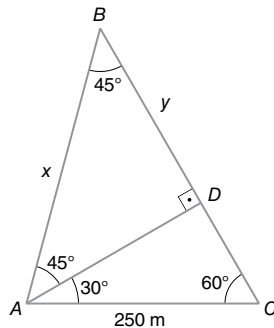


Capítulo 13
Outras razões trigonométricas, adição de arcos e resolução de triângulos
Para pensar

De acordo com os dados do enunciado, $AC = 250$ m e o ângulo oposto a \overline{BC} mede 60° . Como a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180° , temos que o ângulo oposto a \overline{AC} mede 45° .

Com o que aprendemos até aqui, o problema pode ser resolvido a partir da seguinte construção, em que x é a distância AB e y é a medida da projeção ortogonal de \overline{AB} sobre \overline{BC} :



O triângulo ABD é isósceles de base \overline{AB} , logo $AD = BD = y$. Assim, temos:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{y}{x} \\ \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{y}{250} \end{cases} \Rightarrow x = 125\sqrt{6}$$

Logo, a distância AB é $125\sqrt{6}$ m.

Com o que aprenderemos neste capítulo, a resolução deste problema é significativamente facilitada. Observe a resolução a seguir.

Pela lei dos senos, temos que:

$$\frac{250}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{AB}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$

$$AB = \frac{250 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ}$$

$$AB = \frac{250 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$AB = \frac{250 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$AB = 125\sqrt{6}$$

Logo, a distância AB corresponde a $125\sqrt{6}$ m.

Exercícios propostos

1. Calculando as trigonométricas, temos:

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = 2$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = 2$$

$$\begin{aligned} \cotg^2 30^\circ &= \cotg 30^\circ \cdot \cotg 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

Assim:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sec 60^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ - \cotg^2 30^\circ}{\sec 0^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ} = \\ &= \frac{2 + 2 - 3}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, o valor numérico de E é $\frac{1}{2}$.

2. $E = \operatorname{cosec} x + \sec^2 2x + \cotg \frac{3x}{2}$

Para $x = \frac{\pi}{6}$, temos:

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} + \sec^2 \left(2 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + \cotg \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} + \sec^2 \frac{\pi}{3} + \cotg \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}} + \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \right)^2 + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = 2 + 4 + 1 = 7 \end{aligned}$$

Logo, $E = 7$.

3.
$$\begin{cases} \frac{1}{\cos x} = 3 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{3} & \text{(I)} \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$$\operatorname{sen}^2 x + \left(\frac{1}{3} \right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos $\operatorname{sen} x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e, portanto:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

4.
$$\begin{cases} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 4 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 4 \operatorname{sen} x & \text{(I)} \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$$\operatorname{sen}^2 x + (4 \operatorname{sen} x)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{17}}{17}$$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, temos $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{17}}{17}$.

Substituindo $\operatorname{sen} x$ por $-\frac{\sqrt{17}}{17}$ em (I), obtemos:

$$\cos x = -\frac{4\sqrt{17}}{17} \text{ e, portanto:}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{4\sqrt{17}}{17}} = -\frac{\sqrt{17}}{4}$$

5. a) $\operatorname{cosec} x = 1 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 1$
 $\therefore \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
 Logo, $S = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.
- b) $\sec x = -1 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = -1$
 $\therefore \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$
 Logo, $S = \{ \pi \}$.
- c) $\operatorname{cosec} x = 2 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 2$
 $\therefore \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$
 Logo, $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$.
- d) $\sec x = -2 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = -2$
 $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$
 Logo, $S = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$.
- e) $\sec x = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$
 $\therefore \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$
 Logo, $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$.
- f) $\operatorname{cosec} x = -\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\sqrt{2}$
 $\therefore \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$
 Logo, $S = \left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$.

6. Partindo da equação inicial dada, temos:

$$3 \operatorname{tg} x + 2 \cos x = 3 \sec x$$

$$3 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 2 \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos x} = 3 \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$3 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 2 \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos x} - 3 \cdot \frac{1}{\cos x} = 0$$

$$\cos x \neq 0$$

$$\frac{3 \operatorname{sen} x + 2 \cos^2 x - 3}{\cos x} = 0$$

$$3 \operatorname{sen} x + 2 \cos^2 x - 3 = 0$$

Sabemos que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, então:

$$3 \operatorname{sen} x + 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) - 3 = 0$$

Chamando $\operatorname{sen} x = y$, temos:

$$-2y^2 + 3y - 1 = 0$$

$$2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$$

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (2)} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

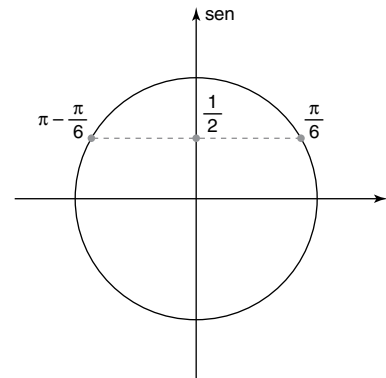
$$y = 1 \text{ ou } y = \frac{1}{2}$$

Para $y = 1$:

$y = \operatorname{sen} x = 1$ não convém, pois, para $\operatorname{sen} x = 1$, tem-se $\cos x = 0$, que não satisfaz a condição de existência.

Para $y = \frac{1}{2}$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$



Portanto, os valores de x que satisfazem a equação são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.

7. Partindo da equação inicial dada, temos:

$$\frac{\operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} - 1}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} - 1 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \right) \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1} =$$

$$= \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \right) \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1} = \cos x - \operatorname{sen} x$$

Alternativa d.

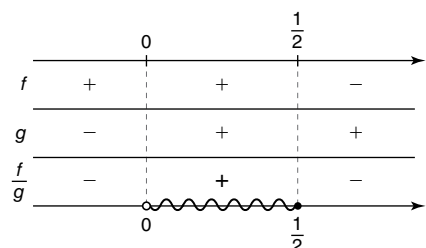
8. a) $\sec x \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} \geq 2$

Para $t = \cos x$, temos:

$$\frac{1}{t} \geq 2 \Rightarrow \frac{-2t + 1}{t} \geq 0$$

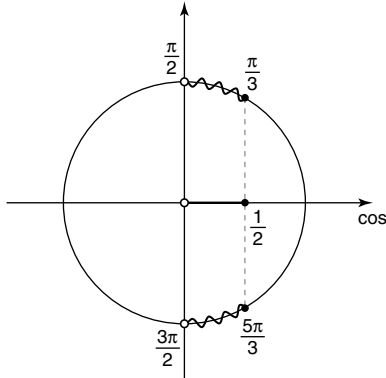
Estudando a variação de sinal das funções

$f(t) = -2t + 1$, $g(t) = t$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\frac{f(t)}{g(t)} \geq 0 \Rightarrow 0 < t \leq \frac{1}{2}$ e, portanto:

$$0 < \cos x \leq \frac{1}{2}$$



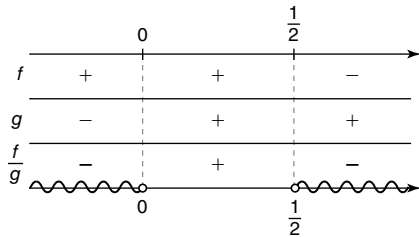
Logo, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{3} \right\}$.

b) $\operatorname{cosec} x < 2 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} < 2$. Para $t = \operatorname{sen} x$, temos:

$$\frac{1}{t} < 2 \Rightarrow \frac{-2t + 1}{t} < 0$$

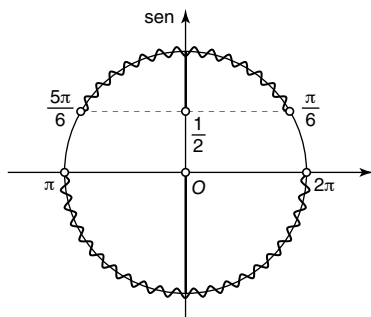
Estudando a variação de sinal das funções

$f(t) = -2t + 1$, $g(t) = t$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\frac{f(t)}{g(t)} < 0 \Rightarrow t < 0$ ou $t > \frac{1}{2}$ e, portanto:

$$\operatorname{sen} x < 0 \text{ ou } \operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$$



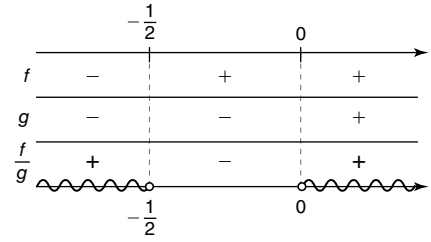
Logo, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \pi < x < 2\pi \right\}$.

c) $\sec x > -2 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} > -2$. Para $t = \cos x$, temos:

$$\frac{1}{t} > -2 \Rightarrow \frac{2t + 1}{t} > 0$$

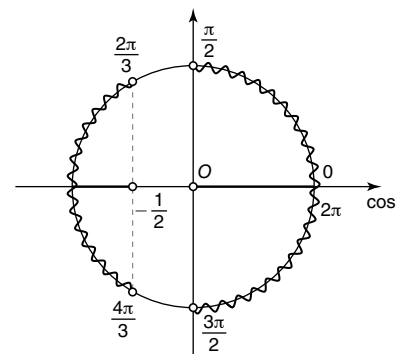
Estudando a variação de sinal das funções

$f(t) = 2t + 1$, $g(t) = t$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\frac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < -\frac{1}{2}$ ou $t > 0$ e, portanto:

$$\cos x < -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x > 0$$



Logo, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \right\}$.

9. $\cotg \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 6$

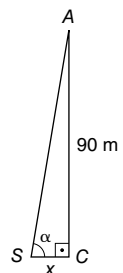
$$\sec \beta = \frac{13}{12} \Rightarrow \cos \beta = \frac{12}{13}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \beta = \frac{12}{13} \\ \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{5}{13}, \text{ para } 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

Assim, temos:

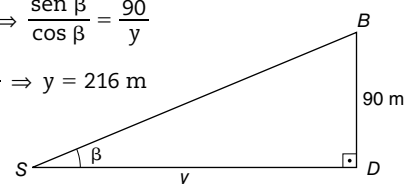
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{90}{x} \Rightarrow 6 = \frac{90}{x}$$

$$\therefore x = 15 \text{ m}$$



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{90}{y} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = \frac{90}{y}$$

$$\therefore \frac{5}{12} = \frac{90}{y} \Rightarrow y = 216 \text{ m}$$



Concluimos, então, que a distância d entre os navios é dada por:

$$d = y - x \Rightarrow d = 201 \text{ m}$$

- 10.** a) $5(x + 2) = 5x + 10$ é equivalente à sentença $5x + 10 = 5x + 10$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em \mathbb{R} .
- b) $6x = 12$ é equivalente à sentença $x = 2$, que se verifica apenas para o número real 2. Logo, não é uma identidade em \mathbb{R} .
- c) O produto $0 \cdot x$ se anula para todo x real. Logo, a sentença $0 \cdot x = 0$ é uma identidade em \mathbb{R} .
- d) Para $x = 0$, a sentença $\frac{0}{x} = 0$ é falsa. Logo, essa sentença não é identidade em \mathbb{R} .
- e) Para qualquer x real não nulo, o quociente $\frac{0}{x}$ é nulo. Logo, a sentença $\frac{0}{x} = 0$ é uma identidade em \mathbb{R}^* .
- f) Como 1 é elemento neutro da multiplicação, $1 \cdot x = x$ é equivalente a $x = x$, o que é uma identidade em \mathbb{R} .
- g) Existe pelo menos um valor real de x , por exemplo, $x = 1$, para o qual a sentença $(x + 3)^2 = x^2 + 9$ é falsa. Logo, essa sentença não é identidade em \mathbb{R} .
- h) Desenvolvendo o quadrado perfeito do primeiro membro, obtemos a sentença:
 $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 6x + 9$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em \mathbb{R} .
- i) $\sqrt{x^2} = |x|$ é equivalente à sentença $x^2 = |x|^2$, que é equivalente a $x^2 = x^2$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em \mathbb{R} .
- j) $\sqrt[3]{x^3} = x$ é equivalente à sentença $x^3 = x^3$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em \mathbb{R} .
- 11.** Partindo da equação inicial dada, temos:
 $(\sin x + \cos x)^2 + k \sin x \cos x - 1 = 0$
 $\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + k \sin x \cos x - 1 = 0$
 $1 + 2 \sin x \cos x + k \sin x \cos x - 1 = 0$
 $2 \sin x \cos x + k \sin x \cos x = 0$
 $(k + 2) \sin x \cos x = 0$
 Essa igualdade se verifica para qualquer x real se, e somente se, $k = -2$.
- 12.** a) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U . Partindo do primeiro membro, temos:
 1° membro = $\cotg x - \cotg x \cdot \cos^2 x =$
 $= \cotg x(1 - \cos^2 x) = \cotg x \cdot \sin^2 x =$
 $= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin^2 x = \cos x \cdot \sin x = 2^\circ$ membro
- b) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U . Partindo do segundo membro, temos:
 2° membro = $1 + \cotg^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} =$
 $= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} =$
 $= \operatorname{cosec}^2 x = 1^\circ$ membro

- c) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U . Partindo do primeiro membro, temos:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ membro} &= \operatorname{tg} x \cdot \sec x - \sin x = \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} - \sin x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x = \\ &= \frac{\sin x - \sin x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\sin x \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sin x \cdot \operatorname{tg}^2 x = 2^\circ \text{ membro} \end{aligned}$$

- d) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U . Partindo do primeiro membro, temos:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ membro} &= \sec^4 x - \operatorname{tg}^4 x - 1 = \\ &= (\sec^2 x)^2 - \operatorname{tg}^4 x - 1 = (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 - \operatorname{tg}^4 x - 1 = \\ &= 1 + 2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^4 x - 1 = \\ &= 2 \operatorname{tg}^2 x = 2^\circ \text{ membro} \end{aligned}$$

- 13.** a) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) =$

$$\begin{aligned} &= \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

- b) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) =$

$$\begin{aligned} &= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

- c) $\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}.$$

- 14.** Aplicando as identidades

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \text{ e} \\ \cos(a - b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b, \text{ temos:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) &= \\ &= \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin x + \\ &+ \cos \frac{3\pi}{2} \cdot \cos x - \sin \frac{3\pi}{2} \cdot \sin x = \\ &= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x - (-1) \cdot \sin x = \\ &= \sin x + \sin x = 2 \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \quad & \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \\
 & = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{3} - 1 \\
 & \therefore \cancel{\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sin x \cdot \frac{1}{2} = \\
 & = \sin x \cdot \frac{1}{2} + \cancel{\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1 \Rightarrow \cancel{2} \sin x \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 1 \\
 & \therefore \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Portanto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\begin{aligned}
 16. \quad & \text{a) } \sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ = \\
 & = \sin(10^\circ + 20^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\
 & \text{b) } \cos 5^\circ \cdot \cos 55^\circ - \sin 5^\circ \cdot \sin 55^\circ = \\
 & = \cos(5^\circ + 55^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\
 \text{c) } & \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{12}\right) = \\
 & = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17. \quad & \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \\
 & \text{Como } \cos x = \frac{5}{13}, \text{ vamos obter } \sin x: \\
 & \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169 - 25}{169} = \frac{144}{169} \\
 & \therefore \sin^2 x = \frac{144}{169}
 \end{aligned}$$

$$\text{Como } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi, \sin x = -\frac{12}{13}. \text{ Assim:}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{26} + \frac{12\sqrt{2}}{26}$$

$$\text{Logo, } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

18. Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{1 + 3}{1 - 1 \cdot 3} = \frac{4}{1 - 3} = \\
 &= -\frac{4}{2} = -2
 \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2.$$

19. Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha}$$

Assim:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{12}{5}$$

$$5 + 5 \operatorname{tg} \alpha = 12 - 12 \operatorname{tg} \alpha$$

$$5 \operatorname{tg} \alpha + 12 \operatorname{tg} \alpha = 12 - 5$$

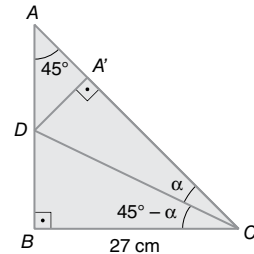
$$17 \operatorname{tg} \alpha = 7$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{17}$$

$$\text{Portanto, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{17}.$$

20. Como \widehat{BAC} mede 45° e \widehat{ABC} mede 90° , então \widehat{ACB} mede 45° . Logo, temos que o triângulo ABC é isósceles, com as medidas dos lados \overline{AB} e \overline{BC} iguais a 27 cm.

Com isso, temos:



Assim, sendo x a medida em centímetro do segmento \overline{BD} , concluímos:

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \frac{x}{27} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{x}{27}$$

$$\therefore \frac{1 - 0,35}{1 + 1 \cdot 0,35} = \frac{x}{27} \Rightarrow x = 13$$

Logo, $BD = 13$ cm.

Alternativa e.

21. O ângulo \widehat{ADB} mede $\alpha + 30^\circ$, pois é externo do triângulo BDC. Assim, indicando por x a medida do segmento \overline{BD} , temos:

$$\sin(\alpha + 30^\circ) = \frac{30}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos \alpha = \frac{30}{x}$$

$$\therefore \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha = \frac{30}{x} \quad (\text{I})$$

Sabendo que $\sin \alpha = \frac{1}{7}$, calculamos o $\cos x$:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{Como } 0 < \alpha < 90^\circ, \text{ temos: } \cos \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7} \quad (\text{II})$$

Substituindo (II) em (I), concluímos:

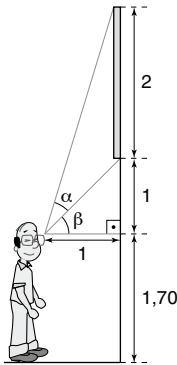
$$\frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{30}{x}$$

$$(\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) \cdot x = 30 \cdot 14$$

$$x = \frac{30 \cdot 14}{5\sqrt{3}} \Rightarrow x = 28\sqrt{3}$$

Portanto, a medida do segmento \overline{BD} é $28\sqrt{3}$ cm.

22.



$$\begin{cases} \operatorname{tg} \beta = 1 \\ \operatorname{tg} (\beta + \alpha) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \beta = 1 & \text{(I)} \\ \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha} = 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = 3 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$

23. Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $-1 < \cos x < 0$.

Pela relação fundamental, temos:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\therefore \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Temos, então:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \\ &= \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

24. $\operatorname{sen} x = 2 \cos x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = (2 \cos x)^2$

$$\therefore \operatorname{sen}^2 x = 4 \cos^2 x \Rightarrow 1 - \cos^2 x = 4 \cos^2 x$$

$$\therefore 5 \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $-1 < \cos x < 0$;

logo, $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e da equação dada:

$$\operatorname{sen} x = 2 \cos x \Rightarrow \operatorname{sen} x = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\therefore \operatorname{sen} x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Logo:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2 \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

25. $\cos 10x = \cos (2 \cdot 5x) = \cos^2 5x - \operatorname{sen}^2 5x =$
 $= 2 \cos^2 5x - 1$

$$\therefore \cos 10x = 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7}{18}$$

26. Lembrando que $\operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ e

$\operatorname{sen} (x - y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \operatorname{sen} y \cdot \cos x$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} 27^\circ}{\operatorname{sen} 9^\circ} - \frac{\cos 27^\circ}{\cos 9^\circ} &= \\ &= \frac{\operatorname{sen} 27^\circ \cdot \cos 9^\circ - \operatorname{sen} 9^\circ \cdot \cos 27^\circ}{\operatorname{sen} 9^\circ \cdot \cos 9^\circ} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\operatorname{sen} (27^\circ - 9^\circ)}{\operatorname{sen} 9^\circ \cdot \cos 9^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 18^\circ}{\operatorname{sen} 9^\circ \cdot \cos 9^\circ} = \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} 18^\circ}{2 \cdot \operatorname{sen} 9^\circ \cdot \cos 9^\circ} = \frac{2 \operatorname{sen} 18^\circ}{\operatorname{sen} (2 \cdot 9^\circ)} = \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} 18^\circ}{\operatorname{sen} 18^\circ} = 2 \end{aligned}$$

Alternativa e.

27. Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$$\begin{aligned} \cos 72^\circ &= \cos (36^\circ + 36^\circ) = \cos^2 36^\circ - \operatorname{sen}^2 36^\circ = \\ &= \cos^2 36^\circ - (1 - \cos^2 36^\circ) = 2 \cos^2 36^\circ - 1 \end{aligned}$$

Como $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, temos:

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 36^\circ - 1 &= 2 \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 36^\circ - 1 = \\ &= 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{4} - 1 = 2 \cdot \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{16} - 1 = \\ &= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} - \frac{4}{4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \end{aligned}$$

Alternativa b.

28. Pelo enunciado, temos:

$$\begin{aligned} M^2 + N^2 &= (\cos a + \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2 = \\ &= \cos^2 a + \cos^2 b + 2 \cos a \cos b + \operatorname{sen}^2 a + \\ &+ \operatorname{sen}^2 b - 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \\ &= \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b + \\ &+ 2 \cdot (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) = \\ &= 1 + 1 + 2 \cdot \cos (a + b) = 2 + 2 \cdot \cos 120^\circ = \\ &= 2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Alternativa e.

29. a) $\operatorname{sen} 2x = \cos x$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = \cos x \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0$$

$$\therefore \cos x (2 \operatorname{sen} x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = 0 \text{ ou } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Resolvendo cada uma dessas equações no intervalo $[0, 2\pi[$, obtemos:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Logo, } S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

b) $\cos 2x = \operatorname{sen} x$

$$1 - 2 \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$$

$$-2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + 1 = 0$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

Fazendo a mudança de variável $\operatorname{sen} x = y$, temos:

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

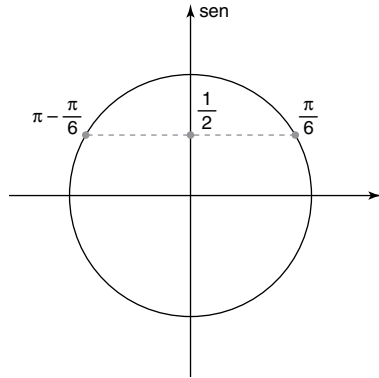
$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$y = \frac{1}{2} \text{ ou } y = -1$$

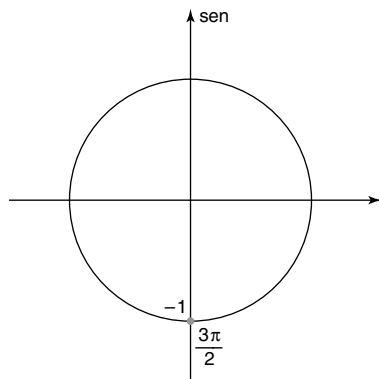
Assim:

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \text{ ou } \text{sen } x = -1$$

Para $\text{sen } x = \frac{1}{2}$:



Para $\text{sen } x = -1$:



Portanto, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$.

$$\text{Logo, } S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

c) $\text{tg } 2x = -\text{tg } x$

Condição de existência: $|\text{tg } x| \neq 1$ e $\cos x \neq 0$.

$$\frac{2 \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} = -\text{tg } x \Rightarrow \frac{2 \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} + \text{tg } x = 0$$

$$\therefore \frac{2 \text{tg } x + \text{tg } x - \text{tg}^3 x}{1 - \text{tg}^2 x} = 0 \Rightarrow 3 \text{tg } x - \text{tg}^3 x = 0$$

$$\therefore \text{tg } x (3 - \text{tg}^2 x) = 0 \Rightarrow \text{tg } x = 0 \text{ ou } \text{tg } x = \sqrt{3} \text{ ou } \text{tg } x = -\sqrt{3}$$

Resolvendo cada uma dessas equações no intervalo $[0, 2\pi]$, obtemos:

$$\text{tg } x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pi$$

$$\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{tg } x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{Logo: } S = \left\{ 0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$

$$30. \begin{cases} \text{sen } \alpha = \frac{5}{13} \\ \text{sen } 2\alpha = \frac{5}{\ell} \end{cases}$$

Sabemos que $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, então:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{25}{169} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{169}{169} - \frac{25}{169}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{144}{169}}$$

Como o ângulo é agudo, ele está associado ao primeiro quadrante, logo:

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

Sabemos que: $\text{sen } 2\alpha = 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$

Logo:

$$\text{sen } 2\alpha = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$$

Assim:

$$\frac{5}{\ell} = \frac{120}{169}$$

$$120\ell = 5 \cdot 169$$

$$\ell = \frac{169}{24}$$

Portanto, o valor de ℓ é $\frac{169}{24}$.

$$31. (AC)^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow AC = 4$$

Seja x a distância procurada, temos:

$$\text{sen } 2\alpha = \frac{x}{5} \Rightarrow 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{x}{5}$$

$$\therefore 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 4,8 \text{ cm}$$

32. Lembrando que $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ e que

$\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$, temos:

$$\cos 3x = \cos (x + 2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \text{sen } x \cdot \text{sen } 2x =$$

$$= \cos x (2 \cos^2 x - 1) - \text{sen } x (2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x) =$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x =$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x =$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x =$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

Logo, $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

Assim, para $\cos x = k$, temos: $\cos 3x = 4k^3 - 3k$

33. Lembrando que $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$ e que

$\cos 2x = 1 - 2 \text{sen}^2 x$, temos:

$$\text{sen } 3x = \text{sen } (x + 2x) =$$

$$= \text{sen } x \cdot \cos 2x + \text{sen } 2x \cdot \cos x =$$

$$= \text{sen } x (1 - 2 \text{sen}^2 x) + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos^2 x =$$

$$= \text{sen } x - 2 \text{sen}^3 x + 2 \text{sen } x (1 - \text{sen}^2 x) =$$

$$= \text{sen } x - 2 \text{sen}^3 x + 2 \text{sen } x - 2 \text{sen}^3 x =$$

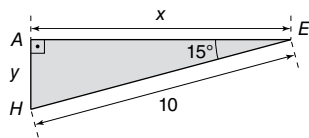
$$= 3 \text{sen } x - 4 \text{sen}^3 x$$

Logo, $\text{sen } 3x = 3 \text{sen } x - 4 \text{sen}^3 x$.

Assim, para $\text{sen } x = a$, temos: $\text{sen } 3x = 3a - 4a^3$

34. $10 \cos 2x + \sin x = 9 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 10(1 - 2 \sin^2 x) + \sin x = 9$
 $\therefore 10 - 20 \sin^2 x + \sin x - 9 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 20 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
 Fazendo a mudança de variável $\sin x = t$, obtemos a seguinte equação do 2º grau:
 $20t^2 - t - 1 = 0$
 $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-1) = 81$
 $\therefore t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 20} \Rightarrow t = \frac{1}{4}$ ou $t = -\frac{1}{5}$
 Retornando à variável original, temos:
 $\sin x = \frac{1}{4}$ ou $\sin x = -\frac{1}{5}$
 Como o arco tem extremidade no 3º quadrante, $\sin x < 0$ e $\cos x < 0$.
 Assim, $\sin x = -\frac{1}{5}$ e, pela relação fundamental:
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$
 $\therefore \cos^2 x = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{24}{25}$
 $\therefore \cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$
 Logo, $\sin x = -\frac{1}{5}$ e $\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

35. Os triângulos AEH, BFE, CGF e DHG são congruentes (caso LAA). Logo, a área S do quadrado maior é a soma da área do quadrado menor com o quádruplo da área de um desses triângulos.
 Sendo $AE = x$, temos:



$$\cos 15^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10 \cdot \cos 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 10 \cdot \sin 15^\circ$$

Logo, a área S_t do triângulo AEH é dada por:

$$S_t = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ$$

ou, ainda:

$$S_t = 50 \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = 25 \cdot 2 \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_t = 25 \sin 30^\circ = \frac{25}{2}$$

Concluimos, então, que a área S do quadrado maior é:

$$S = \left(10^2 + 4 \cdot \frac{25}{2}\right) \text{cm}^2 = 150 \text{cm}^2$$

36. a) $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 1 = -\frac{17}{8}$

b) $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$

Calculando $\sin x$ pela relação fundamental, temos:

$$\sin^2 x + \left(\frac{7}{25}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin x = \pm \frac{24}{25}$$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, concluimos que $\sin x = \frac{24}{25}$.

Assim, $\cos x = \frac{7}{25}$ e $\sin x = \frac{24}{25}$.

- c) Pela fórmula de arco duplo, temos:

$$\text{tg } x = \frac{2 \text{tg} \left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \text{tg}^2 \left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{tg } x = \frac{2 \cdot 5}{1 - 5^2}$$

$$\text{tg } x = -\frac{10}{24}$$

$$\text{tg } x = -\frac{5}{12}$$

37. a) Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$$\cos x = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$\frac{7}{18} = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$2 \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{7}{18} + \frac{18}{18}$$

$$\cos \left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{25}{36}}$$

$$\cos \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{5}{6}$$

Novamente pela fórmula de adição de arcos, temos:

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{7}{18} = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right)$$

$$2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{18}{18} - \frac{7}{18}$$

$$\sin \left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{11}{36}}$$

$$\sin \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

Portanto, $\cos \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{5}{6}$ e $\sin \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

- b) Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{81}{81} - \frac{32}{81}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{49}{81}} \text{ ou } \cos x = -\sqrt{\frac{49}{81}} \text{ (não convém)}$$

$$\cos x = \frac{7}{9}$$

Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$$\cos x = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$\frac{7}{9} = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$2 \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{7}{9} + \frac{9}{9}$$

$$\cos \left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{16}{18}}$$

$$\cos \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Novamente pela fórmula de adição de arcos, temos:

$$\cos x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{7}{9} = 1 - 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{9}{9} - \frac{7}{9}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{18}} \text{ ou } \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{\frac{2}{18}} \text{ (não convém)}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

Portanto, $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

c) Pela fórmula de arco duplo, temos:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$4 - 4 \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 6 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = 0$$

Considerando $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = y$, temos

$$2y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

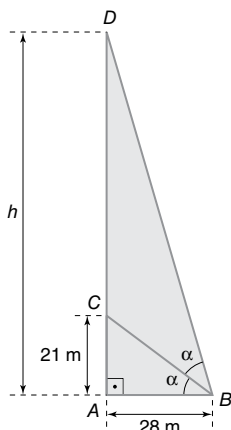
$$y_1 = \frac{1}{2} \text{ ou } y_2 = -2$$

Logo, $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ou $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = -2$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então a tangente é positiva.

Portanto, o único valor possível é $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

38. Sendo h a altura pedida, em metro, temos:



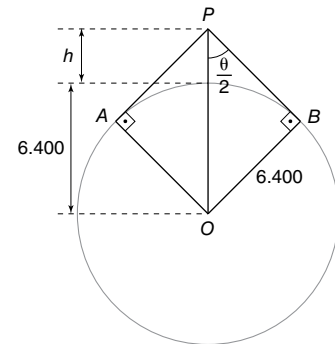
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{28} \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{h}{28} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \\ \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{h}{28} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{matrix}$$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

$$\frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{h}{28} \Rightarrow h = 96$$

Logo, ao atingir o ponto D, o helicóptero está a 96 m de altura em relação à pista.

39. Seja h a distância, em quilômetro, do ponto P à superfície da Terra. Como os triângulos PAO e PBO são congruentes, temos:



$$\begin{cases} \cos \theta = -0,62 & \text{(I)} \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{6.400}{h + 6.400} & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), obtemos:

$$\cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = -0,62 \Rightarrow \cos^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = -0,62$$

$$\therefore 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = -0,62 \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \pm 0,9$$

Como $\frac{\theta}{2}$ é medida de um ângulo interno de um triângulo, deduzimos que $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = 0,9$. Substituindo $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$ por 0,9 em (II), concluímos:

$$0,9 = \frac{6.400}{h + 6.400} \Rightarrow h = 711$$

Alternativa e.

40. Aplicando a lei dos cossenos, temos:

a) $x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$

$$\therefore x^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore x^2 = 49$$

Logo, $x = 7$ cm.

b) $y^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ$

$$\therefore y^2 = 25 + 100 - 100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore y^2 = 175$$

Logo, $y = 5\sqrt{7}$ m.

41. Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$2^2 = x^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot x \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ ou } x = 2$$

Como o ângulo \widehat{BAC} é agudo, só nos interessa $x = 2$ dm.

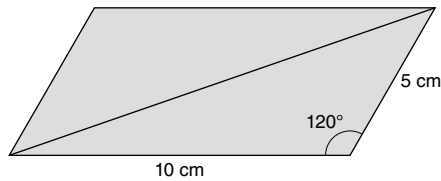
(Note que, para $x = 4$, conclui-se, pelo teorema de Pitágoras, que o ângulo BAC é reto.)

42. a) Como o maior ângulo interno se opõe ao maior lado, pela lei dos cossenos a medida α desse ângulo é tal que:

$$\begin{aligned} 7^2 &= 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow 49 &= 16 + 25 - 40 \cos \alpha \\ \therefore \cos \alpha &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

- b) O ângulo é obtuso, pois α é medida de um ângulo interno de um triângulo, com $\cos \alpha < 0$.

43.



Cálculo da medida da diagonal maior (d_M):

$$\begin{aligned} (d_M)^2 &= 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow (d_M)^2 &= 125 - 100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \therefore d_M &= \sqrt{175} = 5\sqrt{7} \end{aligned}$$

Cálculo da medida da diagonal menor (d_m):

$$\begin{aligned} (d_m)^2 &= 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow (d_m)^2 &= 125 - 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ \therefore d_m &= \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Logo, as diagonais desse paralelogramo medem $5\sqrt{3}$ cm e $5\sqrt{7}$ cm.

44. $(BC)^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$

Logo, a distância entre os pontos B e C é $4\sqrt{3}$ km.

45. a) Pela lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} d^2 &= 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos \theta \\ d^2 &= 100 + 100 - 200 \cdot \cos \theta \\ d^2 &= 200 \cdot (1 - \cos \theta) \\ \therefore d &= 10\sqrt{2 - 2 \cos \theta} \end{aligned}$$

- b) Usando a lei obtida no item a, temos:

$$\begin{aligned} d &= 10\sqrt{2 - 2 \cos \theta} \\ d &= 10\sqrt{2 - 2 \cos 60^\circ} \\ d &= 10\sqrt{2 - 2 \cdot \frac{1}{2}} \\ d &= 10 \cdot \sqrt{2 - 1} \\ d &= 10 \end{aligned}$$

Portanto, a distância é 10 cm.

- c) A maior distância é dada quando a medida do ângulo do compasso é 120° .

Assim:

$$\begin{aligned} d &= 10\sqrt{2 - 2 \cos \theta} \\ d &= 10\sqrt{2 - 2 \cos 120^\circ} \\ d &= 10\sqrt{2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ d &= 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

Portanto, a distância máxima é $10\sqrt{3}$ cm.

- d) Sabendo que o comprimento é dado pela fórmula $C = 2\pi r$, temos:

$$2\pi r = 20\pi$$

$$r = 10$$

Assim:

$$10\sqrt{2 - 2 \cos \theta} = 10$$

$$\sqrt{2 - 2 \cos \theta} = 1$$

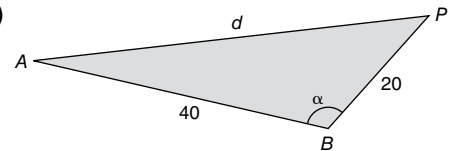
$$2 - 2 \cos \theta = 1$$

$$2 \cos \theta = 2 - 1$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

46. a)



Pela lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} d^2 &= 40^2 + 20^2 - 2 \cdot 40 \cdot 20 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow d &= \pm 20\sqrt{5 - 4 \cos \alpha} \end{aligned}$$

Como a distância é um número não negativo, concluímos:

$$d = 20\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$$

- b) Os valores máximo, d_M , e mínimo, d_m , são obtidos para $\cos \alpha = -1$ e $\cos \alpha = 1$, respectivamente. Assim:

$$d_M = 20\sqrt{5 - 4 \cdot (-1)} \Rightarrow d_M = 60$$

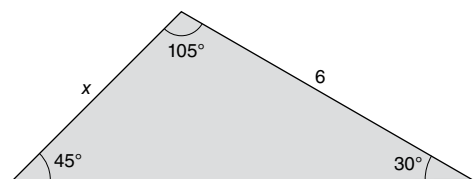
e

$$d_m = 20\sqrt{5 - 4 \cdot 1} \Rightarrow d_m = 20$$

Logo, o valor máximo da distância d é 60 cm e o mínimo é 20 cm.

- c) Quando a função d assume seu valor máximo, os três pontos estão alinhados, com B entre A e P. Quando ela assume seu valor mínimo, os três pontos estão alinhados, com P entre A e B.

47.

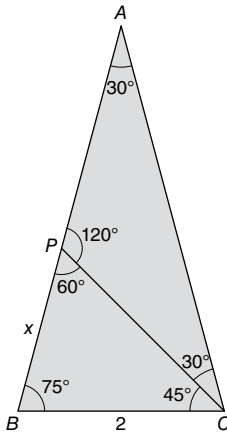


Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

48.



Como o triângulo ABC é isósceles, os ângulos da base são congruentes. Sendo θ a medida de cada um desses ângulos, temos:

$$30^\circ + 2\theta = 180^\circ \Rightarrow \Rightarrow \theta = 75^\circ$$

Assim: $m(\widehat{CPB}) = 60^\circ$

Aplicando a lei dos senos no triângulo PCB, temos:

$$\frac{2}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{x}{\text{sen } 45^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Logo, o segmento \overline{BP} mede $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm.

49. Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{3}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{4}{\text{sen } \alpha}$$

$$3 \text{ sen } \alpha = 4 \text{ sen } 30^\circ$$

$$3 \text{ sen } \alpha = 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$$

Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\text{cos}^2 \alpha = \frac{9}{9} - \frac{4}{9}$$

$$\text{cos } \alpha = \pm \sqrt{\frac{5}{9}}$$

Como o ângulo é obtuso, ele está no 2º quadrante, logo:

$$\text{cos } \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Alternativa d.

50. Pela lei dos senos, a medida R do raio é dada por:

$$\frac{10}{\text{sen } 60^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Logo, o raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

51. Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{AB}{\text{sen } 45^\circ} = 2 \cdot 1$$

$$AB = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AB = \sqrt{2}$$

Alternativa a.

52. Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{4\sqrt{3}}{\text{sen } 120^\circ} = \frac{4}{\text{sen } \alpha}$$

$$4\sqrt{3} \text{ sen } \alpha = 4 \text{ sen } 120^\circ$$

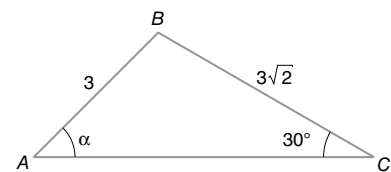
$$4\sqrt{3} \text{ sen } \alpha = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$$

Portanto, o valor de α é 30° .

53. Pelo enunciado, temos o seguinte desenho:



Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{3}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{3\sqrt{2}}{\text{sen } \alpha}$$

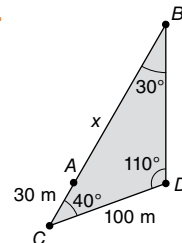
$$3 \cdot \text{sen } \alpha = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen } 30^\circ$$

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, o valor de α é 45° .

54.



Aplicando a lei dos senos, a distância x é dada por:

$$\frac{100}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{30 + x}{\text{sen } 110^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (30 + x) = 100 \cdot 0,94$$

$$\therefore \frac{x}{2} = 79 \Rightarrow x = 158$$

Logo, a distância entre A e B é 158 m.

55. a) Analisando o triângulo ABC, temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10 \cdot \text{sen } 60^\circ$$

$$A = 35 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a área é $\frac{35\sqrt{3}}{2}$ m².

b) Analisando o triângulo DEF, temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \text{sen } 135^\circ$$

$$A = 21 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, a área é $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ dm².

56. a) Analisando o triângulo ABC, temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \text{sen } 120^\circ$$

$$A = 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a área é $14\sqrt{3}$ cm².

b) Pela lei dos cossenos, temos:

$$(AC)^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ$$

$$(AC)^2 = 49 + 64 - 112 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

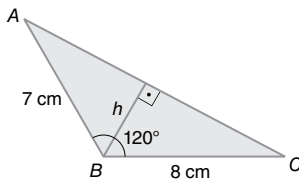
$$(AC)^2 = 113 + 56$$

$$AC = \sqrt{169}$$

$$AC = 13$$

Portanto, a medida do lado AC é 13 cm.

c) Pelo enunciado, vamos achar a seguinte altura h:



Com a área adquirida no item a, temos:

$$\frac{28\sqrt{3}}{2} = \frac{(AC) \cdot h}{2}$$

$$28\sqrt{3} = 13 \cdot h$$

$$h = \frac{28\sqrt{3}}{13}$$

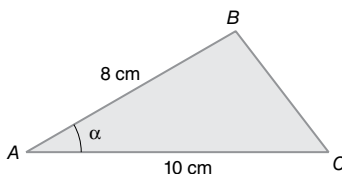
Portanto, a altura mede $\frac{28\sqrt{3}}{13}$ cm.

57. A área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo ADC. Assim:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$$

Logo, a área do paralelogramo é 30 cm².

58. Pelo enunciado, temos:



Considerando med $(\widehat{BAC}) = \alpha$, temos:

$$20 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \sin \alpha$$

$$20 = 40 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ \text{ ou } \alpha = 150^\circ$$

Portanto, a medida do ângulo \widehat{BAC} é 30° ou 150°.

59. Calculando a área A_s do setor circular AOB:

Medida do ângulo central (em grau)	Área (em cm ²)
360	$\pi \cdot 6^2$
150	A_s

$\Rightarrow A_s = 15\pi$

Calculando a área A_t do triângulo AOB:

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 150^\circ \Rightarrow A_t = 9$$

Portanto, a área A pedida é dada por:

$$A = A_s - A_t = (15\pi - 9) = 3(5\pi - 3)$$

Logo, a área pedida é 3(5π - 3) cm².

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. $E = \cotg^2 60^\circ + \sec 300^\circ - \operatorname{cosec} 330^\circ =$
 $= \left(\frac{1}{\operatorname{tg} 60^\circ}\right)^2 + \frac{1}{\cos 300^\circ} - \frac{1}{\sin 330^\circ} =$
 $= \frac{1}{3} + 2 - (-2) = \frac{13}{3}$
 Logo, $E = \frac{13}{3}$.

2. $\operatorname{cosec} x = 1,25 \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = 1,25$

$$\therefore \sin x = 0,8$$

$$\begin{cases} \sin x = 0,8 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = -0,6 \text{ para } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Assim:

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{0,6}{0,8} = -0,75$$

Logo, $\cotg x = -0,75$.

3. $\cotg x = -2,4 \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{12}{5}$

$$\therefore \cos x = -\frac{12 \sin x}{5}$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{12 \sin x}{5} \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x = -\frac{5}{13} \text{ para } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

Assim:

$$\cos x = -\frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

$$\text{Logo, } \sin x + \cos x = \frac{7}{13}.$$

4. Pelo enunciado, temos: $\sec x = \frac{5}{4}$

$$\text{Então: } \frac{1}{\cos x} = \frac{5}{4} \text{ e } \cos x = \frac{4}{5}$$

Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{25}{25} - \frac{16}{25}$$

$$\sin x = \pm \sqrt{\frac{9}{25}}$$

Como x pertence ao 4º quadrante, então:

$$\sin x = -\frac{3}{5}$$

Como $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, então:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Portanto, } \cos x = \frac{4}{5}, \sin x = -\frac{3}{5} \text{ e } \operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}.$$

Alternativa a.

5. Partindo do enunciado, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{cosec} x - \sec x}{\cotg x - 1} &= \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\operatorname{tg} x} - 1} = \\ &= \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}} = \\ &= \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}} = \\ &= \left(\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} \right) \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} \right) = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{9}{9} - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{8}{9}}$$

Como x pertence ao 2º quadrante, então:

$$\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Assim:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Alternativa c.

6. Partindo do enunciado, temos:

$$\operatorname{tg} x + \sec x = \cos x$$

Condição de existência: $\cos x \neq 0$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \cos x$$

$$\operatorname{sen} x + 1 = \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 x = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$$

$$\therefore \operatorname{sen} x \cdot (\operatorname{sen} x + 1) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \text{ ou } \operatorname{sen} x = -1$$

Note que nos interessam apenas os valores de x em que $\operatorname{sen} x = 0$, pois, se $\operatorname{sen} x = -1$, teríamos $\cos x = 0$, que não satisfaz a condição de existência.

Assim:

$$\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Concluimos, então, que o conjunto solução S é dado por:

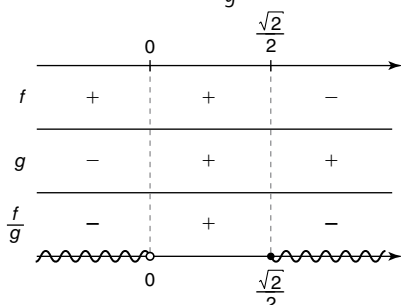
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$$

7. a) $\sec x \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} \leq \sqrt{2}$

$$\text{Para } t = \cos x, \text{ temos: } \frac{1}{t} \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{-\sqrt{2}t + 1}{t} \leq 0$$

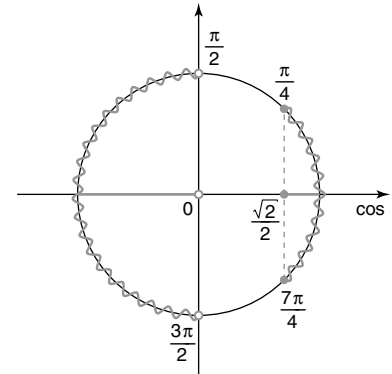
Estudando a variação de sinal das funções

$$f(t) = -\sqrt{2}t + 1, g(t) = t \text{ e } \frac{f}{g}, \text{ obtemos:}$$



Assim, $\frac{f(t)}{g(t)} \leq 0 \Rightarrow t < 0$ ou $t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ e, portanto:

$$\cos x < 0 \text{ ou } \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\text{Logo, } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi \right\}.$$

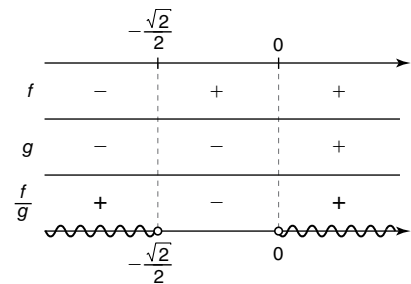
b) $\operatorname{cosec} x > -\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} > -\sqrt{2}$

Para $t = \operatorname{sen} x$, temos:

$$\frac{1}{t} > -\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot t + 1}{t} > 0$$

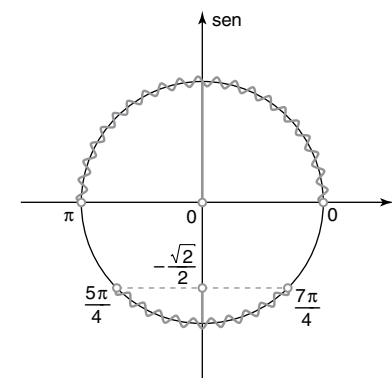
Estudando a variação de sinal das funções

$$f(t) = \sqrt{2} \cdot t + 1, g(t) = t \text{ e } \frac{f}{g}, \text{ obtemos:}$$



Assim, $\frac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $t > 0$ e, portanto:

$$\operatorname{sen} x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \operatorname{sen} x > 0$$



$$\text{Logo, } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4} \right\}.$$

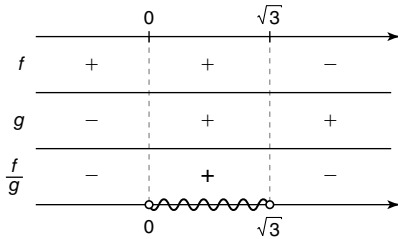
c) $\sqrt{3} \sec x > 1 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\cos x} > 1$

Para $t = \cos x$, temos:

$$\sqrt{3} \cdot \frac{1}{t} > 1 \Rightarrow \frac{-t + \sqrt{3}}{t} > 0$$

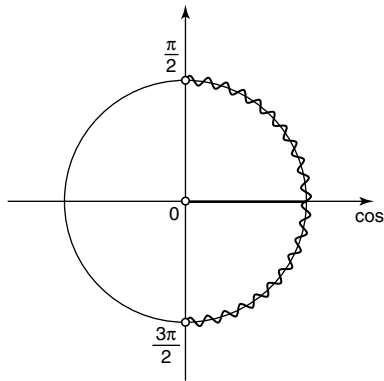
Estudando a variação de sinal das funções

$$f(t) = -t + \sqrt{3}, g(t) = t \text{ e } \frac{f}{g}, \text{ obtemos:}$$



Assim, $\frac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow 0 < t < \sqrt{3}$ e, portanto:

$$0 < \cos x < \sqrt{3}, \text{ ou ainda } \cos x > 0$$



$$\text{Logo, } S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \right\}.$$

8. a) Partindo do enunciado, temos:

$$\sec^2 x < \sec x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} < \frac{1}{\cos x}$$

Como a condição de existência é $\cos x \neq 0$, então $\cos^2 x > 0$, logo:

$$\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x < \frac{1}{\cos x} \cdot \cos^2 x \Rightarrow 1 < \cos x$$

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, então não existe valor de x que satisfaça tal inequação.

$$\text{Logo, } S = \emptyset.$$

b) Partindo do enunciado, temos:

$$\sec^2 x \leq \sec x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Como a condição de existência é $\cos x \neq 0$, então $\cos^2 x > 0$, logo:

$$\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x \leq \frac{1}{\cos x} \cdot \cos^2 x \Rightarrow 1 \leq \cos x$$

Portanto, o x que satisfaz a inequação é: $x = 2k\pi$

$$\text{Logo, } S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

c) Partindo do enunciado, temos:

$$\operatorname{cosec}^2 x \geq \operatorname{cosec} x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \geq \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

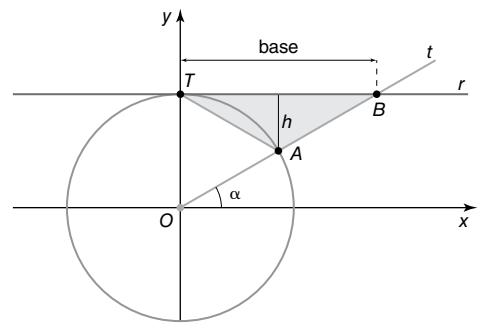
Como a condição de existência é $\operatorname{sen} x \neq 0$, então $\operatorname{sen}^2 x > 0$, logo:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \operatorname{sen}^2 x \geq \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 1 \geq \operatorname{sen} x$$

Portanto, a inequação é válida para qualquer valor de x que satisfaça a condição de existência.

$$\text{Logo, } S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

9. A área do triângulo é dada por $\frac{\text{base} \cdot h}{2}$. Assim, temos a seguinte figura:



Temos que $\operatorname{sen} \alpha$ é a distância do ponto A ao eixo Ox. Logo:

$$h = 1 - \operatorname{sen} \alpha$$

A medida TB é igual a $\operatorname{cotg} \alpha$.

Assim:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot h}{2} = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \cdot (1 - \operatorname{sen} \alpha)}{2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot (1 - \operatorname{sen} \alpha)}{2} = \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

Alternativa d.

10. a) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do primeiro membro, temos:

$$1^\circ \text{ membro} = \operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x \cdot \cos x =$$

$$= \operatorname{sen} x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cosec} x = 2^\circ \text{ membro}$$

b) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do primeiro membro, temos:

$$1^\circ \text{ membro} = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{1}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x = 2^\circ \text{ membro}$$

c) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do primeiro membro, temos:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ membro} &= \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x = 2^\circ \text{ membro} \end{aligned}$$

d) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do primeiro membro, temos:

$$1^\circ \text{ membro} = \frac{\sec x}{\operatorname{cosec} x} + \frac{\operatorname{cosec} x}{\sec x} = \frac{1}{\frac{\cos x}{1}} + \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{1}} = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2^\circ \text{ membro}$$

e) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do primeiro membro, temos:

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ membro} &= \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{(1 + \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot (1 + \cos x)} = \\ &= \frac{1 + 2 \cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot (1 + \cos x)} = \frac{1 + 2 \cos x + 1}{\operatorname{sen} x \cdot (1 + \cos x)} = \frac{2 + 2 \cos x}{\operatorname{sen} x \cdot (1 + \cos x)} = \\ &= \frac{2 \cdot (1 + \cos x)}{\operatorname{sen} x \cdot (1 + \cos x)} = \frac{2}{\operatorname{sen} x} = 2 \cdot \operatorname{cosec} x = 2^\circ \text{ membro} \end{aligned}$$

11. a) $\begin{cases} \operatorname{tg} x = 3 \\ \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \sec^2 x = 1 + 3^2 = 10 \end{cases}$

$$\therefore \sec x = \pm \sqrt{10}$$

$$\text{Como } \pi < x < \frac{3\pi}{2}, \text{ concluímos: } \sec x = -\sqrt{10} \text{ e, portanto, } \cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

b) $\begin{cases} \operatorname{cotg} x = \sqrt{15} \\ \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x \Rightarrow \operatorname{cosec}^2 x = 1 + (\sqrt{15})^2 = 16 \end{cases}$

$$\therefore \operatorname{cosec} x = \pm 4$$

$$\text{Como } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \text{ concluímos: } \operatorname{cosec} x = 4 \text{ e, portanto, } \operatorname{sen} x = \frac{1}{4}$$

c) $\begin{cases} \sec x = a + 1 \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{a^2 + 2} \\ \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \end{cases} \Rightarrow (a + 1)^2 = 1 + (\sqrt{a^2 + 2})^2$

$$\therefore a^2 + 2a + 1 = 1 + a^2 + 2 \Rightarrow a = 1$$

d) Aplicando a técnica 1:

Passo 1

Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter $\operatorname{sen} x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.

O segundo membro é a constante 1 e, portanto, existe para qualquer x real.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em U.

Passo 2

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ membro} &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} = \\ &= \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 = 2^\circ \text{ membro} \end{aligned}$$

e) Aplicando a técnica 1:

Passo 1

Para existir cada um dos membros da igualdade, devemos ter $\cos x \neq 0$. Logo, os dois membros estão definidos em U.

Passo 2

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ membro} &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{sen}^2 x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{sen}^2 x \cdot \sec^2 x = \\ &= \operatorname{sen}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x = 2^\circ \text{ membro} \end{aligned}$$

12. Temos: $E = (\sec x - \cos x) \cdot (\operatorname{cosec} x - \operatorname{sen} x) \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)$

$$E = \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right) \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x \right) \cdot \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$$

$$E = \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos^2 x}{\cos x} \right) \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} \right) \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)$$

$$E = \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} \right) \cdot \left(\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} \right) \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} + \frac{\cos x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} \right)$$

$$E = \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \right) \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} \right) \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} \right)$$

$$E = \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \right) \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} \right) \cdot \left(\frac{1}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} \right)$$

$$E = \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x} \right)$$

$$E = 1$$

Alternativa e.

13. A identidade é equivalente a $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{p \cdot [2 - 1 + \operatorname{tg}^2 x]}{2 \operatorname{tg} x}$, que é equivalente a

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg} x} = \frac{p(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{2 \operatorname{tg} x}, \text{ do que concluímos que } p = -2.$$

Alternativa e.

14. a) $\operatorname{sen} 165^\circ = \operatorname{sen} (120^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen} 120^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 120^\circ \cdot \operatorname{sen} 45^\circ$

$$\text{Como } \operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}, \text{ temos:}$$

$$\operatorname{sen} 120^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 120^\circ \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Logo, } \operatorname{sen} 165^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

- b) $\cos 105^\circ = \cos (60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \operatorname{sen} 45^\circ =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Logo, } \cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

- c) $\operatorname{tg} 195^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ + 15^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 180^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg} 180^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{0 + \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - 0 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ} = \operatorname{tg} 15^\circ =$

$$= \operatorname{tg} (45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \right) = \left(\frac{3}{3 + \sqrt{3}} \right) =$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

- d) $\operatorname{cotg} 15^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg} (60^\circ - 45^\circ)} = \frac{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3} \cdot 1}{\sqrt{3} - 1} =$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3 - 1} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } \operatorname{cotg} 15^\circ = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \operatorname{cosec} 255^\circ &= \frac{1}{\operatorname{sen} 255^\circ} = \frac{1}{-\operatorname{sen} 75^\circ} = -\frac{1}{\operatorname{sen} (30^\circ + 45^\circ)} = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ} = \\ &= -\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \sqrt{2} - \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \sec (-15^\circ) &= \frac{1}{\cos (-15^\circ)} = \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{1}{\cos (45^\circ - 30^\circ)} = \\ &= \frac{1}{\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

15. Partindo do enunciado, temos:

$$\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \frac{\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot \operatorname{sen} x}{1 \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot 0} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

Alternativa c.

16. $E = \operatorname{sen} 6x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos 6x \Rightarrow E = \operatorname{sen} (6x - x) = \operatorname{sen} 5x$

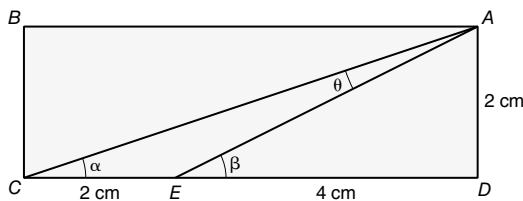
Para $x = \frac{\pi}{10}$, temos:

$$E = \operatorname{sen} \left(5 \cdot \frac{\pi}{10} \right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

17. $f(x) = \cos x \cdot \cos 3x - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 3x = \cos (x + 3x) \Rightarrow f(x) = \cos 4x$

Para $x = \frac{\pi}{8}$, temos:

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos \left(4 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$



18. $\widehat{A\hat{E}D}$ é ângulo externo do $\triangle AEC$; logo:

$$\beta = \theta + \alpha \Rightarrow \theta = \beta - \alpha$$

Assim, temos:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} (\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{2}{4} - \frac{2}{6}}{1 + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{6}} = \frac{1}{7}$$

19. a) Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left(\frac{12}{13} \right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{169}{169} - \frac{144}{169}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{25}{169}}$$

$$\cos x = -\frac{5}{13} \text{ ou } \cos x = \frac{5}{13} \text{ (não convém)}$$

Como $x + y = \frac{\pi}{4}$, então $y = \frac{\pi}{4} - x$, logo:

$$\cos y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\cos y = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin x$$

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13}$$

$$\cos y = -\frac{5\sqrt{2}}{26} + \frac{12\sqrt{2}}{26}$$

$$\cos y = \frac{7\sqrt{2}}{26}$$

b) Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{9}{9} - \frac{3}{9}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{6}{9}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ ou } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ (não convém)}$$

Como $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$, então $\beta = \alpha - \frac{\pi}{3}$, logo:

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6} - 3}{6} \end{aligned}$$

c) Como $a + b = \frac{\pi}{6}$, então $b = \frac{\pi}{6} - a$, logo:

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - a\right)$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} a}$$

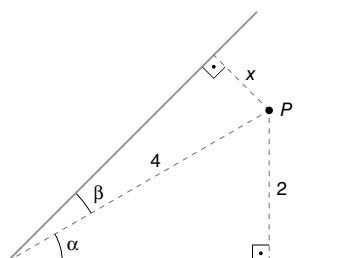
$$\operatorname{tg} b = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - 3\sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sqrt{3} - 9\sqrt{3}}{1 + 3}$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{-8\sqrt{3}}{4}$$

$$\operatorname{tg} b = -\frac{8\sqrt{3}}{12} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

20. Pelo enunciado, montamos a seguinte figura:



Pela figura, temos:

$$\sin \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ$$

Como $\alpha + \beta = 45^\circ$, então $\beta = 15^\circ$.

Assim:

$$\sin 15^\circ = \frac{x}{4}$$

$$\sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{x}{4}$$

$$\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{x}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{4}$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{x}{4}$$

$$x = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

Portanto, a distância do ponto P ao outro lado do ângulo é $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm.

21. Pelo enunciado, temos:

$$\operatorname{tg}(60^\circ + x) = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} x} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} + \operatorname{tg} x = 2\sqrt{3} - 6 \operatorname{tg} x$$

$$7 \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

22. Pelo enunciado, temos:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2} \cos x$$

$$\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} +$$

$$+ \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2} \cos x$$

$$\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 1 + \sqrt{2} \cos x$$

$$\sin x + \cos x + \cos x + \sin x = \frac{2}{\sqrt{2}} + 2 \cos x$$

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Logo, } S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

23. Sabemos que $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e $\cos x =$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ logo } \sin x = \cos y \text{ e } \cos x = \sin y.$$

Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$$\operatorname{sen}(y - x) = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{sen} y \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{1}{3} \quad (I)$$

Para a variável y , temos:

$$\operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} y - \cos y \cdot \cos y = \frac{1}{3}$$

Logo:

$$\begin{cases} 1 - \cos^2 y - \cos^2 y = \frac{1}{3} \\ \operatorname{sen}^2 y - (1 - \operatorname{sen}^2 y) = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 y = \frac{1}{3} \\ \operatorname{sen}^2 y = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (II)$$

Para a variável x , temos:

$$\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$$

Logo:

$$\begin{cases} \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \frac{1}{3} \\ 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{2}{3} \\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (III)$$

Aplicando (II) e (III) na diferença das tangentes, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 y - \operatorname{tg}^2 x &= \frac{\operatorname{sen}^2 y}{\cos^2 y} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Alternativa a.

24. a) Pelas fórmulas de adição de arcos, temos:

$$\begin{aligned} \cos 4x &= 2 \cdot \cos^2 2x - 1 = 2 \cdot (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x)^2 - 1 = \\ &= 2 \cdot \left[1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 \right]^2 - 1 = 2 \cdot \left(\frac{8}{8} - \frac{9}{8} \right)^2 - 1 = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{64} - \frac{32}{32} = -\frac{31}{32} \end{aligned}$$

- b) Pelas fórmulas de adição de arcos, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 4x &= \frac{2 \cdot \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = \frac{2 \cdot \left(\frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right)}{1 - \left(\frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right)^2} = \\ &= \frac{2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} \right)}{1 - \left(\frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} \right)^2} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{4}{3} \right)}{\frac{9}{9} - \left(-\frac{4}{3} \right)^2} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{9}{9} - \frac{16}{9}} = \\ &= \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{7} = \frac{24}{7} \end{aligned}$$

25. $\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2 \cos^2 x - 1)(1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) = \frac{1 - 2 \operatorname{sen}^2 x}{2}$$

$$\therefore 2(2 \cos^2 x - 1)(1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) - (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x)(4 \cos^2 x - 3) = 0$$

$$\therefore 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x = 0 \text{ ou } 4 \cos^2 x - 3 = 0$$

$$\therefore \operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resolvendo essas equações no intervalo $[0, 2\pi]$, concluímos:

$$\operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou}$$

$$x = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4}$$

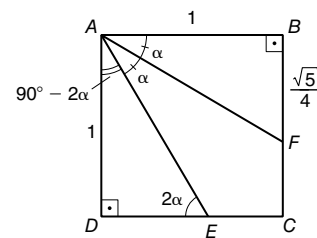
$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6}$$

Logo, temos como conjunto solução:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

26. Pelo enunciado, temos a seguinte figura:



O segmento \overline{AF} é a bissetriz de \widehat{BAE} , então os ângulos \widehat{BAF} e \widehat{FAE} têm a mesma medida (chamamos de α). Consequentemente, o ângulo \widehat{EAD} mede $90^\circ - 2\alpha$, logo o ângulo \widehat{AED} mede 2α .

Observando o triângulo ABF , temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BF}{AB}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4} \quad (I)$$

Observando o triângulo ABF , temos:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{AD}{DE}$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{DE} \quad (II)$$

Aplicando (I) em (II), temos:

$$\frac{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}}{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{4} \right)^2} = \frac{1}{DE}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{16}{16} - \frac{5}{16}} = \frac{1}{DE}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{16}{11} = \frac{1}{DE}$$

$$DE = \frac{11}{8\sqrt{5}} \Rightarrow DE = \frac{11\sqrt{5}}{40}$$

Alternativa d.

27. Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Sabemos que $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Assim:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{45^\circ}{2}}$$

$$1 = \frac{2 \operatorname{tg} (22^\circ 30')}{1 - \operatorname{tg}^2 (22^\circ 30')}$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 (22^\circ 30') = 2 \operatorname{tg} (22^\circ 30')$$

$$\operatorname{tg}^2 (22^\circ 30') + 2 \operatorname{tg} (22^\circ 30') - 1 = 0$$

Chamando $\operatorname{tg} (22^\circ 30') = y$, temos:

$$y^2 + 2y - 1 = 0$$

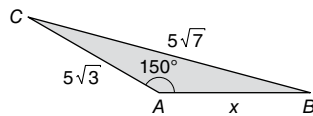
$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Logo:

$$\operatorname{tg} (22^\circ 30') = -1 + \sqrt{2} \text{ ou } \operatorname{tg} (22^\circ 30') = -1 - \sqrt{2} \text{ (não convém)}$$

$$\therefore \operatorname{tg} (22^\circ 30') = -1 + \sqrt{2}$$

28. Sendo x a medida, em centímetro, do lado \overline{AB} , temos:

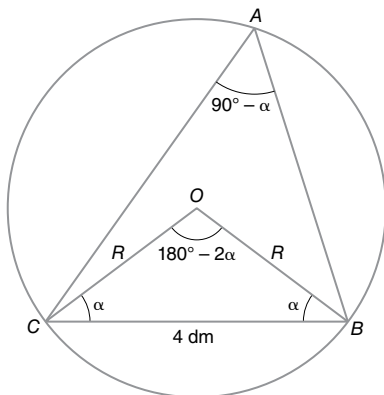


$$(5\sqrt{7})^2 = (5\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot x \cdot \cos 150^\circ \Rightarrow x^2 + 15x - 100 = 0$$

$$\therefore x = -20 \text{ (não convém) ou } x = 5$$

Logo, o lado \overline{AB} mede 5 cm.

29. O triângulo \widehat{BCO} é isósceles de base \widehat{BC} , com $m(\widehat{BOC}) = 180^\circ - 2\alpha$. Como \widehat{BOC} e \widehat{BAC} são ângulos central e inscrito na circunferência, respectivamente, que determinam o mesmo arco, temos que $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ - \alpha$. Assim, indicando por R a medida do raio da circunferência, esquematizamos:



Logo:

$$\frac{4}{\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha)} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\cos \alpha} = 2R \quad (I)$$

Pela relação fundamental da Trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

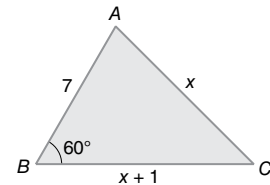
$$\text{Como } 0^\circ < \alpha < 90^\circ, \text{ temos: } \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), concluímos:

$$\frac{4}{5} = 2R \Rightarrow R = 2,5$$

Logo, o raio da circunferência mede 2,5 cm.

30. Sendo x a medida, em centímetro, do lado \overline{AC} , temos:



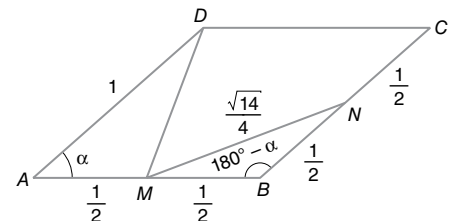
$$x^2 = (x+1)^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot (x+1) \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow 5x = 43$$

$$\therefore x = \frac{43}{5}$$

Logo, a medida do lado \overline{BC} é $\left(\frac{43}{5} + 1\right)$ cm, ou seja, $\frac{48}{5}$ cm = 9,6 cm.

Alternativa b.

31. Pelo enunciado, temos a seguinte figura:



Pela lei dos cossenos, temos:

$$\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos (180^\circ - \alpha)$$

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \cos (180^\circ - \alpha)$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{4}$$

Pela figura, sabemos que $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, então

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}.$$

Pela lei dos cossenos, temos:

$$(DM)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha$$

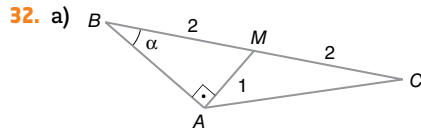
$$(DM)^2 = 1 + \frac{1}{4} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

$$(DM)^2 = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$DM = \sqrt{\frac{2}{4}}$$

Portanto, o segmento \overline{DM} tem medida $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Alternativa b.



Do triângulo retângulo ABM, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$$

b) Do item a, deduzimos que $\alpha = 30^\circ$. Assim, do triângulo ABM, obtemos:

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{BA}{BM} = \frac{BA}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BA}{2}$$

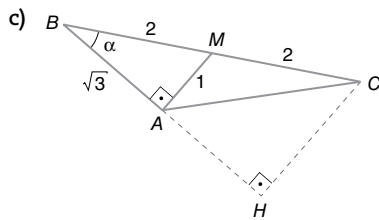
$$\therefore BA = \sqrt{3}$$

Pela lei dos cossenos, aplicada ao triângulo ABC, concluímos:

$$(AC)^2 = 4^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \text{cos } 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AC)^2 = 16 + 3 - 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore AC = \sqrt{7}$$



Do triângulo BCH, temos:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CH}{4}$$

$$\therefore CH = 2$$

d) A área do triângulo ABC é dada por:

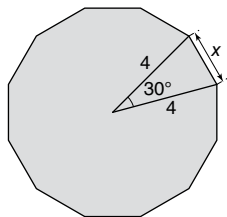
$$A_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} = \sqrt{3}$$

Como M é ponto médio, então a área do triângulo AMC é metade da área do triângulo ABC, logo:

$$A_{\triangle AMC} = \frac{A_{\triangle ABC}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

33. A medida α do ângulo central do dodecágono regular é dada por $\alpha = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

Assim, sendo x a medida, em centímetro, do lado desse dodecágono, temos:



$$x^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \text{cos } 30^\circ \Rightarrow x^2 = 16(2 - \sqrt{3})$$

$$\therefore x = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Alternativa d.

34. a) Pela fórmula de soma dos ângulos internos, temos:

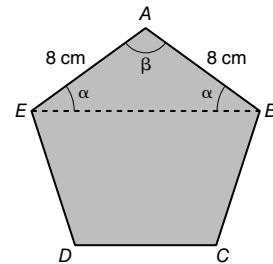
$$S_i = (5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

Portanto, a soma dos ângulos internos desse pentágono regular é 540° .

b) Como o pentágono é regular, todos os ângulos internos têm a mesma medida. Assim:

$$\beta = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

c) O triângulo ABE é isósceles de base EB. Assim, esquematizamos:



Como a soma dos ângulos internos de um triângulo tem 180° , temos:

$$180^\circ = \beta + \alpha + \alpha$$

$$180^\circ = 108^\circ + 2\alpha$$

$$\alpha = \frac{72^\circ}{2}$$

$$\alpha = 36^\circ$$

d) A circunferência de raio R circunscrita ao hexágono circunscreve também o triângulo ABE.

Assim, pela lei dos senos, temos:

$$\frac{8}{\text{sen } 36^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{4}{\text{sen } 36^\circ}$$

$$\therefore R \approx 6,8$$

e) Indicando por d a medida da diagonal EB do pentágono, pela lei dos cossenos, temos:

$$d^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \text{cos } 108^\circ$$

$$d^2 \approx 128 - 128 \cdot (-0,3)$$

$$d^2 \approx 128 + 38,4$$

$$d \approx \sqrt{166,4}$$

$$d \approx 12,9$$

Portanto, a diagonal é 12,9 cm, considerando a aproximação do enunciado.

35. Indicando por A_T e A_S as áreas, em centímetro quadrado, do triângulo AOC e do setor BOC, respectivamente, temos:

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \text{sen } 120^\circ \Rightarrow A_T = 4\sqrt{3}$$

Calculando a área A_S , obtemos:

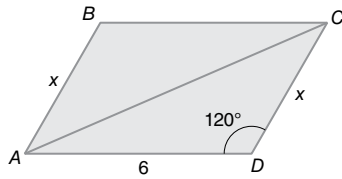
Ângulo (grau)	Área (centímetro quadrado)
360	$\pi \cdot 4^2$
60	A_S

$$\therefore A_S = \frac{8\pi}{3}$$

Como a área A pedida é igual à soma das áreas A_T e A_S , temos:

$$A = \left(4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}\right) \text{cm}^2$$

36. Traçando a diagonal do paralelogramo, temos:



Como o paralelogramo tem o dobro da área de um dos triângulos, temos:

$$20,785 = 2 \cdot \frac{6 \cdot x \cdot \sin 120^\circ}{2}$$

$$20,785 = 6 \cdot x \cdot 0,866$$

$$x = \frac{20,785}{5,196}$$

$$x \approx 4$$

Alternativa b.

Exercícios contextualizados

37. $\operatorname{cosec} \theta < 2 \Rightarrow \frac{1}{\sin \theta} < 2$

Como $\sin \theta > 0$, pois θ é medida de um ângulo agudo, multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por $\sin \theta$, obtemos:

$$1 < 2 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta > \frac{1}{2}$$

Logo, $30^\circ < \theta < 90^\circ$.

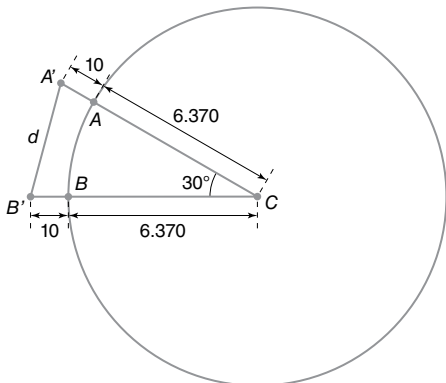
38. Sabendo que $\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$ e chamando o cateto adjacente de LT , temos:

$$390,625 = \frac{1,5 \cdot 10^8}{LT}$$

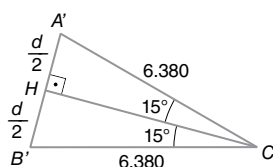
$$LT = \frac{1,5 \cdot 10^8}{390,625} \Rightarrow LT = 384.000$$

Portanto, a distância da Terra à Lua é 384.000 km.

39. Indicando por d a distância entre os foguetes, esquematizamos:



Traçando a altura \overline{CH} do triângulo isósceles $A'B'C$, temos que \overline{CH} também é mediana e bissetriz:



Do triângulo CHA' , obtemos:

$$\sin 15^\circ = \frac{d}{6.380} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{d}{12.760} \quad (I)$$

Calculando $\sin 15^\circ$:

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin (45^\circ - 30^\circ) = \\ &= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad (II) \end{aligned}$$

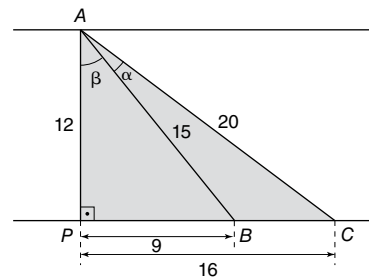
De (I) e (II), concluímos:

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{d}{12.760} \Rightarrow d = 3.190 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

Portanto, a distância entre os foguetes é de $3.190 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})$ km.

40. Sendo P a projeção ortogonal do ponto A sobre a margem oposta da estrada, obtemos, pelo teorema de Pitágoras, $PC = 16$ m e $PB = 9$ m.

Sendo β a medida do ângulo \widehat{BAP} , esquematizamos:



$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16}{20} = \sin \alpha \cdot \frac{12}{15} + \frac{9}{15} \cdot \cos \alpha$$

$$\therefore \frac{4}{5} = \frac{4 \sin \alpha}{5} + \frac{3 \cos \alpha}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4 - 4 \sin \alpha}{3}$$

Aplicando a relação fundamental ($\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$), temos:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{4 - 4 \sin \alpha}{3} \right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 \sin^2 \alpha - 32 \sin \alpha + 7 = 0$$

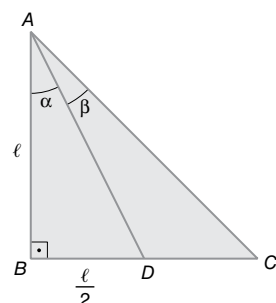
$$\text{Assim, obtemos } \sin \alpha = 1 \text{ ou } \sin \alpha = \frac{7}{25}.$$

Como α é medida de um ângulo agudo, concluímos

$$\text{que } \sin \alpha = \frac{7}{25}.$$

(Nota: outra resolução é possível por meio da lei dos cossenos.)

41. Pelo enunciado, temos:

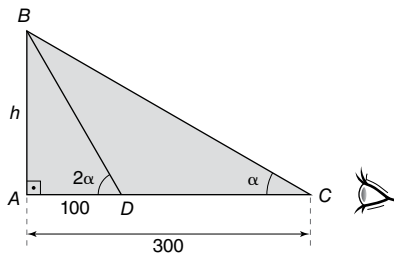


Pela figura, sabemos que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\ell}{\ell} = \frac{1}{2}$. Assim:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (45^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

Portanto, a tangente do menor ângulo interno do triângulo é $\frac{1}{3}$.

42. Sendo h a distância entre o topo da torre e o plano que contém o ponto C onde se localiza o olho da pessoa, temos:



$$\text{a) } \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{300} \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{h}{100} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = 3 \operatorname{tg} \alpha$$

$$\therefore \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 3 \operatorname{tg} \alpha$$

Como $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por $\operatorname{tg} \alpha$, obtendo:

$$\frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 3 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como α é medida de um ângulo agudo, concluímos que:

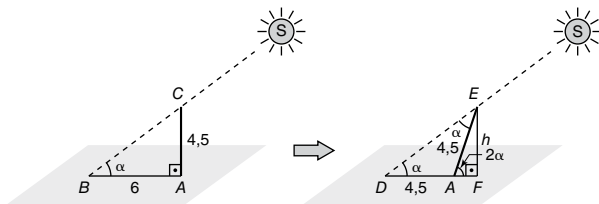
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{300} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{300}$$

$$\therefore h = 100\sqrt{3}$$

Logo, a altura da torre é $(100\sqrt{3} + 1,6)$ m ou, aproximadamente, 174,8 m.

43. Como os raios solares são paralelos, temos que o raio que passa pelo topo do poste, em suas duas posições, forma com o solo ângulos de medidas iguais. Sendo α essa medida, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, calculamos a medida BC:

$$(BC)^2 = 4,5^2 + 6^2 \Rightarrow BC = 7,5$$

Assim, temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{4,5}{7,5} = 0,6 \quad (\text{I})$$

e

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{6}{7,5} = 0,8 \quad (\text{II})$$

O triângulo ADE é isósceles, pois $DA = EA = 4,5$; logo, os ângulos \widehat{ADE} e \widehat{AED} têm medidas iguais a α . O ângulo \widehat{EAF} mede 2α , pois é externo do triângulo ADE. Assim, no triângulo EAF, calculamos a medida h do lado \overline{EF} , que é a distância do topo do poste inclinado ao solo:

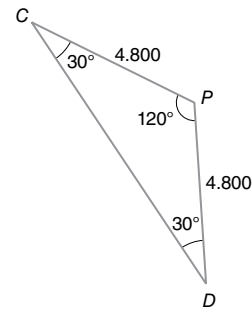
$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{h}{4,5} \Rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha = \frac{h}{4,5} \quad (\text{III})$$

Substituindo (I) e (II) em (III), concluímos:

$$2 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = \frac{h}{4,5} \Rightarrow h = 4,32$$

Logo, a distância do topo do poste inclinado ao solo é 4,32 m.

44. Sendo C o ponto inicial em que o carro A se encontra e D o ponto inicial em que o carro B se encontra, temos:



- a) Pela lei dos cossenos, temos:

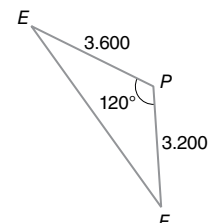
$$(CD)^2 = 4.800^2 + 4.800^2 - 2 \cdot 4.800 \cdot 4.800 \cdot \operatorname{cos} 120^\circ$$

$$(CD)^2 = 23.040.000 + 23.040.000 - 46.080.000 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$CD = 4.800\sqrt{3}$$

Portanto, a distância entre os carros no instante zero é $4.800\sqrt{3}$ m ou aproximadamente 8.314 m.

- b) Sendo E o ponto em que o carro A se encontra e F o ponto em que o carro B se encontra, após 1 minuto, temos:



Pela lei dos cossenos, temos:

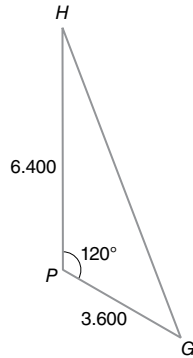
$$(EF)^2 = 3.600^2 + 3.200^2 - 2 \cdot 3.600 \cdot 3.200 \cdot \operatorname{cos} 120^\circ$$

$$(EF)^2 = 12.960.000 + 10.240.000 - 2 \cdot 11.520.000 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$EF = 400\sqrt{217}$$

Portanto, a nova distância entre os carros é $400\sqrt{217}$ m ou aproximadamente 5.892 m.

- c) Sendo G o ponto em que o carro A se encontra e H o ponto em que o carro B se encontra, após 7 minutos, temos:



Pela lei dos cossenos, temos:

$$(GH)^2 = 3.600^2 + 6.400^2 - 2 \cdot 3.600 \cdot 6.400 \cdot \cos 120^\circ$$

$$(GH)^2 = 12.960.000 + 40.960.000 - 2 \cdot 23.040.000 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$GH = 400\sqrt{481}$$

Portanto, a nova distância entre os carros é $400\sqrt{481}$ m ou aproximadamente 8.773 m.

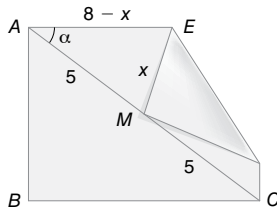
45. Pelo teorema de Pitágoras, obtemos $AC = 10$ cm.

Sendo α a medida do ângulo \widehat{CAD} , temos:

$$\cos \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Sendo x a medida, em centímetro, do segmento \overline{EM} , obtemos $AE = 8 - x$.

Assim, esquematizamos:



Concluimos, aplicando a lei dos cossenos no triângulo AEM:

$$x^2 = 5^2 + (8 - x)^2 - 2 \cdot 5 \cdot (8 - x) \cos \alpha$$

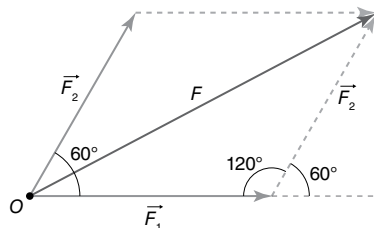
$$\therefore x^2 = 25 + 64 - 16x + x^2 - 10 \cdot (8 - x) \cdot \frac{4}{5}$$

$$\therefore x^2 = 25 + 64 - 16x + x^2 - 64 + 8x$$

$$\therefore 8x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{8}$$

Logo, $EM = \frac{25}{8}$ cm ou 3,125 cm.

46. a) Como os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares, temos a seguinte figura:



Chamando a intensidade do vetor resultante de F , temos, pela lei dos cossenos:

$$F^2 = 16^2 + 14^2 - 2 \cdot 16 \cdot 14 \cdot \cos 120^\circ$$

$$F^2 = 256 + 196 - 2 \cdot 224 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$F = 26$$

Portanto, a força resultante \vec{F} tem intensidade de 26 N.

- b) Pela lei dos cossenos, temos:

$$14^2 = 16^2 + 26^2 - 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \cos x$$

$$196 = 256 + 676 - 832 \cdot \cos x$$

$$\cos x = \frac{736}{832}$$

$$\therefore x \approx 27,8^\circ$$

Portanto, o valor do ângulo é aproximadamente $27,8^\circ$.

47. Pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, temos $m(\widehat{BCA}) = 45^\circ$.

Assim, sendo x a medida BC , em metro, temos:

$$\frac{800}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \frac{800}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\therefore x = 400\sqrt{6}$$

Logo, o comprimento do canal será $400\sqrt{6}$ m ou aproximadamente 980 m.

48. Pela lei dos cossenos, temos:

$$70^2 = (50\sqrt{3})^2 + (FB)^2 - 2 \cdot 50\sqrt{3} \cdot (FB) \cdot \cos 30^\circ$$

$$4.900 = 7.500 + (FB)^2 - 2 \cdot 50\sqrt{3} \cdot (FB) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(FB)^2 - 150(FB) + 2.600 = 0$$

$$(FB) = \frac{150 \pm \sqrt{22.500 - 4 \cdot 1 \cdot 2.600}}{2 \cdot 1}$$

$$(FB) = \frac{150 \pm 110}{2}$$

$$(FB) = 130 \text{ ou } (FB) = 20 \text{ (não convém)}$$

Portanto, sua distância é de 130 metros.

49. Pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, deduzimos que $m(\widehat{BAD}) = 90^\circ$ e $m(\widehat{BCD}) = 65^\circ$. Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\begin{cases} \frac{200}{\sin 90^\circ} = \frac{AB}{\sin 30^\circ} \\ \frac{200}{\sin 65^\circ} = \frac{BC}{\sin 62^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{200}{1} = \frac{AB}{0,5} \\ \frac{200}{0,91} \approx \frac{BC}{0,88} \end{cases}$$

$$\therefore AB = 100 \text{ m e } BC \approx 193,41$$

Assim, concluimos que a área S do quadrilátero $ABCD$ é dada por:

$$S \approx \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 100 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 193,41 \cdot \sin 53^\circ$$

$$\therefore S \approx \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 100 \cdot 0,87 + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 193,41 \cdot 0,80$$

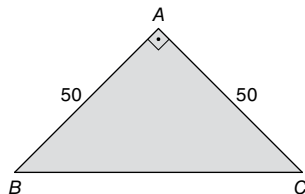
$$\therefore S \approx 24.172,8 \text{ m}^2$$

Logo, a área do terreno é, aproximadamente, $24.172,8 \text{ m}^2$.

50. Sendo α a medida do ângulo \widehat{BAC} , a área S do triângulo ABC é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 50 \cdot \text{sen } \alpha \text{ cm}^2 = 1.250 \text{ sen } \alpha \text{ cm}^2$$

Para que essa área seja máxima, devemos ter $\text{sen } \alpha = 1$; portanto, $\alpha = 90^\circ$.



Assim, aplicando o teorema de Pitágoras, concluímos:

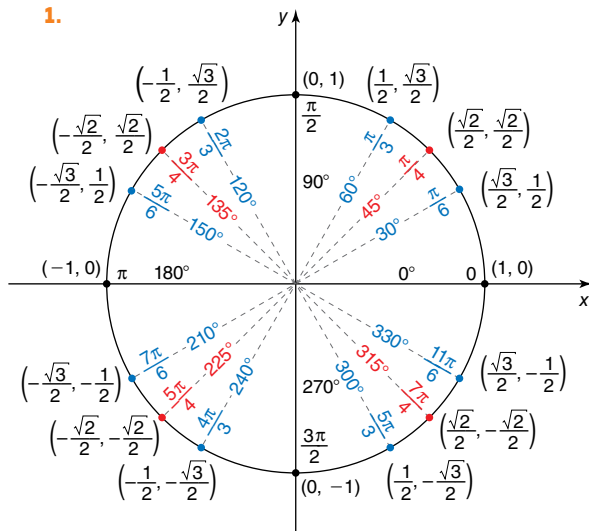
$$(BC)^2 = 50^2 + 50^2 \Rightarrow (BC)^2 = 2 \cdot 50^2$$

$$\therefore BC = 50\sqrt{2} \text{ cm}$$

Alternativa e.

Pré-requisitos para o capítulo 14

1.



2. a) $E = \frac{\text{sen}^2 60^\circ + \cos 120^\circ - \text{sen } 210^\circ}{\cos^2 240^\circ + \text{sen } 330^\circ + \cos 180^\circ} =$

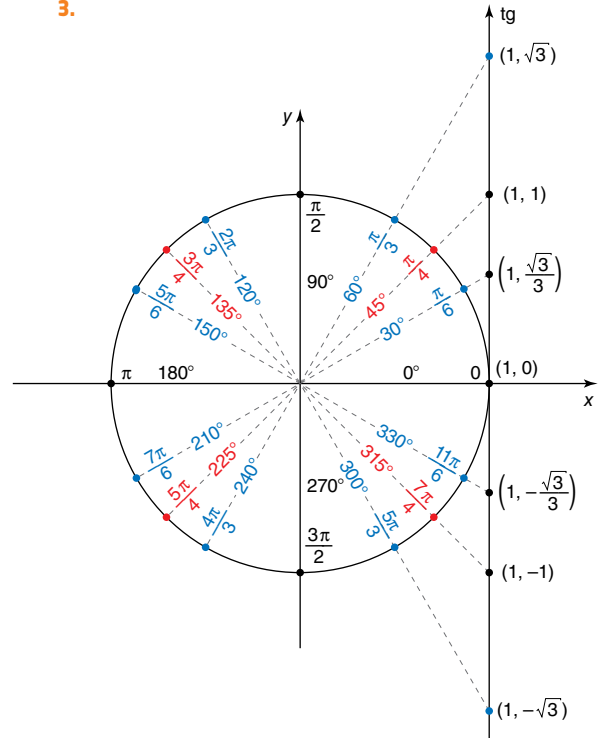
$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1} =$$

$$= \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{5}{4}} = -\frac{3}{5}$$

b) $F = \frac{\text{sen } \frac{\pi}{4} - \cos \frac{2\pi}{3} - \text{sen } \pi}{\cos \frac{3\pi}{4} + \text{sen } \frac{11\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{2}} =$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} - 0}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + 0} = \frac{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}}{-\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} = -1$$

3.



4. a) $E = \frac{\text{tg } 60^\circ + \text{tg } 150^\circ - \text{tg } 180^\circ}{\text{tg } 210^\circ - \text{tg } 300^\circ} =$

$$= \frac{\sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 0}{\frac{\sqrt{3}}{3} - (-\sqrt{3})} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

b) $F = \frac{\text{tg } \frac{\pi}{6} + \text{tg } \frac{2\pi}{3} + \text{tg } 0}{\text{tg } \frac{3\pi}{4} - \text{tg } \frac{4\pi}{3} - \text{tg } \frac{11\pi}{6}} =$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + (-\sqrt{3}) + 0}{-1 - \sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}} =$$

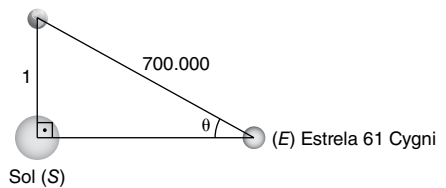
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3}$$

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. Indicando por uma unidade (1) a distância entre a Terra e o Sol, temos que a distância entre a Terra e a estrela 61 Cygni é 700.000, como no esquema:

Terra (T)

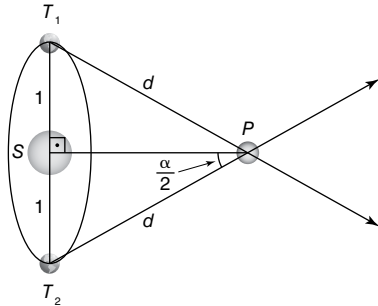


Assim, o seno do ângulo de paralaxe dessa estrela é dado por:

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{700.000}$$

Com uma calculadora científica, obtemos $\theta \approx 0,00008^\circ$ ou $\theta \approx 0,288''$.

2. O triângulo SPT_1 é isósceles; logo, o ângulo de paralaxe da estrela mede $\frac{\alpha}{2}$, como no esquema abaixo:



Assim, temos: $\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{d}$

Como $\text{sen } \alpha = \text{sen} \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \text{sen } \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, vamos determinar, em função de d , o valor de $\cos \frac{\alpha}{2}$. Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{d} \right)^2 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\therefore \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{d}$$

Como $\frac{\alpha}{2}$ é medida de um ângulo agudo, seu cosseno é positivo, portanto:

$$\therefore \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{d}$$

Assim, concluímos:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen} \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \text{sen } \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } \alpha = 2 \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{d}$$

$$\therefore \text{sen } \alpha = \frac{2\sqrt{d^2 - 1}}{d^2}$$

Análise da resolução

COMENTÁRIO: Embora a argumentação do aluno esteja correta, a conclusão está incompleta, pois ele não considerou outra medida possível para o ângulo \widehat{ACB} , que ocorre para outra posição do triângulo ABC (posição em que o centro da circunferência fica exterior ao triângulo).

Resolução correta:

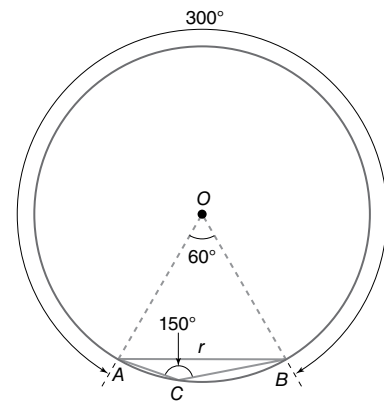
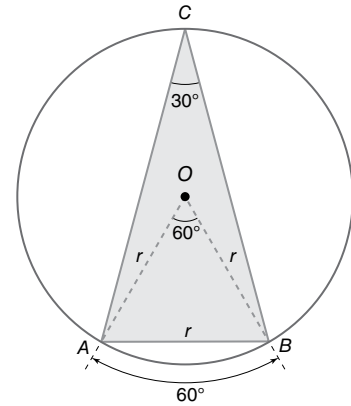
1ª modo:

Pela lei dos senos, aplicada ao triângulo ABC , temos:

$$\frac{r}{\text{sen } \alpha} = 2r \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$$

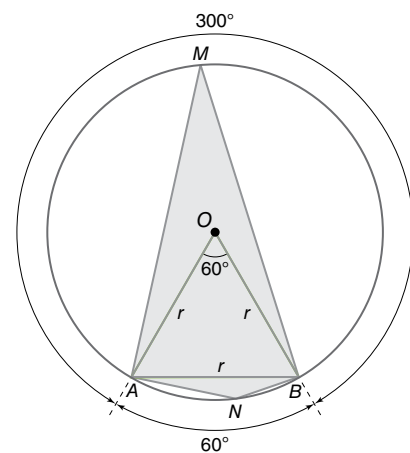
Como $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, pois α é medida de um ângulo interno de um triângulo, temos dois valores possíveis: $\alpha = 30^\circ$ ou $\alpha = 150^\circ$.

Duas figuras possíveis para esses valores de α são:



2º modo:

Em uma circunferência de raio r , consideremos uma corda \overline{AB} de comprimento r . Os pontos A e B determinam nessa circunferência dois arcos distintos de extremos A e B . Considerando um ponto M em um desses arcos e um ponto N no outro, com M e N distintos de A e B , obtemos os triângulos ABM e ABN que satisfazem as condições enunciadas. Observe:



Assim, temos:

$$m(\widehat{AMB}) = \frac{m(\widehat{ANB})}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$m(\widehat{ANB}) = \frac{m(\widehat{AMB})}{2} = \frac{300^\circ}{2} = 150^\circ$$

Logo, há duas respostas possíveis: 30° ou 150° .