pertencem à circunferência de centro $(5,0)$ e raio 5, que satisfazem a equação:

$$\sqrt{3x-y-4}=\sqrt{x^2-7x-5y-4}$$

Comentários

Temos a equação da circunferência:

$$(x-5)^2+y^2=25 \Rightarrow x^2-10x+25+y^2=25 \therefore x^2-10x+y^2=0 \ \ (I)$$

Vamos elevar a equação dada ao quadrado e depois testar as raízes para ver se satisfazem a equação.

$$3x-y-4=x^2-7x-5y-4$$
$$\Rightarrow x^2-10x=4y \ \ (II)$$

Substituindo (II) em (I):

$$y^2+4y=0 \Rightarrow y_1=0 \ ou \ y_2=-4$$

Para $y_1=0$:

$$x^2-10x=0 \Rightarrow x_1=0 \ ou \ x_2=10$$

Portanto, temos os pares $(0,0)$ e $(10,0)$.

Para $y_2 = -4$:

$$x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-8) = 0 \Rightarrow x_3 = 2 \; ou \; x_4 = 8$$

Temos os pares $(2,-4)$ e $(8,-4)$.

Testando as raízes na equação:

$$\sqrt{3x - y - 4} = \sqrt{x^2 - 7x - 5y - 4}$$

$$(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \Rightarrow \sqrt{3(0) - 0 - 4} = \sqrt{0^2 - 7(0) - 5(0) - 4} \Rightarrow \sqrt{-4} = \sqrt{-4}$$

$$\Rightarrow conv\acute{e}m \; nos \; complexos$$

$$(10,0) \Rightarrow \sqrt{3(10) - 0 - 4} = \sqrt{10^2 - 7(10) - 5(0) - 4} \Rightarrow \sqrt{26} = \sqrt{26} \Rightarrow ok$$

$$(2,-4) \Rightarrow \sqrt{3(2) - (-4) - 4} = \sqrt{2^2 - 7(2) - 5(-4) - 4} \Rightarrow \sqrt{6} = \sqrt{6} \Rightarrow ok$$

$$(8,-4) \Rightarrow \sqrt{3(8) - (-4) - 4} = \sqrt{8^2 - 7(8) - 5(-4) - 4} \Rightarrow \sqrt{24} = \sqrt{24} \Rightarrow ok$$

Assim, podemos concluir que

$$\mathbb{C} \Rightarrow S = \{(0;0), (10;0), (2;-4), (8;-4)\}$$

$$\mathbb{R} \Rightarrow S = \{(10;0), (2;-4), (8;-4)\}$$

Gabarito: $\mathbb{C} \Rightarrow S = \{(0;0), (10;0), (2;-4), (8;-4)\}$

$\mathbb{R} \Rightarrow S = \{(10;0), (2;-4), (8;-4)\}$

---

87. (ITA/2020)

Seja λ a circunferência que passa pelos pontos $P = (1,1)$, $Q = (13,1)$ e $R = (7,9)$. Determine:

a) A equação de λ.

b) Os vértices do quadrado $ABCD$ circunscrito a λ, sabendo que R é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Comentários

a) Equação da circunferência de raio r centrada no ponto $O(a,b)$:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Substituindo os pontos dados:

$$Equação\ 1 \rightarrow P(1,1): (1-a)^2 + (1-b)^2 = r^2$$

$$Equação\ 2 \rightarrow Q(13,1): (13-a)^2 + (1-b)^2 = r^2$$

$$Equação \;\; \rightarrow R(7,9): (7-a)^2 + (9-b)^2 = r^2$$

De eq. 1 e eq. 2:

$$(1-a)^2 = (13-a)^2$$

$$1 - 2a + a^2 = 169 - 26a + a^2$$

$$24a = 168$$

$$\boxed{a = 7}$$

Substituindo o valor de a na eq. 1:

$$(1-7)^2+(1-b)^2=r^2$$

$$Equação\ 4 \rightarrow 36+(1-b)^2=r^2$$

Substituindo o valor de a na eq. 3:

$$(7-7)^2+(9-b)^2=r^2$$

$$Equação\ 5 \rightarrow r^2=(9-b)^2$$

Das eq. 4 e 5:

$$36+(1-b)^2=(9-b)^2 \therefore 36+1-2b+b^2=81-18b+b^2 \therefore 16b = 44 \therefore \boxed{b=\frac{11}{4}}$$

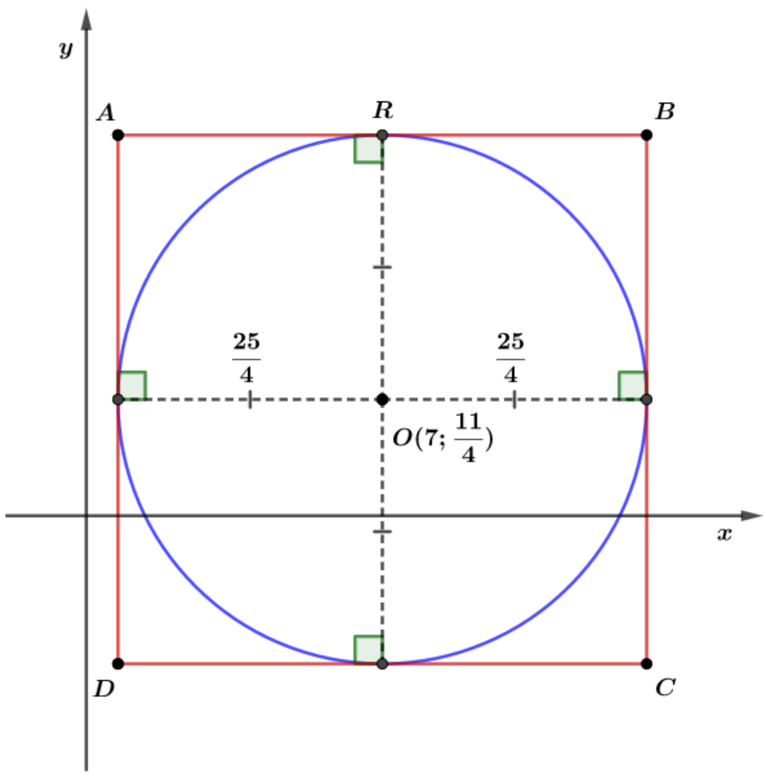
Substituindo o valor de b na eq. 5:

$$r^2=\left(9-\frac{11}{4}\right)^2 \therefore \boxed{r=\frac{25}{4}}$$

Portanto, a equação da circunferência será:

$$(x-7)^2+\left(y-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{625}{16}$$

b) Percebendo que o centro da circunferência está na mesma abscissa que o ponto R, o lado AB do quadrado é tangente à circunferência em R e paralelo ao eixo x. Assim:



Logo:

$$A=\left(7-\frac{25}{4},\frac{11}{4}+\frac{25}{4}\right)=\left(\frac{3}{4},9\right)$$

$$B = \left(7 + \frac{25}{4}, \frac{11}{4} + \frac{25}{4}\right) = \left(\frac{53}{4}, 9\right)$$

$$C = \left(7 + \frac{25}{4}, \frac{11}{4} - \frac{25}{4}\right) = \left(\frac{53}{4}, \frac{-7}{2}\right)$$

$$D = \left(7 - \frac{25}{4}, \frac{11}{4} - \frac{25}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{-7}{2}\right)$$

Gabarito: a) $(x-7)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{625}{16}$ **b)** $A\left(\frac{3}{4}, 9\right)$ $B\left(\frac{53}{4}, 9\right)$ $C\left(\frac{53}{4}, \frac{-7}{2}\right)$ $D\left(\frac{3}{4}, \frac{-7}{2}\right)$

88. (ITA/2020)

Sejam a e b dois números reais. Sabendo que o conjunto dos números reais k para os quais a reta $y = kx$ intersecta a parábola $y = x^2 + ax + b$ é igual a $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$, determine os números a e b.

Comentários

Devemos ter que:

$$kx = x^2 + ax + b$$

$$x^2 + (a-k)x + b = 0$$

$$\Delta = (a-k)^2 - 4b \geq 0 \text{ (pois existe intersecção)}$$

$$a^2 - 2ak + k^2 - 4b \geq 0$$

$$k^2 - 2ak + a^2 - 4b \geq 0 \quad (I)$$

$$\Delta' = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 4b) = 4a^2 - 4a^2 + 16b$$

$$\Rightarrow \Delta' = 16b$$

Encontrando as raízes em k:

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{2a + \sqrt{16b}}{2} = a + 2\sqrt{b} \\ k_2 = \dfrac{2a - \sqrt{16b}}{2} = a - 2\sqrt{b} \end{cases}$$

O intervalo que satisfaz a inequação (I) é:

$$k \in \left(-\infty, a - 2\sqrt{b}\right] \cup \left[a + 2\sqrt{b}, +\infty\right)$$

Comparando com o intervalo dado no enunciado:

$$k \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$$

Temos que:

$$\begin{cases} a + 2\sqrt{b} = 6 \\ a - 2\sqrt{b} = 2 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (4,1)$$

Gabarito: $a = 4$ e $b = 1$

89. (ITA/2019)

Seja γ a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. Se r e s são duas retas que se interceptam no ponto $P = (1, 3)$ e são tangentes a γ, então o cosseno do ângulo entre r e s é igual a

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

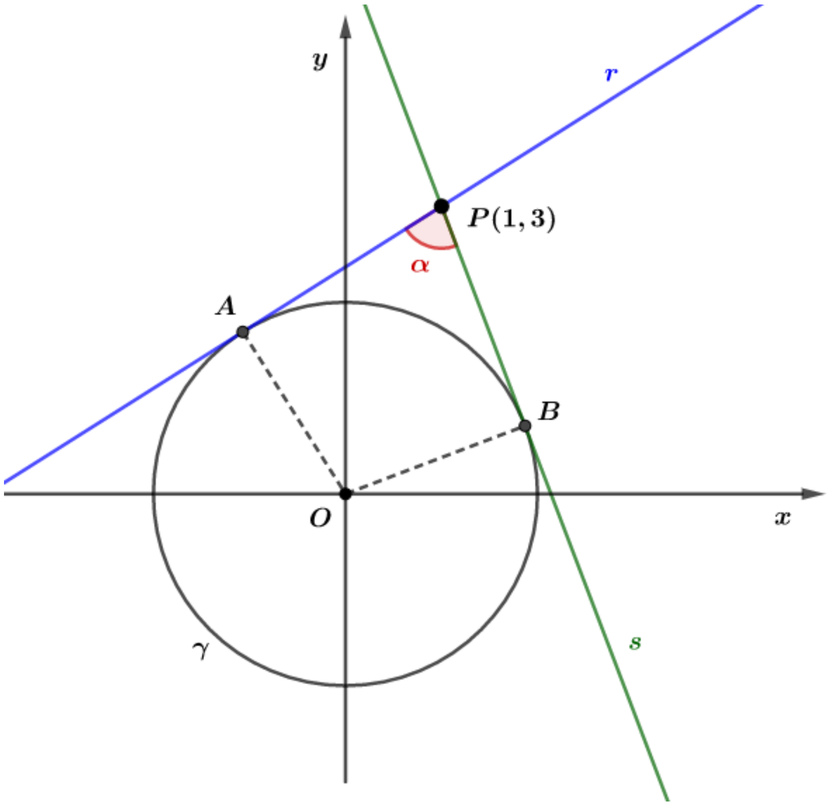
c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Comentários

Do enunciado, temos a seguinte figura:



Queremos descobrir o valor de $\cos(\alpha)$.

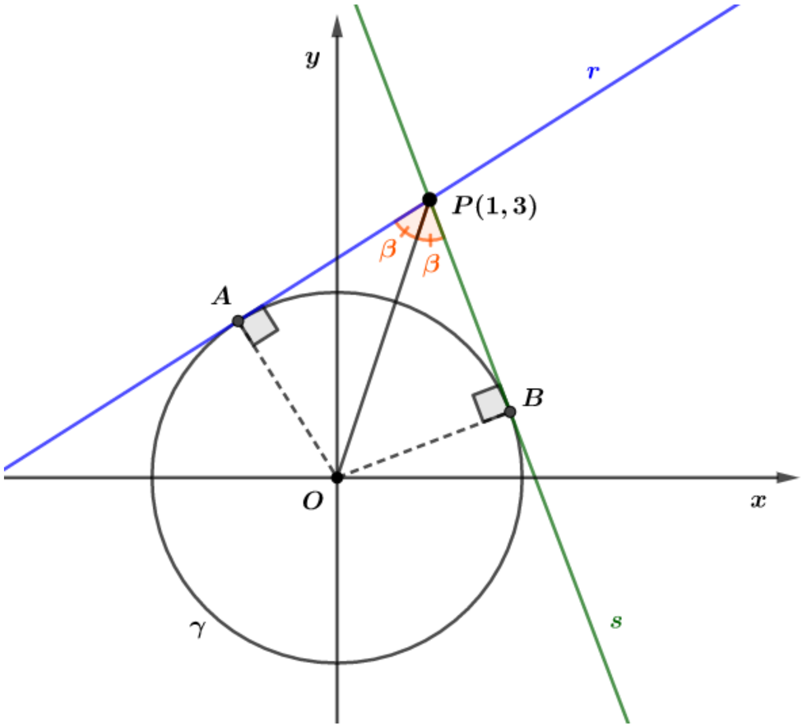
Das propriedades da reta tangente na circunferência, temos:

- AO é perpendicular a r e BO é perpendicular a s.
- $PA = PB$

Analisando a equação da circunferência, podemos ver que o seu raio é dado por $R = \sqrt{4} = 2$. Como A e B são pontos dessa cônica, temos:

- $AO = BO = 2 =$ raio da circunferência.

Note que pelo critério de congruência LLL, temos $\Delta PAO \equiv \Delta PBO$. Logo, $O\hat{P}B \equiv O\hat{P}A$. Fazendo $O\hat{P}B = O\hat{P}A = \beta$:



Sabemos que a distância do ponto P à origem O é dado por:

$$d_{PO} = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$$

Desse modo, temos:

$$sen(\beta) = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

Queremos saber $\cos(\alpha) = \cos(2\beta)$. Usando a fórmula do arco duplo do cosseno da trigonometria:

$$\cos(2\beta) = 1 - 2sen(\beta)^2 = 1 - 2\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 - \frac{8}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Gabarito: "a".

90. (ITA/2019)

Seja F o foco da parábola de equação $(y-5)^2 = 4(x-7)$, e sejam A e B os focos da elipse da equação $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1$. Determine o lugar geométrico formado pelos pontos P do plano tais que a área do triângulo ABP seja numericamente igual ao dobro da distância de P a F.

Comentários

Precisamos encontrar os pontos A, B, F e achar a equação que representa a situação do problema. Vamos analisar a parábola dada:

$$(y-5)^2 = 4(x-7)$$

Essa é a equação de uma parábola com eixo de simetria na horizontal, pois o termo quadrático está em y. Lembrando que uma parábola desse tipo pode ser escrita como:

$$2p(x - x_v) = (y - y_v)^2$$

Sendo p seu parâmetro e (x_v, y_v) as coordenadas do seu vértice. Da equação da parábola dada, podemos ver que:

$$(x_v; y_v) = (7;\ 5)$$

$$2p = 4 \Rightarrow p = 2$$

As coordenadas de F são dadas por:

$$F = \left(x_v + \frac{p}{2}; y_v\right) = \left(7 + \frac{2}{2}; 5\right)$$

$$\boxed{F = (8; 5)}$$

Resta analisar a elipse:

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1$$

O centro dessa elipse é dado por $O = (x_o; y_o) = (4; 2)$. Note que o semieixo maior é paralelo ao eixo das abcissas, pois o maior denominador está abaixo de x. Então, sendo a o semieixo maior e b o semieixo menor, temos:

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 8 \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

Lembrando que a semidistância focal pode ser calculada usando o teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = 8 + c^2 \Rightarrow c = 1$$

Logo, os focos A e B são dados por:

$$A = (x_o - c; y_o) = (4 - 1; 2)$$

$$\boxed{A = (3; 2)}$$

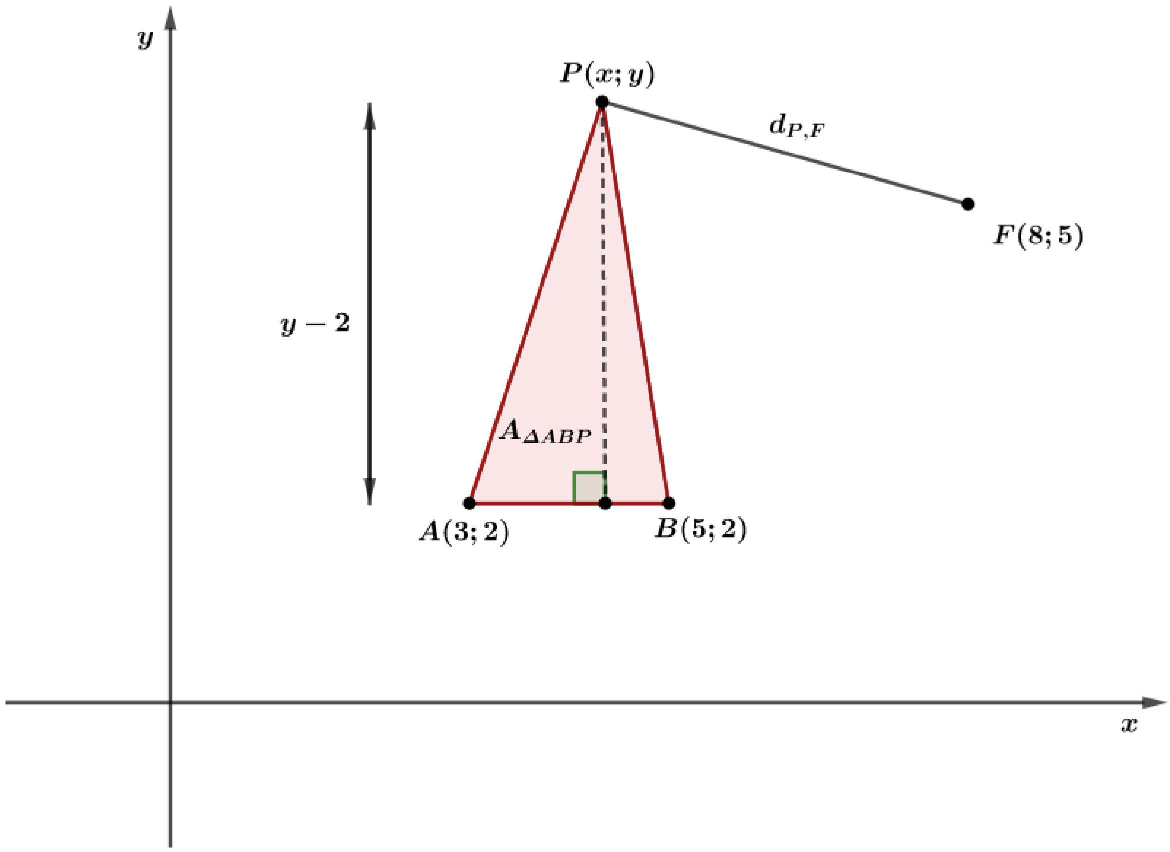
$$B = (x_o + c; y_o) = (4 + 1; 2)$$

$$\boxed{B = (5; 2)}$$

Agora, temos os dados dos focos, o enunciado pede o lugar geométrico que satisfaz a seguinte relação:

$$A_{\Delta ABP} \overset{N}{=} 2d_{P,F}$$

Vamos representar a figura apenas para visualizar a situação:



Como o ponto P não foi dado, não sabemos onde ele está localizado. Devemos calcular a área $A_{\Delta ABP}$ e a distância $d_{P,F}$ supondo $P=(x;y)$.

Para calcular a área $A_{\Delta ABP}$ do triângulo, podemos tomar como base o segmento $\overline{AB}$. Então, essa área é dada por:

$$A_{\Delta ABP}=\frac{base\cdot altura}{2}=\frac{|x_B-x_A|\cdot|y-2|}{2}=\frac{|5-3|\cdot|y-2|}{2}=|y-2|$$

Para a distância do ponto P ao foco F:

$$d_{P,F}=\sqrt{(x-x_F)^2+(y-y_F)^2}=\sqrt{(x-8)^2+(y-5)^2}$$

Desse modo, temos:

$$A_{\Delta ABP}=2d_{P,F}$$

$$|y-2|=2\sqrt{(x-8)^2+(y-5)^2}$$

Elevando ao quadrado a equação e desenvolvendo:

$$|y-2|^2=\left(2\sqrt{(x-8)^2+(y-5)^2}\right)^2$$

$$y^2-4y+4=4(x^2-16x+64+y^2-10y+25)$$

Como a expressão à esquerda possui apenas a variável y, vamos manter a expressão em x em evidência e tentar simplificar a expressão em y.

$$4(x^2-16x-64)+4y^2-40y+100-y^2+4y-4=0$$

$$4(x-8)^2+3y^2-36y+96=0$$

$$4(x-8)^2+3\underbrace{(y^2-12y)}_{(y-6)^2-36}+96=0$$

Note que a expressão em y pode ser escrita como:

$$y^2-12y=y^2-12y+36-36=(y-6)^2-36$$

Desse modo:

$$4(x-8)^2+3[(y-6)^2-36]+96=0$$

$$4(x-8)^2+3(y-6)^2-108+96=0$$

$$4(x-8)^2+3(y-6)^2=12$$

Dividindo a equação por 12:

$$\boxed{\frac{(x-8)^2}{3}+\frac{(y-6)^2}{4}=1}$$

Esse lugar geométrico representa uma elipse com as seguintes características:

$$\text{Centro}=(8;6)$$

$$\text{Semieixo maior}\rightarrow a=2$$

$$\text{Semieixo menor}\rightarrow b=\sqrt{3}$$

Gabarito: $\frac{(x-8)^2}{3}+\frac{(y-6)^2}{4}=1$

---

91. (ITA/2018)

Considere a definição: duas circunferências são ortogonais quando se interceptam em dois pontos distintos e nesses pontos suas tangentes são perpendiculares. Com relação às circunferências $C_1: x^2+(y+4)^2=7, C_2: x^2+y^2=9$ e $C_3: (x-5)^2+y^2=16$, podemos afirmar que

a) somente C_1 e C_2 são ortogonais.

b) somente C_1 e C_3 são ortogonais.

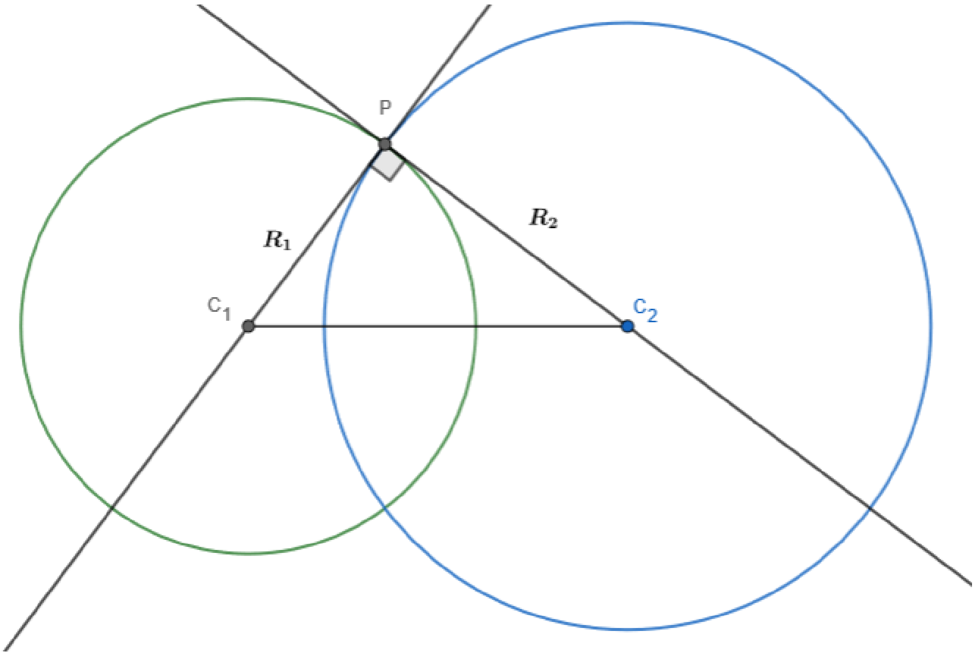
c) C_2 é ortogonal a C_1 e a C_3.

d) C_1, C_2 e C_3 são ortogonais duas a duas.

e) não há ortogonalidade entre as circunferências.

Comentário

Questão que exige que o candidato faça um diagrama inicial com o intuito de não perder tempo demasiado em contas. Observe a figura abaixo que contempla a situação sobre a qual o enunciado trata:



Observe que a perpendicular à tangente no ponto de tangência passa pelo centro da circunferência dada.

Dessa forma, para duas circunferências cumprindo as condições do enunciado, teremos a configuração mostrada na figura acima.

Assim, devemos ter a seguinte relação, advinda do triângulo retângulo C_1C_2P:

$$(C_1C_2)^2 = (C_1P)^2 + (C_2P)^2 = R_1^2 + R_2^2 \text{ (eq. 01)}$$

Note que essa condição é necessária e suficiente para termos a condição de ortogonalidade, ou seja, se um par de circunferências satisfaz a $eq. 01$, então elas são ortogonais.

Obs.: Muito cuidado nesse ponto! Usamos o diagrama para buscar alguma relação que pudesse simplificar as contas, mas poderíamos ter encontrado apenas uma condição necessária, ou seja, se duas circunferências são ortogonais, então satisfazem a eq.01. O que queremos é justamente o contrário, usar a eq.01 para concluir que elas são ortogonais, isso exigiria que o candidato partisse da volta e concluísse que de fato isso implica que elas são ortogonais. Verifique!

Assim, devemos simplesmente verificar se os pares de circunferências satisfazem à eq.01. Vamos seguir então os seguintes passos:

Passo 01:

Determinar as coordenadas dos centros. Para isso, lembre-se que a equação de uma circunferência é:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

Do enunciado:

$$C_1: x^2 + (y + 4)^2 = 7 \,;\, C_2: x^2 + y^2 = 9 \,;\, C_3: (x - 5)^2 + y^2 = 16$$

Denotando por C_1, C_2 e C_3 os centros das circunferências, temos:

$$C_1 = (0, -4); C_2 = (0, 0); C_3 = (5, 0)$$

Passo 02:

Determinar os raios. Por inspeção, determinamos os raios R_1, R_2 e R_3:

$$R_1 = \sqrt{7}; R_2 = 3; R_3 = 4$$

Passo 03:

Determinar as distâncias entre os centros. Da geometria analítica, temos:

$$C_1C_2 = \sqrt{(0-0)^2 + \left(0-(-4)\right)^2} = 4$$

$$C_1C_3 = \sqrt{(5-0)^2 + \left(0-(-4)\right)^2} = \sqrt{41}$$

$$C_2C_3 = \sqrt{(5-0)^2 + (0-0)^2} = 5$$

Passo 04:

Verificar se os pares de circunferências satisfazem à eq.01.

Para C_1 e C_2:

$$(C_1C_2)^2 = 4^2 = 16; R_1^2 + R_2^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 + 3^2 = 16; (C_1C_2)^2 = R_1^2 + R_2^2$$

Para C_1 e C_3:

$$(C_1C_3)^2 = \left(\sqrt{41}\right)^2 = 41; R_1^2 + R_3^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 + 4^2 = 23; (C_1C_3)^2 \neq R_1^2 + R_3^2$$

Para C_2 e C_3:

$$(C_2C_3)^2 = 5^2 = 25; R_2^2 + R_3^2 = 3^2 + 4^2 = 25; (C_1C_3)^2 = R_1^2 + R_3^2$$

De onde se conclui que C_2 é ortogonal a C_1 e a C_3.

Gabarito: "c".

---

92. (ITA/2018)

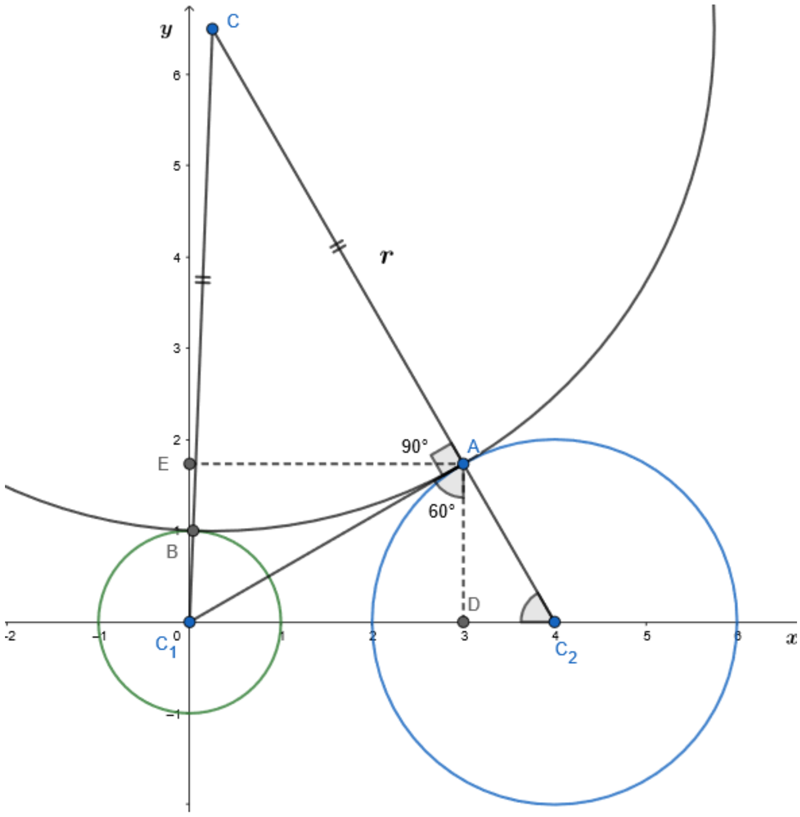
No plano cartesiano são dadas as circunferências $C_1: x^2 + y^2 = 1$ e $C_2: (x-4)^2 + y^2 = 4$. Determine o centro e o raio de uma circunferência C tangente simultaneamente a C_1 e C_2, passando pelo ponto $A = (3, \sqrt{3})$.

Comentários

Primeiramente, perceba que o ponto A dado também pertence a C_2, pois substituindo o ponto A na equação de C_2, temos satisfeita a equação:

$$(3-4)^2 + \left(\sqrt{3} - 0\right)^2 = 1 + 3 = 4$$

Dessa forma, seja C o centro da circunferência que é tangente a C_1 e C_2. Do enunciado, podemos traçar o seguinte diagrama:

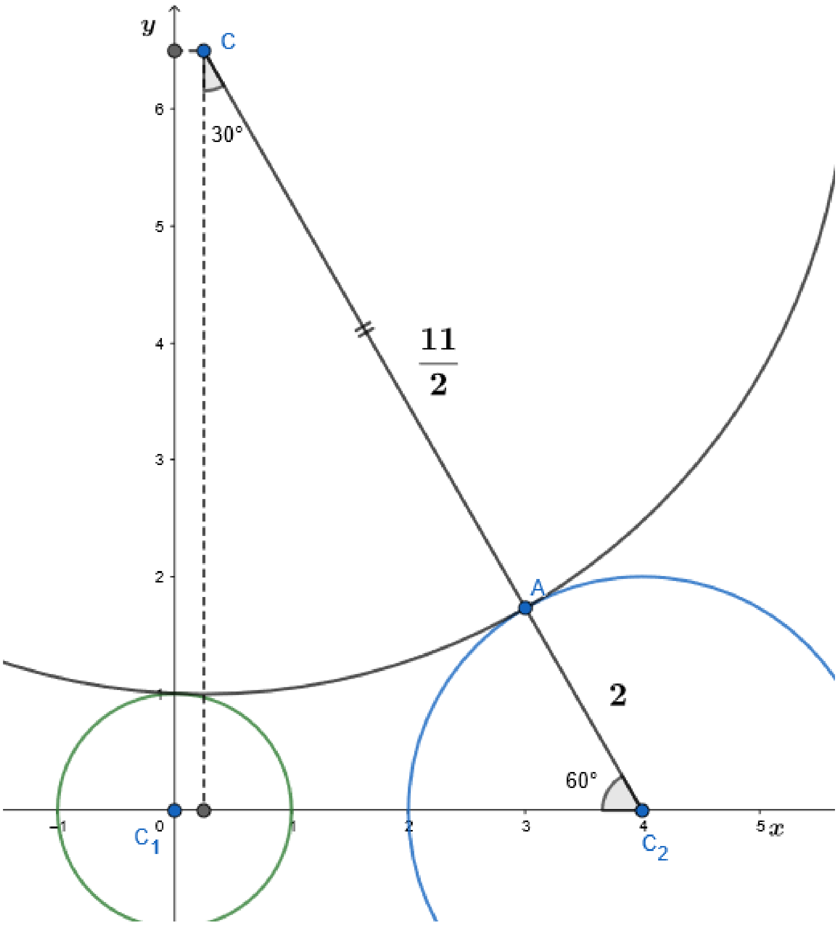


Como $\frac{AE}{AD} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, temos que o ângulo $C_1\widehat{A}D = 60°$. Além disso, como $DC_2 = 4 - 3 = 1$, temos que $\frac{DC_2}{DA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, do que segue que o ângulo $D\widehat{A}C_2 = 30°$. Assim, concluímos que $C_1\widehat{A}C_2 = C_1\widehat{A}D + D\widehat{A}C_2 = 90°$ e o triângulo ΔC_1AC é retângulo.

Note que, como a circunferência que buscamos é tangente às duas, temos que $CA = r$ e $CC_1 = CB + BC_1 = r + 1$. Além disso, olhando para o triângulo ΔC_1AD, temos que $sen(60°) = \frac{C_1D}{C_1A} = \frac{3}{C_1A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então $C_1A = 2\sqrt{3}$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $\varDelta C_1AC$, temos:

$$(r+1)^2 = r^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 2r + 1 = 12 \Rightarrow r = \frac{11}{2}$$

Observe, pelo diagrama abaixo, que a coordenada x de C é dada por $4 - CC_2 sen(30°) = \frac{1}{4}$ e a coordenada y de C é dada por $CC_2\cos(30°) = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.



Gabarito: $r = \frac{11}{2}$ e $C = (\frac{1}{4}, \frac{15\sqrt{3}}{4})$.

---

93. (ITA/2017)

Sejam $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq ||x| - 1|\}$ e $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y+1)^2 \leq 25\}$. A área da região $S_1 \cap S_2$ é

a) $\frac{25}{4}\pi - 2$

b) $\frac{25}{4}\pi - 1$

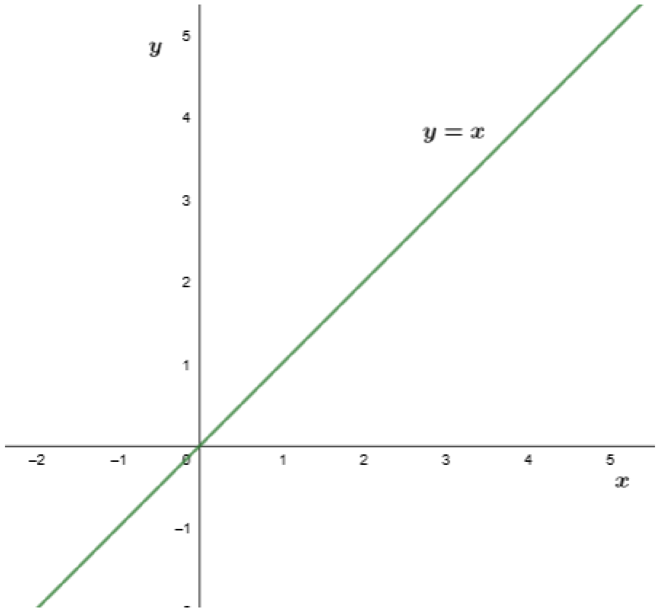
c) $\frac{25}{4}\pi$

d) $\frac{75}{4}\pi - 1$

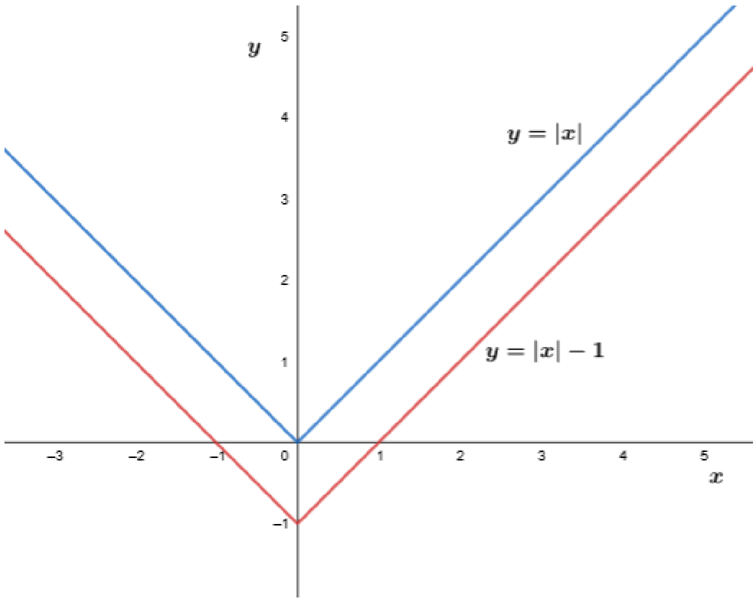
e) $\frac{75}{4}\pi - 2$

Comentários

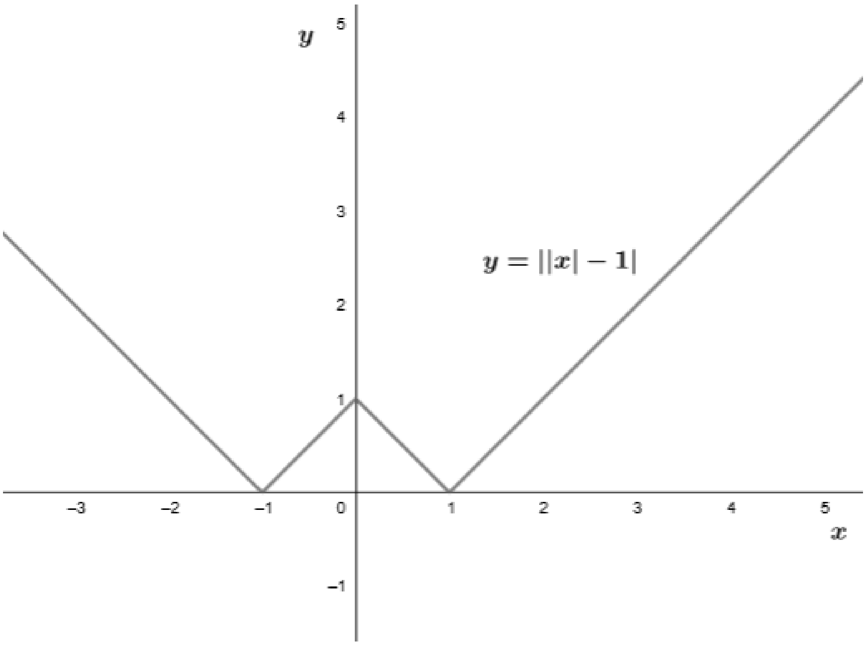
Primeiramente, vamos determinar a região S_1. Em questões desse tipo, é bastante útil começar de funções que já conhecemos o comportamento e, após isso, ir fazendo as alterações propostas. Nesse caso, vamos olhar para a função $y = x$, que tem gráfico:



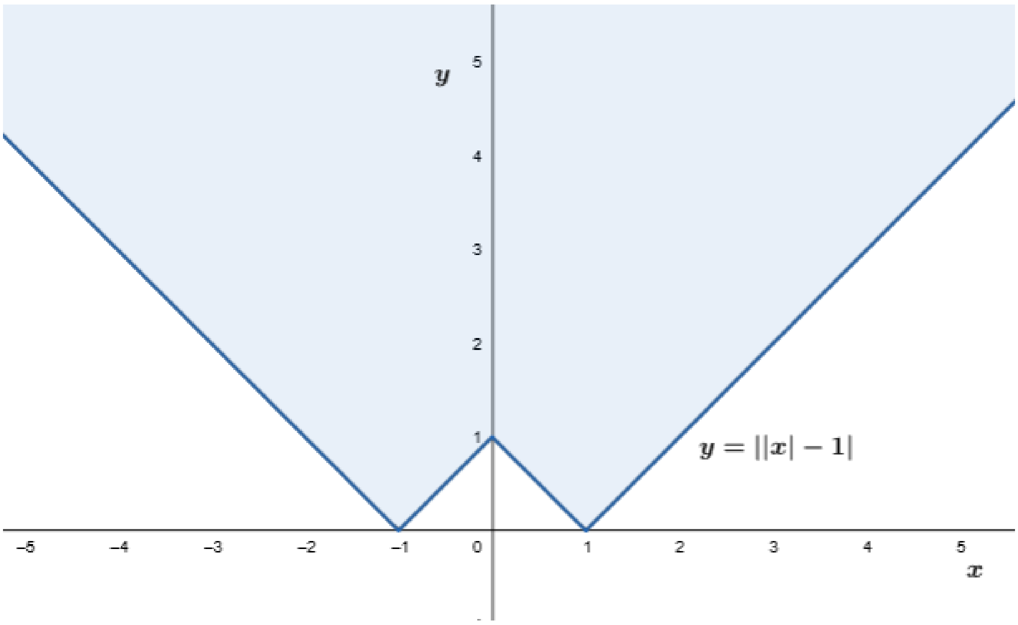
Após isso, olhamos para a função $y = |x|$ e $y = |x| - 1$:



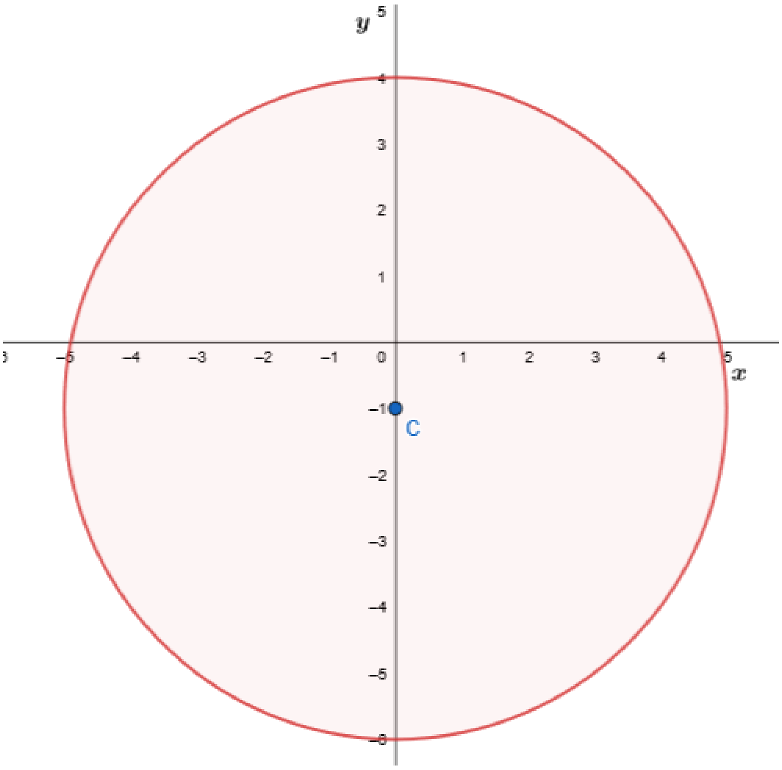
Por fim, temos o gráfico de $y = \left||x| - 1\right|$:



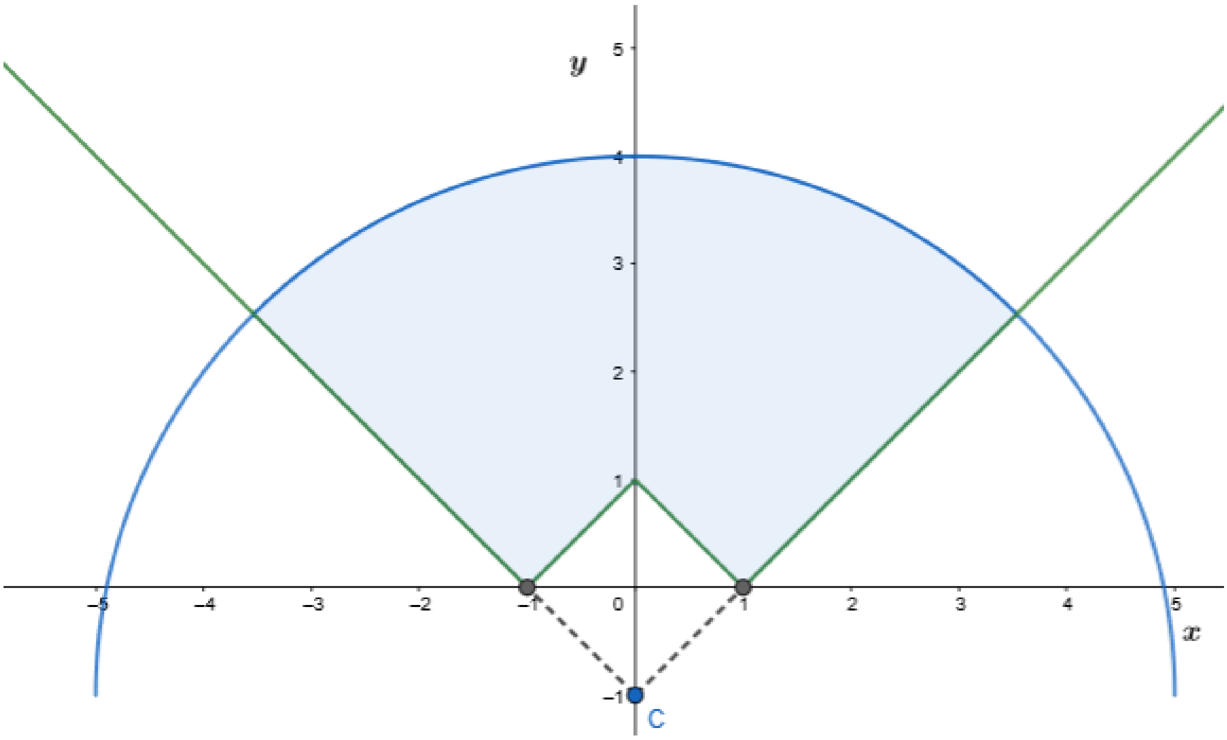
Observe, que o queremos é a região que satisfaz $y \geq \left||x| - 1\right|$, ou seja:



Agora, vamos determinar a região S_2. Note que temos um círculo de raio $r = \sqrt{25} = 5$ e centro $C = (0, -1)$, observe no gráfico abaixo:



Sobrepondo as duas regiões, observamos que o que o enunciado pede é a área correspondente a um quarto da circunferência subtraída da área de um quadrado de lado $l = \sqrt{2}$. Assim:



$$\boldsymbol{\acute{A}rea\ de\ S_1 \cap S_2 = \frac{1}{4}(25\pi) - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{25\pi}{4} - 2}$$

Gabarito: “a”.

94. (ITA/2016)

Considere as circunferências $\lambda_1: x^2 + y^2 - 8x + 4y = 20$ e $\lambda_2: x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$. O triângulo ABC satisfaz as seguintes propriedades:

a) o lado $\overline{AB}$ coincide com a corda comum a λ_1 e λ_2;

b) o vértice B pertence ao primeiro quadrante;

c) o vértice C pertence a λ_1 e a reta que contém $\overline{AC}$ é tangente a λ_2.

Determine as coordenadas do vértice C.

Comentários

Primeiramente, vamos encontrar os vértices A e B subtraindo λ_2 de λ_1:

$$(x^2 + y^2 - 8x + 4y) - (x^2 + y^2 - 2x - 8y) = (20) - (8)$$

$$-6x + 12y = 12 \Leftrightarrow x - 2y = -2 \Leftrightarrow x = 2(y-1) \ (eq.01)$$

Substituindo $eq.01$ em λ_2, vem:

$$4(y-1)^2 + y^2 - 2 \cdot 2(y-1) - 8y = 8 \Leftrightarrow 5y^2 - 20y = 0 \ (eq.02)$$

Resolvendo a $eq.02$ para y, temos $y = 0$ ou $y = 4$. Para $y = 0$, temos $x = 2(0-1) = -2$. Para $y = 4$, temos $x = 2(4-1) = 6$. Como B pertence ao primeiro quadrante, temos então:

$$B = (6,4) \text{ e } A = (-2,0)$$

Agora, vamos descobrir a equação da reta tangente que passa por AC. Seja ela da forma:

$$r: y = mx + b$$

Como ela passa por $A = (-2,0)$, temos $0 = m \cdot (-2) + b \Leftrightarrow b = 2m$. Assim:

$$y = m(x+2) \ (eq.03)$$

Ela é tangente a λ_2. Vamos escrever a equação de λ_2 na forma reduzida:

$$\lambda_2: x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8 \Rightarrow \lambda_2: (x-1)^2 + (y-4)^2 = 8 + 1 + 16 = 25$$

Assim, a distância da reta ao centro da circunferência, $C_2 = (1,4)$ deve ser igual ao raio dela. Dessa forma:

$$d(r, C_2) = \left|\frac{m - 4 + 2m}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 5 \Rightarrow (3m-4)^2 = 25(m^2+1) \Rightarrow m = -\frac{3}{4}$$

Logo, a reta:

$$y = -\frac{3}{4}(x+2)$$

Substituindo a equação da reta em λ_1:

$$x^2 + \frac{9}{16}(x+2)^2 - 8x + 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)(x+2) = 20$$

Resolvendo pra x, vem $x = -2$ ou $x = \frac{38}{5}$. Para $x = -2$, teríamos o ponto A. Assim, $x_C = \frac{38}{5}$. Substituindo na equação da reta:

$$y_C = -\frac{3}{4}\left(\frac{38}{5}+2\right) = -\frac{36}{5}$$

Portanto: $C = \left(\frac{38}{5}, -\frac{36}{5}\right)$.

Gabarito: $\boldsymbol{C = \left(\frac{38}{5}, -\frac{36}{5}\right)}$.

---

95. (ITA/2016)

Se P e Q são pontos que pertencem à circunferência $x^2+y^2=4$ e à reta $y=2(1-x)$, então o valor do cosseno do ângulo $P\hat{O}Q$ é igual a

a) $-\frac{3}{5}$

b) $-\frac{3}{7}$

c) $-\frac{2}{5}$

d) $-\frac{4}{5}$

e) $-\frac{1}{7}$

Comentários

Se os pontos pertencem à circunferência e à reta, o primeiro passo é substituir a equação da reta na equação da circunferência. Desse modo:

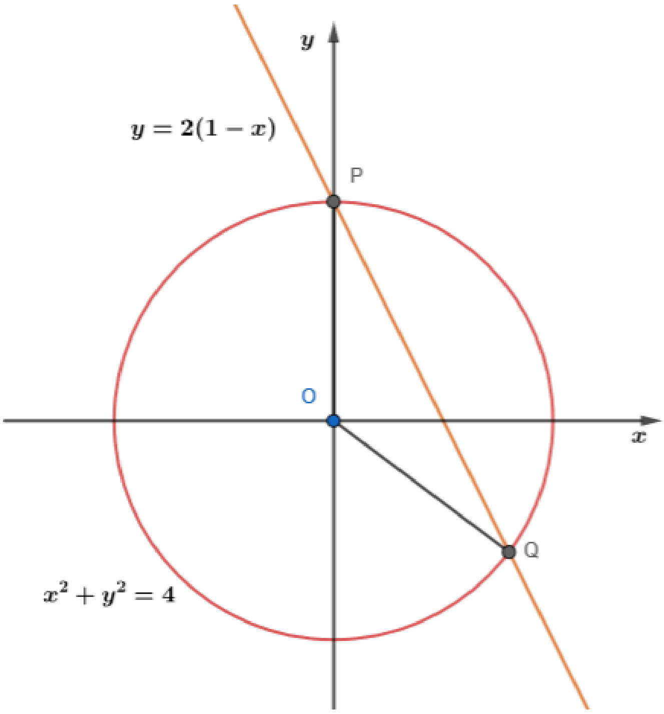
$$x^2+4(1-x)^2=4 \Rightarrow x=0 \; ou \; x=\frac{8}{5}$$

Assim, para $x=0$, temos $y=2$. Para $x=\frac{8}{5}$, temos $y=-\frac{6}{5}$. Sem perda de generalidade, seja:

$$P=(0,2)$$

$$Q=\left(\frac{8}{5},-\frac{6}{5}\right)$$

Observe a figura:



Vamos calcular PQ^2 usando distância de pontos:

$$PQ^2 = \left(0 - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(2 - \left(-\frac{6}{5}\right)\right)^2 = \frac{64}{5}$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ΔPOQ:

$$PQ^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r\cos(P\hat{O}Q) \Rightarrow \frac{64}{5} = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 4\cos\,(P\hat{O}Q)$$

Logo, $\cos(P\hat{O}Q) = -\frac{3}{5}$.

Gabarito: "a".

---

96. (ITA/2016)

Sejam S um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e $P = (a, b)$ um ponto de $\mathbb{R}^2$. Define-se distância de P a S, $d(P, S)$, como a menor das distâncias $d(P, Q)$, com $Q \in S$: $d(P, S) = min\{d(P, Q): Q \in S\}$.

Sejam $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x = 0 \text{ e } y \geq 2\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = 0\}$.

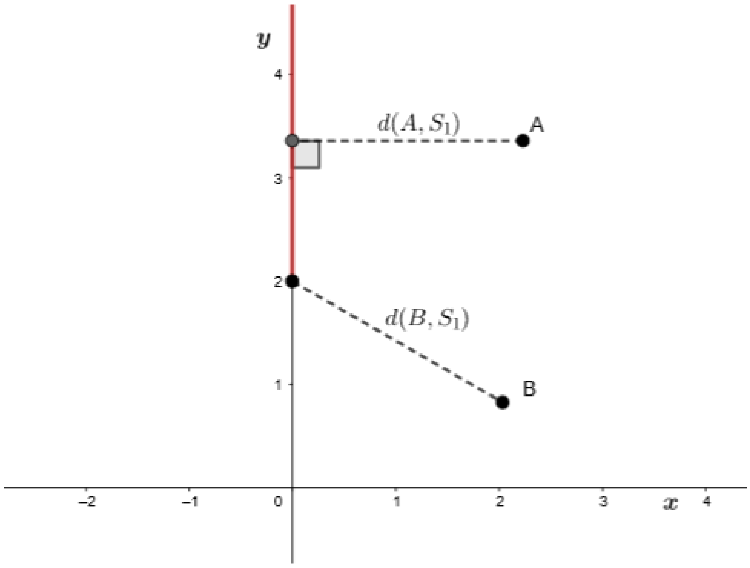
a) Determine $d(P, S_1)$ quando $P = (1, 4)$ e $d(Q, S_1)$ quando $Q = (-3, 0)$.

b) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de S_1 e de S_2.

Comentários

a) Nessa questão, o primeiro passo é identificar os conjuntos S_1 e S_2.

Observe que S_1 corresponde a um intervalo sobre o eixo y, ou seja, $x = 0$. A distância de um ponto qualquer a esse conjunto vai depender da coordenada y desse ponto. Se $y \geq 2$, então sua distância será apenas a sua distância usual ao eixo y, ou seja, $|x|$. Se $y < 2$, temos que sua distância será a sua distância usual ao ponto (0,2), que é o ponto mais próximo nessa situação. Para facilitar, observe o diagrama abaixo:



O conjunto S_2, pode-se observar facilmente que ele é o próprio eixo x, consequentemente, a distância de qualquer ponto a esse conjunto é o módulo de sua coordenada y, ou seja, $|y|$.

Na questão são dados dois pontos, $P = (1,4)$ e $Q = (-3,0)$. Observe que $y_P > 2$, da discussão acima:

$$\boxed{d(P, S_1) = |1| = 1}$$

E temos $y_Q < 2$, do que segue:

$$\boxed{d(Q, S_1) = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{13}}$$

b) Seja um ponto qualquer do plano, $P = (x, y)$.

Vimos acima que sua distância a S_2 é dada por $d(P, S_2) = |y|$.

Para calcular sua distância a S_1, devemos considerar dois casos:

1º caso: $y \geq 2$

Disso, temos que:

$$d(P, S_1) = |x|$$

Fazendo $d(P, S_1) = d(P, S_2)$, vem:

$$|y| = |x| \Rightarrow y = \pm x$$

2º caso: $y < 2$

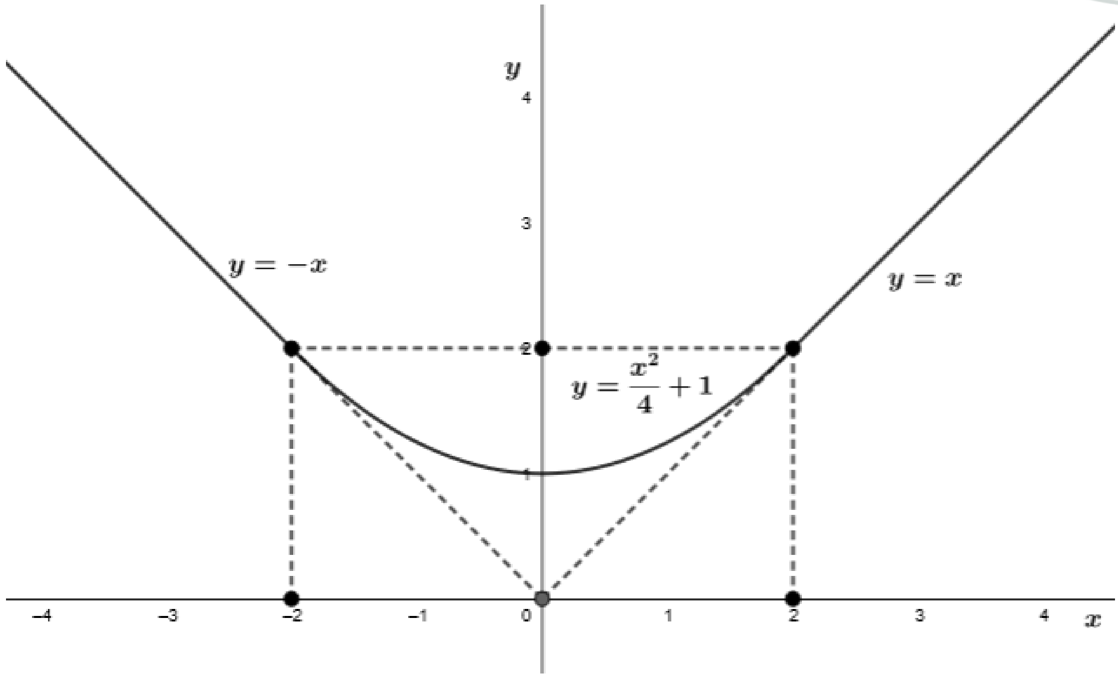
Disso, temos que:

$$d(P, S_1) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

Fazendo $d(P, S_1) = d(P, S_2)$, vem:

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y| \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = y^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + 1$$

Graficamente, temos:



Gabarito: a) $d(P,S_1)=1;\ d(Q,S_1)=\sqrt{13}$; b) $|y|=|x|, se\ y\geq 2\ e\ y=\frac{x^2}{4}+1, se\ y<2.$

97. (ITA/2015)

Considere uma circunferência C, no primeiro quadrante, tangente ao eixo Ox e à reta r: $x-y=0$. Sabendo-se que a potência do ponto $O=(0,0)$ em relação a essa circunferência é igual a 4, então o centro e o raio de C são, respectivamente, iguais a

a) $\left(2, 2\sqrt{2}-2\right)$ **e** $2\sqrt{2}-2$

b) $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)$ **e** $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$

c) $\left(2, \sqrt{2}-1\right)$ **e** $\sqrt{2}-1$

d) $\left(2, 2-\sqrt{2}\right)$ **e** $2-\sqrt{2}0$

e) $\left(2, 4\sqrt{2}-4\right)$ **e** $4\sqrt{2}-4$

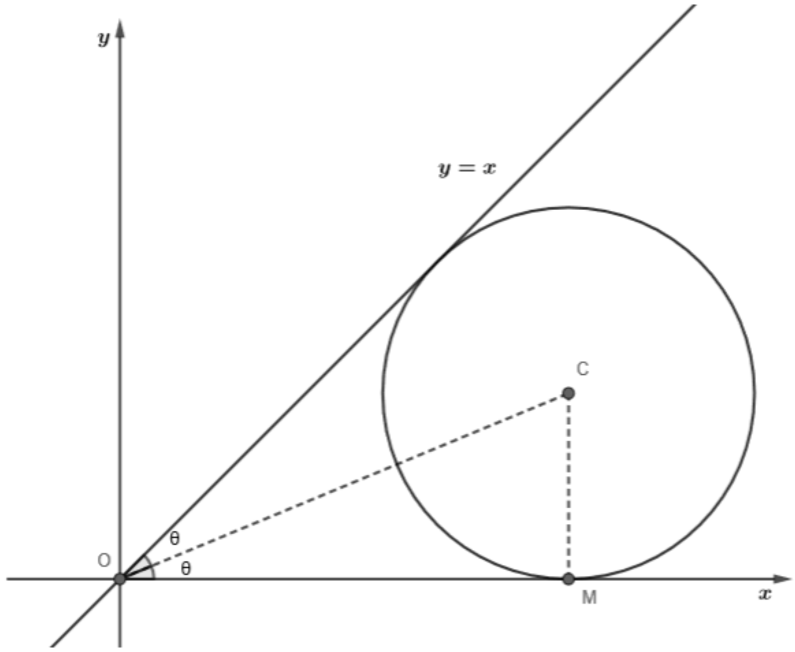
Comentários

Primeiramente devemos lembrar a definição de potência de ponto. Dado um ponto P e uma circunferência λ, a função potência de ponto é definida por:

$$P(d)=d^2-r^2\ (eq.01)$$

Onde d é a distância de P ao centro da circunferência e r o raio dela.

Observe o diagrama abaixo que ilustra a situação:



Utilizando a $eq.01$, podemos determinar o valor de $\overline{OM}$, pois a potência do ponto $O = (0,0)$ é 4, ou seja, $4 = \overline{OC}^2 - \overline{CM}^2$ $(eq.02)$ e também, pelo triângulo retângulo ΔOCM temos que $\overline{OC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{OM}^2 \Rightarrow \overline{OM}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{CM}^2 = 4 \Rightarrow \overline{OM}^2 = 4 \Rightarrow \overline{OM} = 2$.

Do diagrama apresentado, observa-se que a coordenada x_C do centro da circunferência corresponde a $\overline{OM}$. Sendo assim, $x_C = 2$.

Do diagrama apresentado, temos que $2\theta = 45$. Da trigonometria:

$$tg(2\theta) = \frac{2tg(\theta)}{1 - tg^2(\theta)} = tg(45°) = 1 \Rightarrow tg^2(\theta) + 2tg(\theta) - 1 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau acima para $tg(\theta)$, obtemos $tg(\theta) = -1 - \sqrt{2}$ ou $tg(\theta) = \sqrt{2} - 1$. Mas θ está no primeiro quadrante, então $tg(\theta) > 0$. Assim, $tg(\theta) = \sqrt{2} - 1$.

Observando o diagrama, temos que a coordenada y_C é igual ao raio da circunferência. Além disso, $\frac{\overline{CM}}{\overline{MO}} = tg(\theta)$. Dessa forma, temos $\overline{CM} = \overline{MO}tg(\theta) = 2(\sqrt{2} - 1)$. Logo, $\overline{CM} = y_C = r = 2(\sqrt{2} - 1)$.

Gabarito: "a".

---

98. (ITA/2015)

Considere as afirmações a seguir:

I. O lugar geométrico do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, com comprimento l fixado, cujos extremos se deslocam livremente sobre os eixos coordenados é uma circunferência.

II. O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que $6x^3 + x^2y - xy^2 - 4x^2 - 2xy = 0$ é um conjunto finito no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

III. Os pontos $(2, 3)$, $(4, -1)$ e $(3, 1)$ pertencem a uma circunferência.

Destas, é (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) I e II.

e) I e III.

Comentários

Vamos analisar cada afirmativa.

Afirmativa I:

Se os extremos percorrem os eixos coordenados, podemos supor, sem perda de generalidade que:

$$A = (x_A, 0)$$
$$B = (0, y_B)$$

Além disso, como seu comprimento é fixado, temos que:

$$l = \overline{AB} = \sqrt{(x_A - 0)^2 + (0 - y_B)^2} = \sqrt{x_A^2 + y_B^2} \Rightarrow l^2 = x_A^2 + y_B^2 \ (eq.01)$$

O ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é dado por:

$$M = \frac{A + B}{2} = \left(\frac{x_A + 0}{2}, \frac{0 + y_B}{2}\right) = \left(\frac{x_A}{2}, \frac{y_B}{2}\right)$$

Dessa forma, temos que:

$$\overline{OM} = \sqrt{\left(\frac{x_A}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{y_B}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{{x_A}^2}{4} + \frac{{y_B}^2}{4}} \Rightarrow \overline{OM}^2 = \frac{{x_A}^2}{4} + \frac{{y_B}^2}{4} \quad (eq.02)$$

Combinando $eq.01$ e $eq.02$, temos:

$$\overline{OM}^2 = \frac{l^2}{4} \Rightarrow \overline{OM} = \frac{l}{2}$$

Ou seja, M pertence a uma circunferência de raio $\frac{l}{2}$ centrada na origem. Logo, é verdadeira.

Afirmativa II:

Nessa questão, basta observar que qualquer ponto do tipo $P = (0, y)$, com $y \in \mathbb{R}$, satisfaz a equação, pois:

$$6 \cdot 0^3 + 0^2 \cdot y - 0 \cdot y^2 - 4 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot y = 0$$

Então, esse conjunto não é finito, pois pode-se escolher y livremente nos reais. Logo, é falsa.

Afirmativa III:

Da geometria plana, temos que:

Três pontos não colineares formam um triângulo;

Todo triângulo é inscritível em uma circunferência.

Logo, basta verificar se esses pontos são ou não colineares.

Da geometria analítica, temos que três pontos são colineares se, e somente se, eles obedecem a equação de uma reta. Ou seja, se tivermos três pontos $A, B\ e\ C$, eles pertencem a uma mesma reta se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0\ (eq.03)$$

Do enunciado, temos que $A = (2,3), B = (4,-1)$ e $C = (3,1)$. Substituindo na $eq.03$, temos, usando regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot 1 - (4\cdot 3\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1) =$$

$$= 9 - 2 + 4 - 12 + 3 - 2 = 0$$

Logo, eles pertencem a uma mesma reta e não pertencem a uma mesma circunferência. Logo, a afirmativa é falsa.

Gabarito: "a".

---

99. (ITA/2014)

A equação do círculo localizado no 1º quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas r: $2x - 2y + 5 = 0$ e s: $x + y - 4 = 0$ é

a) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right)^2 = 4$

b) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 = 4$

c) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right)^2 = 4$

d) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4$

e) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = 4$

Comentários

Primeiramente devemos determinar o raio da circunferência. Da geometria plana, temos:

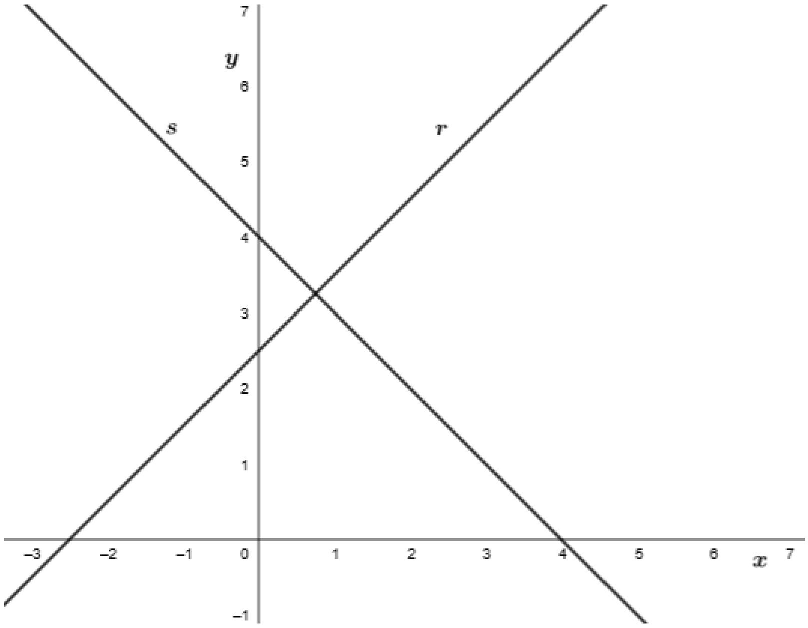
$$A = \pi r^2$$

Onde A é a área da circunferência e r seu raio. Do enunciado, $A = 4\pi$. Ou seja:

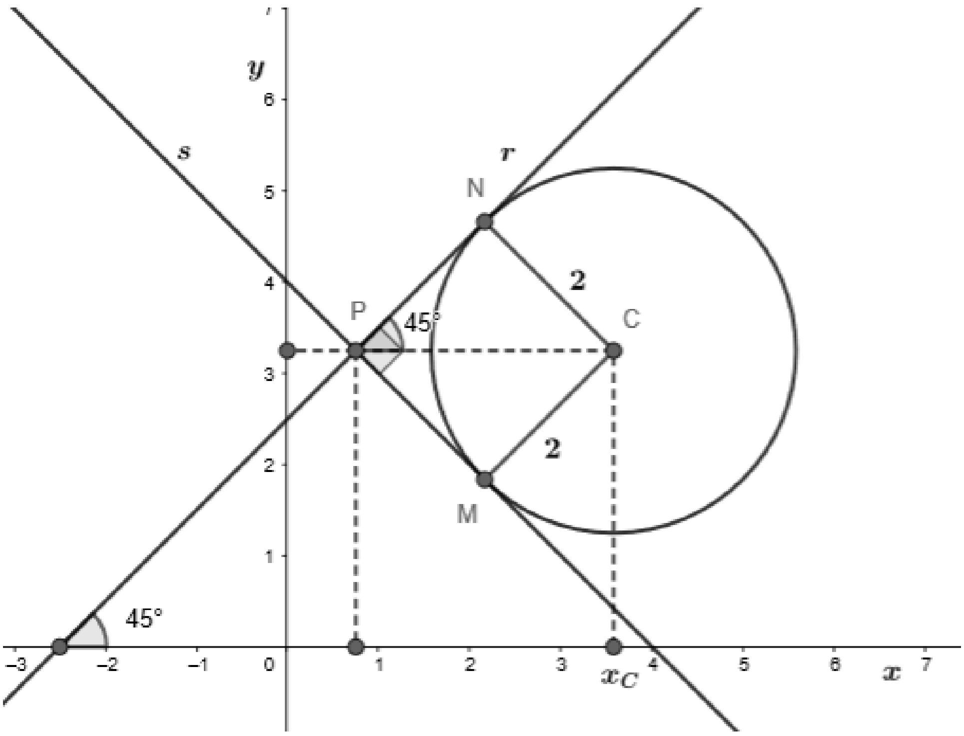
$$4\pi = \pi r^2 \Leftrightarrow r^2 = 4$$

$$\therefore r = 2$$

Para entender melhor a situação, façamos os diagrama das retas no plano cartesiano, percebendo que $r \perp s$, uma vez que $m_r = 1$ e $m_s = -1$ e, portanto, $m_r m_s = -1$.



Dessa maneira, podemos melhorar ainda mais essa figura, pois sabemos que a circunferência se encontra totalmente no primeiro quadrante, do que resta apenas a seguinte possibilidade:



Pela construção, observamos que o segmento PC é horizontal, uma vez que ele representa a bissetriz do ângulo $N\hat{P}M = 90°$ e, portanto, faz com a reta r o mesmo ângulo que essa faz com o eixo x.

Disso, temos que a coordenada y do centro, y_C, é a mesma do ponto $P = r \cap s$. Além disso, observe também que a coordenada x_C obedece:

$$x_C = x_P + PC$$

Além disso, observe que:

$$\frac{2}{PC} = sen(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow PC = 2\sqrt{2}$$

Encontrando o ponto P:

$$r: x - y + \frac{5}{2} = 0$$

$$s: x + y - 4 = 0$$

$$x_P - y_P + \frac{5}{2} + (x_P + y_P - 4) = 0 \Rightarrow 2x_P - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x_P = \frac{3}{4}$$

Disso:

$$\frac{3}{4} - y_P + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow y_P = \frac{13}{4}$$

Por fim, temos que:

$$x_C = \frac{3}{4} + 2\sqrt{2}$$

Ou seja:

$$C = (\frac{3}{4} + 2\sqrt{2}, \frac{13}{4})$$

Do que segue que a equação da circunferência é dada por:

$$\left(x - \left(\frac{3}{4} + 2\sqrt{2}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4$$

Gabarito: "d".

---

100. (ITA/2013)

Determine a área da figura plana situada no primeiro quadrante e delimitada pelas curvas

$$(y - x - 2)\left(y + \frac{x}{2} - 2\right) = 0 \text{ e } x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0$$

Comentários

Observe que a primeira equação representa duas retas, pois ela implica:

$$y - x - 2 = 0 \; ou \; y + \frac{x}{2} - 2 = 0$$

Vamos investigar a segunda equação. Observe que ela parece muito com uma equação de circunferência. Vamos tentar representá-la na forma:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Para isso, vamos completar os quadrados:

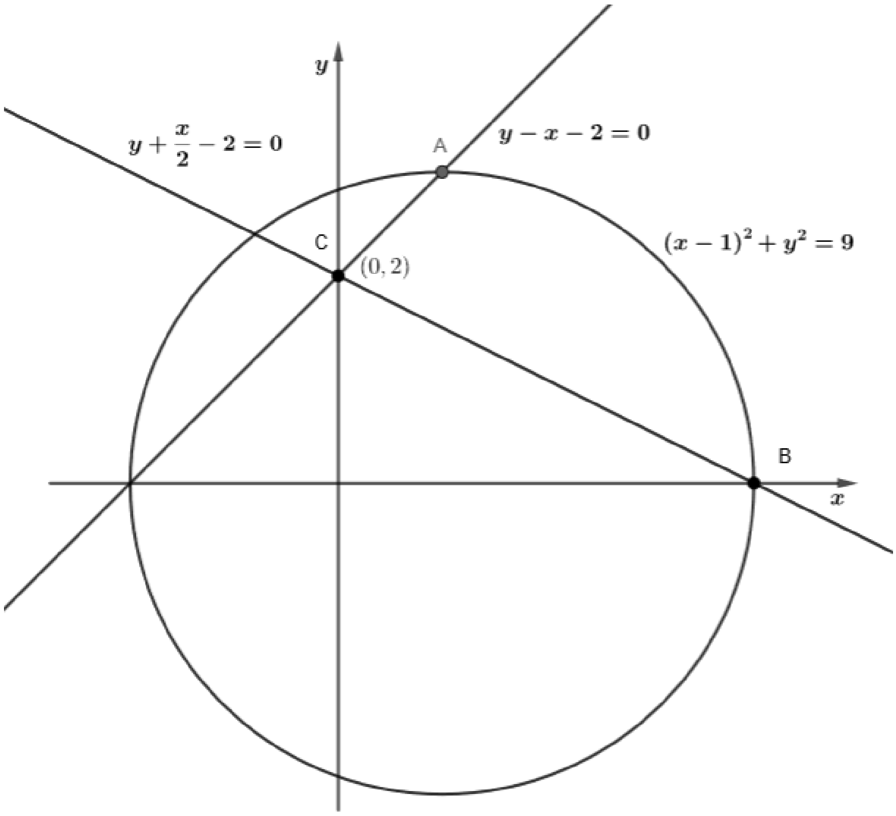
$$x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 + y^2 - 8 = 0$$

Logo:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 9 = (3)^2$$

Assim, observamos que de fato temos uma circunferência, de raio $r = 3$ e centro $C = (1,0)$.

O próximo passo é representar as curvas em um plano cartesiano. Observe abaixo:



Do diagrama acima, temos três pontos de intersecção importantes:

1º) Entre as retas (C);

2º) Entre a reta $y + \frac{x}{2} - 2 = 0$ e a circunferência (B);

3º) Entre a reta $y - x - 2 = 0$ e a circunferência (A).

O ponto de intersecção das retas, pelo próprio diagrama, é o ponto $C = (0,2)$, obtido fazendo-se $x = 0$ na equação das retas. O ponto B também pode ser obtido facilmente observando-se que, pra $y = 0$ temos $x = 4$, o qual corresponde ao ponto mais extremo da circunferência. Ou seja, $B = (4,0)$. Para encontrar o ponto A, isole y na equação da reta:

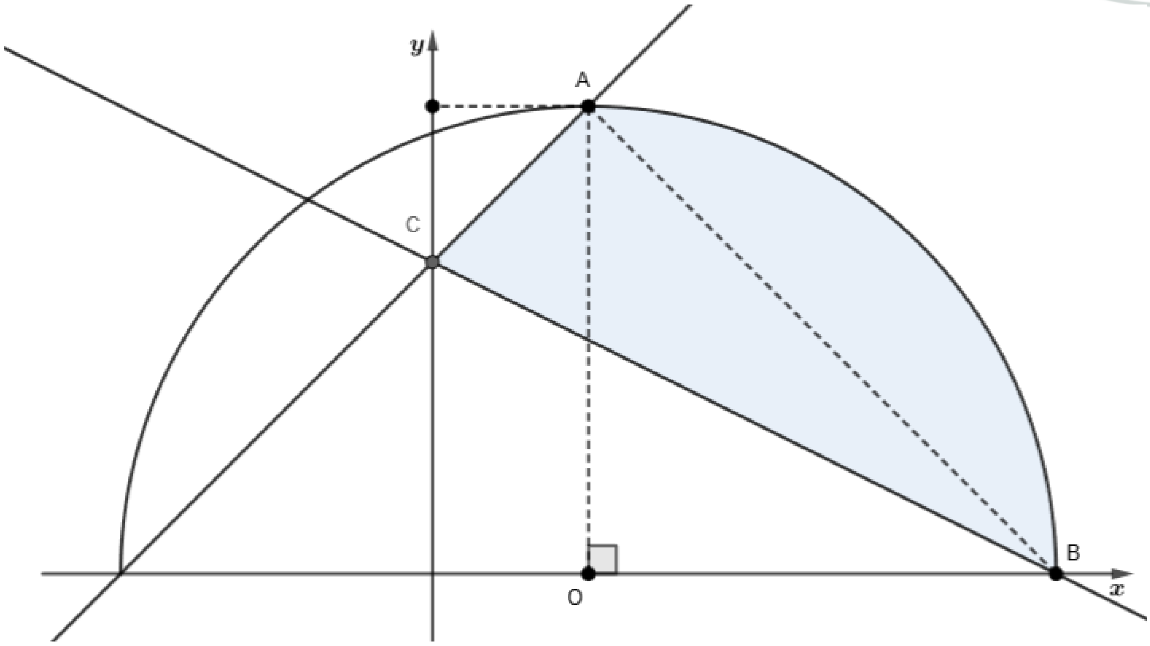
$$y = x + 2$$

E substitua na equação da circunferência:

$$(x-1)^2 + (x+2)^2 = 9 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0$$

Resolvendo para x, obtemos $x = 1$ ou $x = -2$. Mas A pertence ao primeiro quadrante, ou seja, $x > 0$. Logo, $x = 1$. Assim, $y = x + 2 = 1 + 2 = 3$. Por fim, $A = (1,3)$.

De posse dos pontos, podemos calcular a área hachurada na figura abaixo, observe:



Note que O, centro da circunferência, está na mesma vertical que o ponto A.

Para calcular a área do triângulo ABC, podemos usar a seguinte equação, do estudo da geometria analítica:

$$Área\ do\ \Delta ABC = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = 3$$

Para calcular a área restante, perceba que ela corresponde à área de um quarto da circunferência subtraída da área do triângulo retângulo ΔABO. Assim:

$$Área\ de\ \frac{1}{4}\ de\ circunferência = \frac{1}{4}\pi(3)^2 = \frac{9\pi}{4}$$

$$Área\ do\ \Delta ABO = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$$

Do que segue que:

$$A_2 = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2}$$

Finalmente, a área pedida:

$$Área\ pedida = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} + 3 = \frac{9\pi}{4} - \frac{3}{2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{Área\ pedida = \frac{9\pi}{4} - \frac{3}{2}}$**.**

---

101. (ITA/2013)

Sobre a parábola definida pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ pode-se afirmar que

a) ela não admite reta tangente paralela ao eixo Ox.

b) ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox.

c) ela admite duas retas tangentes paralelas ao eixo Ox.

d) a abscissa do vértice da parábola é $x = -1$.

e) a abscissa do vértice da parábola é $x = -\frac{2}{3}$.

Comentários

A primeira coisa que se observa é que a equação da parábola não se apresenta da forma como normalmente conhecemos. No entanto, observe que os itens a, b e c versam sobre tangentes paralelas ao eixo Ox. O que sabemos sobre retas paralelas ao eixo Ox? Sabemos que elas são do tipo:

$$y = a, a \in \mathbb{R}$$

Além disso, para que uma reta seja tangente a uma curva do segundo grau, sabemos que basta fazer seu discriminante nulo quando substituímos a equação da reta na equação da cônica, ou seja, a equação

$$x^2 + 2xa + a^2 - 2x + 4a + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2(a-1)x + a^2 + 4a + 1 = 0$$

Deve ter o discriminante (Δ) nulo. Dessa forma, teremos:

$$\Delta = [2(a-1)]^2 - 4 \cdot (1) \cdot (a^2 + 4a + 1) = 0 \Rightarrow -24a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Assim, a reta $y = 0$ (o próprio eixo Ox) é a única tangente à curva, o que torna o item b verdadeiro.

Gabarito: “b”.

---

102. (ITA/2011)

Sejam m e n inteiros tais que $\frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$ é a equação $36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0$ representa uma circunferência de raio $r = 1\ cm$ e centro C localizado no segundo quadrante. Se A e B são os pontos onde a circunferência cruza o eixo Oy, a área do triângulo ABC, em cm^2, é igual a

a) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{9}$

Comentários

Antes de qualquer coisa, vamos fazer algumas substituições que vão simplificar bastante o problema. Divida a equação da circunferência por 36, para normalizar os termos quadráticos:

$$36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{m}{36}x + \frac{n}{36}y - \frac{23}{36} = 0$$

Note que o enunciado fixou a razão $\frac{m}{n}$. Ou seja, ele também ficou a razão $\frac{\frac{m}{36}}{\frac{n}{36}} = \frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$. De maneira esperta, podemos fazer a seguinte substituição de variáveis:

$$\frac{m}{36} = -4k \; e \; \frac{n}{36} = 6k$$

Que é válida, pois preserva a razão estabelecida no enunciado. Assim a equação da circunferência fica:

$$x^2 + y^2 - 4kx + 6ky - \frac{23}{36} = 0 \Leftrightarrow (x - 2k)^2 + (y + 3k)^2 - \frac{23}{36} - 4k^2 - 9k^2 = 0$$

Logo, seu centro é: $C = (2k, -3k)$.

Como o raio da circunferência é 1, devemos ter:

$$1^2 = \frac{23}{36} + 4k^2 + 9k^2 = 13k^2 + \frac{23}{36} \Rightarrow 13k^2 = \frac{36}{36} - \frac{23}{36} = \frac{13}{36} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{36} \Rightarrow k = \pm\frac{1}{6}$$

Como ela tem centro no segundo quadrante, $k < 0$, ou seja, $k = -\frac{1}{6}$.

Assim, teremos a equação da circunferência:

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

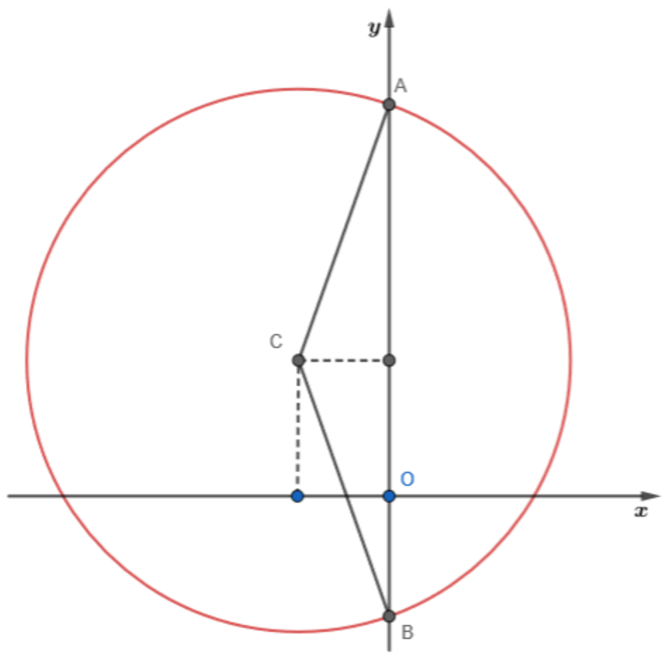
Sua intersecção com o eixo y ocorre quando $x = 0$. Logo:

$$\left(0 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Sem perda de generalidade, seja $A = \left(0, \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) e \; B = (0, \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3})$. Teremos

$$AB = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Observe o diagrama abaixo:



Dele, temos que a altura do triângulo ΔABC é a coordenada x de C. Assim:

$$Área\ do\ \Delta ABC = \frac{AB \cdot x_C}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{9}$$

Gabarito: “d”.

103.(ITA/2010)

Um triângulo equilátero tem os vértices nos pontos A, B e C do plano xOy, sendo $B = (2, 1)$ e $C = (5, 5)$. Das seguintes afirmações:

I. A se encontra sobre a reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$,

II. A está na intersecção da reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$ com a circunferência $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$,

III. A pertence às circunferências $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ e $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{75}{4}$,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) I.

b) II.

c) III.

d) I e II.

e) II e III.

Comentários

Como o triângulo ΔABC é isósceles, A está sobre a mediatriz de BC. Para encontrar essa reta, precisamos de duas informações:

1ª) O coeficiente angular, o qual podemos obter diretamente da reta BC, uma vez que elas são perpendiculares;

2ª) Um ponto pelo qual a mediatriz passa, o ponto médio de BC, por exemplo.

Da geometria analítica, o coeficiente angular de BC é dado por:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{5-1}{5-2} = \frac{4}{3}$$

Assim, seja r a mediatriz, seu coeficiente angular é dado por:

$$m_r = -\frac{3}{4}$$

O ponto médio do segmento BC, que chamaremos de M, é:

$$M = \left(\frac{5+2}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (\frac{7}{2}, 3)$$

Por fim, a mediatriz r, da geometria analítica:

$$-\frac{3}{4}=\frac{y-3}{x-\frac{7}{2}} \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{45}{8}$$

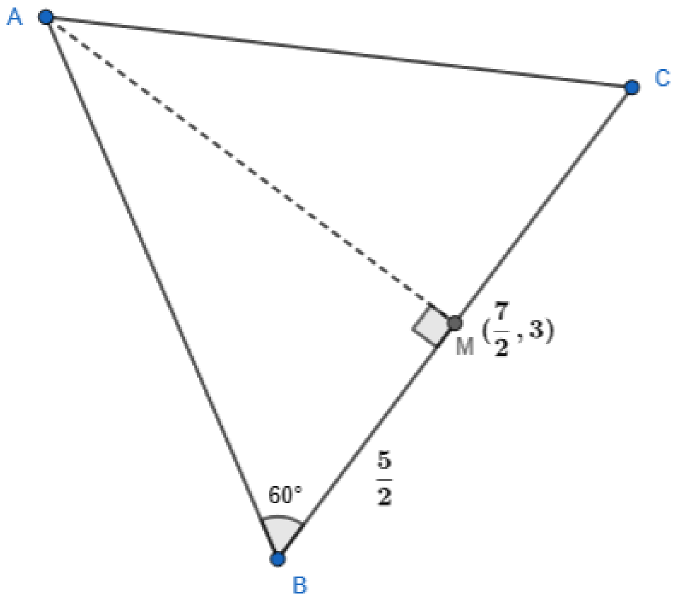
Isso invalida a afirmativa I, pois $y=-\frac{3}{4}x+\frac{11}{2}$ é paralela à r. Se passasse pelo mesmo ponto, A, elas deveriam ser iguais, o que não é verdade.

A afirmativa II é verdadeira, uma vez que a circunferência dada está centrada em B e possui raio 5, ou seja, ela representa o conjunto de todos os pontos que distam 5 de B, que é o caso de A, dado que ΔABC é equilátero. Além disso, $A \in r$: $y=-\frac{3}{4}x+\frac{45}{8}$, como visto anteriormente.

A afirmativa III também é verdadeira. Vamos analisar:

$(x-5)^2+(y-5)^2=25$ representa o conjunto de pontos que distam 5 de $C=(5,5)$, que é o caso de A, uma vez que ΔABC é equilátero.

$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{75}{4}$ representa o conjunto de pontos que distam $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ de $M=(\frac{7}{2},3)$, ponto médio de BC. A deve pertencer a esse conjunto, uma vez que $BC=\sqrt{(5-2)^2+(5-1)^2}=5$, e a altura AM do ΔABC é dada por:



$$AM=\frac{5}{2}\cdot tg(60°)=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: "e".

---

104. (ITA/2010)

Considere as circunferências C_1: $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ e C_2: $(x-10)^2+(y-11)^2=9$. Seja r uma reta tangente interna a C_1 e C_2, isto é, r tangência C_1 e C_2 e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros O_1 de C_1 e O_2 de C_2. Os pontos de tangência definem um segmento sobre r que mede

a) $5\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{5}$

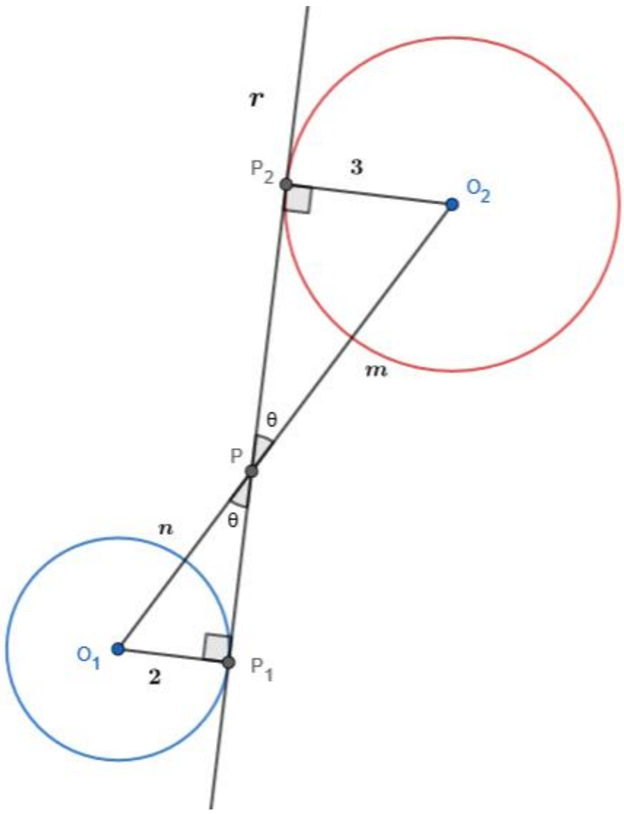
c) $3\sqrt{6}$

d) $\frac{25}{3}$

e) 9

Comentários

Tudo que precisamos nessa questão é de um bom diagrama, observe:



Da figura:

$$m + n = O_1O_2 = \sqrt{(4-10)^2 + (3-11)^2} = 10\ (eq.01)$$

Observando os triângulos ΔPP_1O_1 e ΔPP_2O_2, temos que:

$$sen(\theta) = \frac{3}{m} = \frac{2}{n} \Rightarrow n = \frac{2}{3}m$$

Substituindo na $eq.01$, temos:

$$m + \frac{2}{3}m = 10 \Rightarrow \frac{5}{3}m = 10 \Rightarrow m = 6$$

Logo, $n = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$. Teorema de Pitágoras para os triângulos ΔPP_1O_1 e ΔPP_2O_2:

$$m^2 = 3^2 + (P_2P)^2 \Rightarrow 6^2 = 9 + (P_2P)^2 \Rightarrow P_2P = 3\sqrt{3}$$

$$n^2 = 2^2 + (P_1P)^2 \Rightarrow 4^2 = 4 + (P_2P)^2 \Rightarrow P_1P = 2\sqrt{3}$$

Queremos:

$$P_2P_1 = P_2P + PP_1 = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Gabarito: “a”.

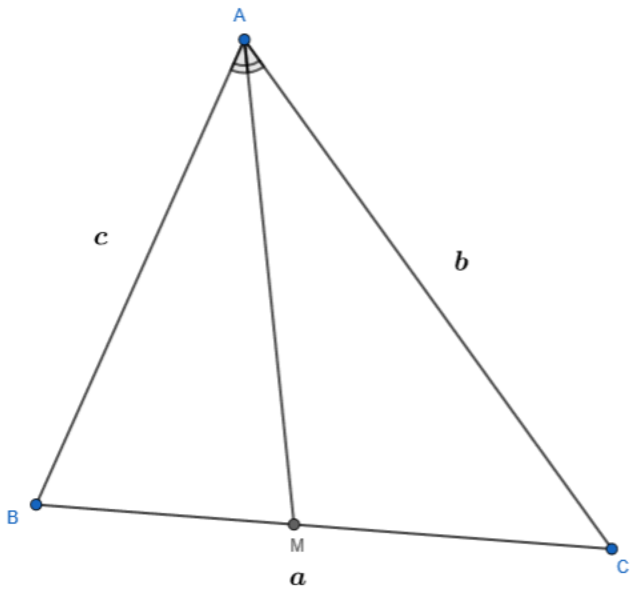
105.(ITA/2010)

Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são $A = (1,1)$, $B = (1,7)$ e $C = (5,4)$ no plano xOy.

Comentários

Vamos encontrar primeiramente o centro dessa circunferência. Da geometria plana, sabemos que o centro dessa circunferência é a intersecção das bissetrizes internas do triângulo, o incentro.

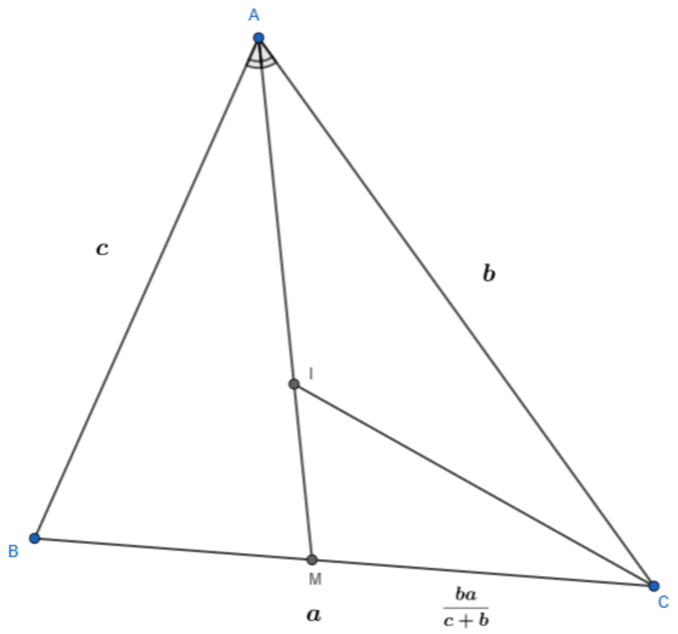
Observe o digrama abaixo:



Pelo Teorema da Bissetriz Interna, aplicado ao triângulo ΔABC, temos:

$$\frac{CM}{MB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{M - C}{B - M} = \frac{b}{c} \Rightarrow M = \frac{cC + bB}{c + b}$$

Como $CB = a$, $\frac{CM}{MB} = \frac{b}{c}$ e $CB = CM + MB$, temos que $CM = \frac{ba}{c+b}$. Aplicando o Teorema da Bissetriz Interna ao triângulo ΔCMA, temos:



$$\frac{MI}{IA} = \frac{ba}{c+b} \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{I-M}{A-I} = \frac{a}{c+b}$$

Como $M = \frac{cC+bB}{c+b}$, temos que:

$$I = \frac{aA + bB + cC}{a+b+c}$$

Vamos calcular então os valores de $a, b\ e\ c$:

$$a = BC = \sqrt{(5-1)^2 + (4-7)^2} = 5$$

$$b = AC = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5$$

$$c = AB = \sqrt{(1-1)^2 + (7-1)^2} = 6$$

Assim, temos que:

$$I = \frac{5 \cdot (1,1) + 5 \cdot (1,7) + 6 \cdot (5,4)}{16} = (\frac{5}{2}, 4)$$

Por fim, devemos encontrar o raio da circunferência. Para isso, vamos encontrar a reta base do lado AB. Note que ambos estão sobre a reta r: $x = 1$. Assim, para calcular o raio, R, basta encontrar a distância de I a essa reta:

$$d(I, r) = R = \left| \frac{\frac{5}{2} - 1}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \right| = \frac{3}{2}$$

Logo, a circunferência pedida:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = \frac{9}{4}$$

Gabarito: $\left(\boldsymbol{x} - \frac{5}{2}\right)^2 + (\boldsymbol{y} - 4)^2 = \frac{9}{4}$.

106.(ITA/2008)

Dada a cônica λ: $x^2 - y^2 = 1$, qual das retas abaixo é perpendicular à λ no ponto $P = (2, \sqrt{3})$?

a) $y = \sqrt{3}x - 1$

b) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$

d) $y = -\frac{\sqrt{3}}{5}x - 7$

e) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - 4$

Comentários

Esse problema trata, basicamente, de encontrar o coeficiente angular da tangente à cônica no ponto P, uma vez que de posse desse valor podemos determinar o coeficiente angular da perpendicular à cônica nesse ponto.

Seja, então, $r: y = mx + b$ uma reta tangente à cônica. Como $P \in r$, temos:

$$\sqrt{3} = m \cdot 2 + b \Rightarrow b = \sqrt{3} - 2m$$

Ou seja, $r: y = mx + \sqrt{3} - 2m$.

Substituindo y na cônica, temos:

$$x^2 - \left[mx + \left(\sqrt{3} - 2m\right)\right]^2 = 1 \Rightarrow (1 - m^2)x^2 - 2m\left(\sqrt{3} - 2m\right)x - \left(\sqrt{3} - 2m\right)^2 - 1 = 0$$

Seu discriminante deve ser zero, logo:

$$\Delta = 4m^2\left(\sqrt{3} - 2m\right)^2 + 4(1 - m^2)\left(\sqrt{3} - 2m\right)^2 + 4(1 - m^2) = 0$$

$$\Delta = \left(\sqrt{3}\mathrm{m} - 2\right)^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

A reta s que queremos é tal que:

$$m_s m = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: “e”.

---

107. (ITA/2008)

Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos $(2, 5), (-1, 2)$ e tal que a, b, c formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto $(2, 5)$.

Comentários

Como $a, b\ e\ c$ são uma P.A., nesta ordem, podemos escrever que:

$$(a, b, c) = (b - r, b, b + r)\ (eq. 01)$$

Como a parábola passa pelos pontos dados, temos que:

$$5 = 4a + 2b + c$$

$$2 = a - b + c$$

Usando a $eq.01$:

$$5 = 4(b - r) + 2b + b + r = 7b - 3r$$

$$2 = b - r - b + b + r = b$$

Resolvendo o sistema, temos $b = 2$ e $r = 3$. Portanto, $a = -1, b = 2\ e\ c = 5$. A parábola:

$$y = -x^2 + 2x + 5$$

Observe que podemos reescrever a parábola como:

$$y = -x^2 + 2x - 1 + 6 = 6 - (x - 1)^2 \leq 6$$

O vértice, V, está associado ao máximo ou mínimo valor de y. Nesse caso, y é máximo quando $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ e, portanto, $y = 6$. Dessa forma, o vértice da parábola é: $V = (1,6)$.

Seja $r: y = mx + b$ a reta tangente à parábola no ponto $(2,5)$. Temos:

$$5 = 2 \cdot m + b \Rightarrow b = 5 - 2m$$

Assim, $r: y = mx + 5 - 2m$.

Substituindo y na parábola, vem:

$$-x^2 + 2x + 5 = mx + 5 - 2m \Rightarrow -x^2 + (2 - m)x + 2m$$

Queremos que seu discriminante seja nulo, pela condição de tangência, ou seja:

$$\Delta = (2 - m)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2m = m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2 = 0$$

Logo, $m = -2$. Dessa forma, $r: y = -2x + 9$. Fazendo a distância de V a r, temos:

$$d(V, r) = \left| \frac{-2 \cdot 1 - 1 \cdot 6 + 9}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{d(V, r) = \frac{1}{\sqrt{5}}}$**.**

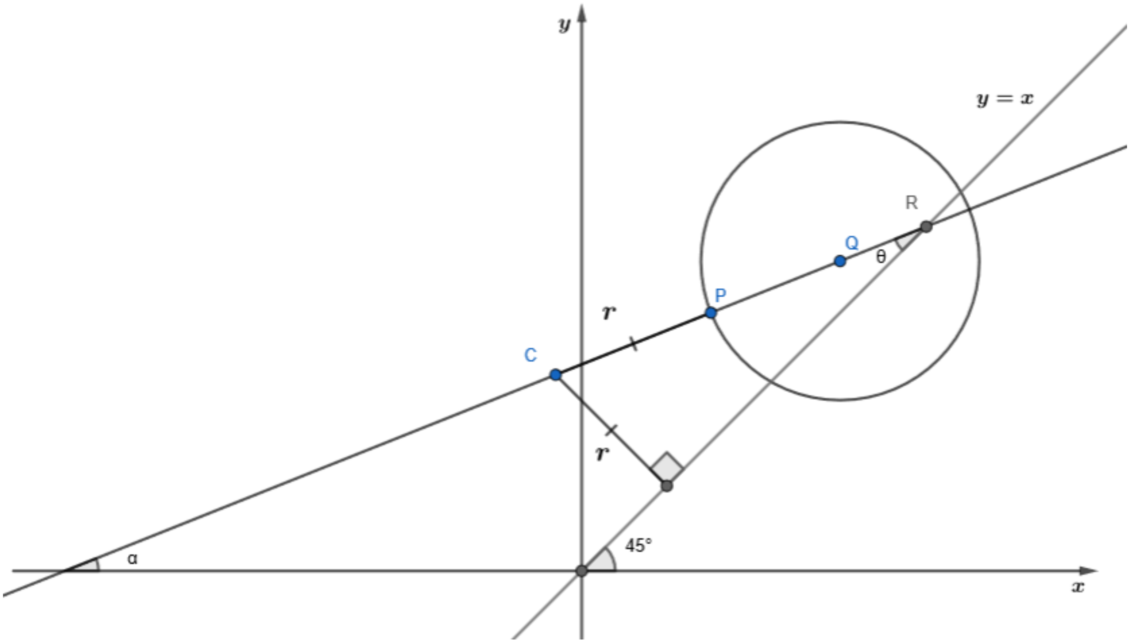
---

108. (ITA/2007)

Considere, no plano cartesiano xy, duas circunferências C_1 e C_2, que se tangenciam exteriormente em $P: (5, 10)$. O ponto $Q: (10, 12)$ é o centro de C_1. Determine o raio da circunferência C_2, sabendo que ela tangencia a reta definida pela equação $x = y$.

Comentários

Essa questão é um pouco mais elaborada e exige um diagrama inicial bem feito, observe:



Vamos dividir a solução em três partes:

Encontrar $sen(\theta)$;

Encontrar PR;

Encontrar r.

Para calcular $sen(\theta)$, observe, do diagrama acima, que:

$$\alpha + \theta = 45° \Rightarrow \theta = 45° - \alpha$$

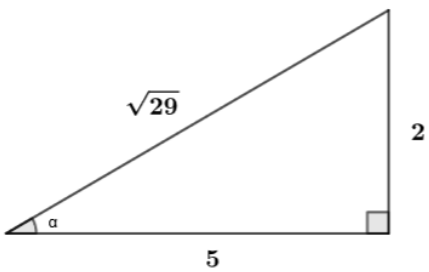
Assim, temos que $sen(\theta) = sen(45° - \alpha) = sen(45°)\cos(\alpha) - \cos(45°)sen(\alpha)$. Portanto:

$$sen(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\alpha) - sen(\alpha))$$

Note que $tg\alpha$ é o coeficiente angular da reta que passa por PQ. Assim, temos que:

$$tg(\alpha) = \frac{10 - 12}{5 - 10} = \frac{2}{5}$$

Usando o triângulo abaixo, podemos observar que $sen(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{29}}$ e $\cos(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{29}}$. Dessa forma, temos que:



$$sen(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{5}{\sqrt{29}} - \frac{2}{\sqrt{29}}\right) = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

Para encontrar R e posteriormente PR, é conveniente encontrar a equação da reta PQ. Isso é bem simples, pois temos seu coeficiente angular e temos um ponto dela (tome P, por exemplo). Da geometria analítica, sabemos que:

$$\frac{2}{5}=\frac{y-10}{x-5}\Rightarrow 2x-5y+40=0$$

Fazendo $y=x$ na reta PQ podemos encontrar as coordenadas de R:

$$2x-5x+40=0\Rightarrow x=\frac{40}{3}=y$$

$$\therefore R=\left(\frac{40}{3},\frac{40}{3}\right)$$

Assim, $PR=\sqrt{\left(\frac{40}{3}-5\right)^2+\left(\frac{40}{3}-10\right)^2}=\sqrt{\frac{25\cdot 25}{9}+\frac{25\cdot 4}{9}}=\frac{\sqrt{25\cdot(25+4)}}{3}=\frac{5}{3}\sqrt{29}.$

Para encontrar r, observe na figura que:

$$sen(\theta)=\frac{r}{r+PR}\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{58}}=\frac{r}{r+\frac{5\sqrt{29}}{3}}\Rightarrow r=\frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{58}-3}$$

Gabarito: $\boldsymbol{r=\frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{58}-3}}$**.**

---

109. (ITA/2006)

Sejam a reta s: $12x-5y+7=0$ e a circunferência C: $x^2+y^2+4x+2y=11$. A reta p, que é perpendicular a s e é secante a C, corta o eixo Oy num ponto cuja ordenada pertence ao seguinte intervalo

a) $(-91/12,-81/12)$

b) $(-81/12,-74/12)$

c) $(-74/12,30/12)$

d) $(30/12,74/12)$

e) $(75/12,91/12)$

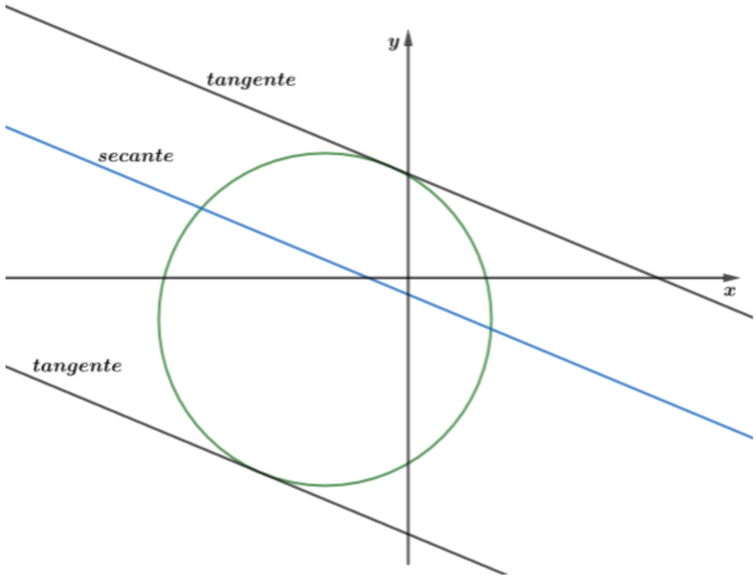
Comentários

Inicialmente, vamos definir o formato de p usando que ela é perpendicular a s. O coeficiente angular de s é, por inspeção, $m_s=\frac{12}{5}$. Dessa forma, temos que $\frac{12}{5}\cdot m_p=-1\Rightarrow m_p=-\frac{5}{12}$.

Assim, p é da forma:

$$p: y=-\frac{5}{12}x+b\ (eq.01)$$

Observe o seguinte diagrama:



Nele, podemos observar que qualquer reta secante à circunferência estará na região entre as retas tangentes de mesmo coeficiente angular.

É conveniente calcular o valor de b para a condição de tangência. Para isso, lembre-se que uma reta é tangente a uma circunferência se, e somente se, a distância do centro da circunferência à reta for igual ao raio da circunferência.

Nesse caso, temos que o centro é $C = (-2, -1)$, do que temos que:

$$d(C,p) = \left|\frac{-1 + \frac{5}{12}\cdot(-2) - b}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^2}}\right| = \left|\frac{-\frac{11}{6} - b}{\sqrt{\frac{(12^2+5^2)}{12^2}}}\right| = 4$$

$$\left|\frac{-\frac{11}{6} - b}{\sqrt{\frac{13^2}{12^2}}}\right| = 4 \Rightarrow \left|\frac{-22-12b}{13}\right| = 4 \Rightarrow \frac{-22-12b}{13} = \pm 4$$

Caso 01: $\frac{-22-12b}{13} = 4$

$$\frac{-22-12b}{13} = 4 \Rightarrow -22 - 12b = 52 \; \therefore b = -\frac{74}{12}$$

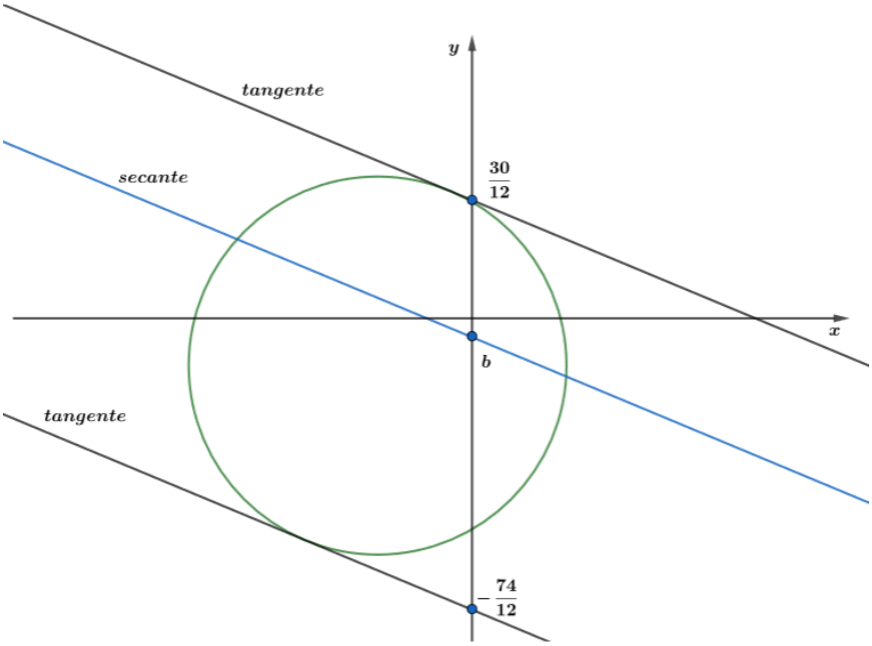
Caso 02: $\frac{-22-12b}{13} = -4$

$$\frac{-22-12b}{13} = -4 \Rightarrow -22 - 12b = -52 \Rightarrow b = \frac{30}{12}$$

Queremos a intersecção com o eixo y, ou seja, queremos y para $x = 0$. Da $eq.01$, temos:

$$y = -\frac{5}{12}\cdot 0 + b \Rightarrow y = b$$

Observe, então, a figura abaixo:



Dela, temos que a intersecção das retas secantes com o eixo y, como dito antes limitadas pelas retas tangentes, está no intervalo $I =]-\frac{74}{12}, \frac{30}{12}[$.

Gabarito: "c".

110.(ITA/2006)

Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

Comentários

O primeiro passo é escrevê-la da forma:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

Ou

$$\frac{(y - y_C)^2}{a^2} - \frac{(x - x_C)^2}{b^2} = 1$$

Para isso, vamos dividir a equação, membro a membro, por $9 \cdot (-16)$, observe:

$$\frac{9}{9 \cdot (-16)} y^2 - \frac{16}{9 \cdot (-16)} x^2 - \frac{144}{9 \cdot (-16)} y + \frac{224}{9 \cdot (-16)} x - \frac{352}{9 \cdot (-16)} = 0$$

$$-\frac{1}{16} y^2 + \frac{1}{9} x^2 + \frac{16}{16} y - \frac{14}{9} x - \frac{352}{9 \cdot (-16)} = 0$$

$$\frac{1}{9}(x^2 - 14x) - \frac{1}{16}(y^2 - 16y) + \frac{352}{144} = 0$$

Completando os quadrados de x e y, vem:

$$\frac{1}{9}(x^2 - 2 \cdot 7x + 49) - \frac{49}{9} - \frac{1}{16}(y^2 - 2 \cdot 8y + 64) - \left(-\frac{64}{16}\right) + \frac{352}{144} = 0$$

Do que obtemos:

$$\frac{(y-8)^2}{(4)^2}-\frac{(x-7)^2}{(3)^2}=1$$

Assim, temos que $a=4$ e $b=3$. Do estudo da hipérbole, sabemos que a distância focal é dada por $F_1F_2=2c$, onde $c^2=a^2+b^2$.

Dessa maneira, temos: $c^2=4^2+3^2=25 \Rightarrow c=5$.

Por fim:

$$F_1F_2=2\cdot 5=10$$

Gabarito: $F_1F_2=10$.

---

111. (ITA/2006)

Os focos de uma elipse são $F_1(0,-6)$ e $F_2(0,6)$. Os pontos $A(0,9)$ e $B(x,3)$, $x>0$, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B, F_1 e F_2 é igual a

a) $22\sqrt{10}$

b) $18\sqrt{10}$

c) $15\sqrt{10}$

d) $12\sqrt{10}$

e) $6\sqrt{10}$

Comentários

Ele nos dá os elementos necessários para que consigamos construir a equação da elipse. Lembre-se que a equação geral da elipse com seus eixos paralelos aos eixos coordenados é da forma:

$$\frac{(x-x_C)^2}{a^2}+\frac{(y-y_C)^2}{b^2}=1$$

Ou

$$\frac{(x-x_C)^2}{b^2}+\frac{(y-y_C)^2}{a^2}=1$$

Onde $2a$ é o tamanho do eixo maior e $2b$ a medida do eixo menor da elipse. Além disso, também sabemos que a distância focal é chamada de $2c=F_1F_2$. Nesse caso:

$$F_1F_2=\sqrt{(0-0)^2+\left(6-(-6)\right)^2}=12 \Rightarrow 2c=12 \Rightarrow c=6$$

Sabemos também que o centro da elipse é o ponto médio do segmento F_1F_2. Portanto:

$$C=(x_C,y_C)=\left(\frac{0+0}{2},\frac{6+(-6)}{2}\right)=(0,0)$$

Assim, nossa elipse tem a seguinte forma:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Note que a está sob y pois o eixo maior sempre é aquele que contêm os focos. Nesse caso, o eixo focal está sobre o eixo y.

Como o ponto A pertence à elipse, temos que:

$$\frac{0^2}{b^2}+\frac{(9)^2}{a^2}=1 \Rightarrow a=9, pois\ a>0$$

Do estudo da elipse, também sabemos que: $a^2=b^2+c^2$. Logo:

$$9^2=b^2+(6)^2 \Rightarrow b=3\sqrt{5}$$

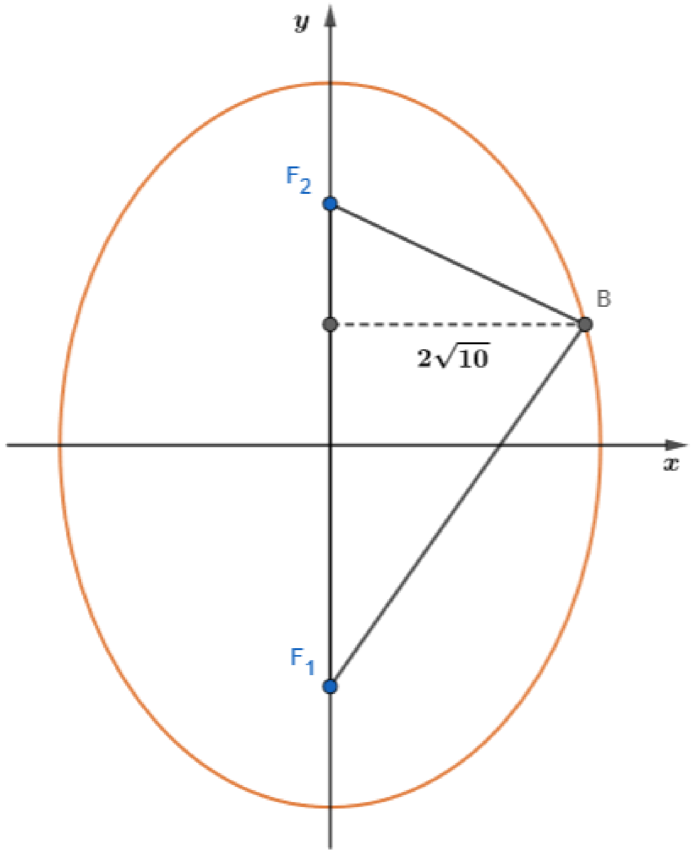
Nossa elipse está completa, veja:

$$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{81}=1$$

B pertence à elipse, logo:

$$\frac{x^2}{45}+\frac{(3)^2}{81}=1 \Rightarrow x=2\sqrt{10}$$

Observe a figura:



Logo, a área do ΔF_1F_2B é dada por:

$$\acute{A}rea\ do\ \Delta F_1F_2B=\frac{12\cdot 2\sqrt{10}}{2}=12\sqrt{10}$$

Gabarito: “d”.

112.(ITA/2005)

Uma circunferência passa pelos pontos $A = (0, 2)$, $B = (0, 8)$ e $C = (8, 8)$.

Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são

a) $(0, 5)$ e 6.

b) $(5, 4)$ e 5.

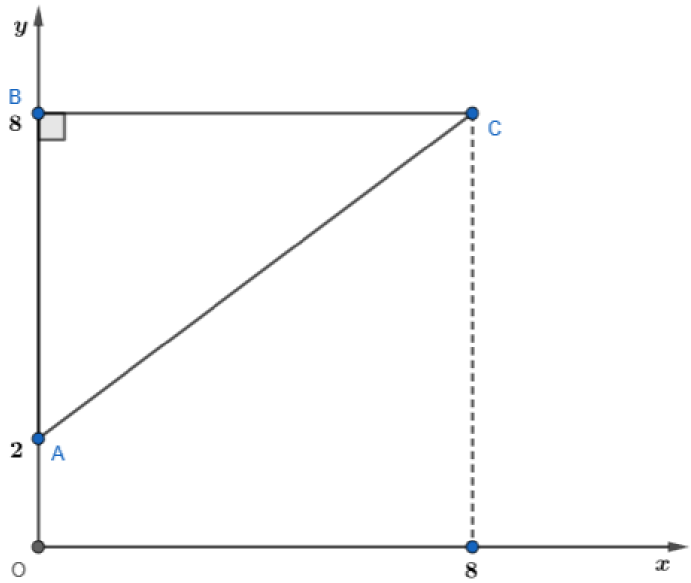
c) $(4, 8)$ e $5, 5$.

d) $(4, 5)$ e 5.

e) $(4, 6)$ e 5.

Comentários

Faça um diagrama e perceba que o triângulo é retângulo de diâmetro AC. Disso, podemos tirar duas informações importantes:



1ª) Seu centro está no ponto médio de AC;

2ª) Seu raio é a metade do comprimento de AC.

Logo, o ponto médio de AC:

$$M = \frac{A + C}{2} = \left(\frac{0 + 8}{2}, \frac{2 + 8}{2}\right) = (4,5)$$

Além disso, o comprimento de AC:

$$AC = \sqrt{(0 - 8)^2 + (8 - 2)^2} = 5$$

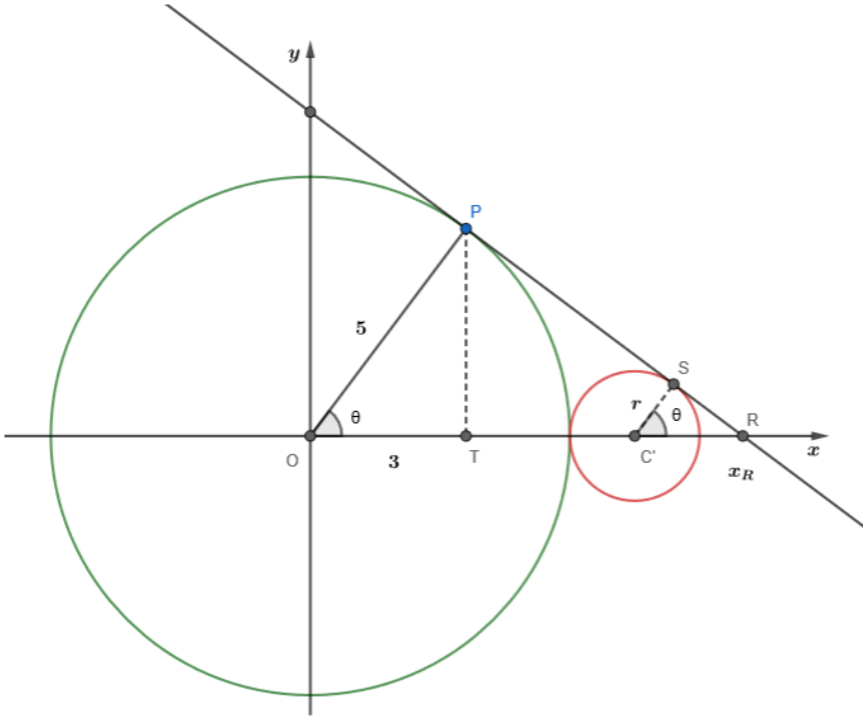
Gabarito: “d”.

113.(ITA/2005)

Seja C a circunferência de centro na origem, passando pelo ponto $P = (3,4)$. Se t é a reta tangente a C por P, determine a circunferência C' de menor raio, com centro sobre o eixo x e tangente simultaneamente à reta t e à circunferência C.

Comentários

Seja r a reta tangente a C por $P = (3,4)$. Observe o diagrama:



O ponto R, de intersecção da reta com o eixo x, é do tipo $R = (x_R, 0)$. Note que o triângulo ΔOPR é retângulo, pela tangência. Seja θ o ângulo $P\hat{O}T$. Temos, do triângulo ΔPOT, que $\cos(\theta) = \frac{3}{5}$, pois $OP^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow OP = 5$. Olhando agora para o triângulo ΔOPR, temos:

$$\cos(\theta) = \frac{OP}{OR} = \frac{5}{x_R} = \frac{3}{5} \Rightarrow x_R = \frac{25}{3}$$

Note que $OC' = 5 + r$, pois o raio de C é 5, ainda da condição de tangência à reta. Além disso, da condição de tangência de C', temos que $C'S = r$. Olhando para o triângulo $\Delta C'SR$, temos:

$$\cos(\theta) = \frac{C'S}{C'R} = \frac{r}{\frac{25}{3} - (5 + r)} = \frac{r}{\frac{10}{3} - r} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5r = 10 - 3r \Rightarrow r = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Por fim, sabemos que $OC' = x_{C'} = 5 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$ e $y_{C'} = 0$. Portanto, a equação de C' é:

$$\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{16}$$

Gabarito: $\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{16}$.

114.(ITA/2005)

A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, -2)$ são, respectivamente,

a) $\sqrt{3}$ **e** $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$ **e** $\sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **e** $\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{3}$ **e** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $2\sqrt{3}$ **e** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Comentários

Pontos do tipo $(0, y)$ e $(x, 0)$ delimitam os tamanhos dos semieixos maiores e menores. No nosso caso, temos então que um dos semieixos deve medir 1 e o outro $|-2| = 2$, pois a elipse passa pelos pontos $(1,0)$ e $(0, -2)$.

Como $1 < 2$, o semieixo maior, a, mede 2, ou seja, $a = 2$ e, portanto, $b = 1$.

Do estudo da elipse, sabemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Onde $2c$ é a distância focal.

Dessa forma:

$$(2)^2 = (1)^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

Do que temos que a distância focal é dada por $2c = 2\sqrt{3}$.

Da definição de excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gabarito: "e".

115.(ITA/2004)

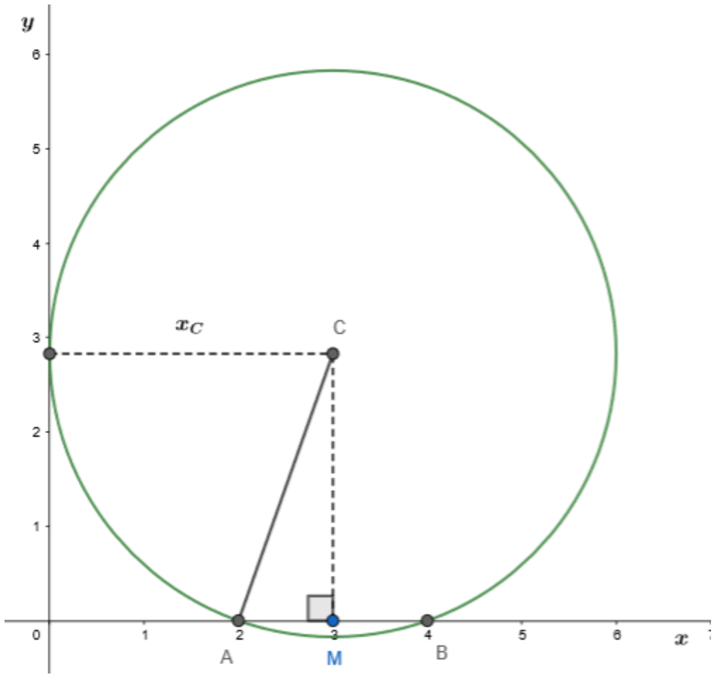
Sejam os pontos $A: (2, 0)$, $B: (4, 0)$ e $P: (3, 5 + 2\sqrt{2})$.

a) Determine a equação da circunferência C, cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos A e B e é tangente ao eixo y.

b) Determine as equações das retas tangentes à circunferência C que passam pelo ponto P.

Comentários

a) Esse item é resolvido rapidamente quando se representa a situação graficamente, observe:



Do digrama acima, notamos que a coordenada x_C do centro está no ponto médio de AB, ou seja:

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (3,0)$$

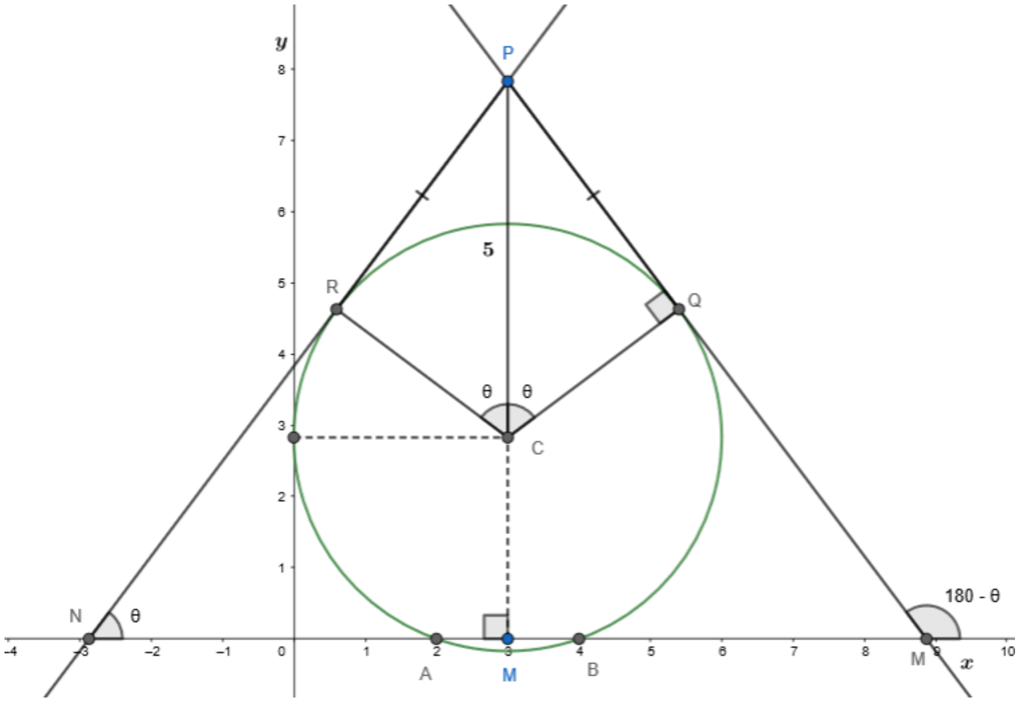
Dessa forma $x_C = 3$. Ainda do diagrama, pela tangência do eixo y, observe que x_C também corresponde ao raio da circunferência, do que temos que $AC = 3$. O triângulo ΔAMC é retângulo, logo, aplicando o teorema de Pitágoras:

$$3^2 = CM^2 + AM^2 = CM^2 + 1^2 \Rightarrow CM = 2\sqrt{2}$$

Portanto, a equação da circunferência é:

$$(x-3)^2 + \left(y - 2\sqrt{2}\right)^2 = 9$$

b) Se você proceder com calma, vai observar que P está sobre a reta CM, a uma distância 5 de C. Assim, faça o seguinte diagrama:



Para simplificar, vamos fazer $P\hat{C}Q = \theta$. Note que $\pm tg(\theta)$ corresponde ao coeficiente angular das retas procuradas, pois o ângulo que a reta base de PQ faz com o sentido positivo de x é $180 - \theta$ e o ângulo que a reta base de PR faz com o sentido positivo do eixo x é θ, conforme se deduz rapidamente no diagrama acima.

Como dito acima, $CP = 5$ e da tangência, $CQ = 3$. Sendo o triângulo ΔPCQ retângulo, temos, por Pitágoras:

$$5^2 = 3^2 + PQ^2 \Rightarrow PQ = 4$$

Dessa forma, $tg(\theta) = \frac{PQ}{CQ} = \frac{4}{3}$. Concluímos que as retas possuem coeficiente angular $m = \pm\frac{4}{3}$. Como elas passam por P, podemos escrever:

Caso 01: $m = \frac{4}{3}$.

$$\frac{4}{3} = \frac{y - (5 + 2\sqrt{2})}{x - 3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 1 + 2\sqrt{2}$$

Caso 02: $m = -\frac{4}{3}$.

$$-\frac{4}{3} = \frac{y - (5 + 2\sqrt{2})}{x - 3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 9 + 2\sqrt{2}$$

Gabarito: Item a) $(x-3)^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = 9$; Item b) $y = \frac{4}{3}x + 1 + 2\sqrt{2}$ ou $y = -\frac{4}{3}x + 9 + 2\sqrt{2}$.

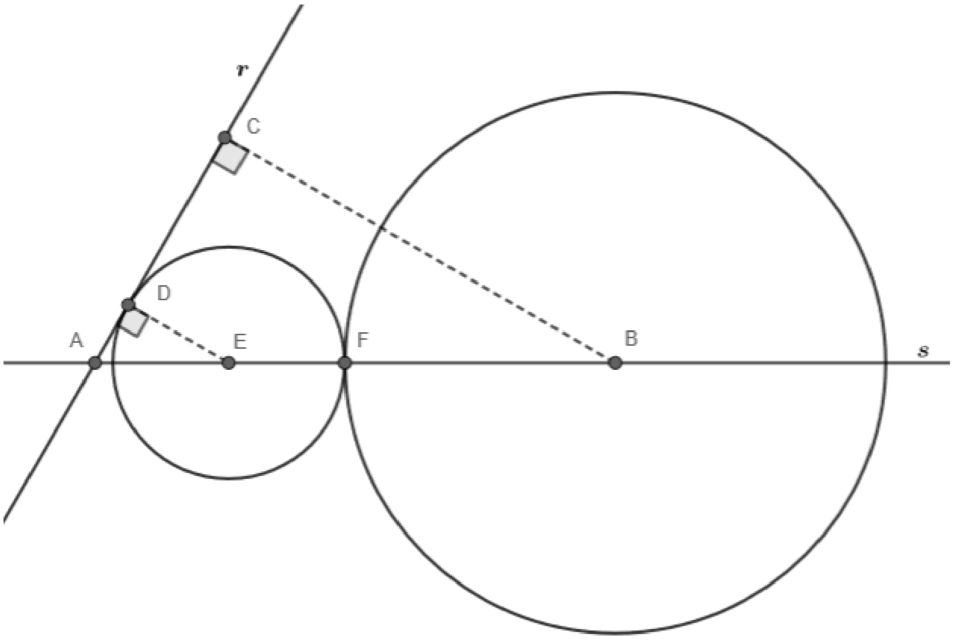
116.(ITA/2004)

Sejam r e s duas retas que se interceptam segundo um ângulo de $60°$. Seja C, uma circunferência de 3 cm de raio, cujo centro O se situa em s, a 5 cm de r.

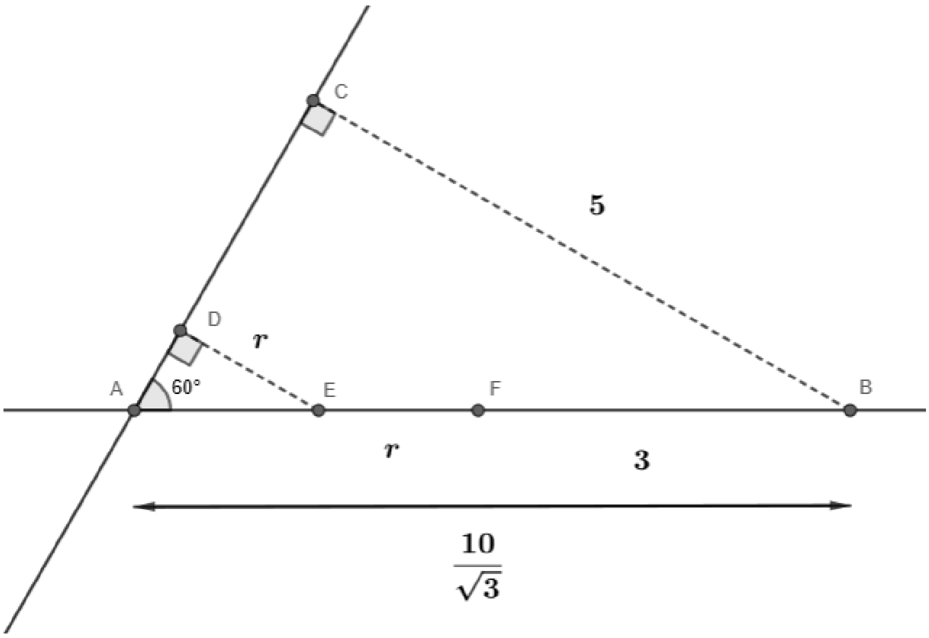
Determine o raio da menor circunferência tangente à C, e à reta r, cujo centro também se situa na reta s.

Comentários

Pelo enunciado, podemos construir a seguinte figura:



Retirando as circunferências para facilitar a visão e inserindo os valores fornecidos, temos:



O triângulo ABC é retângulo com o ângulo $C\hat{A}B = 60°$. Disso, temos que:

$$sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{AB} \Rightarrow AB = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

O triângulo ADE também é retângulo e compartilha o ângulo $C\hat{A}B$ com o triângulo ABC. Disso, podemos escrever:

$$\frac{r}{AE} = sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AE = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

Por outro lado:

$$AE + r + 3 = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow AE = \frac{10}{\sqrt{3}} - (r + 3)$$

Ou seja:

$$\frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} - (r + 3) \Rightarrow 2r = 10 - \sqrt{3}r - 3\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{10 - 3\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

Ou ainda:

$$r = \frac{10 - 3\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 29 - 16\sqrt{3}$$

Gabarito: $r = 29 - 16\sqrt{3}$.

---

117. (ITA/2003)

A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}$, é igual a:

a) $\sqrt{6}$

b) $5/2$

c) $2\sqrt{2}$

d) 3

e) $10/3$

Comentários

Temos uma equação do segundo grau com termo xy. Nossa primeira suspeita é de que seja a equação de duas retas multiplicadas, vamos tentar fatorar.

Uma boa ideia para fatorar equações dessa forma é "resolver" a equação de segundo grau em alguma das variáveis. Vamos escolher x, veja:

$$3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + (5y - 9)x + 2y^2 - 8y + 6 = 0$$

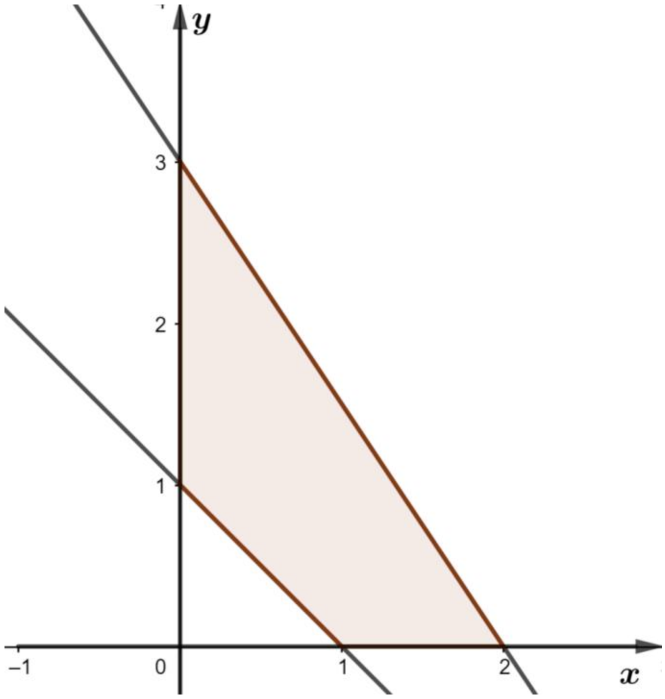
O seu discriminante é:

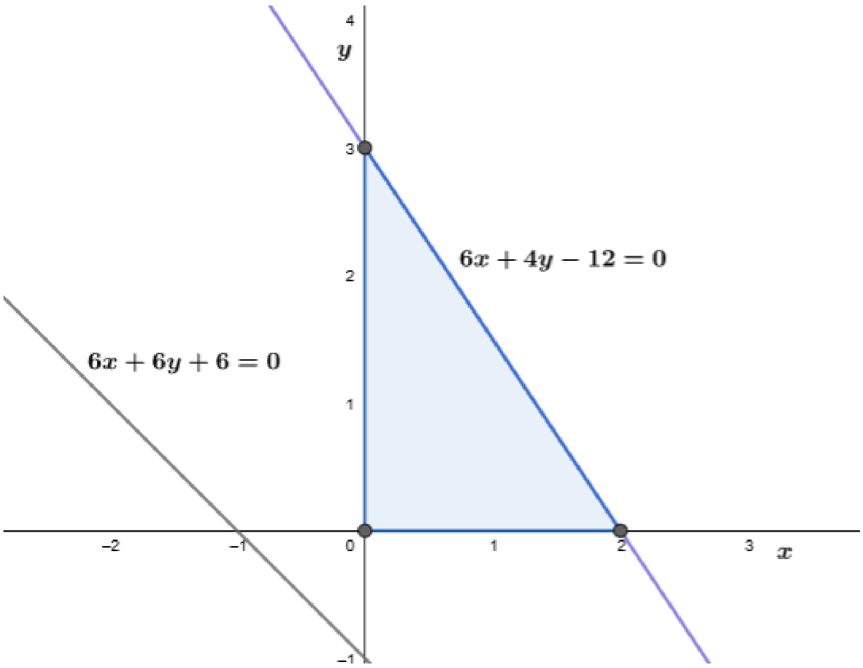
$$\Delta = (5y - 9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2y^2 - 8y + 6) = y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2$$

$$\therefore x = \frac{-(5y - 9) \pm (y + 3)}{6}$$

Ou seja: $6x + 4y - 12 = 0$ ou $6x + 6y - 6 = 0$.

Graficamente:





A área do polígono é dada pela diferença das áreas do triângulo retângulo de catetos 3 e 2 e do triângulo retângulo isósceles de cateto 1:

$$Área\ delimitada = \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Gabarito: "b".

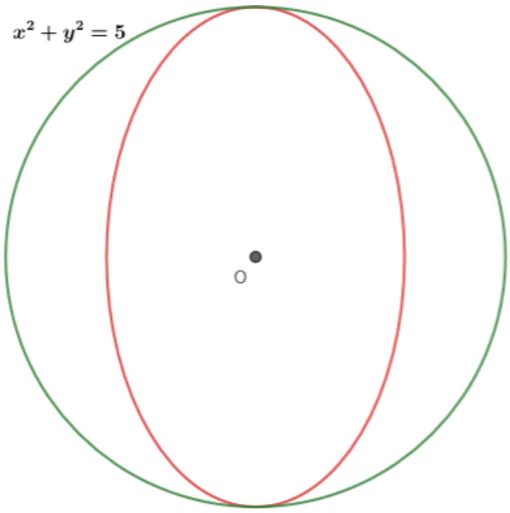
---

118. (ITA/2003)

Sabe-se que uma elipse de equação $\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2}\right) = 1$ tangencia internamente a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e que a reta de equação $3x + 2y = 6$ é tangente à elipse no ponto P. Determine as coordenadas de P.

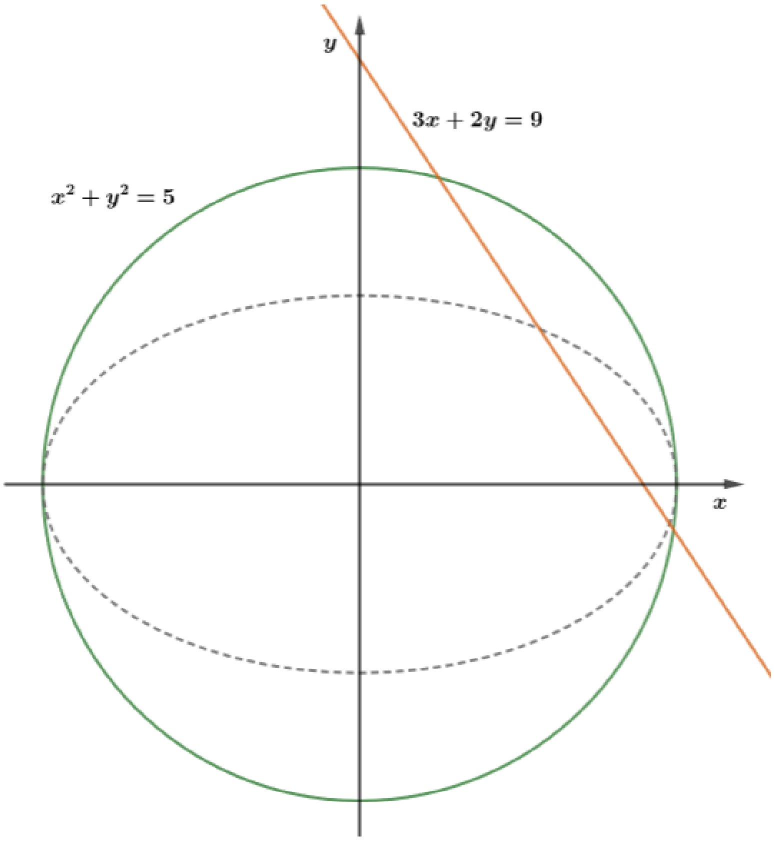
Comentários

O primeiro passo é observar que ambas as cônicas estão centradas na origem, ou seja, possuem mesmo centro, do que podemos traçar o seguinte diagrama:



Logo, o eixo maior da elipse mede $2\sqrt{5}$.

Antes de decidirmos se $a\ ou\ b$ é o semieixo maior, vamos plotar o gráfico da circunferência e da reta dada juntamente, supondo que o eixo maior da elipse está sobre o eixo x:



Note que não seria possível a tangência caso o semieixo maior estivesse sobre o eixo x. Assim, temos que $b = \sqrt{5}$.

A equação da elipse se torna, então:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5} = 1$$

Se a reta é tangente à elipse, temos que o discriminante da equação do segundo grau obtida quando se substitui $x\ ou\ y$ na equação da elipse deve se anular. Ou seja:

$$y=3-\frac{3}{2}x$$

E

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(3-\frac{3}{2}x\right)^2}{5}=1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a^2}+\frac{9}{20}\right)x^2-\frac{9}{5}x+\frac{4}{5}=0\ (eq.01)$$

Queremos:

$$\Delta=\left(-\frac{9}{5}\right)^2-4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{9}{20}\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{16}{5a^2}=\frac{9^2}{5^2}-\frac{4\cdot 6}{5^2}\Rightarrow\frac{16}{5a^2}=\frac{9^2-6^2}{5^2}=\frac{(9+6)\cdot(9-6)}{5^2}=\frac{15\cdot 3}{5^2}\Rightarrow\frac{1}{a^2}=\frac{3^2}{4^2}$$

$$\Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

Assim, a equação da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{5}=1$$

Fazendo $a=\frac{4}{3}$ e multiplicando a equação obtida por 80, vem:

$$\frac{81}{80}x^2-\frac{9}{5}x+\frac{4}{5}=0\Leftrightarrow(9x)^2-(9x)\cdot 2\cdot 8+8^2=0\Leftrightarrow(9x-8)^2=0$$

$$\therefore x=\frac{8}{9}$$

Para achar a coordenada y de P, substituímos $x=\frac{8}{9}$ na equação da reta:

$$y=3-\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{9}=\frac{5}{3}$$

Gabarito: $\boldsymbol{P=\left(\frac{8}{9},\frac{5}{3}\right)}$**.**

119.(ITA/2003)

Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangentes ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si de 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:

a) de uma elipse.

b) de uma parábola.

c) de uma hipérbole.

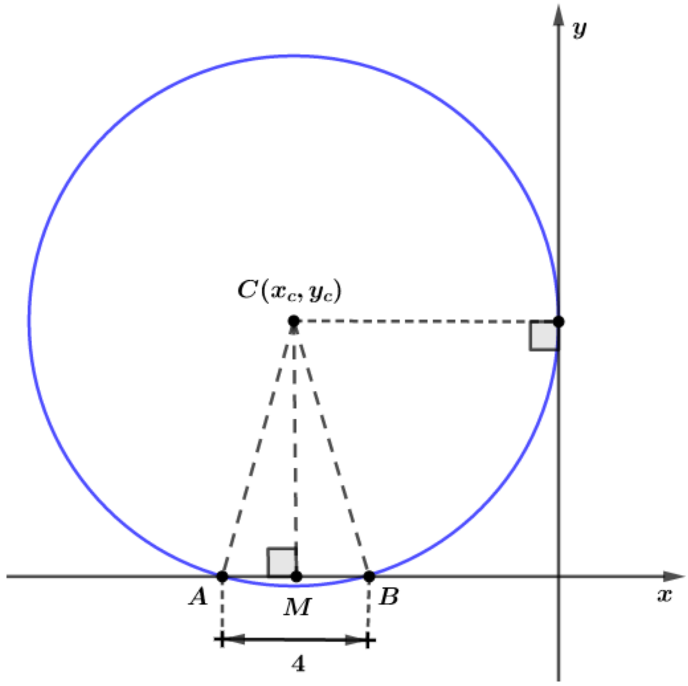
d) de duas retas concorrentes.

e) da reta $y = -x$.

Comentários

Comentários

Fazendo o diagrama para uma circunferência qualquer que obedece às condições do enunciado, temos que:



$$r = |x_C|$$

Como $AB = 4$, temos que $AM = 2$, sendo M ponto médio de AB;

$$CM = y_C$$

Como o triângulo ΔCMA é retângulo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 \Rightarrow r^2 = y_C^2 + 2^2 \Rightarrow x_C^2 = y_C^2 + 4 \Rightarrow \frac{x_C^2}{4} - \frac{y_C^2}{4} = 1 \ (eq.01)$$

Temos que os centros das circunferências que obedecem às condições do enunciado estão sobre a hipérbole representada pela $eq.01$.

Gabarito: “c”.

---

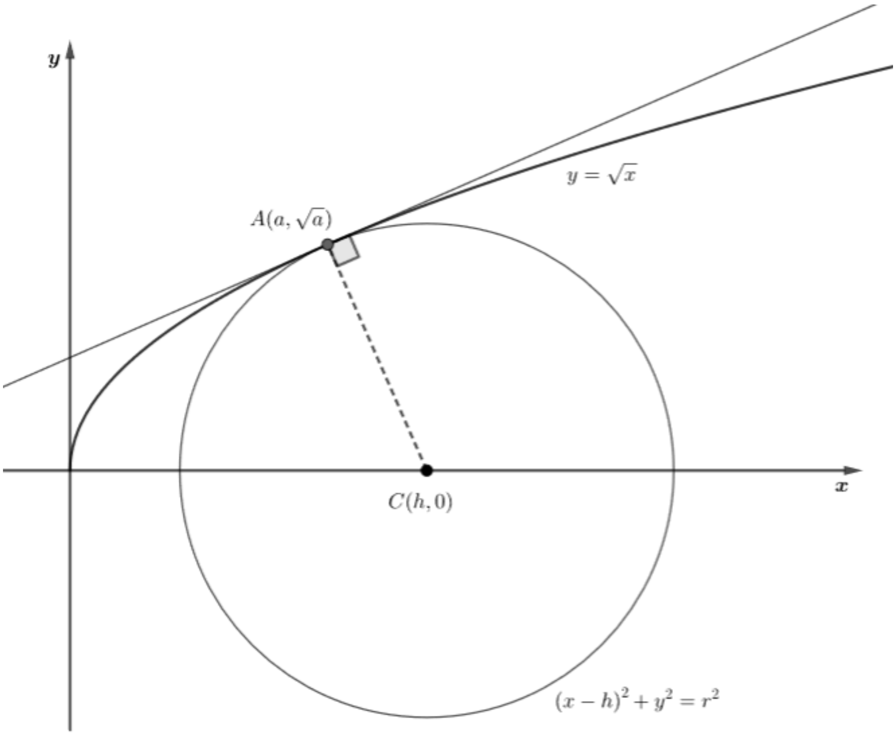
120. (ITA/2002)

Considere o seguinte raciocínio de cunho cartesiano: "Se a circunferência de centro $C = (h; 0)$ e raio r intercepta a curva $y = +\sqrt{x}, x > 0$, no ponto $A = (a, \sqrt{a})$ de forma que o segmento $\overline{AC}$ seja perpendicular à reta tangente à curva em A, então $x = a$ é raiz dupla da equação em x que se obtém da intersecção da curva com a circunferência."

Use este raciocínio para mostrar que o coeficiente angular dessa reta tangente em A é $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Comentários

Fazendo um esboço da situação, obtemos:



Intersecção da curva com a circunferência:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x$$

$$(x-h)^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow (x-h)^2 + x = r^2$$

Ou ainda:

$$x^2 + (1-2h)x + h^2 - r^2 = 0$$

Se ela possui raiz dupla, seu discriminante, Δ, é nulo. Isso implica que sua única raiz é dada por:

$$x = -\frac{1-2h}{2} = \frac{2h-1}{2}$$

Mas a é sua raiz dupla, ou seja:

$$\frac{2h-1}{2} = a \Rightarrow h = a + \frac{1}{2}$$

Assim, concluímos que o centro é dado por:

$$C = (a + \frac{1}{2}, 0)$$

A reta tangente é perpendicular à reta base de AC, logo, seu coeficiente angular é:

$$m = -\frac{1}{m_{AC}}$$

O coeficiente angular da reta AC é dado por:

$$m_{AC} = \frac{\sqrt{a} - 0}{a - (\frac{1}{2} + a)} = -2\sqrt{a}$$

O coeficiente de sua reta tangente é, portanto:

$$m = -\frac{1}{-2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Gabarito: Demonstração.

121.(ITA/2001)

O coeficiente angular da reta tangente à elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

no primeiro quadrante e que corta o eixo das abscissas no ponto $P = (8, 0)$ é

a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

e) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

Comentários

Seja a reta $r: y = mx + b$. Como ela passa por $P = (8{,}0)$, temos que:

$$0 = m \cdot 8 + b \Rightarrow b = -8m$$

Assim: $r: y = m(x - 8)$.

Queremos que a intersecção da elipse e da reta tenham solução única. Para isso, vamos substituir a equação da reta na equação da elipse, veja:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{[m(x-8)]^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{m^2(x^2 - 16x + 64)}{9} = 1$$
$$\Rightarrow 9x^2 + 16m^2(x^2 - 16x + 64) = 12^2 \Rightarrow \ (9 + 16m^2)x^2 - 16m^2x + 16 \cdot 64m^2 - 16 \cdot 9 = 0$$

Para que a solução seja única, o discriminante dessa equação deve ser nulo, ou seja:

$$\Delta = (-16m^2)^2 - 4 \cdot (9 + 16m^2) \cdot (16 \cdot 64m^2 - 16 \cdot 9) = 0$$

Simplificando a equação acima, temos que:

$$m^2 = \frac{9}{48} \Rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Como a reta tangencia a elipse no primeiro quadrante, devemos ter $m = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Gabarito: “d”.

122.(ITA/2001)

Seja o ponto $A=(r,0), r>0$. O lugar geométrico dos pontos $P=(x,y)$ tais que é de $3r^2$ a diferença entre o quadrado da distância de P a A e o dobro do quadrado da distância de P à reta $y=-r$, é:

a) uma circunferência centrada em $(r,-2r)$ com raio r.

b) uma elipse centrada em $(r,-2r)$ com semieixos valendo r e $2r$.

c) uma parábola com vértice em $(r,-r)$.

d) duas retas paralelas distando $r\sqrt{3}$ uma da outra.

e) uma hipérbole centrada em $(r,-2r)$ com semieixos valendo r.

Comentários

Questão de interpretação. Vamos organizar as informações:

1) Quadrado da distância de P a A: $(x-r)^2+(y-0)^2=(x-r)^2+y^2$;

2) Dobro do quadrado da distância de P à reta $y=-r$: $2\cdot\left|\frac{y+r}{\sqrt{1^2+0^2}}\right|^2=2(y+r)^2$

Queremos:

$$3r^2=(x-r)^2+y^2-2(y+r)^2 \Rightarrow 1=\frac{(x-r)^2}{r^2}-\frac{(y+2r)^2}{r^2}$$

Logo, temos uma hipérbole de centro $(r,-2r)$, com semieixos valendo r.

Gabarito: “e”.

---

123. (ITA/2000)

Duas retas r_1 e r_2 são paralelas à reta $3x-y=37$ e tangentes à circunferência $x^2+y^2-2x-y=0$. Se d é a distância de r_1 até a origem e d_2 é a distância de r_2 até a origem, então d_1+d_2 é igual a

a) $\sqrt{12}$.

b) $\sqrt{15}$.

c) $\sqrt{7}$.

d) $\sqrt{10}$.

e) $\sqrt{5}$.

Comentários

Se elas são paralelas à reta dada, elas são do tipo:

$$r: y=3x+b$$

Queremos que elas sejam tangentes à circunferência, para isso, vamos substituir a equação da reta na circunferência:

$$x^2+(3x+b)^2-2x-(3x+b)=0 \Leftrightarrow 10x^2+(6b-5)x+b^2-b=0$$

Fazendo o discriminante dessa equação ser nulo, temos:

$$\Delta = (6b-5)^2 - 4\cdot 10\cdot (b^2-b) = 0 \Rightarrow -4b^2 - 20b + 25 = 0$$

Resolvendo para b, temos $b = -\frac{5}{2} - \frac{5}{\sqrt{2}}$ ou $b = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{2}$. Sem perda de generalidade, seja:

$$r_1: y = 3x - \frac{5}{2} - \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$r_2: y = 3x + \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{2}$$

Cálculo de d_1:

$$d_1 = \left|\frac{-1\cdot 0 + 3\cdot 0 - \frac{5}{2} - \frac{5}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}}\right| = \frac{\frac{5}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10}}$$

Cálculo de d_2:

$$d_2 = \left|\frac{-1\cdot 0 + 3\cdot 0 - \frac{5}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}}\right| = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{2}}{\sqrt{10}}$$

Por fim:

$$d_1 + d_2 = \frac{2\cdot \frac{5}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10}} = \sqrt{5}$$

Gabarito: “e”.

---

124. (ITA/1999)

Pelo ponto $C: (4, -4)$ são traçadas duas retas que tangenciam a parábola $y = (x-4)^2 + 2$ nos pontos A e B. A distância do ponto C à reta determinada por A e B é:

a) $6\sqrt{12}$

b) $\sqrt{12}$

c) 12

d) 8

e) 6

Comentários

Seja a reta r tangente da forma:

$$r: y = mx + b$$

Temos que $C \in r$, logo:

$$-4 = 4m + b \Rightarrow b = -4(m+1)$$

Assim:

$$r: y = mx - 4(m+1)$$

Substituindo y na equação da parábola, temos:

$$y = (x-4)^2 + 2 \Rightarrow mx - 4(m+1) = (x-4)^2 + 2$$

Simplificando a equação acima, temos: $x^2 - (8+m)x + 22 + 4m = 0$ $(eq.01)$

Calculando seu discriminante, temos:

$$\Delta = (8+m)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (22+4m) = m^2 + 16m + 4 \cdot 16 - 4 \cdot 22 - 16m = m^2 - 4 \cdot 6$$

Fazendo $\Delta = 0$, vem:

$$m^2 = 4 \cdot 6 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$$

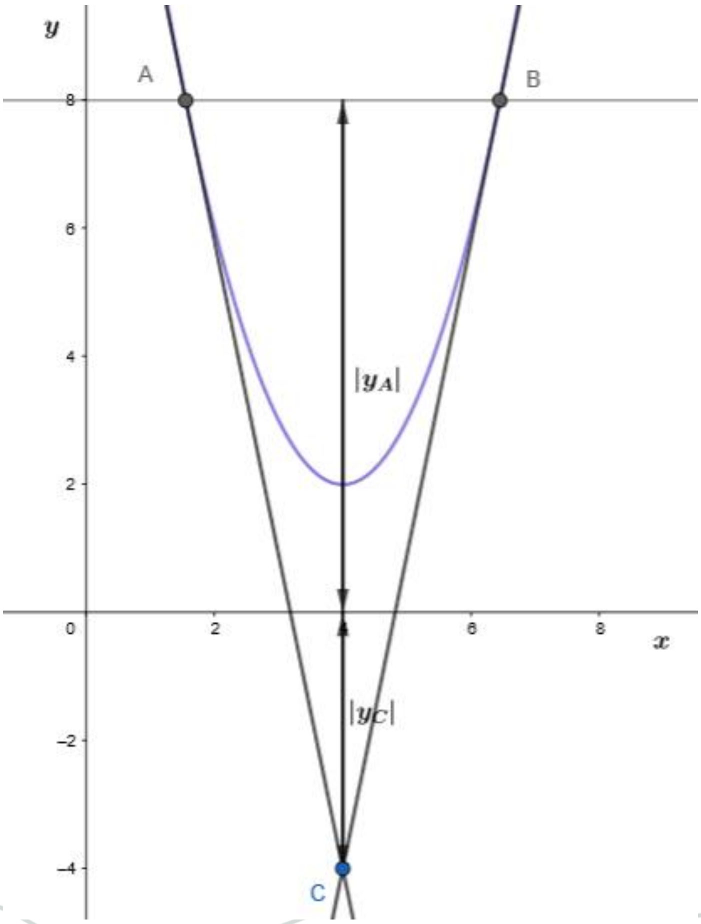
Como $\Delta = 0$, única solução da equação 01 é dada por $x = \frac{8+m}{2}$. Substituindo na equação da reta, temos que:

$$y = m \cdot \left(\frac{8+m}{2}\right) - 4(m+1) = 4m + \frac{m^2}{2} - 4m - 4 = \frac{m^2}{2} - 4$$

Ou seja, para ambas as retas teremos o mesmo y, observe:

$$y_A = \frac{\left(+2\sqrt{6}\right)^2}{2} - 4 = \frac{\left(-2\sqrt{6}\right)^2}{2} - 4 = y_B = 8$$

Para facilitar, observe o diagrama:



Note que a reta AB é horizontal, pois A e B possuem mesma coordenada y, de modo que a distância do ponto C a ela é dada simplesmente por:

$$d(C, AB) = |y_A| + |y_C| = 8 + 4 = 12$$

Gabarito: "c".

125.(ITA/1999)

Considere a circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ e a elipse E de equação $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$. Então:

a) C e E interceptam-se em dois pontos distintos.

b) C e E interceptam-se em quatro pontos distintos.

c) C e E são tangentes exteriormente.

d) C e E são tangentes interiormente.

e) C e E têm o mesmo centro e não se interceptam.

Comentários

Multiplicando a equação da circunferência por 4, temos:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 8x + 8y + 4 = 0\ (eq.01)$$

Subtraindo a equação da elipse da equação da circunferência, temos:

$$(x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4) - (4x^2 + 4y^2 + 8x + 8y + 4) = 0$$

Logo:

$$-3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x \cdot (3x + 12) = 0$$

Ou seja, $x = 0$ ou $x = -4$.

Vamos encontrar as coordenadas y dos pontos de intersecção. Para isso, basta escolher uma das equações, da circunferência ou da elipse, e substituir os valores de x encontrados. Por simplicidade, vamos escolher a circunferência.

Para $x = 0$:

$$y^2 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow (y + 1)^2 = 0$$

$$\therefore y = -1$$

Para $x = -4$:

$$(-4)^2 + y^2 + 2 \cdot (-4) + 2y + 1 = 0 \Rightarrow y^2 + 2y + 9 = 0$$

Seu discriminante: $\Delta = 4 - 4 \cdot 9 < 0$, ou seja, não possui soluções reais.

Ou seja, temos apenas um ponto de intersecção, $P = (0, -1)$.

Para saber se elas se tangenciam internamente ou externamente, primeiramente vamos escrevê-las na forma usual, ou seja:

Circunferência:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1^2$$

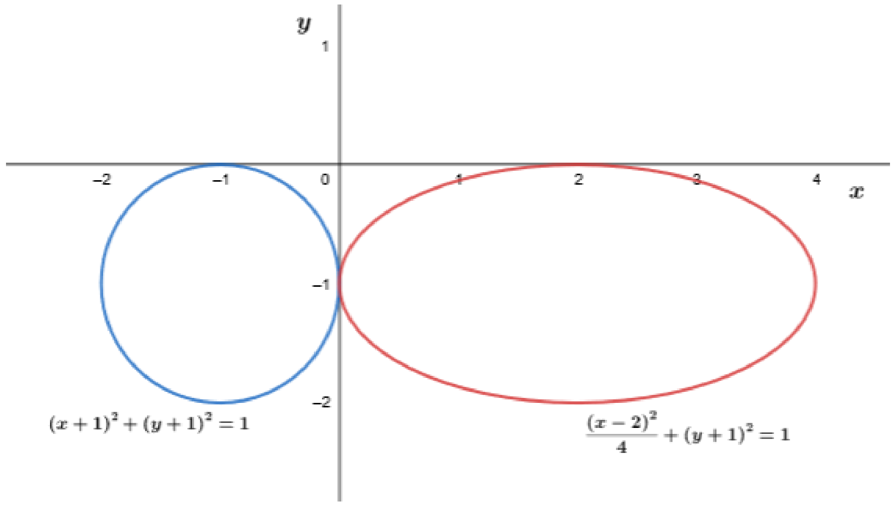
Logo, seu centro e raio são, respectivamente: $C = (-1, -1)$ e $r = 1$.

Elipse:

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$$

Logo, seu centro é $C = (2, -1)$. Seus semieixos são $a = 2$ e $b = 1$.

Fazendo um diagrama:



Logo, são tangentes externas.

Gabarito: "c".

---

126. (ITA/1998)

Considere a hipérbole H e a parábola T, cujas equações são, respectivamente,

$5(x+3)^2 - 4(y-2)^2 = -20$ e $(y-3)^2 = 4(x-1)$.

Então, o lugar geométrico dos pontos P, cuja soma dos quadrados das distâncias de P a cada um dos focos da hipérbole H é igual ao triplo do quadrado da distância de P ao vértice da parábola T, é:

a) A elipse de equação $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$.

b) A hipérbole de equação $\frac{(y+1)^2}{5} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$.

c) O par de retas dadas por $y = \pm(3x-1)$.

d) A parábola de equação $y^2 = 4x + 4$.

e) A circunferência centrada em $(9, 5)$ e raio $\sqrt{120}$.

Comentários

O primeiro passo nessa questão é saber identificar, dadas as equações:

O vértice da parábola;

Os focos da hipérbole.

Para a parábola, devemos lembrar que ela é "centrada" em seu vértice. Observe que a equação dada possui o seguinte padrão:

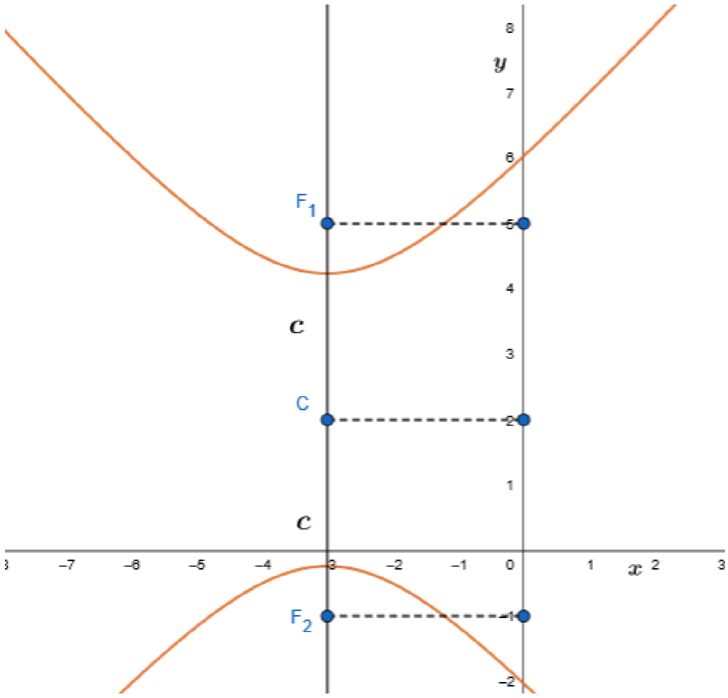
$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

De modo que seu vértice tem coordenadas (h, k). Em nosso caso, temos que $h = 1$ e $k = 3$. Logo, o vértice da parábola é $V = (1,3)$.

A hipérbole dada possui equação:

$$\frac{(y-2)^2}{5} - \frac{(x+3)^2}{4} = 1$$

Fazendo um diagrama dessa hipérbole, temos:



Sabemos que a abscissa dos focos, F_1 e F_2, é -3, pois eles estão na mesma reta vertical que o centro $C = (-3,2)$. Note que as coordenadas y de F_1 e F_2 correspondem a:

$$y_1 = 2 + c \text{ e } y_2 = 2 - c$$

Onde c é a metade da distância focal. Do estudo das hipérboles, sabemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Para a equação da hipérbole:

$$\frac{(y-y_C)^2}{a^2} - \frac{(x-x_C)^2}{b^2} = 1$$

Em nosso caso, $a^2 = 5$ e $b^2 = 4$, do que temos que $c^2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow c = 3$. Ou seja:

$$y_1 = 5 \text{ e } y_2 = -1$$

Do que segue que $F_1 = (-3,5)$ e $F_2 = (-3,-1)$.

Do enunciado, P obedece:

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 + (x+3)^2 + (y+1)^2 = 3[(x-1)^2 + (y-3)^2]$$

Ou seja:

$$x^2 - 18x + y^2 - 10y - 14 = 0 \Leftrightarrow (x-9)^2 + (y-5)^2 = 120$$

Então P pertence a uma circunferência de centro $(9{,}5)$ e raio $\sqrt{120}$.

Gabarito: “e”.

127.(ITA/1997)

Seja $m \in \mathbb{R}_+^*$ tal que a reta $x - 3y - m = 0$ determina, na circunferência $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$, uma corda de comprimento 6. O valor de m é

a) $10 + 4\sqrt{10}$

b) $2 + \sqrt{3}$

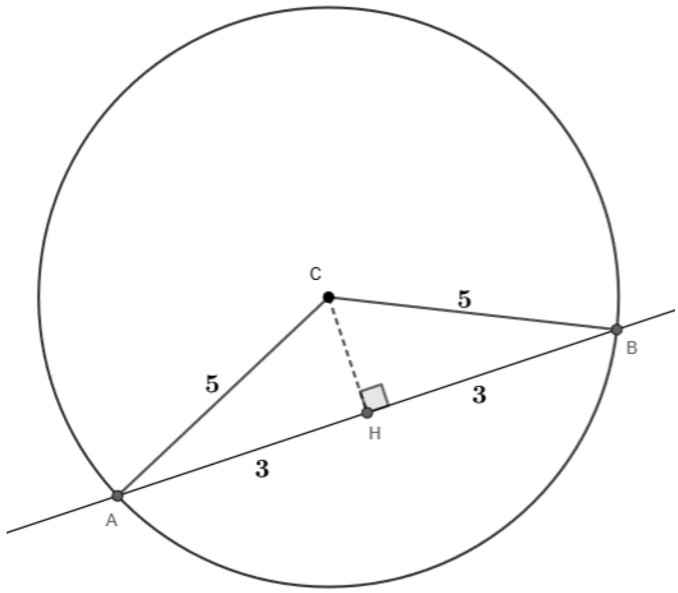
c) $5 - \sqrt{2}$

d) $6 + \sqrt{10}$

e) 3

Comentários

Note que essa circunferência possui raio 5. Façamos o diagrama abaixo que representa essa circunferência e uma corda qualquer de comprimento 6:



Observe que a distância do centro dessa circunferência à uma reta que determina uma corda de tamanho 6 é igual a 4, pois o triângulo ΔABC é isósceles de base $AB = 6$, do que temos que sua altura é também mediana e podemos calcular CH por Pitágoras:

$$CH^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow CH = 4$$

O centro da nossa circunferência é $C = (1, -3)$ e a reta é $x - 3y - m = 0$, do que devemos ter:

$$4 = \left|\frac{1 - 3 \cdot (-3) - m}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}\right| \Rightarrow 10 - m = \pm 4\sqrt{10} \Leftrightarrow m = 10 \pm 4\sqrt{10}$$

Como $m > 0$, segue que $m = 10 + 4\sqrt{10}$.

Gabarito: "a".

128.(ITA/1997)

Seja A o ponto de intersecção das retas r e s dadas, respectivamente, pelas equações $x + y = 3$ e $x - y = -3$. Sejam B e C pontos situados no primeiro quadrante com $B \in r$ e $C \in s$. Sabendo que $d(A, B) = d(A, C) = \sqrt{2}$, então a reta passando por B e C é dada pela equação

a) $2x + 3y = 1$

b) $y = 1$

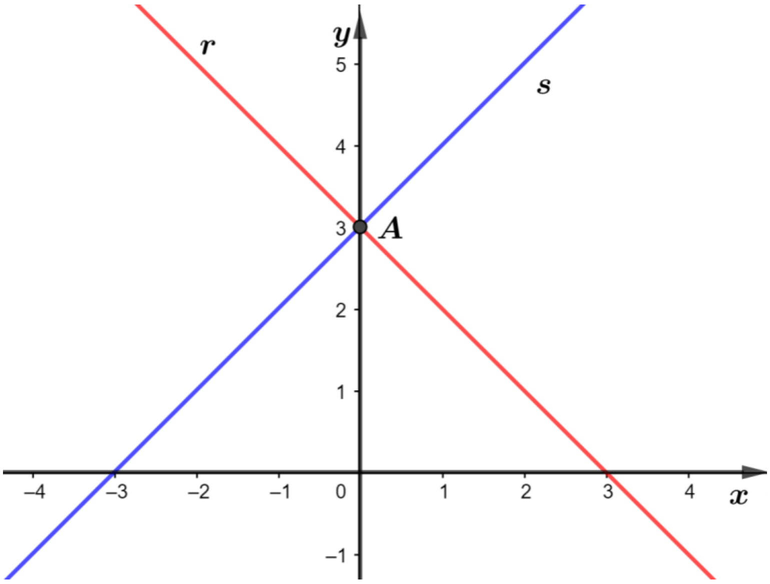
c) $y = 2$

d) $x = 1$

e) $x = 2$

Comentários

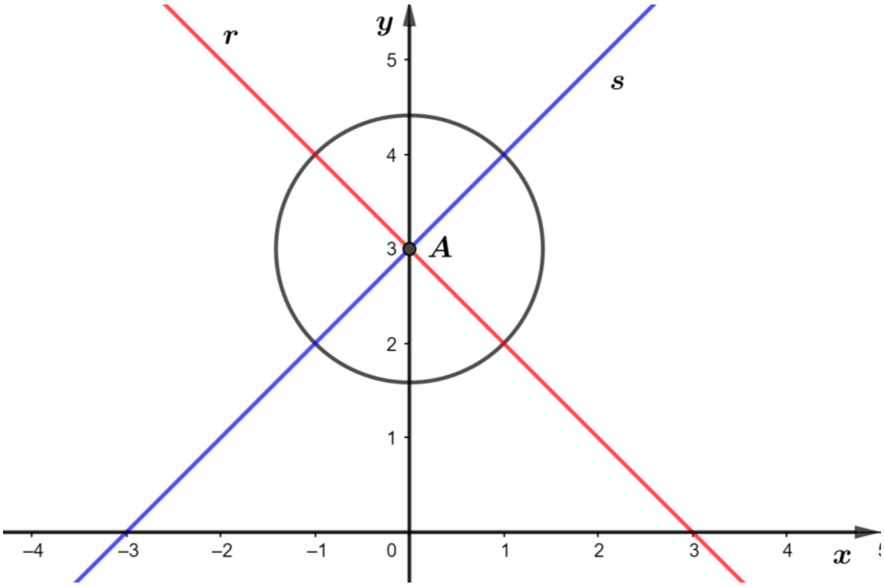
Faça o diagrama das retas no plano cartesiano:



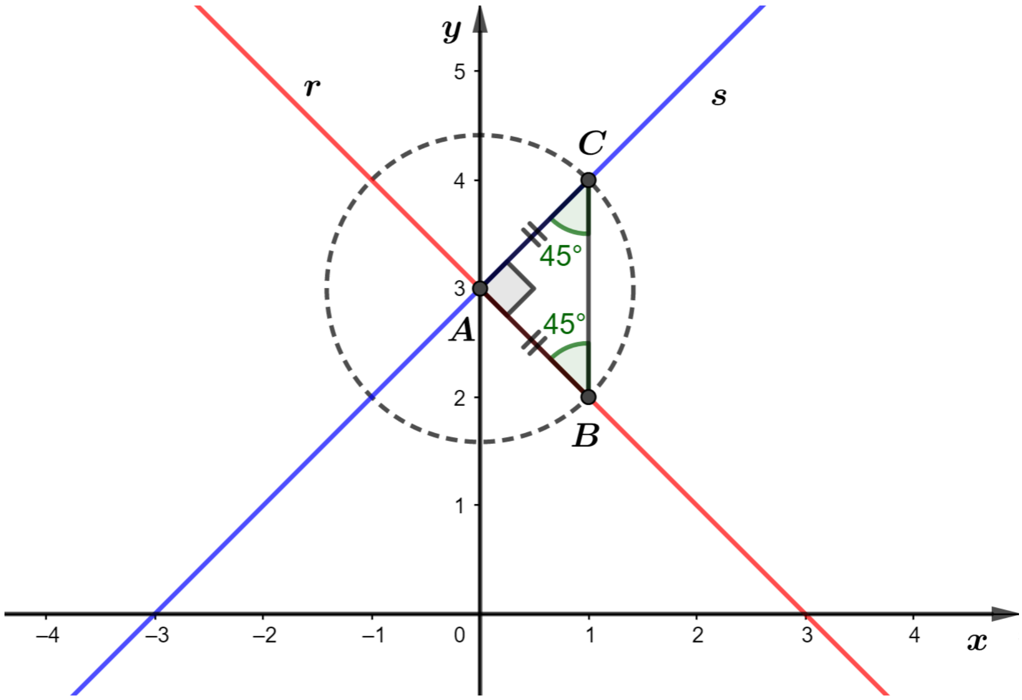
Observe que o ponto de intersecção entre as retas surge naturalmente, uma vez que ele corresponde à intersecção de ambas as retas como o eixo y, isto é, $A = (0,3)$.

Além disso, perceba que as retas são perpendiculares, já que $m_r = -1$ e $m_s = 1$, ou seja, temos $m_r m_s = -1$.

O conjunto de pontos que distam $\sqrt{2}$ de A, é uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro em A. Observe o seguinte esquema:



A única forma de B e C estarem, simultaneamente, no primeiro quadrante é se escolhermos os pontos de intersecção superiores com conjunto de retas, ou seja:



Veja que, como ΔABC é isósceles e $B\hat{A}C = 90°$, devemos ter $A\hat{C}B = A\hat{B}C = 45°$. Sendo o coeficiente angular de s igual a 1, ela faz $45°$ com o eixo x, de modo que BC é paralelo ao eixo y.

Perceba que a coordenada x de B e C é dada por:

$$x_B = x_C = AC \cdot sen45° = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

Disso, podemos concluir que a reta que passa por BC tem equação $x = 1$.

Gabarito: "d".

129. (ITA/1996)

Sabendo que o ponto $(2, 1)$ é o ponto médio de uma corda AB da circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 4$, então a equação da reta que contém A e B é dada por:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = x - 1$

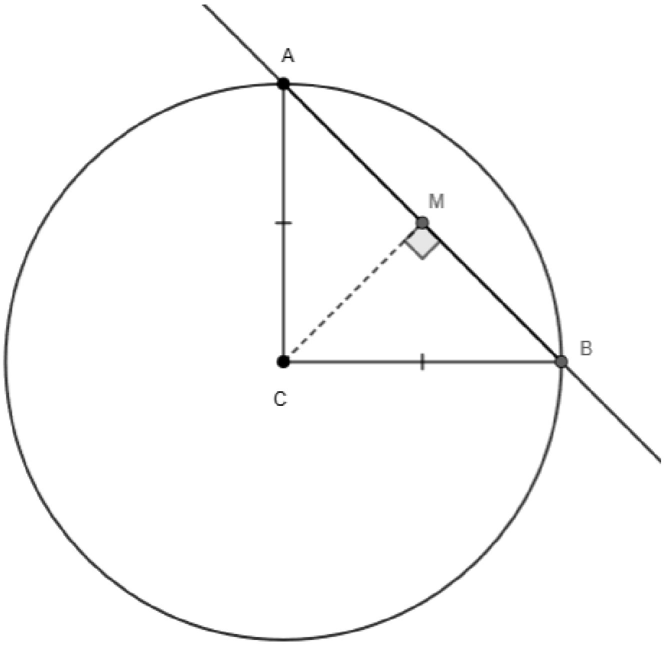
c) $y = -x + 3$

d) $y = \frac{3x}{2} - 2$

e) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

Comentários

Uma maneira simples de resolver esse problema é perceber que a reta que passa pelo ponto médio de uma corda e pelo centro da circunferência é perpendicular à corda, veja:



Isso ocorre porque o triângulo ΔABC é isósceles e a mediana relativa à base AB também é altura.

Seja $M = (2,1)$ o ponto médio e $C = (1,0)$ o centro da circunferência. Dessa forma, o coeficiente angular de MC é dado por $m_{MC} = \frac{2-1}{1-0} = 1$. A reta AB é tal que $m_{AB}m_{MC} = -1$, ou seja, $m_{AB} = -1$.

Além disso, ela passa por M, do que temos:

$$m_{AB} = -1 = \frac{y-1}{x-2} \Rightarrow y = -x + 3$$

Gabarito: "c".

---

130. (ITA/1996)

São dadas as retas $(r)\ x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$ e $(s) x\sqrt{3} + y - 2 + \sqrt{3} = 0$ e a circunferência $(C) x^2 + 2x + y^2 = 0$. Sobre a posição relativa desses três elementos, podemos afirmar que:

a) r e s são paralelas entre si e ambas são tangentes à C.

b) r e s são perpendiculares entre si e nenhuma delas é tangente à C.

c) r e s são concorrentes, r é tangente à C e s não é tangente à C.

d) r e s são concorrentes, s é tangente à C e r não é tangente à C.

e) r e s são concorrentes e ambas são tangentes à C.

Comentários

Por inspeção, temos que $m_r = 1$ e $m_s = -\sqrt{3}$, ou seja, não são paralelas e nem perpendiculares, são apenas concorrentes.

Para que elas sejam tangentes à C, a distância do centro de C, que denominaremos de ponto C, a cada reta deve ser igual ao raio da circunferência. Mas qual o raio e quem é C? Veja:

$$x^2 + 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$$

Ou seja, o raio é $R = 1$ e $C = (-1,0)$. Calculando a distância de C a r:

$$d(C,r) = \left|\frac{-1 - 0 + 1 + \sqrt{2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}\right| = 1$$

Logo, $d(C,r) = R$, e r é tangente a C.

Calculando a distância de C a s:

$$d(C,s) = \left|\frac{(-1)\cdot\sqrt{3} + 0 - 2 + \sqrt{3}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2}}\right| = 1$$

Logo, $d(C,s) = R$, e s é tangente a C.

Gabarito: "e".

131.(ITA/1996)

Tangenciando externamente a elipse tal que ε_1: $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$, considere uma elipse ε_2 de eixo maior sobre a reta que suporta o eixo menor de ε_1 e cujos eixos têm a mesma medida que os eixos de ε_1. Sabendo que ε_2 está inteiramente contida no primeiro quadrante, o centro de ε_2 é:

a) $(7,3)$

b) $(8,2)$

c) $(8,3)$

d) $(9,3)$

e) $(9,2)$

Comentários

Primeiramente, vamos escrever a elipse na sua forma usual completando os quadrados para x e para y:

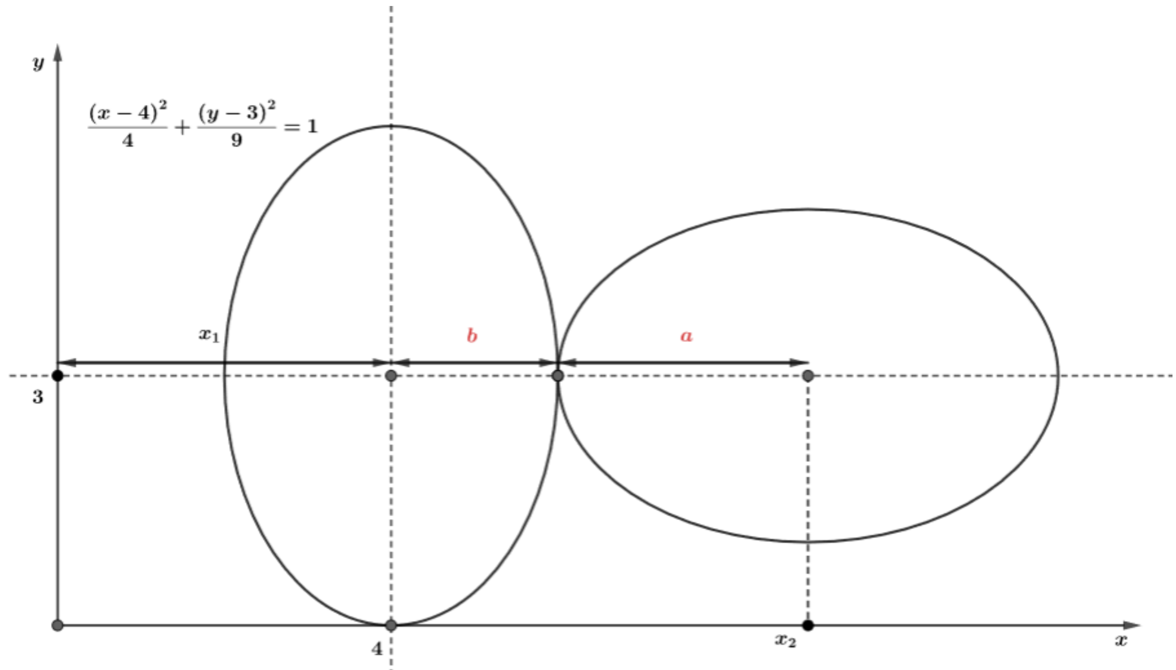
$$9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9(x^2 - 8x + 16) + 4(y^2 - 6y + 9) - 9 \cdot 16 - 4 \cdot 9 + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(x-4)^2 + 4(y-3)^2 = 4 \cdot 9 \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

Logo, seu centro é dado por $C_1 = (4,3)$, seu semieixo maior $a = 3$ e seu semieixo menor $b = 2$.

A posição relativa das elipses é dada no diagrama cartesiano abaixo, levando-se em consideração que ε_2 está totalmente primeiro quadrante:



Note que o eixo maior de ε_2 é paralelo ao eixo x, do enunciado. Além disso, as elipses são idênticas a menos de suas posições no plano, isto é, seus eixos correspondentes são iguais.

Do diagrama acima, podemos perceber que a coordenada y dos centros das elipses são iguais, matematicamente, seja $C_2 = (x_2, y_2)$ o centro de ε_2, temos que $y_1 = 3 = y_2$. Além disso, temos a seguinte relação entre as coordenadas x:

$$x_2 = x_1 + b + a = 4 + 3 + 2 = 9$$

Portanto, $C_2 = (9,3)$.

Gabarito: "d".

132.(ITA/1996)

São dadas as parábolas $p_1: y = -x^2 - 4x - 1$ e $p_2: y = x^2 - 3x + \frac{11}{4}$ cujos vértices são denotados, respectivamente, por V_1 e V_2. Sabendo que r é a reta que contém V_1 e V_2, então a distância de r até à origem é:

a) $\frac{5}{\sqrt{26}}$

b) $\frac{7}{\sqrt{26}}$

c) $\frac{7}{\sqrt{50}}$

d) $\frac{17}{\sqrt{50}}$

e) $\frac{11}{\sqrt{74}}$

Comentários

Vamos completar os quadrados para x em ambas as parábolas:

$$p_1: y = -x^2 - 4x - 4 + 4 - 1 = 3 - (x+2)^2$$

$$p_2: y = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{11}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Do estudo das parábolas, sabemos que o x do vértice maximiza ou minimiza o y da curva.

Dessa forma, o vértice de p_1 é dado por $V_1 = (-2,3)$ e o vértice de p_2 é dado por $V_2 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

Coeficiente angular da reta r:

$$m_r = \frac{3 - \frac{1}{2}}{-2 - \frac{3}{2}} = -\frac{5}{7}$$

Do que temos:

$$r: -\frac{5}{7} = \frac{y-3}{x-(-2)} \Leftrightarrow r: 5x + 7y - 11 = 0$$

Distância de $O = (0,0)$ até r:

$$d(O,r) = \left|\frac{5 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 11}{\sqrt{5^2 + 7^2}}\right| = \frac{11}{\sqrt{74}}$$

Gabarito: "e".

---

133. (ITA/1995)

Uma reta t do plano cartesiano xOy tem coeficiente angular $2a$ e tangencia a parábola $y = x^2 - 1$ no ponto de coordenadas (a, b). Se $(c, 0)$ e $(0, d)$ são as coordenadas de dois pontos de t tais que $c > 0$ e $c = -2d$, então a/b é igual a:

a) $-4/15$

b) $-5/16$

c) $-3/16$

d) $-6/15$

e) $-7/15$

Comentários

Seja t da forma:

$$t: y = 2ax + k$$

Sabemos que (a, b) pertence à parábola, temos então:

$$b = a^2 - 1$$

Além disso, $(a, b) \in t$, logo: $b = 2a \cdot a + k = a^2 - 1 \Rightarrow k = -(a^2 + 1)$. Ou seja:

$$t: y = 2ax - (a^2 + 1)$$

Temos que $c = -2d$ e que os pontos $(c, 0) = (-2d, 0)$ e $(0, d)$ pertencem à reta.

Portanto:

$$0 = 2a \cdot (-2d) - (a^2 + 1) \Rightarrow d = -\frac{a^2 + 1}{4a} \; eq.01$$

$$d = 2a \cdot 0 - (a^2 + 1) = -(a^2 + 1) \; eq.02$$

Comparando a equação 01 com a equação 02, temos:

$$-\frac{a^2 + 1}{4a} = -(a^2 + 1) \Leftrightarrow (a^2 + 1)\left(1 - \frac{1}{4a}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{4a} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

Pois $(a^2 + 1) > 0$ sempre.

Por fim, $b = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{15}{16}$ e $\frac{a}{b} = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{16}{15}\right) = -\frac{4}{15}$.

Gabarito: "a".

134.(IME/2021)

No que diz respeito à posição relativa das circunferências representadas pelas equações

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 11$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y = -16$$

pode-se afirmar que elas são:

a) exteriores.

b) tangentes exteriores.

c) tangentes interiores.

d) concêntricas.

e) secantes.

Comentários

Completando os quadrados das equações e fatorando, temos:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 11 + 9 + 16$$

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 36 = 6^2$$

Temos uma circunferência de centro $O_1(3, 4)$ e raio $r_1 = 6$.

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = -16 + 16 + 4$$
$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 4 = 2^2$$

Temos uma circunferência de centro $O_2(4,-2)$ e raio $r_2 = 2$.

Vamos calcular a distância dos seus centros e comparar com seus raios:

$$O_1O_2 = \sqrt{(4-3)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{37}$$
$$r_1 + r_2 = 6 + 2 = 8 = \sqrt{64}$$
$$r_1 - r_2 = 6 - 2 = 4 = \sqrt{16}$$

Assim, temos:

$$\sqrt{16} < \sqrt{37} < \sqrt{64}$$
$$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$$

Portanto, as circunferências são secantes.

Gabarito: E

---

135. (IME/2021)

Considere as retas que contêm o ponto $C(3,3)$ e interceptam os eixos coordenados x e y nos pontos A e B, respectivamente. O ponto P pertence à reta AB e sua distância do ponto A é a terça parte do comprimento do segmento AB. Identifique o lugar geométrico do ponto P e escreva a sua equação.

Comentários

A reta AB contém o ponto $C(3,3)$, logo, ela possui equação dada por:

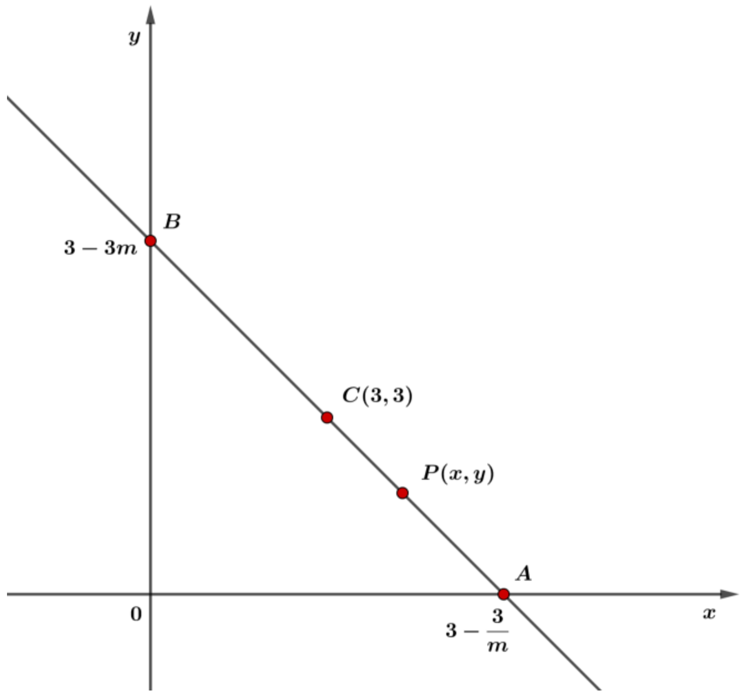
$$\frac{y-3}{x-3} = m \Rightarrow y = mx - 3m + 3$$

Em que $m \neq 0$, pois a reta intercepta os eixos x e y. Assim, temos para as coordenadas de A e B:

$$A\left(3 - \frac{3}{m}, 0\right)\ e\ B(0, 3-3m)$$

O ponto P pertence à reta AB tal que $AP = \frac{1}{3}AB$. Podemos ter duas possibilidades:

1) Ponto P divide o segmento AB internamente:



Nesse caso, temos:

$$BP = 2PA \Rightarrow P - B = 2(A - P) \Rightarrow 3P = 2A + B$$

$$\Rightarrow P = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B$$

$$(x, y) = \left(\frac{2}{3}\left(3 - \frac{3}{m}\right), \frac{1}{3}(3 - 3m)\right)$$

$$\begin{cases} x = 2 - \dfrac{2}{m} \\ y = 1 - m \end{cases}$$

Da primeira equação:

$$\Rightarrow \frac{2}{m} = 2 - x \Rightarrow m = \frac{2}{2 - x}, x \neq 2$$

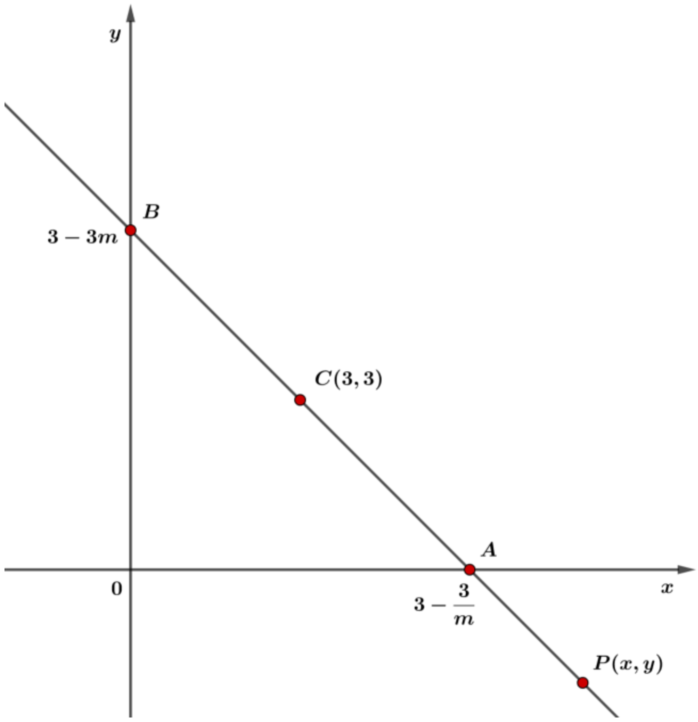
Substituindo na segunda:

$$y = 1 - \frac{2}{2 - x}$$

$$\Rightarrow (x - 2)(y - 1) = 2$$

Essa é a equação de uma hipérbole rotacionada, pois é do tipo $xy = a$, em que as assíntotas foram transladadas.

2) Ponto P divide o segmento AB externamente:



Nesse caso, temos:

$$BA = 3AP$$

$$A - B = 3(P - A)$$

$$4A - B = 3P$$

$$\Rightarrow P = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}B$$

$$(x, y) = \left(\frac{4}{3}\left(3 - \frac{3}{m}\right), -\frac{1}{3}(3 - 3m)\right)$$

$$\begin{cases} x = 4 - \dfrac{4}{m} \\ y = m - 1 \end{cases}$$

Da primeira equação:

$$\Rightarrow \frac{4}{m} = 4 - x \Rightarrow m = \frac{4}{4 - x}, x \neq 4$$

Substituindo na segunda:

$$y = \frac{4}{4 - x} - 1$$

$$\Rightarrow (x - 4)(y + 1) = -4$$

Essa é a equação de uma hipérbole rotacionada.

Portanto, o lugar geométrico é a união de duas hipérboles rotacionadas:

$$\Rightarrow (x - 2)(y - 1) = 2$$

$$\Rightarrow (x - 4)(y + 1) = -4$$

Gabarito: União de duas hipérboles rotacionadas $(x-2)(y-1)=2$ e $(x-4)(y+1)=-4$

136.(IME/2020)

O lugar geométrico definido pela equação $x^2+3y^2+5=2x-xy-4y$ representa

a) uma elipse.

b) uma hipérbole.

c) uma circunferência.

d) um conjunto vazio.

e) duas retas paralelas.

Comentários

Nessa questão, poderíamos ficar tentados a calcular o discriminante da cônica e, assim, acharíamos que o lugar geométrico é uma elipse. No entanto, devemos nos atentar às alternativas e ver que nas letras (D) e (E), temos um conjunto vazio e duas retas paralelas, respectivamente. Assim, vamos verificar se a equação dada pode ser uma dessas possibilidades. Analisemos a equação quadrática em função de x:

$$x^2+3y^2+5=2x-xy-4y$$

$$x^2+(y-2)x+3y^2+4y+5=0$$

Devemos verificar se essa equação possui solução. Para isso, vamos calcular seu discriminante:

$$\Delta=(y-2)^2-4(3y^2+4y+5)$$

$$\Delta=y^2-4y+4-12y^2-16y-20$$

$$\Delta=-11y^2-20y-16$$

Encontramos uma função em y. Ao analisarmos o discriminante da equação $-11y^2-20y-16=0$, verificamos que ele é menor que zero:

$$\Delta'=(-20)^2-4(-11)(-16)=400-704=-304<0$$

Como o discriminante dessa equação é menor que zero e a função $\Delta=f(y)=-11y^2-20y-16$ representa uma parábola com concavidade para baixo, temos que $\forall y\in\mathbb{R}, f(y)<0$, ou seja, $\Delta<0, \forall y\in\mathbb{R}$. Portanto, a equação inicial em x não possui solução, logo, o lugar geométrico é o conjunto vazio.

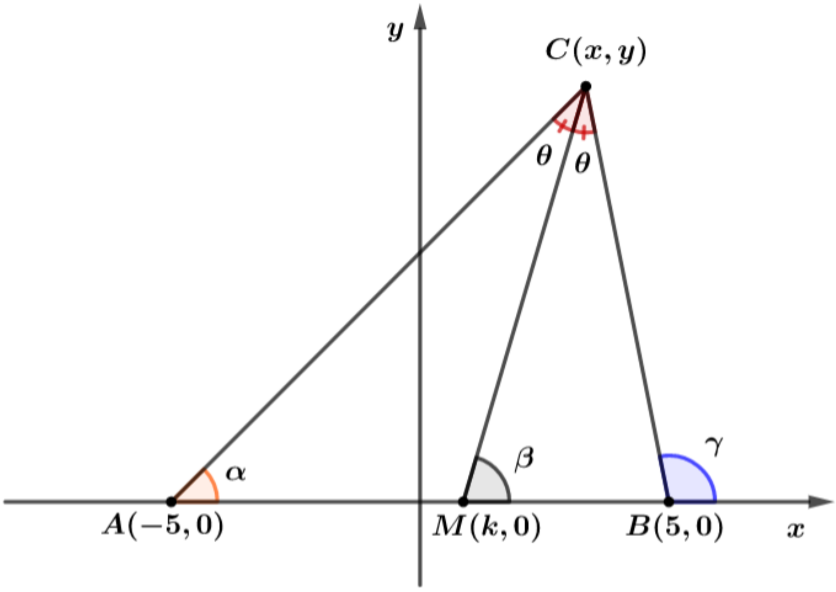
Gabarito: “d”.

137.(IME/2020)

Os pontos $A(-5,0)$ e $B(5,0)$ definem um dos lados do triângulo ABC. A bissetriz interna do ângulo correspondente ao vértice C é paralela à reta de equação $14x-2y+1=0$. Determine o valor da excentricidade do lugar geométrico definido pelo vértice C deste triângulo.

Comentários

Solução 1) Representando a figura do enunciado, temos:



$\overline{CM}$ é a bissetriz interna do triângulo ABC, a questão afirma que ela é paralela à reta $14x - 2y + 1 = 0$, logo, a reta $\overline{CM}$ deve possuir o mesmo coeficiente angular:

$$14x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 7x + \frac{1}{2} \Rightarrow m = 7$$

Assim, o coeficiente angular da reta $\overline{CM}$ é:

$$\boxed{m_{CM} = tg\beta = 7}$$

A reta $\overline{CM}$ é dada por:

$$y = 7(x - k)$$

Logo:

$$\boxed{k = x - \frac{y}{7}}$$

Aplicando o teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{AC}{AM} = \frac{BC}{BM} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+5)^2 + y^2}}{k+5} = \frac{\sqrt{(x-5)^2 + y^2}}{5-k}$$

Elevando ao quadrado:

$$(5-k)^2(x^2 + 10x + 25 + y^2) = (k+5)^2(x^2 - 10x + 25 + y^2)$$

$$(25 - 10k + k^2)(x^2 + 10x + 25 + y^2) = (k^2 + 10k + 25)(x^2 - 10x + 25 + y^2)$$

$$\cancel{25x^2} + 250x + \cancel{625} + \cancel{25y^2} - 10kx^2 \cancel{-100kx} - 250k - 10ky^2 + \cancel{k^2x^2} + 10k^2x + \cancel{25k^2} + \cancel{k^2y^2}$$
$$= \cancel{k^2x^2} - 10k^2x + \cancel{25k^2} + \cancel{k^2y^2} + 10kx^2 \cancel{-100kx} + 250k + 10ky^2 + \cancel{25x^2} - 250x + \cancel{625} + \cancel{25y^2}$$

$$500x - 20kx^2 - 500k - 20ky^2 + 20k^2x = 0$$

$$25x - 25k - kx^2 - ky^2 + k^2x = 0$$

$$25(x - k) - kx(x - k) - ky^2 = 0$$

Substituindo o valor de k:

$$25\left(x-\left(x-\frac{y}{7}\right)\right)-\left(x-\frac{y}{7}\right)x\left(x-\left(x-\frac{y}{7}\right)\right)-\left(x-\frac{y}{7}\right)y^2=0$$

$$\frac{25y}{7}-\frac{x(7x-y)}{7}\left(\frac{y}{7}\right)-\frac{7xy^2}{7}+\frac{y^3}{7}=0$$

$$175y-7x^2y+xy^2-49xy^2+7y^3=0$$

Como $y\neq 0$, temos:

$$175-7x^2-48xy+7y^2=0$$

$$\underbrace{7}_{A}x^2+\underbrace{48}_{B}xy\underbrace{-7}_{C}y^2-175=0$$

Fazendo a rotação de modo a eliminar o termo misto, temos:

$$tg(2\theta)=\frac{B}{A-C}$$

$$tg(2\theta)=\frac{48}{14}=\frac{24}{7}$$

$$\frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta}=\frac{24}{7}$$

$$24tg^2\theta+14tg\theta-24=0$$

$$12tg^2\theta+7tg\theta-12=0$$

Encontrando as soluções:

$$tg\theta=\frac{-7\pm\sqrt{49+4\cdot 144}}{24}=\frac{-7\pm\sqrt{625}}{24}=\frac{-7\pm 25}{24}$$

$$tg\theta_1=\frac{3}{4}\ ou\ tg\theta_2=-\frac{4}{3}$$

Vamos usar $tg\theta=3/4$, aplicando a transformação de coordenadas:

$$\cos\theta=\frac{4}{5}\text{ e }sen\theta=\frac{3}{5}$$

$$\begin{cases}x=X\cdot\cos\theta-Y\cdot\operatorname{sen}\theta\\ y=X\cdot\operatorname{sen}\theta+Y\cdot\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{5}X-\frac{3}{5}Y\\ y=\frac{3}{5}X+\frac{4}{5}Y\end{cases}$$

$$7\left(\frac{4}{5}X-\frac{3}{5}Y\right)^2+48\left(\frac{4}{5}X-\frac{3}{5}Y\right)\left(\frac{3}{5}X+\frac{4}{5}Y\right)-7\left(\frac{3}{5}X+\frac{4}{5}Y\right)^2-175=0$$

$$\frac{7}{25}(16X^2-\cancel{24XY}+9Y^2)+\frac{48}{25}(12X^2+\cancel{7XY}-12Y^2)-\frac{7}{25}(9X^2+\cancel{24XY}+16Y^2)-175=0$$

$$7\cdot 16X^2+7\cdot 9Y^2+48\cdot 12X^2-48\cdot 12Y^2-7\cdot 9X^2-7\cdot 16Y^2-175\cdot 25=0$$

$$(49 + 48 \cdot 12)X^2 - (49 + 48 \cdot 12)Y^2 - 175 \cdot 25 = 0$$

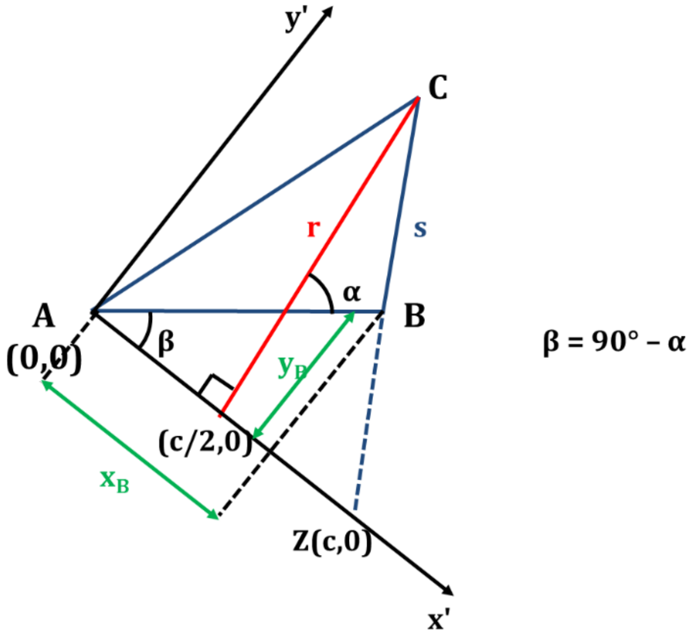
$$625X^2 - 625Y^2 - 7 \cdot 625 = 0$$

$$X^2 - Y^2 = 7$$

Portanto, temos a equação de uma hipérbole equilátera. Logo, sua excentricidade é

$$\boxed{e = \sqrt{2}}$$

Solução 2) Para facilitar a resolução da questão, podemos utilizar uma rotação do eixo de coordenadas em torno do ponto A. Para isso, tomemos o eixo **y’** como paralelo à reta que é a bissetriz fornecida no enunciado e o eixo **x’** é perpendicular a **y’** passando no ponto A.



Definimos também o ponto Z(c,0) como o encontro entre a reta **s** e o eixo **x’**. Devemos observar que a reta **r** é altura e bissetriz no triângulo ABZ, portanto, é também mediana do lado AZ, como mostrado no desenho.

O ponto **C** desejado é o encontro das retas **r** e **s**.

Primeiramente, vamos calcular as coordenadas do ponto B nesse novo sistema de coordenadas. Note que a mera rotação do eixo de coordenadas não altera a distância AB = 10. Além disso, as projeções de B formam um triângulo retângulo que possui um dos ângulos como o arco tangente de 1/7.

$$x_B^2 + y_B^2 = 10^2$$

$$y_B = \frac{x_B}{7} \therefore x_B = 7y_B$$

Agora, podemos calcular as novas coordenadas de B.

$$(7y_B)^2 + y_B^2 = 10^2$$

$$49y_B^2 + y_B^2 = 100$$

$$50y_B^2 = 100$$

$$\therefore y_B^2 = \frac{100}{50} = 2 \therefore y_B = \sqrt{2}$$

Façamos a conta de $\mathbf{x_B}$.

$$x_B = 7y_B = 7\sqrt{2}$$

A reta **r** é paralela ao eixo **y'**. Portanto, a sua equação é dada por:

$$r: x' = \frac{c}{2}$$

A reta **s** é dada pelos pontos $B(7\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(c, 0)$. Sua equação pode ser expressa em função do coeficiente angular:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2} - 0}{7\sqrt{2} - c} = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c}$$

Podemos agora obter o coeficiente linear da reta **n** considerando que $(c, 0)$ pertence à reta **s**.

$$y' = m_s x' + n_s$$

$$0 = m_s . c + n_s$$

$$\therefore n_s = -m_s c = -\frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c} . c = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c} . (-c)$$

Logo, a equação da reta **s** é:

$$s: y' = m_s x' + n_s = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c} . x' + \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c} . (-c)$$

$$s: y' = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c}[x' - c]$$

Note que o ponto C é o encontro das retas **r** e **s**. Portanto, basta resolver o sistema de equações definido pelas duas equações de reta.

$$r: x' = \frac{c}{2} \therefore c = 2x'$$

Substituindo o parâmetro **c** na equação da reta **s** é:

$$s: y' = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - c}[x' - c] = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} \mathbf{- 2x'}}[x' \mathbf{- 2x'}]$$

Fazendo as manipulações algébricas.

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - 2x'}[x' - 2x'] = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - 2x'}[-x']$$

Passando o denominador para o outro lado, temos:

$$\therefore y'\left(7\sqrt{2}-2x'\right)=\sqrt{2}[-x']$$

$$7\sqrt{2}y'-2x'y'=\sqrt{2}[-x']$$

$$\therefore \sqrt{2}x'+7\sqrt{2}y'-2x'y'=0$$

$$x'y'-\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{7\sqrt{2}}{2}y'=0$$

Podemos fatorar a equação obtida, observando que:

$$\left(x'-\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=x'y'-\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{7\sqrt{2}}{2}y'+\frac{7}{2}$$

Portanto, temos que a equação da curva é:

$$x'y'-\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{7\sqrt{2}}{2}y'=0$$

$$\left(x'-\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{7}{2}=0$$

$$\left(x'-\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{7}{2}$$

Trata-se, portanto de uma hipérbole equilátera deslocada da origem. Portanto, a sua excentricidade é igual a $\sqrt{2}$.

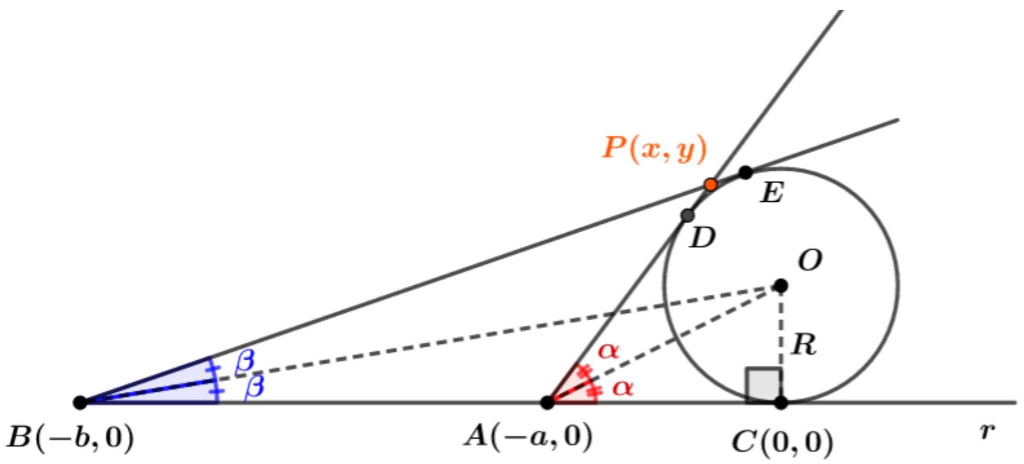
Gabarito: Hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$

138. (IME/2020)

Sobre uma reta r são marcados três pontos distintos A, B e C, sendo que C é um ponto externo ao segmento de reta $\overline{AB}$. Determine o lugar geométrico das interseções das retas tangentes a partir de A e B a qualquer circunferência tangente à reta r no ponto C. Justifique sua resposta.

Comentários

Sem perda de generalidade, consideremos a seguinte figura que representa o problema:



$\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ são as retas tangentes à circunferência tangente à reta r no ponto C. Para simplificar os cálculos, consideramos a reta r como a reta coincidente com o eixo das abcissas. Sabendo que a equação de uma reta é

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Temos para a reta $\overline{AD}$:

$$y - y_A = m_{AD}(x - x_A) \Rightarrow y = (x + a) \cdot tg(2\alpha) \ \ (eq. I)$$

Para a reta $\overline{BE}$:

$$y - y_B = m_{BE}(x - x_B) \Rightarrow y = (x + b) \cdot tg(2\beta) \ \ (eq. II)$$

A interseção da reta $\overline{AD}$ e a reta $\overline{BE}$ é o ponto $P(x, y)$. Igualando as equações das retas, temos:

$$(x + a) \cdot tg(2\alpha) = (x + b) \cdot tg(2\beta) \ \ (eq. III)$$

Pela figura, vemos que:

$$tg\alpha = \frac{R}{a} \text{ e } tg\beta = \frac{R}{b}$$

Pelas relações trigonométricas, temos:

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \Rightarrow tg(2\alpha) = \frac{2\left(\frac{R}{a}\right)}{1 - \left(\frac{R}{a}\right)^2} \Rightarrow \boxed{tg(2\alpha) = \frac{2Ra}{a^2 - R^2}}$$

$$tg(2\beta) = \frac{2tg\beta}{1 - tg^2\beta} \Rightarrow tg(2\beta) = \frac{2\left(\frac{R}{b}\right)}{1 - \left(\frac{R}{b}\right)^2} \Rightarrow \boxed{tg(2\beta) = \frac{2Rb}{b^2 - R^2}}$$

Substituindo os valores encontrados na $eq. III$:

$$(x + a) \cdot \left(\frac{2Ra}{a^2 - R^2}\right) = (x + b) \cdot \left(\frac{2Rb}{b^2 - R^2}\right)$$

$$(x + a)(b^2 - R^2)2Ra = (x + b)(a^2 - R^2)2Rb$$

$$a(xb^2 - xR^2 + ab^2 - aR^2) = b(xa^2 - xR^2 + a^2b - bR^2)$$

$$axb^2 - axR^2 + \cancel{a^2b^2} - a^2R^2 = bxa^2 - bxR^2 + \cancel{a^2b^2} - b^2R^2$$

$$ab^2x - a^2bx - aR^2x + bR^2x - a^2R^2 + b^2R^2 = 0$$

$$abx(b - a) + R^2x(b - a) + R^2\underbrace{(b^2 - a^2)}_{(b-a)(b+a)} = 0$$

Como $b \neq a$, temos:

$$abx + R^2x + R^2(a + b) = 0$$

$$\boxed{x = -\frac{R^2(a + b)}{ab + R^2}}$$

Substituindo o valor de x na equação I, obtemos:

$$y=\left(-\frac{R^2(a+b)}{ab+R^2}+a\right)\cdot\left(\frac{2Ra}{a^2-R^2}\right)$$

Simplificando:

$$y=\frac{2Ra(-\cancel{aR^2}-bR^2+a^2b+\cancel{aR^2})}{(ab+R^2)(a^2-R^2)}$$

$$y=\frac{2Rab\cancel{(a^2-R^2)}}{(ab+R^2)\cancel{(a^2-R^2)}}$$

$$\boxed{y=\frac{2Rab}{(ab+R^2)}}$$

Escrevendo R^2 em função de x:

$$x=-\frac{R^2(a+b)}{ab+R^2}\Rightarrow abx+R^2x=-aR^2-bR^2\Rightarrow R^2(a+b+x)=-abx$$

$$\therefore R^2=-\frac{abx}{a+b+x}$$

Substituindo em y:

$$y=\frac{2Rab}{(ab+R^2)}\Rightarrow y^2=\frac{4a^2b^2R^2}{(ab+R^2)^2}\Rightarrow y^2=\frac{\left(4a^2b^2\left(-\frac{abx}{a+b+x}\right)\right)}{\left(ab-\frac{abx}{a+b+x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{4\cancel{a^2b^2}\left(-\frac{abx}{a+b+x}\right)}{\cancel{a^2b^2}\left(1-\frac{x}{a+b+x}\right)^2}\Rightarrow y^2=\frac{-\frac{4abx}{\cancel{(a+b+x)}}}{\frac{(a+b\cancel{+x-x})^2}{(a+b+x)^{\cancel{2}}}}\Rightarrow y^2=-\frac{4abx(a+b+x)}{(a+b)^2}$$

$$y^2+\frac{4ab(a+b)x}{(a+b)^2}+\frac{4abx^2}{(a+b)^2}=0$$

$$y^2+\frac{4ab}{(a+b)^2}\left(\underbrace{x^2+2\frac{(a+b)}{2}x+\frac{(a+b)^2}{4}}_{\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2}-\frac{(a+b)^2}{4}\right)=0$$

$$y^2+\frac{4ab}{(a+b)^2}\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=0$$

$$\frac{\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2}{\frac{(a+b)^2}{4ab}}+y^2=ab$$

$$\therefore\boxed{\frac{\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2}{\frac{(a+b)^2}{4}}+\frac{y^2}{ab}=1}$$

Portanto, o lugar geométrico dos pontos que satisfazem às condições do problema é uma elipse.

Gabarito: Elipse

139.(IME/2019)

Uma hipérbole equilátera de eixo igual a 4, com centro na origem, eixos paralelos aos eixos coordenados e focos no eixo das abscissas sofre uma rotação de $45°$ no sentido anti-horário em torno da origem. A equação dessa hipérbole após a rotação é:

a) $xy = 2$

b) $x^2 + xy - y^2 = 4$

c) $x^2 - y^2 = 2$

d) $xy = -2$

e) $x^2 - y^2 = -2$

Comentários

A equação de uma hipérbole é dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

A hipérbole da questão possui centro na origem, então, $(x_0, y_0) = (0,0)$. Ela também é equilátera de eixo igual a 4, logo:

$$2a = 2b = 4 \Rightarrow a = b = 2$$

Assim, temos:

$$\boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1}$$

Precisamos rotacionar essa equação $45°$ no sentido anti-horário. Podemos usar a matriz de rotação:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{coordenadas\ rotacionadas} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 45° & -\operatorname{sen} 45° \\ \operatorname{sen} 45° & \cos 45° \end{pmatrix}}_{matriz\ de\ rotação} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Se $M = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\operatorname{sen} 45° \\ \operatorname{sen} 45° & \cos 45° \end{pmatrix}$ é a matriz de rotação no sentido anti-horário e sabendo que ela é ortogonal, podemos escrever:

$$M^T M = M M^T = I$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vamos multiplicar à esquerda da equação por M^T:

$$M^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{M^T M}_{I} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$M^T\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\cos 45° & \operatorname{sen} 45°\\ -\operatorname{sen} 45° & \cos 45°\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}$$

Assim, obtemos:

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

Agora, basta substituir essas relações na equação da hipérbole:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2}{4}-\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2}{4}=1$$

Simplificando:

$$\frac{\frac{2}{4}(x'+y')^2}{4}-\frac{\frac{2}{4}(-x'+y')^2}{4}=1$$

$$\frac{x'^2+2x'y'+y'^2-(x'^2-2x'y'+y'^2)}{8}=1$$

$$\frac{4x'y'}{8}=1$$

$$\boxed{x'y'=2}$$

Gabarito: "a".

---

140. (IME/2019)

A reta r é normal à cônica C, de equação $9x^2-4y^2=36$, no ponto $A=\left(3,\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ e intercepta o eixo das abcissas no ponto B. Sabendo que F é o foco da cônica C mais próximo ao ponto A, determine a área do triângulo ABF.

Comentários

A cônica pode ser escrita em sua forma reduzida:

$$9x^2-4y^2=36\Leftrightarrow\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$$

Assim, temos que o semieixo real a e o semieixo imaginário b são dados por:

$$a^2=4\Rightarrow a=2$$

$$b^2=9\Rightarrow b=3$$

Com esses dados, podemos calcular o valor da semidistância focal:

$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=4+9=13\Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$$

Como a cônica possui centro na origem e é da forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Podemos afirmar que seus focos estão no eixo x, logo:

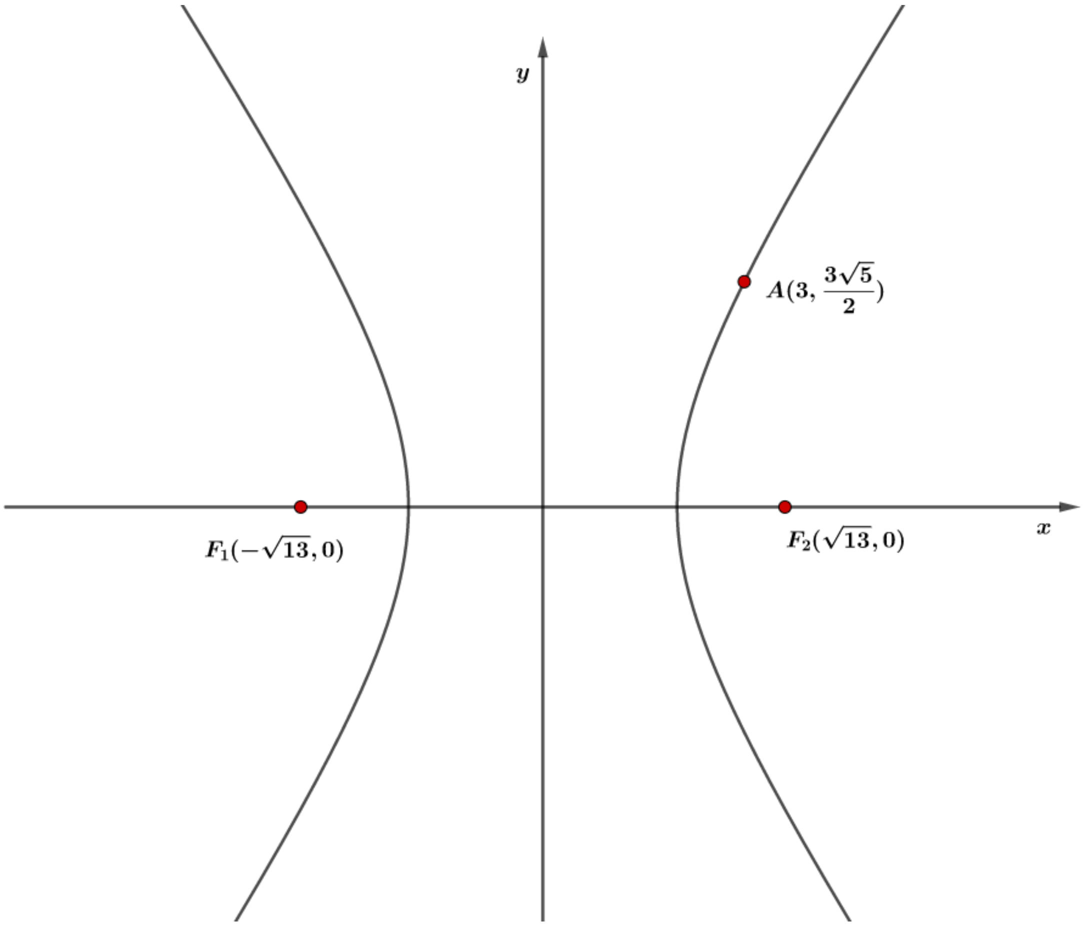
$$F_1 = \left(-\sqrt{13}, 0\right)$$

$$F_2 = \left(\sqrt{13}, 0\right)$$

F é o foco da cônica mais próximo ao ponto A. Como A está localizado no primeiro quadrante do plano cartesiano, temos que F deve ser igual a F_2.

$$\boxed{F = \left(\sqrt{13}, 0\right)}$$

Vamos esboçar o gráfico para visualizar a situação:



Resta encontrar o ponto B. Para isso, devemos encontrar a equação da reta r normal à C. Sabendo que o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto (x, y) é dado por:

$$m_t = \frac{dy}{dx} = y'$$

Então, aplicando-se a derivada na equação da hipérbole, obtemos:

$$\frac{d(9x^2 - 4y^2)}{dx} = \frac{d(36)}{dx}$$

$$9 \cdot 2 \cdot x - 4 \cdot 2 \cdot y \cdot y' = 0$$

$$18x - 8ym_t = 0$$

$$\Rightarrow m_t = \frac{9x}{4y}$$

Para obter o coeficiente angular da reta r, podemos usar a seguinte relação:

$$m_r m_t = -1 \Rightarrow m_r = -\frac{1}{m_t} \Rightarrow m_r = -\frac{4y}{9x}$$

Como A é um ponto da reta r, temos:

$$A = \left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{m_r = -\frac{4 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2}}{9 \cdot 3} = -\frac{2\sqrt{5}}{9}}$$

A forma geral de uma reta é:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Conhecemos o coeficiente angular de r e A é um ponto pertencente à reta, assim, sua equação é dada por:

$$\boxed{r: y - \frac{3\sqrt{5}}{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{9}(x - 3)}$$

B é um ponto do eixo das abcissas, logo, $y_B = 0$. Desse modo:

$$y_B - \frac{3\sqrt{5}}{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{9}(x_B - 3)$$

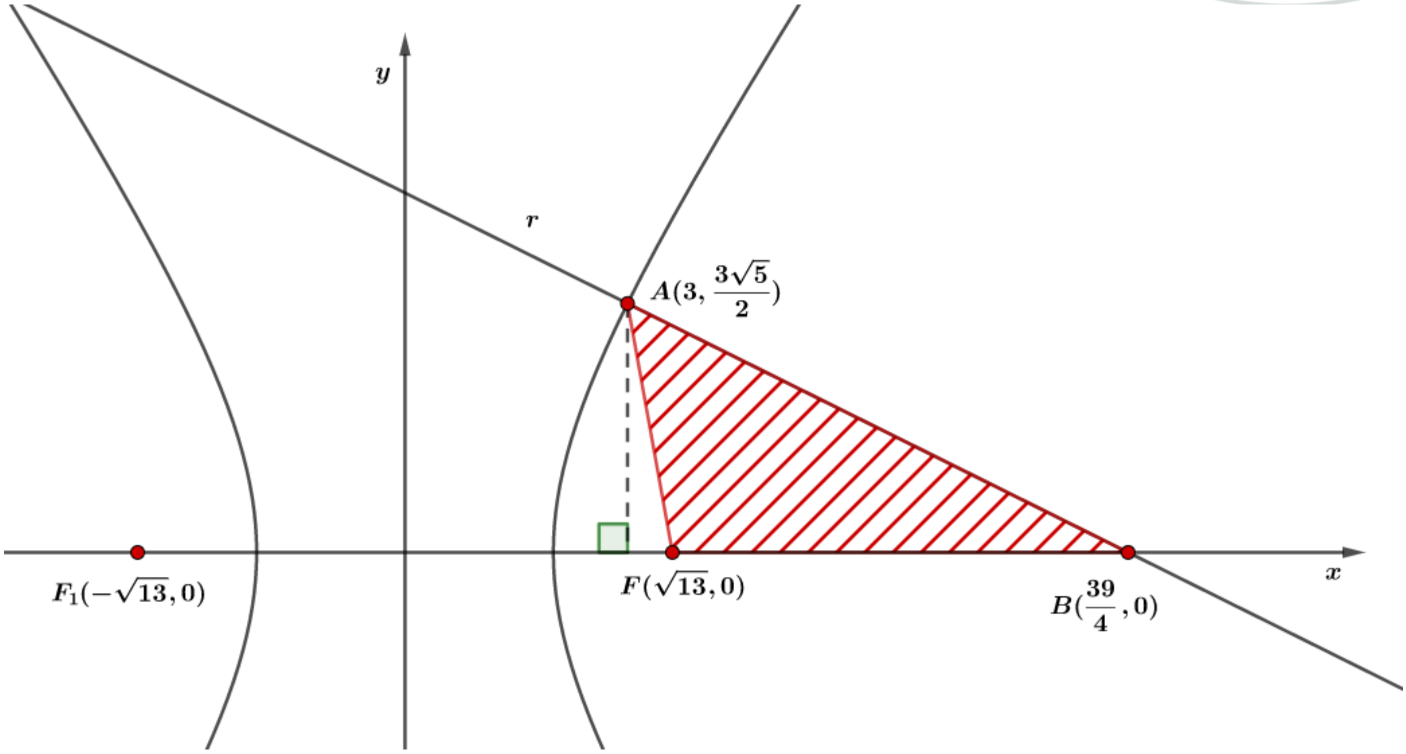
$$-\frac{3\sqrt{5}}{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{9}(x_B - 3)$$

$$x_B = \frac{27}{4} + 3$$

$$x_B = \frac{39}{4}$$

$$\boxed{B = \left(\frac{39}{4}, 0\right)}$$

Esboço do gráfico:



A área do ΔABF é igual a:

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{39}{4} - \sqrt{13}\right) \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

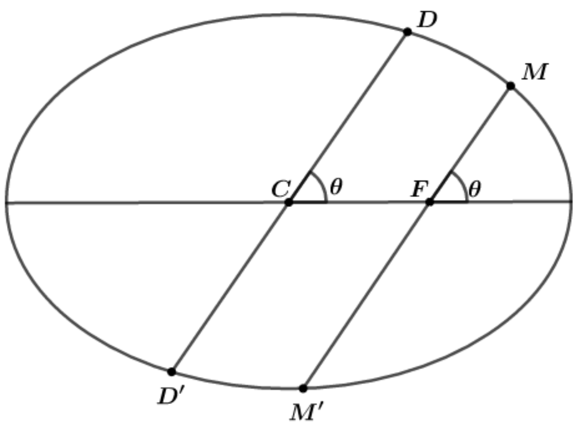
$$\boxed{S_{ABF} = \frac{117\sqrt{5} - 12\sqrt{65}}{16}}$$

Gabarito: $S_{ABF} = \frac{117\sqrt{5} - 12\sqrt{65}}{16}$

141.(IME/2018)

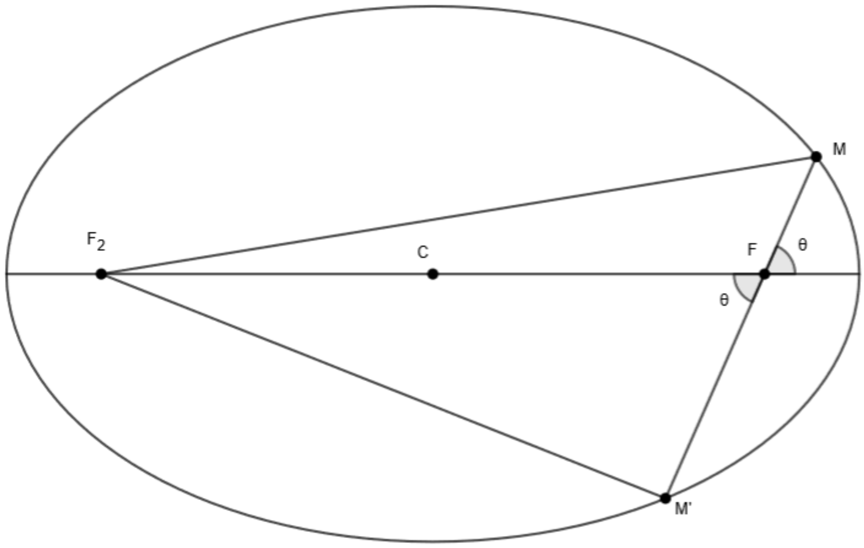
Considere a elipse abaixo, onde DD' é uma corda passando pelo seu centro, MM' uma corda focal e o eixo maior da elipse é $2a$.

Prove que: $DD'^2 = MM' \cdot 2a$



Comentários

Seja $p = MF$ e $q = FM'$. Vamos nomear o outro foco como sendo F_2. Observe o diagrama abaixo:



Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ΔFMF_2, temos:

$$F_2M^2 = FF_2^2 + FM^2 - 2FF_2 \cdot FM \cdot \cos\left(180° - \theta\right)$$

Observe que, por M estar sobre a elipse, temos $FM + MF_2 = 2a \Rightarrow MF_2 = 2a - FM = 2a - p$. Além disso, a distância focal, $2c$, corresponde a FF_2.

Ou seja:

$$(2a - p)^2 = (2c)^2 + p^2 + 4cpcos(\theta) \Leftrightarrow 4a^2 - 4ap + p^2 = (2c)^2 + p^2 + 4cpcos(\theta)$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 - c^2) = 4ap + 4cpcos(\theta) \Leftrightarrow p = \frac{a^2 - c^2}{a + ccos(\theta)}$$

De maneira análoga ao que foi feito acima, vamos aplicar a lei dos cossenos ao triângulo $\Delta FM'F_2$:

$$F_2M'^2 = FF_2^2 + FM'^2 - 2FF_2 \cdot FM' \cdot \cos\left(\theta\right)$$

Ou seja:

$$(2a - q)^2 = (2c)^2 + q^2 - 4cqcos(\theta) \Leftrightarrow 4a^2 - 4aq + q^2 = (2c)^2 + q^2 - 4cqcos(\theta)$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 - c^2) = 4aq - 4cqcos(\theta) \Leftrightarrow q = \frac{a^2 - c^2}{a - ccos(\theta)}$$

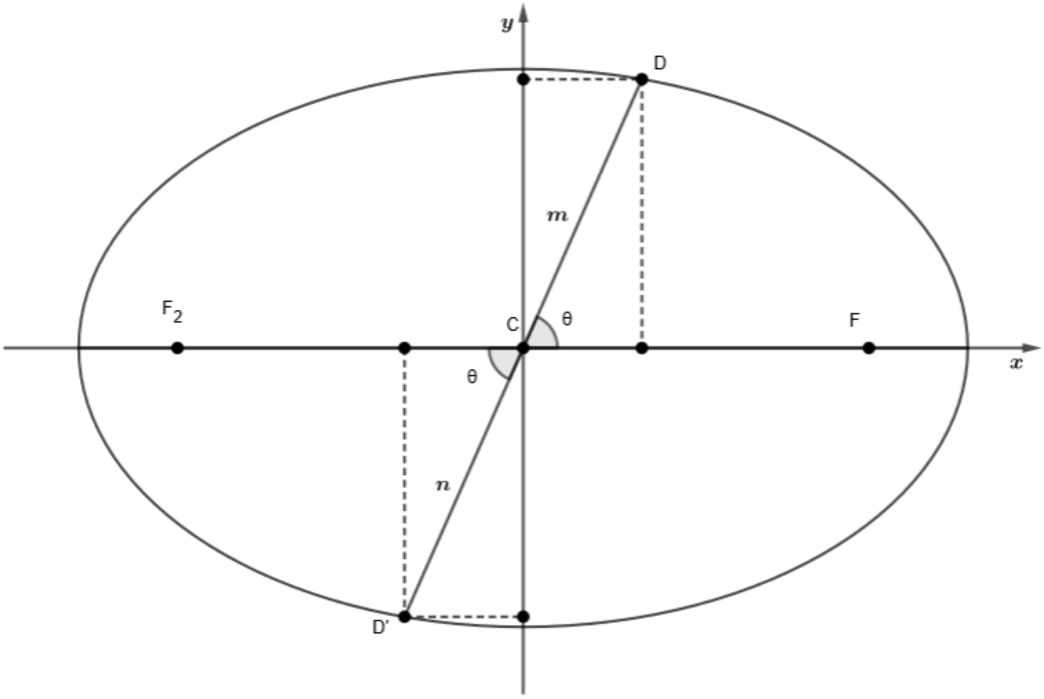
Dessa forma, temos que

$$MM' = p + q = \frac{a^2 - c^2}{a + ccos(\theta)} + \frac{a^2 - c^2}{a - ccos(\theta)} = \frac{2a(a^2 - c^2)}{a^2 - c^2\cos^2(\theta)}$$

Lembre-se que $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$, ou seja:

$$MM' = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2\cos^2(\theta)}$$

Por outro lado, observe a seguinte figura:



Essa elipse obedece a equação:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Da figura, temos que $D=(m\cos(\theta), m\,sen(\theta))$ e $D'=(-n\cos(\theta), -n\,sen(\theta))$.

Para o ponto D:

$$\frac{m^2\cos^2(\theta)}{a^2}+\frac{m^2sen^2(\theta)}{b^2}=1\Rightarrow m^2\left(\frac{\cos^2(\theta)b^2+(1-\cos^2(\theta))a^2}{a^2b^2}\right)=1$$

$$\therefore m=\frac{ab}{\sqrt{a^2-c^2\cos^2(\theta)}}$$

Para o ponto D':

$$\frac{n^2\cos^2(\theta)}{a^2}+\frac{n^2sen^2(\theta)}{b^2}=1\Rightarrow n^2\left(\frac{\cos^2(\theta)b^2+(1-\cos^2(\theta))a^2}{a^2b^2}\right)=1$$

$$\therefore n=\frac{ab}{\sqrt{a^2-c^2\cos^2(\theta)}}$$

Logo,

$$DD'=m+n=\frac{2ab}{\sqrt{a^2-c^2\cos^2(\theta)}}$$

Veja que:

$$(DD')^2=\frac{4a^2b^2}{a^2-c^2\cos^2(\theta)}=2a\cdot\left(\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2(\theta)}\right)=2a\cdot MM'$$

$$\therefore (DD')^2=2a\cdot MM'$$

Gabarito: Demonstração.

142. (IME/2018)

Seja uma elipse com focos no eixo OX e centrada na origem. Seus eixos medem 10 e 20/3. Considere uma hipérbole tal que os focos da elipse são os vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são os vértices da elipse. As parábolas que passam pelas interseções entre a elipse e a hipérbole e que são tangentes ao eixo OY, na origem, têm as seguintes equações:

a) $y^2 = \pm 2\frac{\sqrt{35}}{7}x$

b) $y^2 = \pm 4\frac{\sqrt{5}}{7}x$

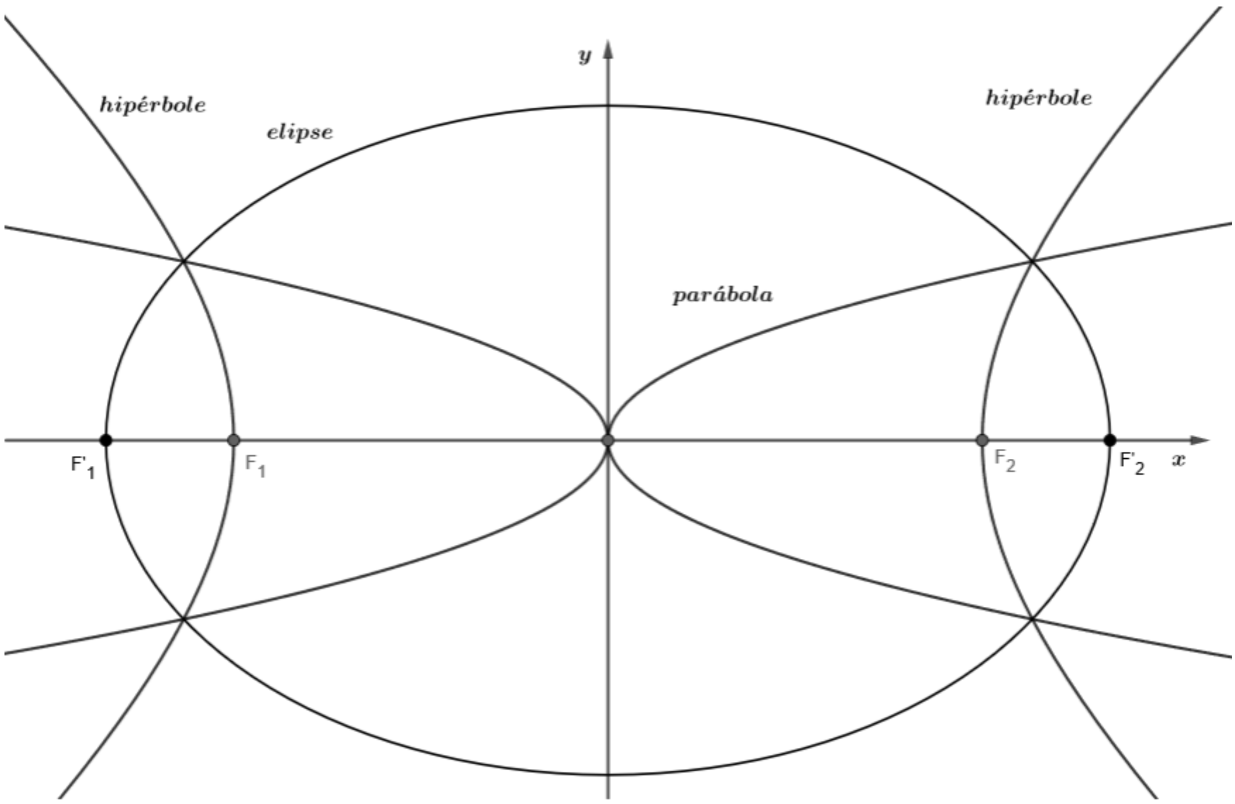
c) $y^2 = \pm 6\frac{\sqrt{5}}{7}x$

d) $y^2 = \pm 6\frac{\sqrt{35}}{7}x$

e) $y^2 = \pm 8\frac{\sqrt{35}}{63}x$

Comentários

Para essa questão é indispensável um diagrama esquemático da situação. Vamos chamar de F_1 e F_2 os focos da elipse e F_1' *e* F_2' os focos da hipérbole. Observe:



Já temos, do enunciado, como construir a equação da elipse, pois nos foi dado seu centro, as retas que definem seus eixos e o tamanho de seus eixos. Logo:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{10}{3}\right)^2} = 1$$

Antes de continuar, vamos calcular a distância focal da elipse: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 5^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 \Rightarrow c = \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

No diagrama, podemos observar que a distância focal da hipérbole, $2c$, corresponde ao eixo maior da elipse, ou seja, $2c = 10 \Rightarrow c = 5$. A distância entre seus vértices, eixo real $(2a)$, corresponde à distância focal da elipse, ou seja, $2a = \frac{10\sqrt{5}}{3} \Rightarrow a = \frac{5\sqrt{5}}{3}$. Podemos calcular o eixo imaginário da hipérbole (b), através da relação:

$$b^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 25 - \frac{125}{9} = \frac{100}{9} \Rightarrow b = \frac{10}{3}$$

Portanto, a equação da hipérbole é:

$$\frac{x^2}{\frac{125}{9}} - \frac{y^2}{\frac{100}{9}} = 1$$

Fazendo a intersecção entre a hipérbole e a elipse somando suas equações, temos:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{10}{3}\right)^2} + \frac{x^2}{\frac{125}{9}} - \frac{y^2}{\frac{100}{9}} = 1 + 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{x^2}{\frac{125}{9}} = 2 \Leftrightarrow \frac{14x^2}{125} = 2$$

$$\therefore x = \pm\frac{25}{\sqrt{35}}$$

Para encontrar o y correspondente, basta substituir x em uma das equações, da elipse ou da hipérbole. Perceba que, como nas equações x aparece elevado ao quadrado, tanto faz pegar o seu valor positivo ou negativo, pois:

$$\left(-\frac{25}{\sqrt{35}}\right)^2 = \left(+\frac{25}{\sqrt{35}}\right)^2$$

Logo, substituindo $x = \frac{25}{\sqrt{35}}$ na equação da elipse, vem:

$$\frac{\left(\frac{25}{\sqrt{35}}\right)^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{100}{9}} = 1 \Rightarrow \frac{9y^2}{100} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \Rightarrow y = \pm\frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}$$

Temos, dessa forma, quatro pontos:

$$A = \left(\frac{25}{\sqrt{35}}, \frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}\right) e\ B = \left(\frac{25}{\sqrt{35}}, -\frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$$

$$C = \left(-\frac{25}{\sqrt{35}}, \frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}\right) e\ D = \left(-\frac{25}{\sqrt{35}}, -\frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$$

A equação da parábola, como foi dada no enunciado, é da forma:

$$p_n: y^2 = 4a_n x$$

Disso, concluímos que os pontos com mesma abscissa pertencem a uma mesma parábola. Logo, vamos encontrar as possíveis parábolas:

Usando o ponto A:

$$\frac{100}{9} \cdot \frac{2}{7} = 4a_1 \cdot \frac{25}{\sqrt{35}} \Rightarrow a_1 = \frac{2\sqrt{35}}{63}$$

Usando o ponto C:

$$\frac{100}{9} \cdot \frac{2}{7} = 4a_2 \cdot \left(-\frac{25}{\sqrt{35}}\right) \Rightarrow a_2 = -\frac{2\sqrt{35}}{63}$$

Logo, as parábolas são:

$$p_{1,2}: y^2 = \pm\frac{8\sqrt{35}}{63}x$$

Gabarito: "e".

143.(IME/2017)

Um triângulo ABC tem o seu vértice A na origem do sistema cartesiano, seu baricentro é o ponto $D(3,2)$ e seu circuncentro é o ponto $E(55/18, 5/6)$. Determine:

- a equação da circunferência circunscrita ao triângulo ABC;

- as coordenadas dos vértices B e C.

Comentários

O vértice A do triângulo é dado por $A = (0,0)$. Da geometria plana, sabemos que o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita a um dado triângulo. Logo, para determinar o que é pedido no primeiro item, como já temos o centro da circunferência, temos que determinar o raio.

A distância do circuncentro a qualquer um dos vértices é igual ao raio da circunferência. Vamos então calcular EA:

$$EA = \sqrt{\left(0 - \frac{55}{18}\right)^2 + \left(0 - \frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5\sqrt{130}}{18}$$

Temos, então, a circunferência pedida:

$$\lambda: \left(x - \frac{55}{18}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{130}}{18}\right)^2$$

Sejam os vértices B e C dados por $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$. Foi dado o baricentro do triangulo, do que podemos escrever:

$$(3,2) = \left(\frac{0 + x_B + x_C}{3}, \frac{0 + y_B + y_C}{3}\right) \Rightarrow (3,2) = \left(\frac{x_B + x_C}{3}, \frac{y_B + y_C}{3}\right)$$

Disso, temos o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x_B + x_C}{3} = 3 \\ \dfrac{y_B + y_C}{3} = 2 \end{cases}$$

Isolando as coordenadas de B, vem:

$$x_B = 9 - x_C$$
$$y_B = 6 - y_C$$

Ou seja, $B = (9 - x_C, 6 - y_C)$.

O próximo passo é perceber que $B, C \in \lambda$. Do que temos as duas equações abaixo:

$$\left(x_C - \frac{55}{18}\right)^2 + \left(y_C - \frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{130}}{18}\right)^2 \; eq.01$$

$$\left(9 - x_C - \frac{55}{18}\right)^2 + \left(6 - y_C - \frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{130}}{18}\right)^2 \; eq.02$$

Subtraindo as equações:

$$\left(x_C - \frac{55}{18}\right)^2 + \left(y_C - \frac{5}{6}\right)^2 - \left[\left(9 - x_C - \frac{55}{18}\right)^2 + \left(6 - y_C - \frac{5}{6}\right)^2\right] = \left(\frac{5\sqrt{130}}{18}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{130}}{18}\right)^2$$

$$\left(x_C - \frac{55}{18}\right)^2 - \left(9 - x_C - \frac{55}{18}\right)^2 + \left(y_C - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(6 - y_C - \frac{5}{6}\right)^2 = 0$$

$$\left(x_C - \frac{55}{18} + 9 - x_C - \frac{55}{18}\right)\left(x_C - \frac{55}{18} - 9 + x_C + \frac{55}{18}\right) + \left(y_C - \frac{5}{6} + 6 - y_C - \frac{5}{6}\right)\left(y_C - \frac{5}{6} - 6 + y_C + \frac{5}{6}\right) = 0$$

$$\frac{26}{9}(2x_C - 9\,) + \frac{26}{6}(2y_C - 6) = 0 \Leftrightarrow 3y_C + 2x_C = 18 \; eq.03$$

Ou seja: $y_C = 6 - \frac{2x_C}{3}$. Substituindo isso na $eq.01$, vem:

$$\left(x_C - \frac{55}{18}\right)^2 + \left(6 - \frac{2x_C}{3} - \frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{130}}{18}\right)^2$$

Por simplicidade, faremos $x_C = x$.

Desenvolvendo os termos, sempre observando fatores que possam se repetir:

$$x^2 - \frac{110}{18}x + \frac{55^2}{18^2} + \frac{4x^2}{9} - \frac{124}{18}x + \frac{93^2}{18^2} = \frac{13 \cdot 250}{18^2} \Leftrightarrow \frac{13x^2}{9} - \frac{224}{18}x + \frac{55^2 + 93^2}{18^2} = 13 \cdot \frac{250}{18^2}$$

Note que: $224 = 18 \cdot 13$ e que $55^2 + 93^2 = 898 \cdot 13$. Ou seja:

$$\frac{13x^2}{9} - \frac{18 \cdot 13}{18}x + \frac{898 \cdot 13}{18^2} = 13 \cdot \frac{250}{18^2}$$

Simplificando, temos:

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

Que possui raízes $x_C = 6$ ou $x_C = 3$.

Note que se $x_C = 6$, temos $x_B = 9 - 6 = 3$. Se $x_C = 3$, temos $x_B = 9 - 3 = 6$. Então, sem perda de generalidade, vamos tomar $x_C = 6$.

Da $eq. 03$, temos:

$$y_C = 6 - \frac{2}{3} \cdot 6 = 2$$

E ainda, $y_B = 6 - 2 = 4$.

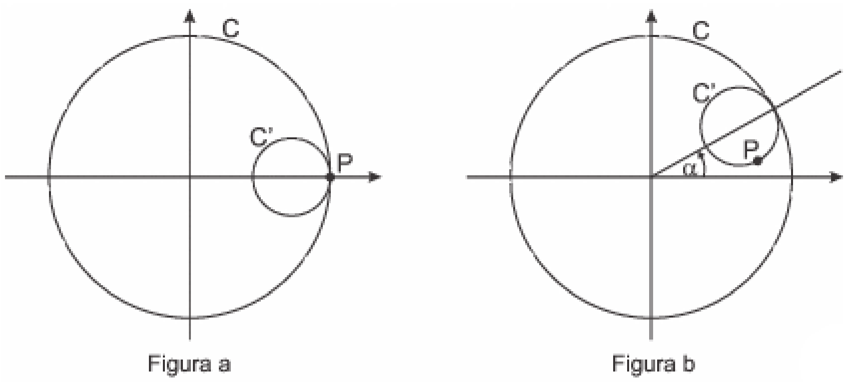
Por fim:

$$B = (3,4)\ e\ C = (6,2)$$

Gabarito: Item a) $\left(x - \frac{55}{18}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{130}}{18}\right)^2$**; Item b)** $B = (3,4)\ e\ C = (6,2)$**.**

144.(IME/2016)

A circunferência C tem equação $x^2 + y^2 = 16$. Seja C' uma circunferência de raio 1 que se desloca tangenciando internamente a circunferência C, sem escorregamento entre os pontos de contato, ou seja, C' rola internamente sobre C.



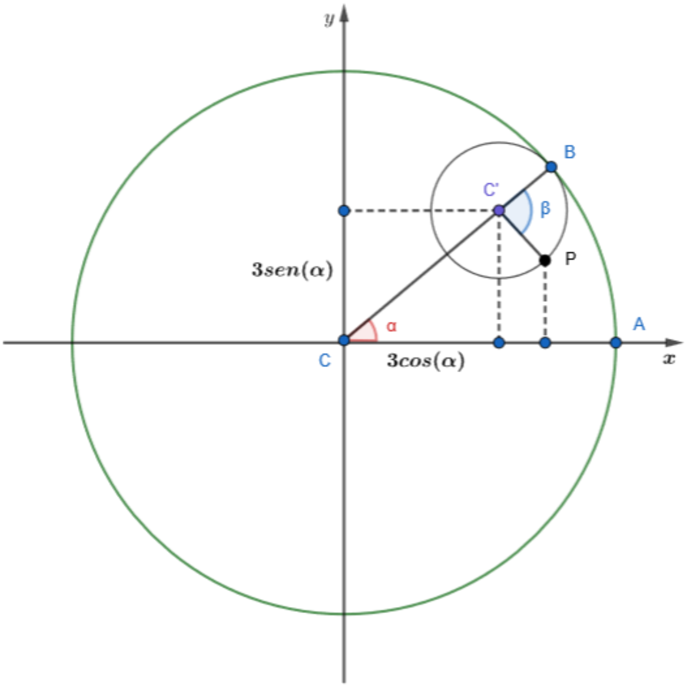
Define-se o ponto P sobre C' de forma que no início do movimento de C' o ponto P coincide com o ponto de tangência $(4, 0)$, conforme figura a. Após certo deslocamento, o ângulo de entre o eixo x e a reta que une o centro das circunferências é α, conforme figura b.

- Determine as coordenadas do ponto P marcado sobre C' em função do ângulo α.

- Determine a equação em coordenadas cartesianas do lugar geométrico do ponto P quando α varia no intervalo $[0, 2\pi)$.

Comentários

Observe o diagrama abaixo:



Nele, observe que $CC' = 4 - 1 = 3$, pois C e C' são tangentes internamente.

Pelo que foi dado no enunciado, P se desloca sem escorregamento, ou seja, os arcos BA e BP são iguais.

Pela definição de ângulo, temos:

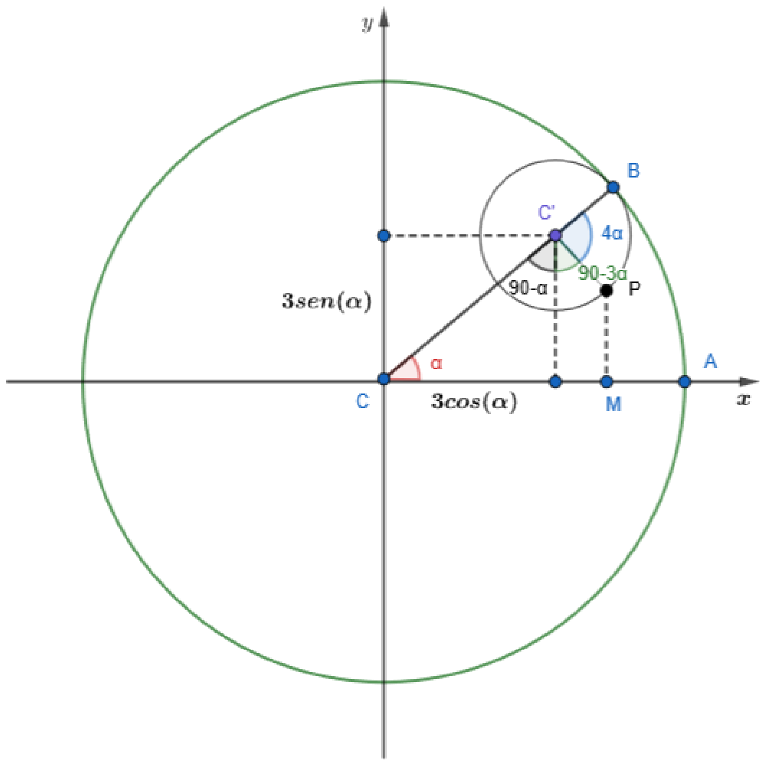
$$\alpha = \frac{BA}{4}$$

E

$$\beta = \frac{BP}{1}$$

Mas $BA = BP$, logo, $\beta = 4\alpha$.

Observe a figura abaixo, com os ângulos marcados:



Da figura, podemos observar que a coordenada x de P, CM, é a soma das projeções de CC' e $C'P$ sobre o eixo x, isto é:

$$x_p = CC'\cos(\alpha) + C'Psen(90-3\alpha) = 3\cos(\alpha) + sen(90-3\alpha) = 3\cos(\alpha) + \cos(3\alpha)$$

A coordenada y de P, PM, por sua vez, é a projeção de CC' sobre o eixo y subtraída da projeção de $C'P$ sobre o eixo y, isto é:

$$y_P = CC'sen(\alpha) - C'Pcos(90-3\alpha) = 3sen(\alpha) - sen(3\alpha)$$

Da trigonometria, temos que:

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$$
$$sen(3\alpha) = 3sen(\alpha) - 4sen^3(\alpha)$$

Ou seja:

$$x_P = 3\cos(\alpha) + 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) = 4\cos^3(\alpha)$$
$$y_P = 3sen(\alpha) - \left(3sen(\alpha) - 4sen^3(\alpha)\right) = 4sen^3(\alpha)$$

Por fim:

$$P = (4\cos^3(\alpha), 4sen^3(\alpha))$$

O ponto P, conforme dado acima, está em sua forma paramétrica, isto é, suas coordenadas estão em função de um parâmetro, no caso α. Para encontrar o lugar geométrico dos pontos P, devemos explicitar uma relação obedecida entre suas coordenadas.

Um fato simples, porém, fundamental, é a equação:

$$sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Como podemos usá-la? Veja:

$$x_P = 4\cos^3(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \sqrt[3]{\frac{x_P}{4}}$$

E

$$y_P = 4sen^3(\alpha) \Rightarrow sen(\alpha) = \sqrt[3]{\frac{y_P}{4}}$$

Ou seja:

$$sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 = \left(\frac{x_P}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_P}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \left(\frac{x_P}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_P}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

Logo, a equação acima representa o lugar geométrico dos pontos P que satisfazem o enunciado.

Gabarito: $\boldsymbol{P = (4\cos^3(\alpha), 4sen^3(\alpha)); \left(\frac{x_P}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_P}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.}$

---

145. (IME/2015)

Pelo ponto P de coordenadas $(-1, 0)$ traçam-se as tangentes t e s à parábola $y^2 = 2x$. A reta t intercepta a parábola em A e a reta s intercepta a parábola em B. Pelos pontos A e B traçam-se paralelas às tangentes encontrando a parábola em outros pontos C e D, respectivamente. Calcule o valor da razão AB/CD.

Comentários

Inicialmente, podemos fazer o seguinte diagrama:

O primeiro passo é descobrir a equação das retas $t\ e\ s$. Seja então a reta:

$$y = mx + b$$

Se ela passa por $P = (-1,0)$, temos:

$$0 = (-1) \cdot m + b \Rightarrow b = m$$

Assim, a reta é da forma:

$$y = m(x + 1)$$

Para que ela seja tangente à parábola, vamos substituir a equação da reta na equação da parábola, ou seja:

$$m^2(x + 1)^2 = 2x \Leftrightarrow m^2x^2 + 2(m^2 - 1)x + m^2 = 0 \ eq.01$$

Seu discriminante é dado por:

$$\Delta = 4(m^2 - 1)^2 - 4m^2 \cdot m^2 = 4[(m^2 - 1)^2 - (m^2)^2] = 4[(m^2 - 1 + m^2)(m^2 - 1 - m^2)]$$

$$\Delta = 4(2m^2 - 1)(-1)$$

Para a condição de tangência, devemos ter:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 2m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Logo, sem perda de generalidade, seja:

$$t: y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)$$

$$s: y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)$$

Observe, na $eq.01$, que ela depende de m^2. Dessa forma, podemos encontrar as coordenadas x de A e B fazendo $m^2 = \frac{1}{2}$ na $eq.01$, veja:

$$\frac{1}{2}x^2 + 2\left(\frac{1}{2} - 1\right)x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

Ou seja, $x_A = x_B = 1$.

Assim, temos:

$$A \in t \Rightarrow y_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+1) = \sqrt{2}$$

$$B \in s \Rightarrow y_B = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+1) = -\sqrt{2}$$

Do que segue: $A = (1, \sqrt{2})$ e $B = (1, -\sqrt{2})$ e $AB = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\sqrt{2} - \left(-\sqrt{2}\right)\right)^2} = 2\sqrt{2}$

Sejam u e v, tais que $u \parallel t$ e $v \parallel s$. Temos, então:

$$m_u = m_t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$B \in u \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{y - \left(-\sqrt{2}\right)}{x - 1} \Rightarrow u: y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-3)$$

$$m_v = m_s = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A \in v \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{y - \left(\sqrt{2}\right)}{x - 1} \Rightarrow v: y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-3)$$

Note que, para ambas as retas, temos:

$$y^2 = \frac{1}{2}(x-3)^2$$

Substituindo na equação da parábola, vem:

$$\frac{1}{2}(x-3)^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$$

Resolvendo para x, temos $x = 1$ ou $x = 9$. Note que se fizermos $x = 1$ em qualquer uma das retas, vamos obter os pontos A e B. Portanto, somente $x = 9$ convém.

Do enunciado, $C \in v$, do que temos $x_C = 9\ e$:

$$y_C = -\frac{1}{\sqrt{2}}(9-3) = -\frac{6}{\sqrt{2}}$$

Ou seja $C = (9, -\frac{6}{\sqrt{2}})$.

Ainda do enunciado, $D \in u$, do que temos x_D e:

$$y_D = \frac{1}{\sqrt{2}}(9-3) = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

Ou seja $D = (9, \frac{6}{\sqrt{2}})$.

Cálculo de DC:

$$DC = \sqrt{(9-9)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{2}} - (-\frac{6}{\sqrt{2}})\right)^2} = \frac{12}{\sqrt{2}}$$

Por fim:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{12}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{AB}{CD} = \frac{1}{3}}$**.**

146.(IME/2015)

Sejam r a circunferência que passa pelos pontos $(6,7)$, $(4,1)$ e $(8,5)$ e t a reta tangente à r, que passa por $(0,-1)$ e o ponto de tangência tem ordenada 5. A menor distância do ponto $P(-1,4)$ à reta t é:

a) $3\sqrt{2}$

b) 4

c) $2\sqrt{3}$

d) 3

e) $4\sqrt{10}/5$

Comentários

Precisamos encontrar o centro e o raio da circunferência. Uma forma de fazer isso é lembrar, da geometria plana, que o circuncentro é o encontro das mediatrizes dos lados do triângulo.

Vamos nomear os pontos: $A = (6,7), B = (4,1)\ e\ C = (8,5)$.

Sendo assim, vamos encontrar as mediatrizes das retas suporte dos lados AB, que vamos chamar de reta AB e do lado BC, analogamente, reta BC.

Para encontrar a mediatriz, seguiremos os seguintes passos:

1) Calcular o ponto médio do segmento:

1.1) Ponto médio de AB:

$$M_{AB}=\frac{A+B}{2}=(5,4)$$

1.2) Ponto médio de BC:

$$M_{BC}=\frac{B+C}{2}=(6,3)$$

2) Calcular o coeficiente angular da reta suporte do segmento.

2.1) Coeficiente angular de r_{AB}:

$$m_{AB}=\frac{7-1}{6-4}=3$$

2.2) Coeficiente angular de r_{BC}:

$$m_{BC}=\frac{5-1}{8-4}=1$$

Determinar o coeficiente angular da mediatriz (m') e encontrar a reta:

3.1) Mediatriz de AB:

$$m'_{AB}m_{AB}=-1\Rightarrow m'_{AB}\cdot 3=-1\Rightarrow m'_{AB}=-\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3}=\frac{y-4}{x-5}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{17}{3}$$

3.2) Mediatriz de BC:

$$m'_{BC}m_{BC}=-1\Rightarrow m'_{BC}\cdot 1=-1\Rightarrow m'_{BC}=-1$$

$$-1=\frac{y-3}{x-6}\Leftrightarrow y=-x+9$$

O centro da circunferência é a intersecção dessas retas. Seja $C=(x_C,y_C)$ o centro dessa circunferência, devemos ter:

$$-x_C+9=-\frac{1}{3}x_C+\frac{17}{3}\Leftrightarrow x_C=5.$$

$$y_C=-5+9=4$$

Portanto $C=(5,4)$.

Para descobrir seu raio, basta calcular a distância de C a um dos vértices:

$$R=AC=\sqrt{(5-6)^2+(4-7)^2}=\sqrt{10}$$

Portanto, a circunferência é:

$$r:(x-5)^2+(y-4)^2=10$$

Seja $T=(x_T,y_T)$ o ponto de tangência. Temos que $y_T=5$. Substituindo na equação da circunferência:

$$(x_T-5)^2+(5-6)^2=10\Rightarrow x_T=8\ ou\ x_T=2$$

Temos então dois candidatos a ponto T:

$$T_1 = (2,5) \;\; e \;\; T_2 = (8,5)$$

As retas que passam por $(0,-1)$ e T_1 e $(0,-1)$ e T_2 são, respectivamente:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - 3x + 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4y - 3x + 4 = 0$$

Suas respectivas distâncias ao ponto C, centro da circunferência:

$$d_1 = \left|\frac{1 \cdot 4 - 3 \cdot 5 + 1}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}\right| = \sqrt{10}$$

$$d_2 = \left|\frac{4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 + 4}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}\right| = 1$$

Para que reta seja tangente a circunferência, sua distância ao centro da mesma deve ser igual ao raio. Isso somente ocorre para a reta que passa por $(0,-1)$ e T_1. Calculando o que é pedido no enunciado, temos:

$$d = \left|\frac{1 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) + 1}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}\right| = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

Gabarito: "e".

---

147. (IME/2015)

Determine o produto dos valores máximo e mínimo de y que satisfazem às inequações dadas para algum valor de x.

$$\mathbf{2x^2 - 12x + 10 \leq 5y \leq 10 - 2x}$$

a) $-3,2$

b) $-1,6$

c) 0

d) $1,6$

e) $3,2$

Comentários

Do enunciado, y satisfaz, simultaneamente, as desigualdades:

$$\frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + 2 \leq y \quad des.01$$

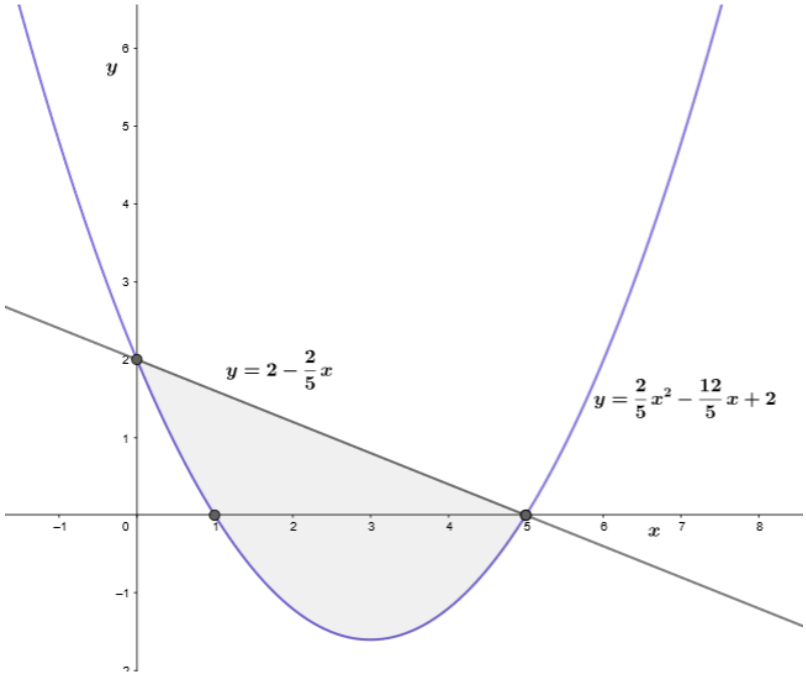
E

$$y \leq 2 - \frac{2}{5}x \quad des.02$$

Por simplicidade, vamos resolver essa questão graficamente.

Observe que o lado esquerdo da desigualdade 01 corresponde aos pontos acima da parábola $p: y = \frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + 2$ e que o lado direito da desigualdade 02 corresponde aos pontos sob a reta $r: y = 2 - \frac{2}{5}x$.

Representando essa situação graficamente, temos:



A região hachurada na figura acima representa o conjunto de pontos que obedece, simultaneamente, às duas desigualdades dados no enunciado.

Como ele pede o produto entre o máximo e mínimo valor de y, basta observar no gráfico que $y_{máx}$ ocorre na intersecção das curvas com o eixo y, enquanto $y_{mín}$ ocorre no vértice da parábola.

Para encontrar $y_{máx}$, basta fazer $x = 0$ em qualquer uma das curvas. Na reta:

$$y_{máx} = 2 - \frac{2}{5} \cdot 0 = 2$$

Do estudo das funções de segundo grau, sabemos que o y do vértice da parábola é dado por:

$$y_{mín} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\left(-\frac{12}{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{5} \cdot 2}{4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)} = -\frac{8}{5}$$

Por fim: $y_{máx} \cdot y_{mín} = 2 \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) = -3,2$

Gabarito: "a".

148.(IME/2014)

Uma elipse cujo centro encontra-se na origem e cujos eixos são paralelos ao sistema de eixos cartesianos possui comprimento da semidistância focal igual a $\sqrt{3}$ e excentricidade igual a $\sqrt{3}/2$. Considere que os pontos A, B, C e D representam as interseções da elipse com as retas de equações $y = x$ e $y = -x$. A área do quadrilátero $ABCD$ é

a) 8

b) 16

c) $16/3$

d) $16/5$

e) $16/7$

Comentários

Do enunciado, temos que a semidistância focal, c, é dada por $\sqrt{3}$, isto é, $c = \sqrt{3}$. Por definição, a excentricidade e da elipse é dada por:

$$e = \frac{c}{a}$$

Onde a é o semieixo maior da elipse.

Mas

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{a} \Rightarrow a = 2$$

Além disso, sabemos que o semieixo menor, b, obedece a seguinte relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2^2 = b^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow b = 1$$

A elipse está centrada na origem e seus eixos são paralelos aos eixos coordenados. Disso, podemos concluir que a equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Como a equação da elipse apresenta as coordenadas ao quadrado, a intersecção entre as retas e a elipse deve vir da seguinte condição:

$$x^2 = y^2$$

Ou seja:

$$\frac{x^2}{4} + x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Para $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, temos duas possibilidades: $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. Analogamente, para $x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, temos $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. Então, os pontos são:

$$A = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), B = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), C = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) e\ D = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Note que

$$AB = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)^2}$$
$$= BC$$

Calculando as distâncias, como feito acima, temos:

$$AB = BC = CD = DA$$

Note ainda que $A\ e\ B$ possuem mesma abscissa, logo estão sobre a reta $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, que é paralela ao eixo y. Além disso, $B\ e\ C$ possuem mesma ordenada, logo estão sobre a reta $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, que é paralela ao eixo x. Ou seja, $AB \perp BC$. Repetindo o raciocínio, temos que $CD \perp DA$, do que temos que ABCD é um quadrado.

Por fim:

$$Área\ de\ ABCD = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

Gabarito: "d".

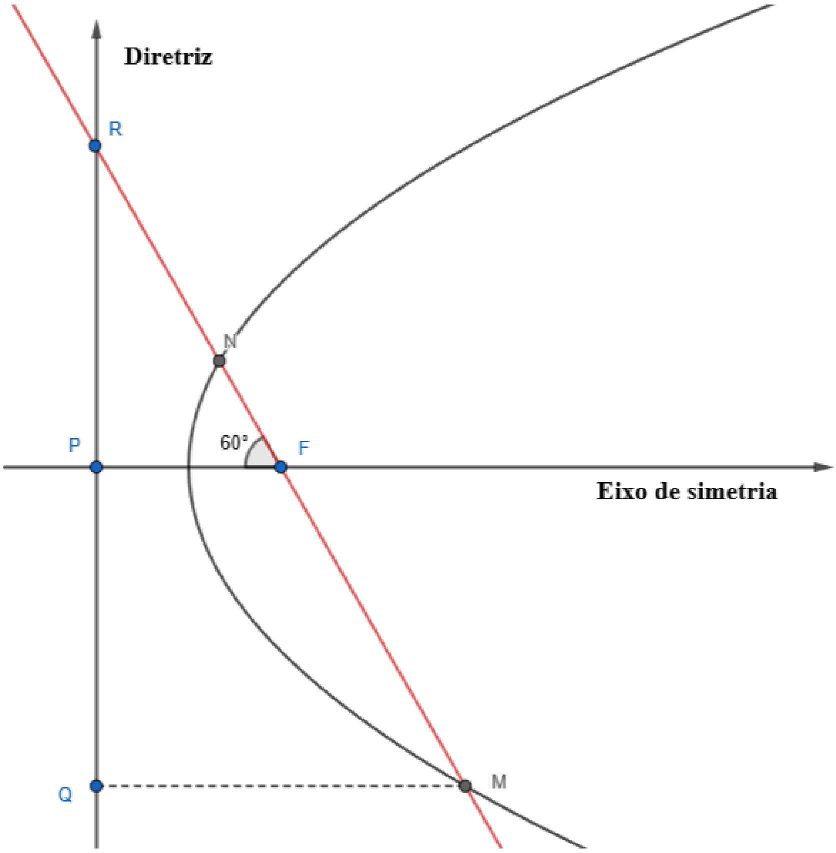
---

149. (IME/2012)

É dada uma parábola de parâmetro p. Traça-se a corda focal MN, que possui uma inclinação de 60° em relação ao eixo de simetria da parábola. A projeção do ponto M sobre a diretriz é o ponto Q, e o prolongamento da corda MN intercepta a diretriz no ponto R. Determine o perímetro do triângulo MQR em função de p, sabendo que N encontra-se no interior do segmento MR.

Comentários

Inicialmente, vamos representar a situação graficamente:



O parâmetro, p, corresponde à distância do foco F à diretriz. Ou seja: $PF = p$.

Pela definição de parábola, $MQ = MF$. Como o ângulo $Q\widehat{M}R = 60°$, pois $QM \parallel PF$, temos que $\cos(60°) = \frac{1}{2} = \frac{QM}{RM} \Rightarrow RM = 2QM$.

Mas

$$RM = 2QM = RF + MF = RF + QM \Rightarrow RF = QM$$

Olhando para o triângulo ΔPFR, temos

$$\cos(60°) = \frac{1}{2} = \frac{PF}{RF} \Rightarrow RF = 2PF = 2p$$

Ou seja

$$RF = QM \Rightarrow QM = 2p \Rightarrow RM = 4p$$

Além disso

$$tg(60°) = \sqrt{3} = \frac{RQ}{QM} = \frac{RQ}{2p} \Rightarrow RQ = 2\sqrt{3}p$$

Por fim, temos

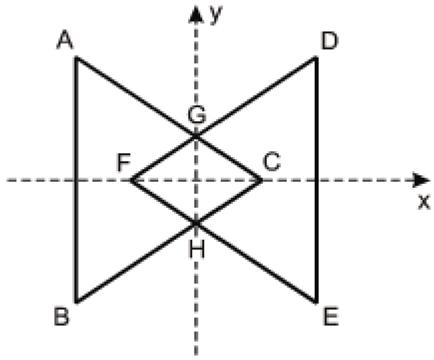
$$Perímetro\ de\ MQR = MQ + RM + RQ = 2p + 4p + 2\sqrt{3}p = 2p(\sqrt{3} + 3)$$

Gabarito: $\mathbf{2p(\sqrt{3} + 3)}$.

---

150. (IME/2012)

Os triângulos ABC e DEF são equiláteros com lados iguais a m. A área da figura $FHCG$ é igual à metade da área da figura $ABHFG$. Determine a equação da elipse de centro na origem e eixos formados pelos segmentos FC e GH.



a) $48x^2 + 36y^2 - \sqrt{2}m^2 = 0$

b) $8x^2 + 16y^2 - \sqrt{3}m^2 = 0$

c) $16x^2 + 48y^2 - 3m^2 = 0$

d) $8x^2 + 24y^2 - m^2 = 0$

e) $16x^2 - 24y^2 - m^2 = 0$

Comentários

Por simetria, os triângulos ΔGHC e ΔGHF são congruentes. Além disso, perceba que eles também são equiláteros, pois $GH \parallel DE$. Seja a a área de um desses triângulos.

A área do triângulo equilátero ΔABC é dada pela soma das áreas dos triângulos ΔGHC e ΔGHF (figura $FHCG$) e da figura $ABHFG$. Além disso, temos:

$$Aréa\ da\ figura\ FHCG = 2a$$

Do enunciado:

$$Área\ da\ figura\ ABHFG = 2 \cdot (2a) = 4a$$

Ou, seja:

$$Área\ do\ triângulo\ \Delta ABC = 2a + 4a = 6a$$

Como ΔABC e ΔGHC são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{6a}{a} = \left(\frac{AB}{GH}\right)^2 \Rightarrow GH = \frac{1}{\sqrt{6}} AB = \frac{m}{\sqrt{6}}$$

Pois a razão entre as áreas é o quadrado da razão entre os lados correspondentes.

Pela congruência, FC mede o dobro da altura do triângulo ΔGHC. Mas ele é equilátero, do que temos que sua altura mede:

$$\frac{FC}{2} = \frac{GC\sqrt{3}}{2} = \frac{GH\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{2\sqrt{2}}$$

Seja a elipse:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{FC}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{GH}{2}\right)^2}=1$$

Ou seja:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{m}{2\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{m}{2\sqrt{6}}\right)^2}=1 \Leftrightarrow 8x^2+24y^2-m^2=0$$

Gabarito: “d”.

151.(IME/2011)

Determine o valor da excentricidade da cônica dada pela equação $x^2-10\sqrt{3}xy+11y^2+16=0$.

Comentários

Observe que a equação dada corresponde a uma cônica, conforme dito no enunciado, mas apresenta um termo estranho: xy.

Para retirá-lo da equação, vamos lançar mão da matriz de rotação, a qual possui como efeito efetuar uma rotação de um ângulo θ nos eixos coordenados. Ela é dada por:

$$M=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & sen(\theta)\\ -sen(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Após aplicá-la às coordenadas (x,y) de um ponto, obtém-se as coordenadas desse mesmo ponto, (x',y'), em um sistema cartesiano rotacionado de θ, no sentido anti-horário, em relação ao sistema original. Matematicamente:

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & sen(\theta)\\ -sen(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Ou ainda, multiplicando por M^{-1} pela esquerda:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -sen(\theta)\\ sen(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

Multiplicando as matrizes do lado direito da equação matricial acima, temos:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\,x'-sen(\theta)y'\\ sen(\theta)x'+\cos(\theta)\,y'\end{pmatrix}$$

Fazendo a substituição na equação da cônica, temos:

$$(\cos(\theta)\,x'-sen(\theta)y')^2-10\sqrt{3}(\cos(\theta)\,x'-sen(\theta)y')(sen(\theta)x'+\cos(\theta)\,y')$$
$$+11(sen(\theta)x'+\cos(\theta)\,y')^2+16=0$$

Desenvolvendo e agrupando os termos semelhantes, temos:

$$x^2=\cos^2\theta\,x'^2-2sen\theta cos\theta x'y'+sen^2\theta y'^2$$

$$11y^2=11(sen^2\theta x'^2+2sen\theta cos\theta x'y'+\cos^2\theta\,y'^2)$$

$$-10\sqrt{3}xy=-10\sqrt{3}(cos\theta sen\theta x'^2+(\cos^2\theta-sen^2\theta)x'y'-sen\theta cos\theta y'^2)$$

Estamos interessados em zerar o coeficiente do termo $x'y'$. Olhando para as expressões acima, seu coeficiente é:

$$-2sen\theta cos\theta + 22sen\theta cos\theta - 10\sqrt{3}(\cos^2\theta - sen^2\theta)$$

Ou ainda

$$20sen\theta cos\theta - 10\sqrt{3}(\cos^2\theta - sen^2\theta)$$

Da trigonometria, temos:

$$2sen\theta cos\theta = sen(2\theta)$$

$$\cos^2\theta - sen^2\theta = \cos(2\theta)$$

Assim, o coeficiente de $x'y'$ fica:

$$10sen(2\theta) - 10\sqrt{3}\cos(2\theta) = 0 \Rightarrow tg(2\theta) = \sqrt{3}$$

Por conveniência, vamos escolher $\theta = \frac{\pi}{6}$. Assim: $sen(\theta) = \frac{1}{2}$ e $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

O coeficiente de x'^2, por sua vez, será:

$$\cos^2\theta + 11sen^2\theta - 10\sqrt{3}sen\theta cos\theta = \frac{3}{4} + 11\cdot\frac{1}{4} - 10\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -4$$

O coeficiente de y'^2, por sua vez, será:

$$sen^2\theta + 11\cos^2\theta + 10\sqrt{3}sen\theta cos\theta = \frac{1}{4} + 11\cdot\frac{3}{4} + 10\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 16$$

Logo, a cônica, no novo referencial, será:

$$-4x'^2 + 16y'^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{1} = 1$$

Ou seja, uma hipérbole de semieixo real $a = 2$ e semieixo imaginário $b = 1$. Sua semi-distância focal é dada por:

$$c^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

Por fim, sua excentricidade:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Gabarito: $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

---

152. (IME/2010)

Uma hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$ tem centro na origem e passa pelo ponto $(\sqrt{5}, 1)$.

A equação de uma reta tangente a esta hipérbole e paralela a $y = 2x$ é:

a) $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 6$

b) $y = -2x + 3\sqrt{3}$

c) $3y = 6x + 2\sqrt{3}$

d) $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 4$

e) $y = 2x + \sqrt{3}$

Comentários

Vamos utilizar a seguinte equação da hipérbole, conforme descrita no enunciado:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Temos que $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$, ou seja, $c = a\sqrt{2}$.

Além disso, temos também:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow b = a$$

Ou seja, nossa hipérbole tem a forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Sabemos que ela passa por $(\sqrt{5}, 1)$, então:

$$\frac{5}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

Assim, a hipérbole está determinada:

$$x^2 - y^2 = 4$$

A reta que buscamos é paralela à reta $y = 2x$. Então, ela deve ser da forma:

$$r: y = 2x + b$$

Substituindo na equação da hipérbole, temos:

$$x^2 - (2x + b)^2 = 4 \Leftrightarrow -3x^2 - 4bx - b^2 - 4 = 0$$

Seu discriminante deve ser nulo, da condição de tangência, ou seja:

$$\Delta = 16b^2 - 4 \cdot (-3)(-b^2 - 4) = 0 \Rightarrow b^2 = 12 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{3}$$

Logo, as possíveis retas são:

$$r_{1,2}: y = 2x \pm 2\sqrt{3} \Leftrightarrow r_{1,2}: \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x \pm 6$$

Gabarito: "a".

153.(IME/2010)

Seja M um ponto de uma elipse com centro O e focos F e F'. A reta r é tangente à elipse no ponto M e s é uma reta, que passa por O, paralela a r. As retas suportes dos raios vetores MF e MF' interceptam a reta s em H e H', respectivamente. Sabendo que o segmento FH mede 2 cm, o comprimento $F'H'$ é:

a) 0,5 cm

b) 1,0 cm

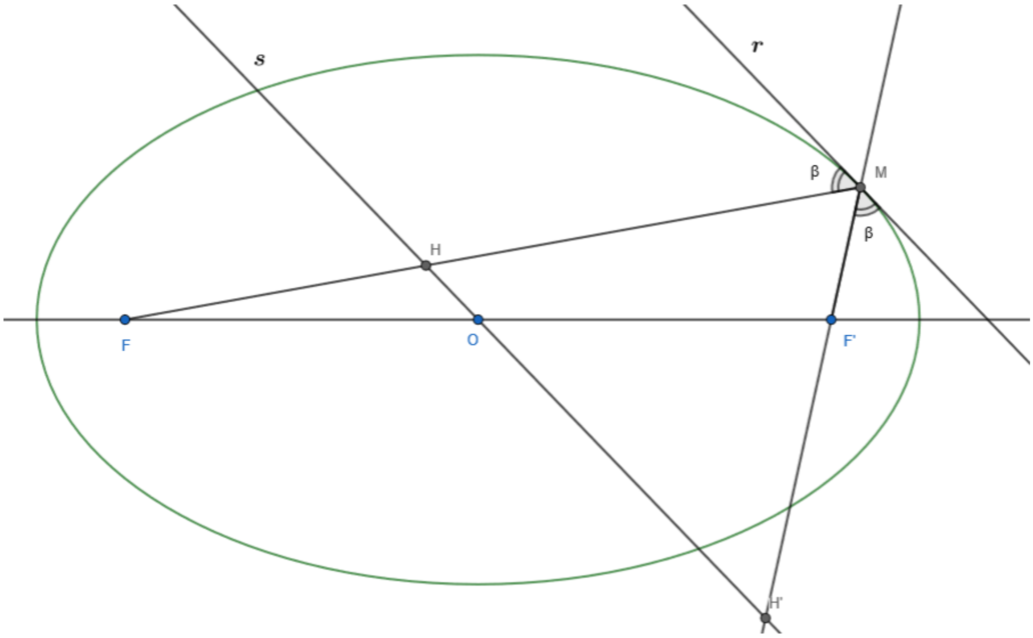
c) 1,5 cm

d) 2,0 cm

e) 3,0 cm

Comentários

Observe o diagrama:

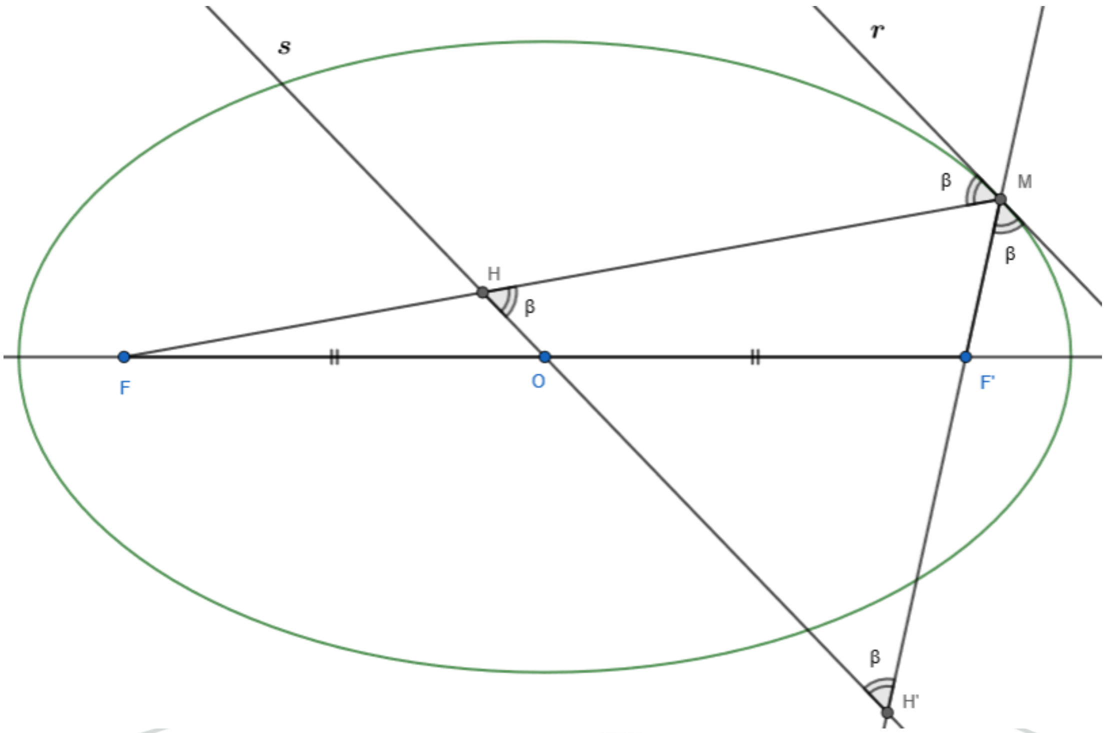


Como r é tangente à elipse, temos que os ângulos que FM e $F'M$ fazem com ela são iguais. Além disso, como $r \parallel s$, temos que:

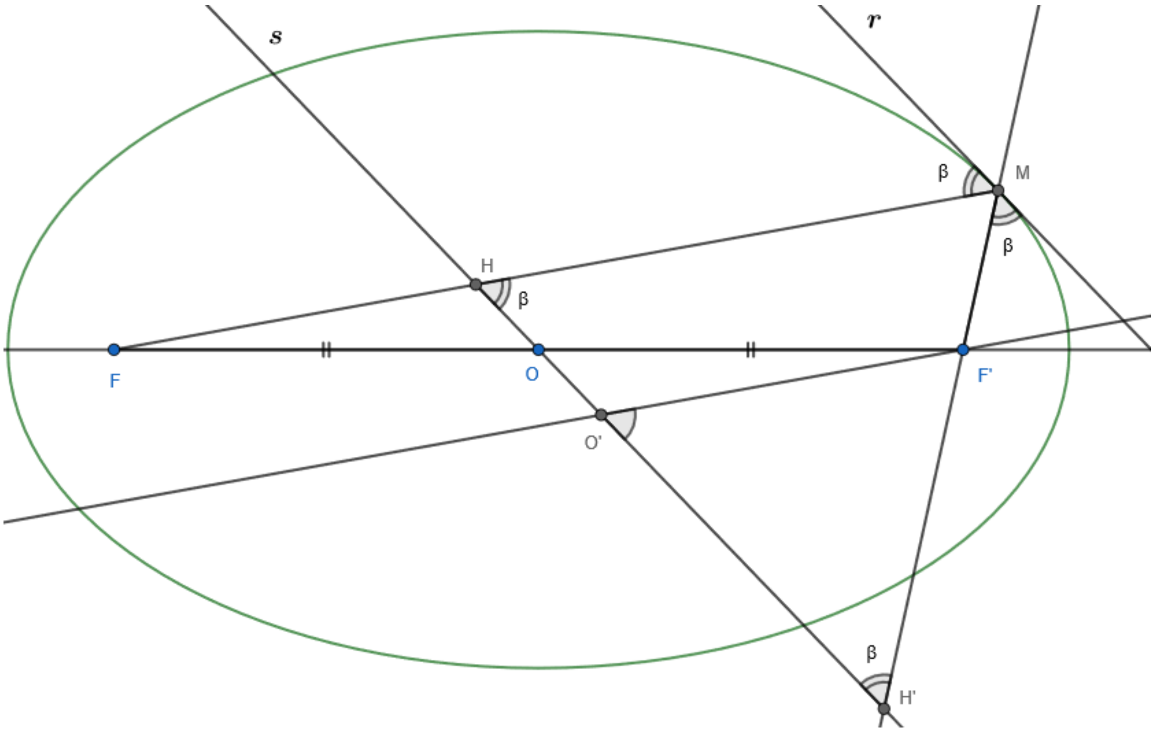
$$O\widehat{H}M = O\widehat{H'}M = \beta$$

E como O é o centro da elipse: $FO = OF'$.

Disso, temos a seguinte figura:



Agora, trace por F' uma reta paralela ao segmento FM:



Como a reta base de FH é paralela à reta base de $O'F'$, os ângulos $H\hat{F}O$ e $O\widehat{F'}O'$ são iguais. Os ângulos $H\hat{O}F$ e F'$\hat{O}$O' são opostos pelo vértice, logo, são iguais. Além disso, $FO = OF'$. Portanto, concluímos que os triângulos $\Delta OO'F'$ e ΔOFH são congruentes pelo caso ALA. Disso, temos que:

$$FH = O'F'$$

Pelo mesmo motivo da igualdade dos ângulos $H\hat{F}O$ e $O\widehat{F'}O'$, temos $F'\widehat{O'}H' = \beta$, ou seja, o triângulo $\Delta O'F'H'$ é isósceles e

$$O'F' = F'H' \Rightarrow FH = 2 = F'H'$$

Gabarito: "d".

---

154. (IME/2004)

Considere a parábola P de equação $y = ax^2$, com $a > 0$ e um ponto A de coordenadas (x_0, y_0) satisfazendo a $y_0 < ax_0^2$. Seja S a área do triângulo ATT', onde T e T' são os pontos de contato das tangentes a P passando por A.

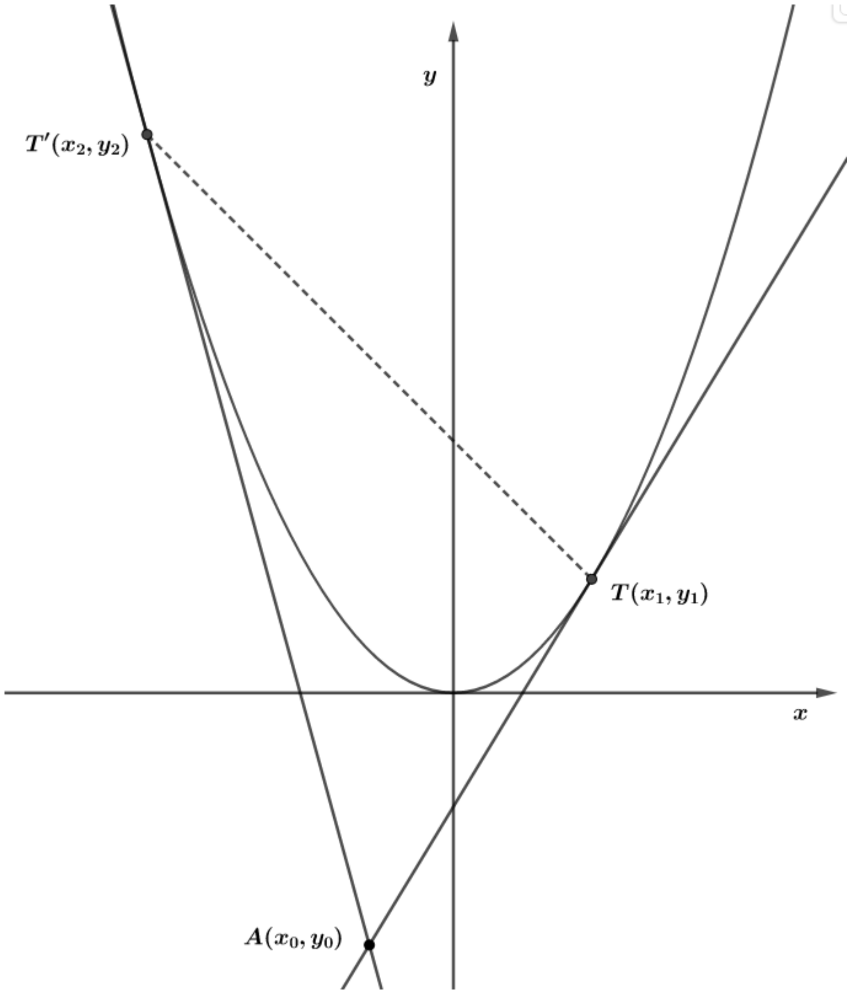
a) Calcule o valor da área S em função de a, x_0 e y_0.

b) Calcule a equação do lugar geométrico do ponto A, admitindo que a área S seja constante.

c) Identifique a cônica representada pela equação obtida no item anterior.

Comentários

a) Conhecendo a equação da parábola e sabendo que o ponto A é tal que $y_0 < ax_0^2$, então podemos fazer o esboço da situação. Sem perda de generalidade:



Como T e T' são pontos de tangência da parábola, temos que $y_1 = ax_1^2$ e $y_2 = ax_2^2$. Além disso, podemos derivar a parábola para encontrar o coeficiente angular das retas tangentes que passam por T e T':

$$y = ax^2 \Rightarrow y' = 2ax$$

Para calcular a área do $\Delta ATT'$, devemos escrever x_1 e x_2 em função de a, x_0 e y_0. Vamos encontrar a equação das retas tangentes que passam pelo ponto A. Perceba que escolhendo-se qualquer um dos pontos $(T\ ou\ T')$ para obter a reta tangente, encontraremos uma situação análoga em ambos os casos. Então, vamos chamar (x_t, y_t) como o ponto que é tangente à parábola e que passa por A (encontraremos uma equação do segundo grau na variável x_t e suas raízes serão x_1 e x_2).

$$y' = 2ax_t\ (coeficiente\ angular\ da\ reta)$$

$$y - y_t = 2ax_t(x - x_t)\ (equação\ da\ reta)$$

A reta passa pelo ponto A, desse modo:

$$y_0 - y_t = 2ax_t(x_0 - x_t)$$

$$y_0 = 2ax_0x_t - 2ax_t^2 + \underbrace{y_t}_{ax_t^2} \Rightarrow y_0 = 2ax_0x_t - ax_t^2$$

Assim, obtemos uma equação do segundo grau na variável x_t:

$$ax_t^2 - 2ax_0x_t + y_0 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$x_t = \frac{ax_0 \pm \sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}$$

Como definimos anteriormente que (x_t, y_t) é o ponto de tangência à cônica e que passa por A, temos que essas raízes são x_1 e x_2. Dessa forma:

$$x_1 = \frac{ax_0 + \sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a} \ e \ x_2 = \frac{ax_0 - \sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}$$

Agora, podemos proceder ao cálculo da área do $\Delta ATT'$. Usaremos o método do determinante:

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & ax_1^2 & 1 \\ x_2 & ax_2^2 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$S = \frac{1}{2}|ax_0x_1^2 + y_0x_2 + ax_1x_2^2 - ax_1^2x_2 - ax_0x_2^2 - y_0x_1|$$

O bizu começa aqui, antes de substituirmos as variáveis x_1 e x_2, iremos fatorar a expressão.

$$S = \frac{1}{2}|ax_0(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - y_0(x_1 - x_2) - ax_1x_2(x_1 - x_2)|$$

$$S = \frac{1}{2}|(x_1 - x_2)[ax_0(x_1 + x_2) - y_0 - ax_1x_2]| \ (I)$$

Lembra da equação do segundo grau que encontramos? Podemos aplicar as relações de Girard nela para encontrar as variáveis da equação (I). Veja:

$$ax_t^2 - 2ax_0x_t + y_0 = 0$$

Como x_1 e x_2 são as raízes dessa equação, temos:

$$x_1 + x_2 = 2x_0$$

$$x_1x_2 = \frac{y_0}{a}$$

Também podemos escrever $x_1 - x_2$:

$$x_1 - x_2 = \frac{ax_0 + \sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a} - \left(\frac{ax_0 - \sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}\right) = \frac{2\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}$$

Substituindo os valores em (I):

$$S = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{2\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}\right)\left(ax_0(2x_0) - y_0 - a\left(\frac{y_0}{a}\right)\right)\right|$$

$$\therefore \boxed{S = \frac{2(ax_0^2 - y_0)\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}}$$

b) Para encontrar o lugar geométrico de A, vamos usar o resultado encontrado no item a e manipular a equação.

$$S=\frac{2(ax_0^2-y_0)\sqrt{a^2x_0^2-ay_0}}{a}=\frac{2\sqrt{(ax_0^2-y_0)^2}\sqrt{a}\sqrt{ax_0^2-y_0}}{a}$$

$$\Rightarrow S=\frac{2}{\sqrt{a}}\sqrt{(ax_0^2-y_0)^3}\Rightarrow\frac{S\sqrt{a}}{2}=\sqrt{(ax_0^2-y_0)^3}\Rightarrow\frac{aS^2}{4}=(ax_0^2-y_0)^3$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt[3]{2aS^2}}{2}=ax_0^2-y_0$$

$$\therefore\boxed{y_0=ax_0^2-\frac{\sqrt[3]{2aS^2}}{2}}$$

c) A cônica resultante é a parábola P transladada de $-\frac{\sqrt[3]{2aS^2}}{2}$.

Gabarito: a) $S=\frac{2(ax_0^2-y_0)\sqrt{a^2x_0^2-ay_0}}{a}$ **b)** $y_0=ax_0^2-\frac{\sqrt[3]{2aS^2}}{2}$ **c) Parábola** P **transladada de** $-\frac{\sqrt[3]{2aS^2}}{2}$**.**

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da Geometria Analítica. Esse assunto possui alta taxa de incidência nas provas militares, é muito provável que caia uma questão dela no seu concurso. Resolva muitos exercícios e memorize as equações reduzidas das principais cônicas. É importante que você saiba os elementos de cada uma dessas cônicas, pois pode ser que uma questão lhe peça para encontrar as equações usando os elementos das cônicas como, por exemplo, parâmetro da parábola, excentricidade da elipse, etc...

Sempre que você tiver dúvidas, não hesite em nos procurar. Estamos sempre prontos para atendê-lo.

/profvictorso

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 7: geometria analítica. 6. ed. Atual, 2013. 312p.

[2] Steinbruch, Alfredo. Winterle, Paulo. Geometria analítica. 2 ed. Pearson Makron Books, 1987. 292p.

[3] Moreira, Filipe. *Geometria analítica*. Rumo ao ITA, 2005. Disponível em: <https://rumoaoita.com/wp-content/uploads/2017/03/geometria_analitica_apostila_de_geometria_analitica_ita.pdf>

[4] Zerbinatti, Paulo. *Áreas de Polígonos via Determinantes*. Unesp, 2015. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/138463/000864552.pdf?sequence=1>

[5] Benevides, Fabrício. Neto, Antonio. *Cônicas Rotacionadas*. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/cjst7fgix5444.pdf>