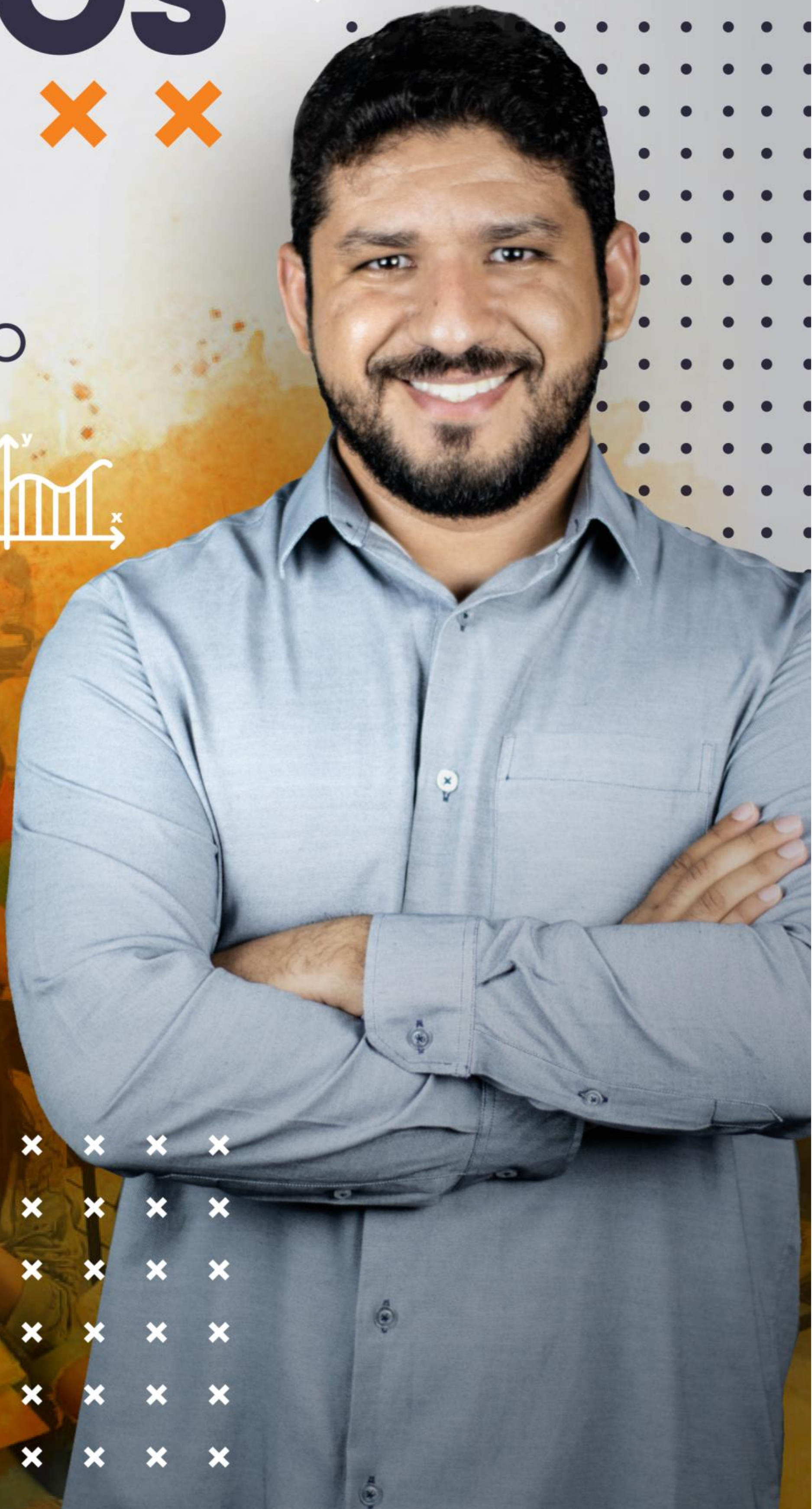
CONHECIMENTOS

ALGÉBRICOS

JUNTOS,
VENCEREMOS
ESTE MOMENTO



ANDERSON
MATEMÁTICA

função polinomial do primeiro grau

CONHECIMENTOS ALGÉBRICOS

FUNÇÃO POLINOMIAL DO PRIMEIRO GRAU

O primeiro passo será entender o que é uma função polinomial do primeiro grau, e para isso, vamos analisar a situação clássica do táxi!

Sabemos que ao entrar, já existe um valor no taxímetro, esse valor é chamado de bandeirada e mesmo que você ainda não tenha percorrido alguma distância, a cobrança já inicia a partir desse valor. Vamos supor, hipoteticamente, que a bandeirada desse taxista é de R$ 6,00. Ao passo que o taxista começa a dirigir, o taxímetro aumenta o valor cobrado, de forma que quanto mais quilômetros são percorridos, mais você irá pagar. Mas de que maneira essas grandezas se relacionam?

Observe o comportamento dessas grandezas na tabela a seguir:

	x	y	
	Distância Percorrida (Km)	**Valor Cobrado (R$)**	
	0	6	
+1	1	10	+4
+1	2	14	+4
+1	3	18	+4
+1	4	22	+4
+1	5	26	+4
+5	10	46	+20
+5	15	66	+20
+5	20	86	+20
+10	30	126	+40
+10	40	166	+40

Algumas características encontradas nessa tabela nos fazem concluir que o preço a ser pago se relaciona com a quantidade de quilômetros percorridos através de uma função do primeiro grau.

Destacaremos, portanto, três características que fazem com que uma função seja classificada como do primeiro grau. Anota aí, porque isso é muito importante!

1ª CARACTERÍSTICA

Aumentos iguais em x proporcionam aumentos iguais em y

Perceba que, na tabela, toda vez que aumentamos 1 km, o valor cobrado aumenta R$ 4,00. Toda vez que aumentamos 5 km, o valor cobrado aumenta R$ 20,00 e toda vez que aumentamos 10 km, o valor cobrado aumenta R$ 40,00. Sendo assim, aumentos iguais em x proporcionam aumentos iguais em y.

2ª CARACTERÍSTICA

A variação em y é proporcional à variação em x

Você deve lembrar que a proporção é uma igualdade entre razões, uma igualdade entre divisões, então quando você dividir a variação de y pela variação de x teremos sempre a mesma resposta.

Temos três situações na tabela, uma em vermelho, em que aumentamos 4 em y para cada aumento de 1 em x, uma em verde, em que aumentamos 20 em y para cada 5 em x e uma em azul, em que aumentamos 40 em y para cada aumento de 10 em x.

Se dividirmos 4 por 1, a resposta será 4;
Se dividirmos 20 por 5, a resposta será 4;
Se dividirmos 40 por 10, a resposta será 4.

Como todas as divisões das variações em y pelas variações em x dão a mesma resposta, dizemos que a variação em y é proporcional à variação em x.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{1} = \frac{20}{5} = \frac{40}{10} = 4 \text{ reais/km}$$

3ª CARACTERÍSTICA

A taxa de crescimento absoluto da função é constante

Essa terceira característica, na verdade, é uma consequência da segunda. A divisão da variação em y pela variação em x é denominada taxa de crescimento absoluto, na função do primeiro grau, essa divisão é constante, portanto, a taxa de crescimento absoluto também é constante.

$$\text{Taxa de Crescimento absoluto} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

É importante atentar que toda taxa de crescimento tem uma unidade, no exemplo anterior, a unidade era reais por quilômetro. Sempre que possível, mantenha as unidades na sua comparação para que você possa compreender melhor a situação. As unidades dão um sentido maior à tua interpretação.

FORMATO ALGÉBRICO DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

Conhecidas as características, qual o formato algébrico da função do primeiro grau?

$$y = ax + b$$

y é denominado variável dependente;
x é denominado variável independente;
a e b são os coeficientes e recebem alguns nomes específicos.

$$y = ax + b$$

a: Taxa de variação
b: Valor fixo

$$y = ax + b$$

a: Coeficiente angular
b: Coeficiente linear

Independente da nomenclatura de cada um, precisamos saber encontrar o formato algébrico da função do primeiro grau e isso tem que ser feito da maneira mais rápida possível. A maioria dos alunos lançam mão de sistemas lineares que demandam muito tempo e raciocínio. Você precisa economizar tempo e acelerar a resolução. Não sabe como? Então vamos lá que vou te ensinar!

1º PASSO – DETERMINAR O "a"

Lembre-se que o "a" é chamado de taxa de variação, taxa de crescimento, sendo assim, basta dividirmos a variação em y pela variação em x para encontrá-lo:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Utilizando a tabela do exemplo anterior, vamos encontrar o "a":

x	y
Distância Percorrida (Km)	**Valor Cobrado (R$)**
0	6
1	10
2	14
3	18
4	22
5	26
10	46
15	66
20	86
30	126
40	166

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{1} = 4$$

2º PASSO – DETERMINAR O "b"

O "b" é o valor de y quando o x é 0. "b" é o valor inicial, o valor fixo.

x	y
Distância Percorrida (Km)	Valor Cobrado (R$)
0	6
1	10
2	14
3	18

$$b = 6$$

A expressão algébrica para a função que relaciona o valor a ser pago na corrida do táxi com a quantidade de quilômetros rodados é

$$y = 4x + 6$$

Dessa forma, para qualquer quantidade de quilômetros rodados "x", saberemos o valor a ser pago "y".

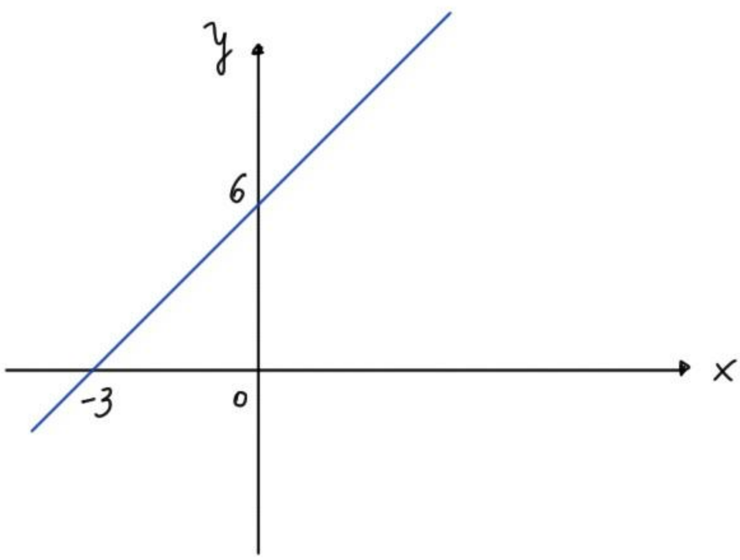
Se o trajeto a ser percorrido pelo táxi for de 8 km, basta substituir x por 8 e teremos:

$$y = 4x + 6 \to y = 4 \cdot 8 + 6 \to y = 32 + 6 \to y = R\$38{,}00$$

ENCONTRAR "a" E "b" NO GRÁFICO

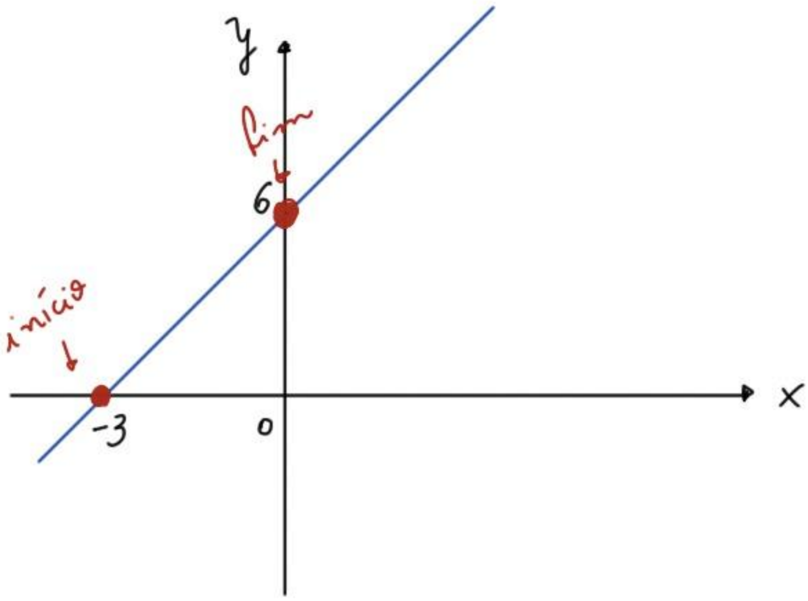
Já que sabemos encontrar o "a" e o "b" em tabelas, que tal encontrarmos em gráficos?

Observe o gráfico a seguir:



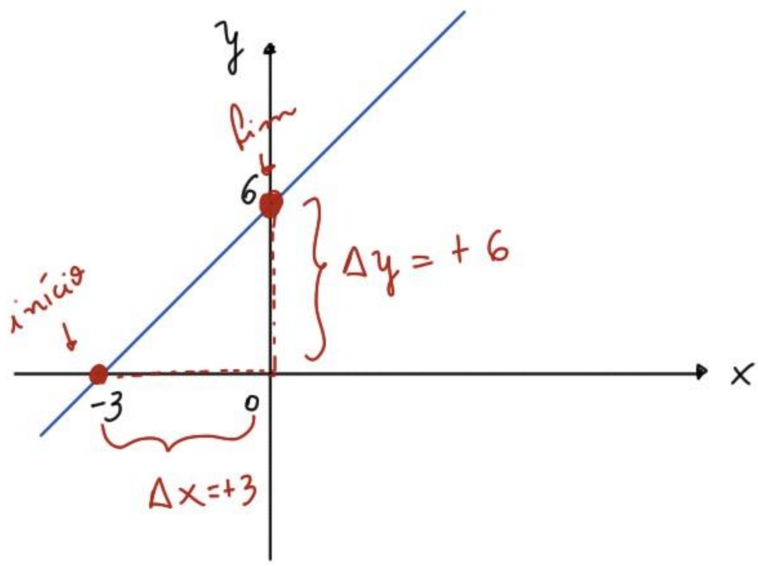
Qual a expressão algébrica dessa função do primeiro grau?

O primeiro passo para encontrar a expressão é tomar dois pontos como referência.



Um dos pontos será considerado como o início e o outro como o fim.

Agora, avalie a variação tanto do x quanto do y, do início ao fim:

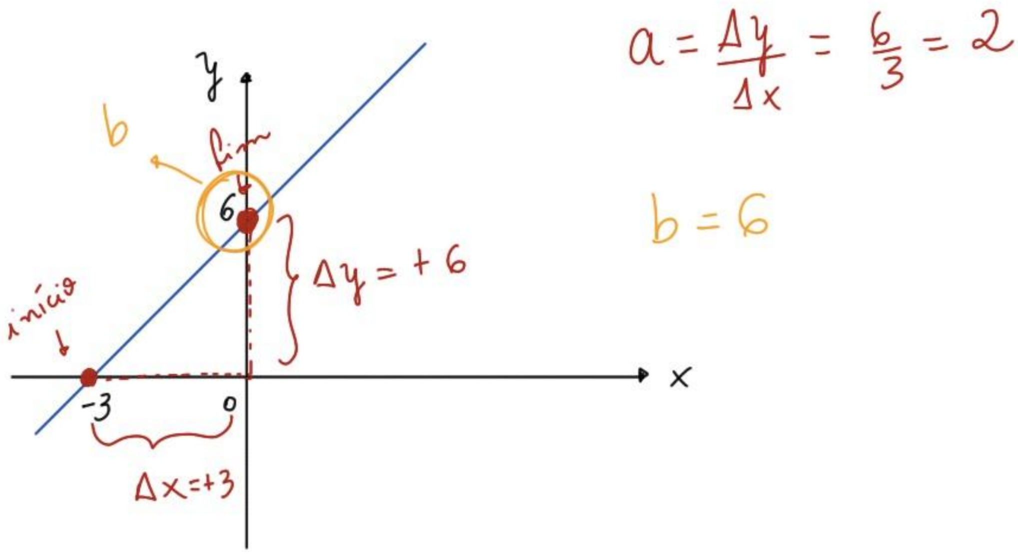


Veja que o x aumentou 3 unidades, então, dizemos que a variação em x foi 3, ou ainda, $\Delta x = 3$. Já o y aumentou 6unidades, então, dizemos que a variação em y foi 6, ou ainda, $\Delta y = 6$.

Pronto! O "a" será dado pela divisão da variação em y pela variação em x. viu como é simples?

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{3} = 2$$

E o “b” nada mais é do que o valor de y quando o x é zero. Ou, mais facilmente, o “b” é o lugar em que a reta toca o eixo y;



Sendo assim, a = 2 e b = 6, daí:

$$y = 2x + 6$$

Uma outra maneira de você encontrar a expressão algébrica da função do primeiro grau no gráfico é:

$$\frac{y}{\substack{\textit{lugar que a} \\ \textit{reta toca o} \\ \textit{eixo } y}} + \frac{x}{\substack{\textit{lugar que a} \\ \textit{reta toca o} \\ \textit{eixo } x}} = 1$$

No gráfico acima, a reta toca o eixo x em -3 e toca o eixo y em 6, daí, teríamos:

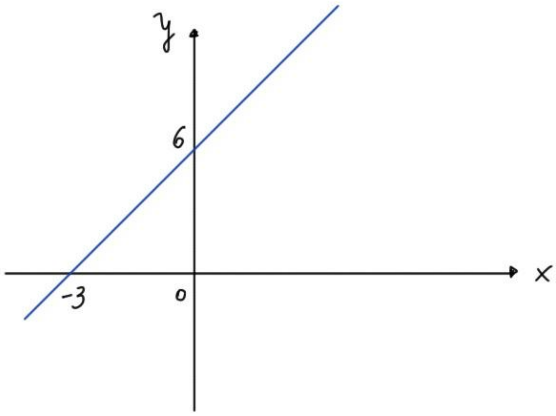
$$\frac{y}{6} + \frac{x}{-3} = 1$$

Esta expressão é equivalente à expressão anterior, basta tirarmos o mínimo e isolarmos o y:

$$\frac{y}{6} + \frac{x}{-3} = 1 \rightarrow \frac{y - 2x}{6} = \frac{6}{6} \rightarrow y - 2x = 6 \rightarrow y = 2x + 6$$

Essa última dica só pode ser utilizada se a reta tocar o eixo y e o eixo x!

x é dito raiz da função do primeiro grau quando ele é o valor responsável por tornar o y igual a 0. Em tese, a raiz da função do primeiro grau é o lugar em que a reta toca o eixo x.



No gráfico acima, a raiz da função é -3, uma vez que a reta cruza o eixo x em -3.

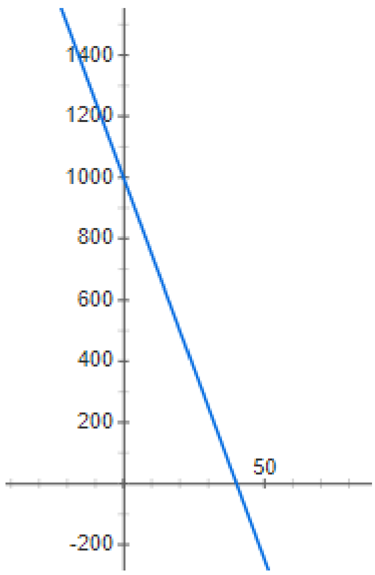
Vimos anteriormente que a expressão algébrica dessa função é $y = 2x + 6$, se substituirmos x = -3, com certeza o y será igual a zero.

$$y = 2x + 6 \rightarrow f(-3) = 2 \cdot (-3) + 6 \rightarrow f(-3) = -6 + 6 \rightarrow f(-3) = 0 \rightarrow y = 0$$

Qual a importância de saber a raiz da função do primeiro grau?

Principalmente em funções decrescentes, somos indagados sobre o término do processo, observe:

João acabou de verificar que possui um saldo de R$ 1.000,00 em sua conta bancária. Para que possa arcar com as despesas, João necessita de R$ 25,00 diários. Após quantos dias o dinheiro de João acabará?



Para esse exemplo, a taxa de variação é negativa, já que João gasta R$ 25,00 por dia, logo o "a" é -25. O valor fixo ou inicial que João possui é R$ 1.000,00, logo "b" é igual a 1000. Sendo assim, a expressão algébrica para essa função será:

$$y = -25x + 1000$$

y nos diz o valor que João possui após x dias.

Se queremos saber após quantos dias o valor que João possui acaba, basta encontrarmos a raiz da função do primeiro grau, que é o valor de x que faz com que o y seja nulo.

$$y = -25x + 1000$$

$$0 = -25x + 1000$$

$$25x = 1000$$

$$x = \frac{1000}{25}$$

$$x = 40$$

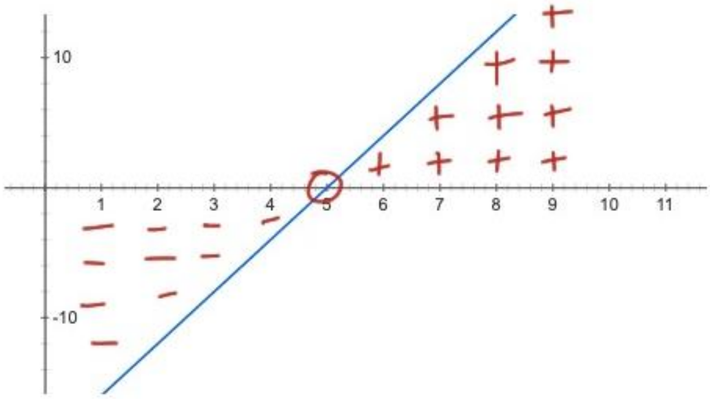
Perceba que a raiz pode também ser encontrada através de $x_r = \frac{-b}{a}$.

$$x_r = \frac{-b}{a} \rightarrow x_r = \frac{-1000}{-25} \rightarrow x_r = 40$$

Ou seja, após 40 dias o valor de João acabará! 40 é dito raiz da função, pois quando x = 40, o y é 0.

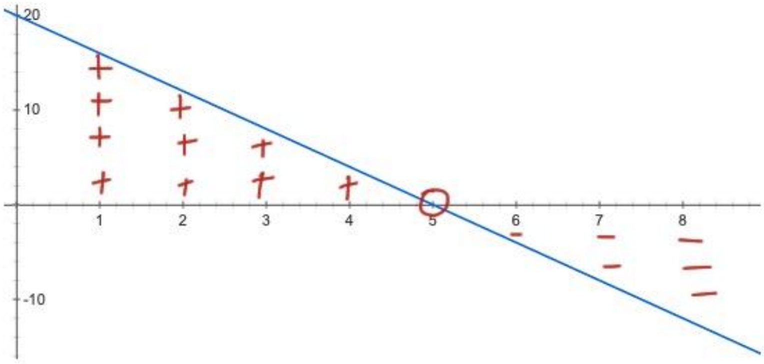
Outra aplicação importante para a raiz é na análise do sinal do gráfico da função do primeiro grau.

ANÁLISE DO SINAL



Quando a função do primeiro grau é crescente, à esquerda da raiz, que nesse caso é 5, a função assume valores negativos. À direita da raiz, a função assume valores positivos e exatamente na raiz, a função é nula!

Matematicamente falando, $x < 5 \rightarrow y < 0$, $x = 5 \rightarrow y = 0$ e $x > 5 \rightarrow y > 0$.



Já na função do primeiro grau decrescente, à esquerda da raiz, que nesse caso é 5, a função assume valores positivos. À direita da raiz, a função assume valores negativos e exatamente na raiz, a função é nula!

Matematicamente falando, $x < 5 \rightarrow y > 0$, $x = 5 \rightarrow y = 0$ e $x > 5 \rightarrow y < 0$.

É por isso que dizemos que nas funções crescentes, conservamos a desigualdade e nas funções decrescentes, invertemos as desigualdades. Isso será muito útil nas inequações do primeiro grau.

INEQUAÇÕES DO 1º GRAU

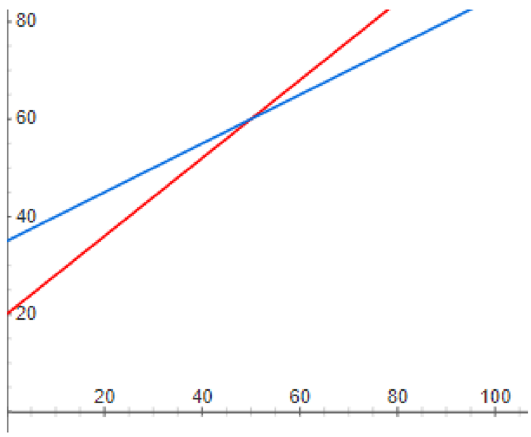
Para compreendermos direitinho, vamos analisar dois planos de telefonia celular:

Plano	Custo Fixo	Custo Adicional por Minuto
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80

No plano A, iniciamos pagando 35 reais e a cada minuto utilizado, pagaremos mais 50 centavos. Fazendo com que a função que relaciona o valor total a ser pago "y", em reais, com a quantidade de minutos utilizados "x" seja $\boldsymbol{y_A = 0,5x + 35}$.

No plano B, iniciamos pagando 20 reais (menos do que no plano A) e a cada minuto utilizado, pagaremos mais 80 centavos (mais do que no plano A). Fazendo com que a função que relaciona o valor total a ser pago "y", em reais, com a quantidade de minutos utilizados "x" seja $\boldsymbol{y_B = 0,8x + 20}$.

Se representarmos os dois gráficos em um mesmo plano, teremos:



Perceba que quanto mais para cima estiver um gráfico, maior será o valor a ser pago. Do mesmo modo, quanto mais baixo estiver o gráfico, menos será pago.

Se fosse perguntado, em que situação seria mais barato contratar o plano A, como responderíamos?

Você precisa entender que se é mais barato contratar o plano A, é porque o valor pago em A é menor do que o pago em B. Sendo assim, $y_A < y_B$.

$$y_A < y_B$$

$$0{,}5x + 35 < 0{,}8x + 20$$

Passando tudo para o primeiro membro, temos:

$$0{,}5x - 0{,}8x + 35 - 20 < 0$$

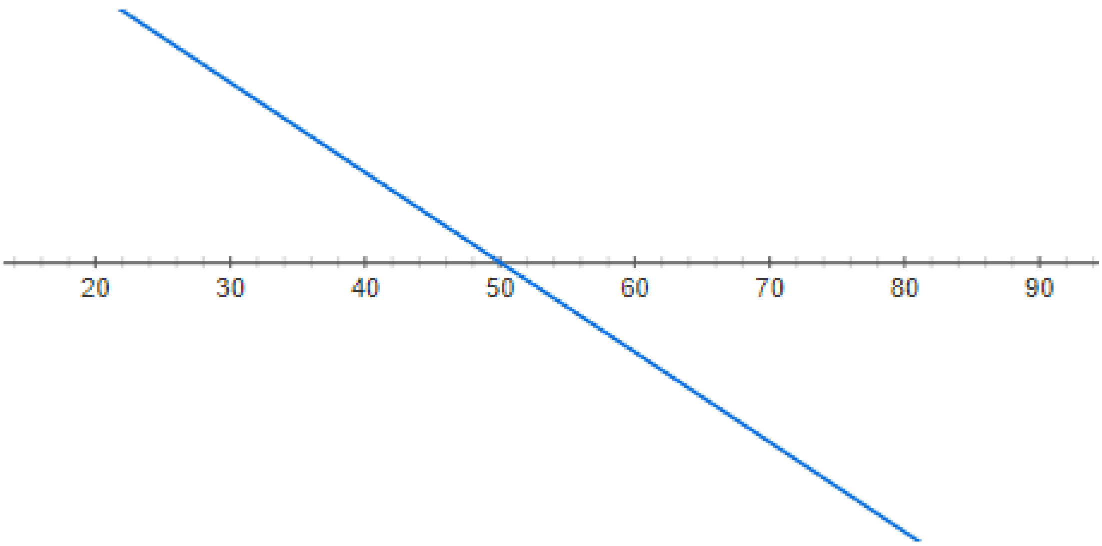
$$-0{,}3x + 15 < 0$$

Vamos analisar o sinal da função decrescente $y = -0{,}3x + 15$, para saber quando ela se torna negativa.

A raiz dessa função é:

$$x_r = \frac{-b}{a} \to x_r = \frac{-15}{-0{,}3} \to x_r = 50$$

Esboçando o gráfico, temos:



Como estamos interessados nos valores de x para que essa função assuma valores negativos, nossa solução estará nos valores que estão à direita da raiz ($x < 50$).

Ou seja, se forem utilizados mais de 50 minutos, o valor a ser pago em A será menor do que o pago em B.

Se você não se sente confortável analisando o sinal da função, você pode economizar resolvendo de uma maneira mais rápida:

$$y_A < y_B$$

$$0{,}5x + 35 < 0{,}8x + 20$$

$$35 - 20 < 0{,}8x - 0{,}5x$$

$$15 < 0{,}3x$$

$$\frac{15}{0{,}3} < x$$

$$50 < x$$

Ou, de maneira equivalente:

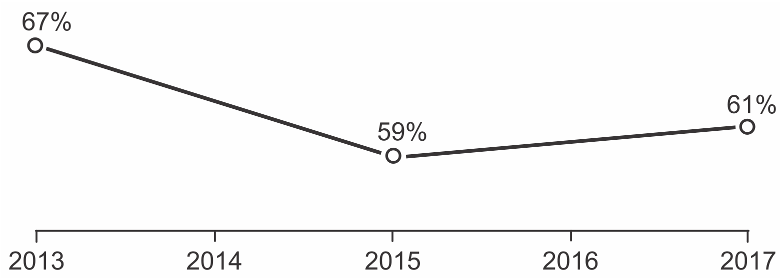
$$x > 50$$

Confirmando que, se forem utilizados mais de 50 minutos, o valor a ser pago em A será menor do que o pago em B.

Vamos aproveitar tudo que foi aprendido e vamos resolver algumas questões do Enem!

QUESTÕES

1. (Enem 2018) A raiva é uma doença viral e infecciosa, transmitida por mamíferos. A campanha nacional de vacinação antirrábica tem o objetivo de controlar a circulação do vírus da raiva canina e felina, prevenindo a raiva humana. O gráfico mostra a cobertura (porcentagem de vacinados) da campanha, em cães, nos anos de 2013, 2015 e 2017, no município de Belo Horizonte, em Minas Gerais. Os valores das coberturas dos anos de 2014 e 2016 não estão informados no gráfico e deseja-se estimá-los. Para tal, levou-se em consideração que a variação na cobertura de vacinação da campanha antirrábica, nos períodos de 2013 a 2015 e de 2015 a 2017, deu-se de forma linear.

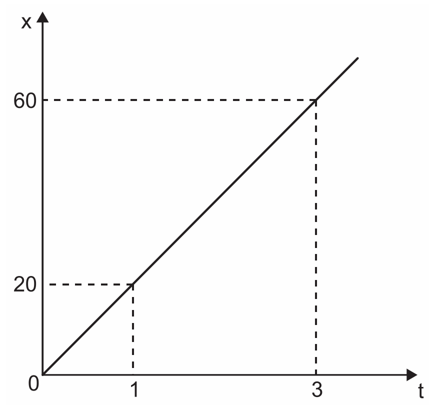


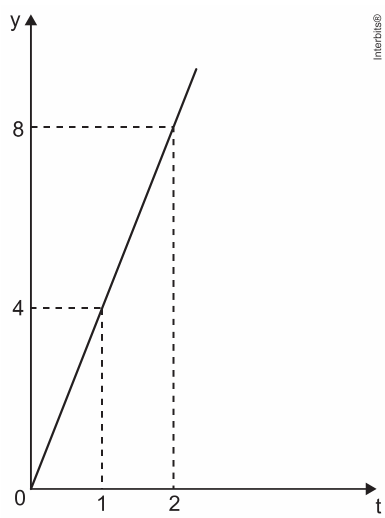
Disponível em: http://pni.datasus.gov.br. Acesso em: 5 nov. 2017.

Qual teria sido a cobertura dessa campanha no ano de 2014?

Ⓐ 62,3%
Ⓑ 63,0%
Ⓒ 63,5%
Ⓓ 64,0%
Ⓔ 65,5%

2. (Enem PPL 2018) A quantidade x de peças, em milhar, produzidas e o faturamento y, em milhar de real, de uma empresa estão representados nos gráficos, ambos em função do número t de horas trabalhadas por seus funcionários.

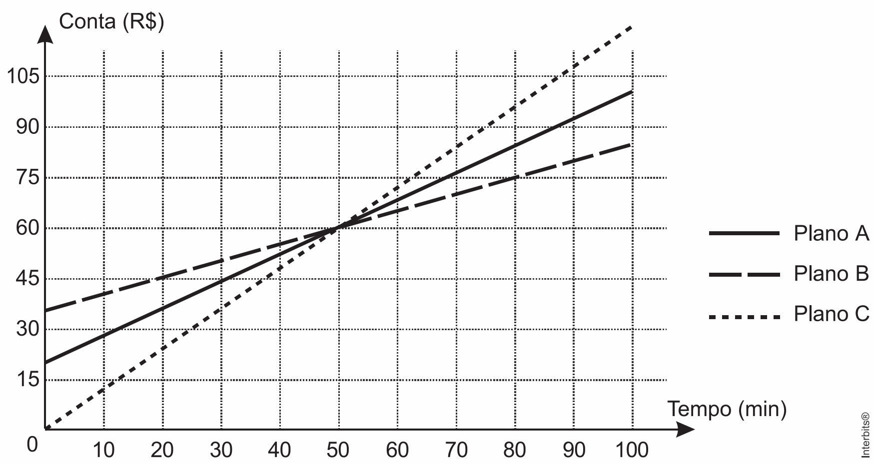




O número de peças que devem ser produzidas para se obter um faturamento de R$ 10.000,00 é

Ⓐ 2.000.
Ⓑ 2.500.
Ⓒ 40.000.
Ⓓ 50.000.
Ⓔ 200.000.

3. (Enem PPL 2018) Na intenção de ampliar suas fatias de mercado, as operadoras de telefonia apresentam diferentes planos e promoções. Uma operadora oferece três diferentes planos baseados na quantidade de minutos utilizados mensalmente, apresentados no gráfico. Um casal foi à loja dessa operadora para comprar dois celulares, um para a esposa e outro para o marido. Ela utiliza o telefone, em média, 30 minutos por mês, enquanto ele, em média, utiliza 90 minutos por mês.



Com base nas informações do gráfico, qual é o plano de menor custo mensal para cada um deles?

A) O plano A para ambos.
B) O plano B para ambos.
C) O plano C para ambos.
D) O plano B para a esposa e o plano C para o marido.
E) O plano C para a esposa e o plano B para o marido.

4. (Enem PPL 2017) Os consumidores X, Y e Z desejam trocar seus planos de internet móvel na tentativa de obterem um serviço de melhor qualidade. Após pesquisarem, escolheram uma operadora que oferece cinco planos para diferentes perfis, conforme apresentado no quadro.

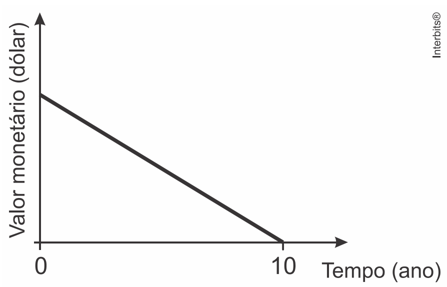
Plano	Franquia	Preço mensal de assinatura	Preço por MB excedente
A	150 MB	R$ 29,90	R$ 0,40
B	250 MB	R$ 34,90	R$ 0,10
C	500 MB	R$ 59,90	R$ 0,10
D	2 GB	R$ 89,90	R$ 0,10
E	5 GB	R$ 119,90	R$ 0,10

Em cada plano, o consumidor paga um valor fixo (preço mensal da assinatura) pela franquia contratada e um valor variável, que depende da quantidade de MB utilizado além da franquia. Considere que a velocidade máxima de acesso seja a mesma, independentemente do plano, que os consumos mensais de X, Y e Z são de 190 MB, 450 MB e 890 MB, respectivamente, e que cada um deles escolherá apenas um plano.

Com base nos dados do quadro, as escolhas dos planos com menores custos para os consumidores X, Y e Z, respectivamente, são

A) A, C e C.
B) A, B e D.
C) B, B e D.
D) B, C e C.
E) B, C e D.

5. (Enem PPL 2017) Um sistema de depreciação linear, estabelecendo que após 10 anos o valor monetário de um bem será zero, é usado nas declarações de imposto de renda de alguns países. O gráfico ilustra essa situação.

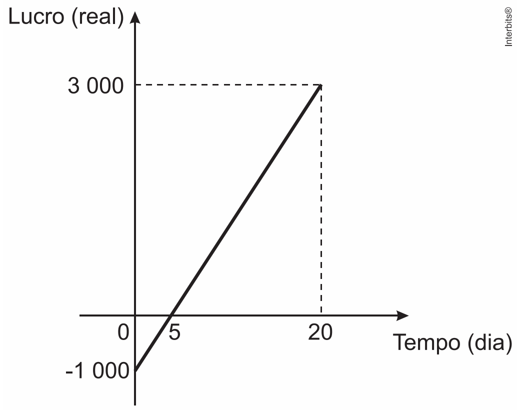


Uma pessoa adquiriu dois bens, A e B, pagando 1.200 e 900 dólares, respectivamente.

Considerando as informações dadas, após 8 anos, qual será a diferença entre os valores monetários, em dólar, desses bens?

A) 30
B) 60
C) 75
D) 240
E) 300

6. (Enem PPL 2017) Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.



A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é

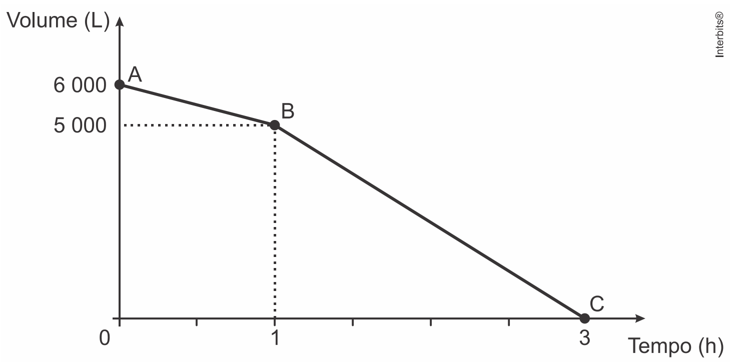
Ⓐ $L(t) = 20t + 3.000$
Ⓑ $L(t) = 20t + 4.000$
Ⓒ $L(t) = 200t$
Ⓓ $L(t) = 200t - 1.000$
Ⓔ $L(t) = 200t + 3.000$

7. (Enem (Libras) 2017) Um reservatório de água com capacidade para 20 mil litros encontra-se com 5 mil litros de água num instante inicial (t) igual a zero, em que são abertas duas torneiras. A primeira delas é a única maneira pela qual a água entra no reservatório, e ela despeja $10\,L$ de água por minuto; a segunda é a única maneira de a água sair do reservatório. A razão entre a quantidade de água que entra e a que sai, nessa ordem, é igual a $\frac{5}{4}$. Considere que $Q(t)$ seja a expressão que indica o volume de água, em litro, contido no reservatório no instante t, dado em minuto, com t variando de 0 a 7.500.

A expressão algébrica para $Q(t)$ é

Ⓐ $5.000 + 2t$
Ⓑ $5.000 - 8t$
Ⓒ $5.000 - 2t$
Ⓓ $5.000 + 10t$
Ⓔ $5.000 - 2{,}5t$

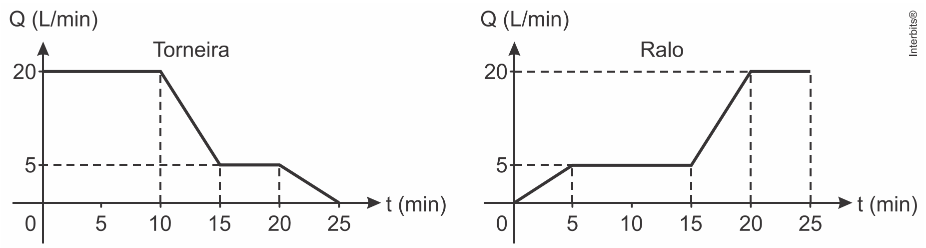
8. (Enem 2016) Uma cisterna de $6.000\,\text{L}$ foi esvaziada em um período de $3\,\text{h}$. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.



Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

- **A** 1.000
- **B** 1.250
- **C** 1.500
- **D** 2.000
- **E** 2.500

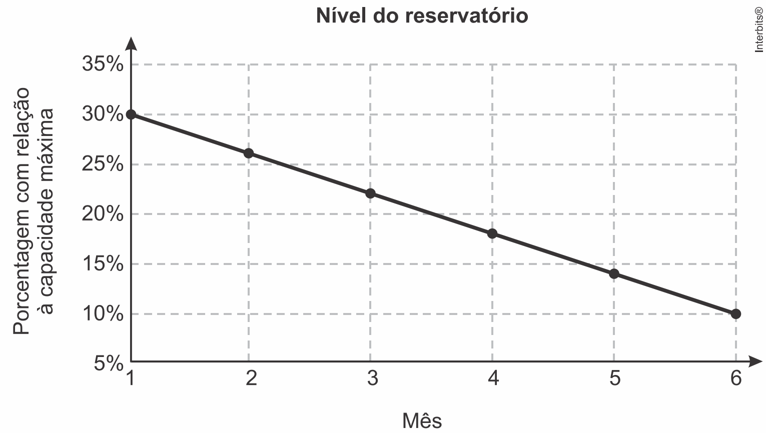
9. (Enem 2016) Um reservatório é abastecido com água por uma torneira e um ralo faz a drenagem da água desse reservatório. Os gráficos representam as vazões Q, em litro por minuto, do volume de água que entra no reservatório pela torneira e do volume que sai pelo ralo, em função do tempo t, em minuto.



Em qual intervalo de tempo, em minuto, o reservatório tem uma vazão constante de enchimento?

- **A** De 0 a 10.
- **B** De 5 a 10.
- **C** De 5 a 15.
- **D** De 15 a 25.
- **E** De 0 a 25.

10. (Enem 2016) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

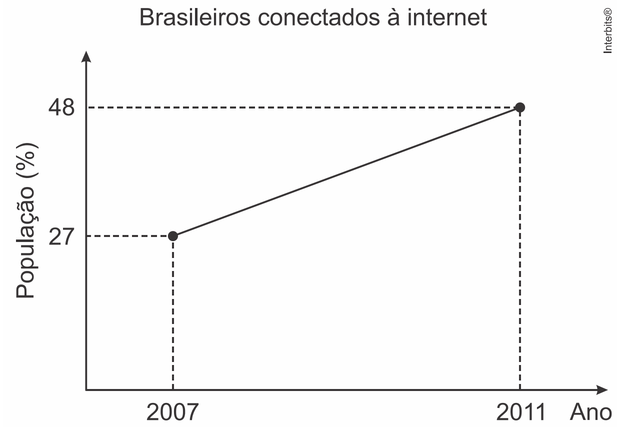
Ⓐ 2 meses e meio.
Ⓑ 3 meses e meio.
Ⓒ 1 mês e meio.
Ⓓ 4 meses.
Ⓔ 1 mês.

11. (Enem 2ª aplicação 2016) Um produtor de maracujá usa uma caixa-d'água, com volume V, para alimentar o sistema de irrigação de seu pomar. O sistema capta água através de um furo no fundo da caixa a uma vazão constante. Com a caixa-d'água cheia, o sistema foi acionado às 7 h da manhã de segunda-feira. Às 13 h do mesmo dia, verificou-se que já haviam sido usados 15% do volume da água existente na caixa. Um dispositivo eletrônico interrompe o funcionamento do sistema quando o volume restante na caixa é de 5% do volume total, para reabastecimento.

Supondo que o sistema funcione sem falhas, a que horas o dispositivo eletrônico interromperá o funcionamento?

Ⓐ Às 15 h de segunda-feira.
Ⓑ Às 11 h de terça-feira.
Ⓒ Às 14 h de terça-feira.
Ⓓ Às 4 h de quarta-feira.
Ⓔ Às 21 h de terça-feira.

12. (Enem PPL 2016) O percentual da população brasileira conectada à internet aumentou nos anos de 2007 a 2011. Conforme dados do Grupo Ipsos, essa tendência de crescimento é mostrada no gráfico.

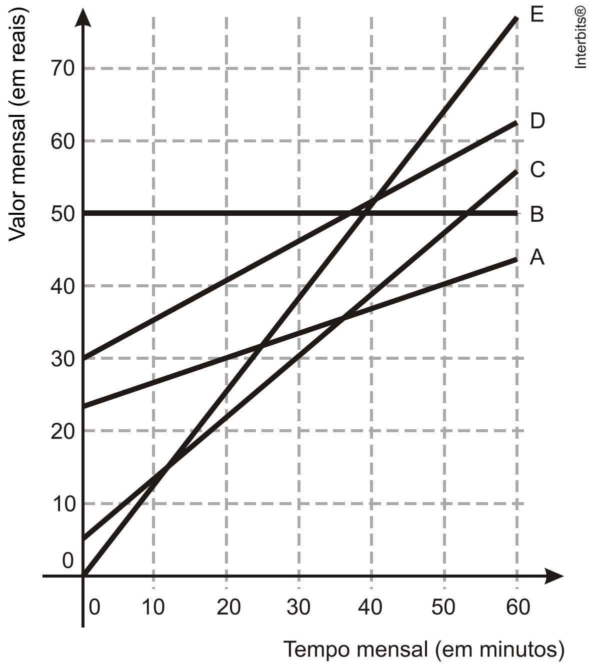


Suponha que foi mantida, para os anos seguintes, a mesma taxa de crescimento registrada no período 2007-2011.

A estimativa para o percentual de brasileiros conectados à internet em 2013 era igual a

- A 56,40%.
- B 58,50%.
- C 60,60%.
- D 63,75%.
- E 72,00%.

13. (Enem 2014) No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular.
Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



Essa pessoa pretende gastar exatamente R$30,00 por mês com telefone.

Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

A) A
B) B
C) C
D) D
E) E

14. (Enem PPL 2014) Os sistemas de cobrança dos serviços de táxi nas cidades A e B são distintos. Uma corrida de táxi na cidade A é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,45, mais R$ 2,05 por quilômetro rodado. Na cidade B, a corrida é calculada pelo valor fixo da bandeirada, que é de R$ 3,60, mais R$ 1,90 por quilômetro rodado. Uma pessoa utilizou o serviço de táxi nas duas cidades para percorrer a mesma distância de 6 km.

Qual o valor que mais se aproxima da diferença, em reais, entre as médias do custo por quilômetro rodado ao final das duas corridas?

A) 0,75
B) 0,45
C) 0,38
D) 0,33
E) 0,13

15. (Enem PPL 2012) A tabela seguinte apresenta a média, em kg, de resíduos domiciliares produzidos anualmente por habitante, no período de 1995 a 2005.

Produção de resíduos domiciliares por habitante em um país

ANO	kg
1995	460
2000	500
2005	540

Se essa produção continuar aumentando, mantendo o mesmo padrão observado na tabela, a previsão de produção de resíduos domiciliares, por habitante no ano de 2020, em kg, será

A 610.
B 640.
C 660.
D 700.
E 710.

16. (Enem 2012) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$$Q_O = -20 + 4P$$
$$Q_D = 46 - 2P$$

em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e P é o preço do produto.

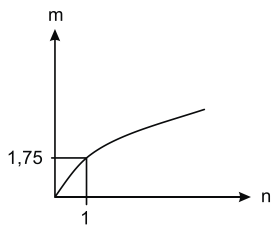
A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam. Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

A 5
B 11
C 13
D 23
E 33

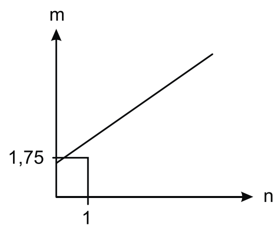
17. (Enem 2011) As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

Dos gráficos a seguir, o que representa o preço *m* pago em reais pela compra de *n* quilogramas desse produto é

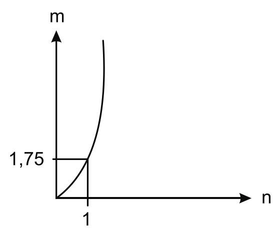
A



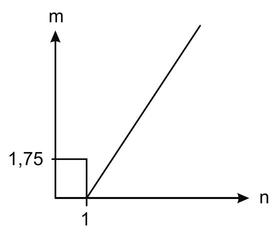
B



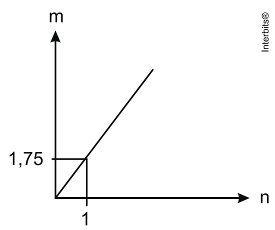
C



D



E



18. (Enem 2011) O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou $R\$\ 100.000,00$ por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de $R\$\ 350.000,00$, enquanto a segunda cobrou $R\$\ 120.000,00$ por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de $R\$\ 150.000,00$. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

A) $100n + 350 = 120n + 150$
B) $100n + 150 = 120n + 350$
C) $100(n + 350) = 120(n + 150)$
D) $100(n + 350.000) = 120(n + 150.000)$
E) $350(n + 100.000) = 150(n + 120.000)$

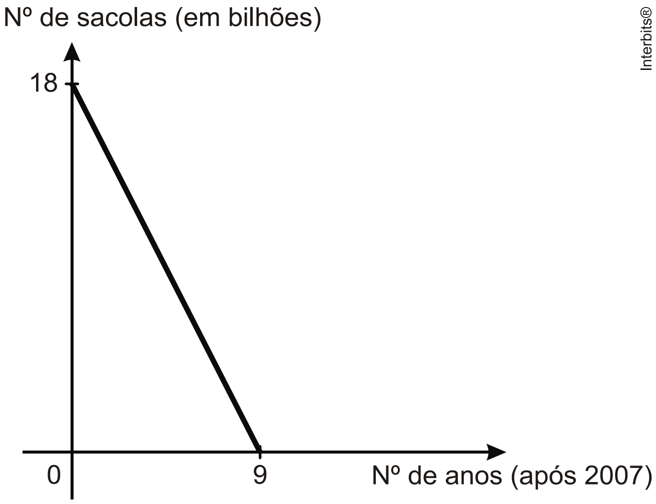
19. (Enem 2011) O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4.300 vagas no setor, totalizando 880.605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

A) $y = 4300x$
B) $y = 884\ 905x$
C) $y = 872\ 005 + 4300x$
D) $y = 876\ 305 + 4300x$
E) $y = 880\ 605 + 4300x$

20. (Enem 2ª aplicação 2010) As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico a seguir, em que se considera a origem como o ano de 2007.



LUCENA, M. Guerra às sacolinhas. **Galileu**. n° 225, 2010.

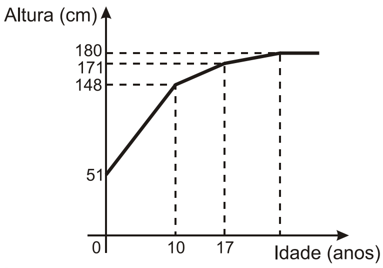
De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011?

Ⓐ 4,0
Ⓑ 6,5
Ⓒ 7,0
Ⓓ 8,0
Ⓔ 10,0

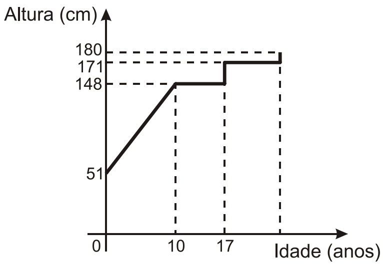
21. (Enem 2010) Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas.

Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?

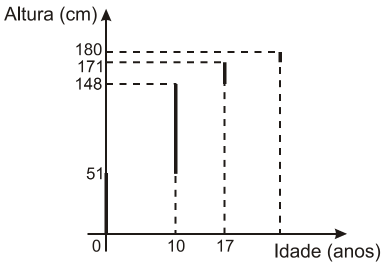
A



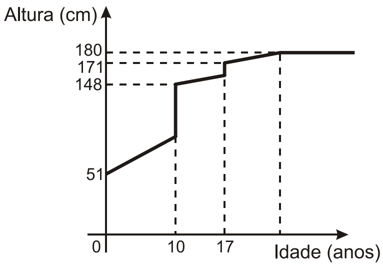
B



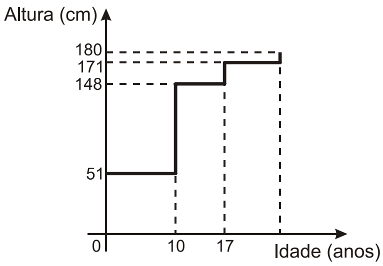
C



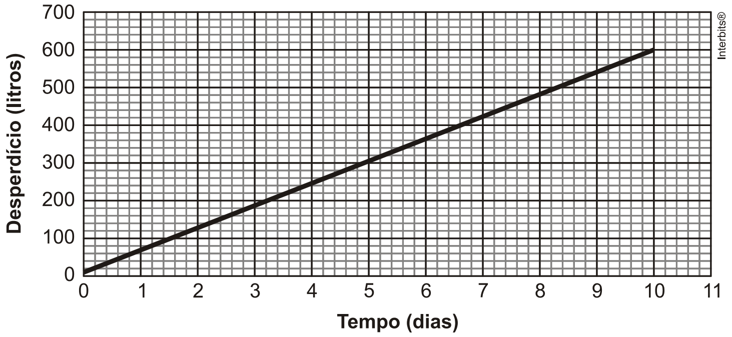
D



E



22. (Enem 2ª aplicação 2010) Uma torneira gotejando diariamente é responsável por grandes desperdícios de água. Observe o gráfico que indica o desperdício de uma torneira:



Se y representa o desperdício de água, em litros, e x representa o tempo, em dias, a relação entre x e y é

A $y = 2x$

B $y = \frac{1}{2}x$

C $y = 60x$

D $y = 60x + 1$

E $y = 80x + 50$

23. (Enem 2ª aplicação 2010) Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.

Revista Exame. 21 abr. 2010.

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam *x* horas extras nesse período é

A $f(x) = 3x$

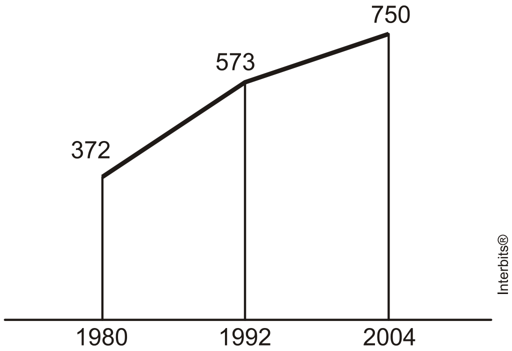
B $f(x) = 24$

C $f(x) = 27$

D $f(x) = 3x + 24$

E $f(x) = 24x + 3$

24. (Enem 2010) O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, considerando que a variação nesse número entre os anos considerados é linear.



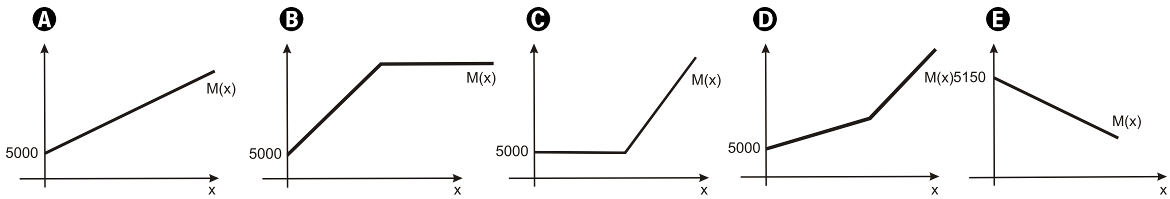
Favela Tem Memória. *Época*. Nº 621, 12 abr. 2010 (adaptado).

Se o padrão na variação do período 2004/2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número de favelas em 2010 é 968, então o número de favelas em 2016 será

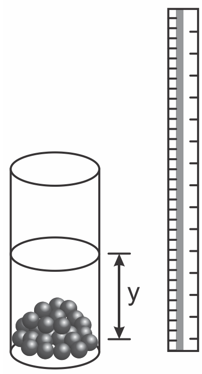
Ⓐ menor que 1150.
Ⓑ 218 unidades maior que em 2004.
Ⓒ maior que 1150 e menor que 1200.
Ⓓ 177 unidades maior que em 2010.
Ⓔ maior que 1200.

25. (Enem cancelado 2009) Paulo emprestou R$ 5.000,00 a um amigo, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considere x o número de meses do empréstimo e $M(x)$ o montante a ser devolvido para Paulo no final de x meses.

Nessas condições, a representação gráfica correta para $M(x)$ é



26. (Enem 2009) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br. Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

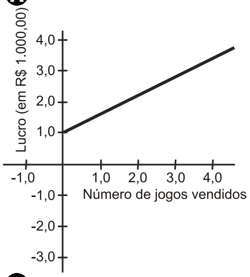
Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

A) $y = 30x$.
B) $y = 25x + 20,2$.
C) $y = 1,27x$.
D) $y = 0,7x$.
E) $y = 0,07x + 6$.

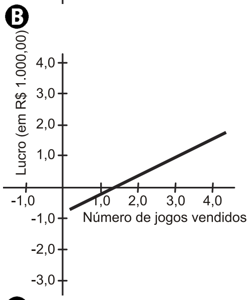
27. (Enem cancelado 2009) Uma empresa produz jogos pedagógicos para computadores, com custos fixos de R$ 1.000,00 e custos variáveis de R$ 100,00 por unidade de jogo produzida. Desse modo, o custo total para x jogos produzidos é dado por C(x) = 1 + 0,1x (em R$ 1.000,00). A gerência da empresa determina que o preço de venda do produto seja de R$ 700,00. Com isso a receita bruta para x jogos produzidos é dada por R(x) = 0,7x (em R$ 1.000,00). O lucro líquido, obtido pela venda de x unidades de jogos, é calculado pela diferença entre a receita bruta e os custos totais.

O gráfico que modela corretamente o lucro líquido dessa empresa, quando são produzidos x jogos, é

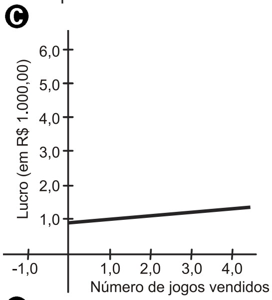
A



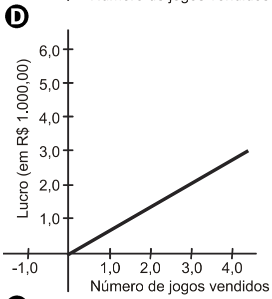
B



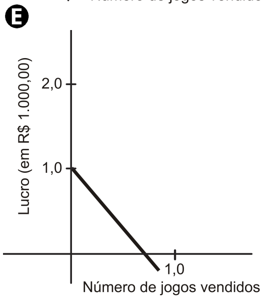
C



D



E



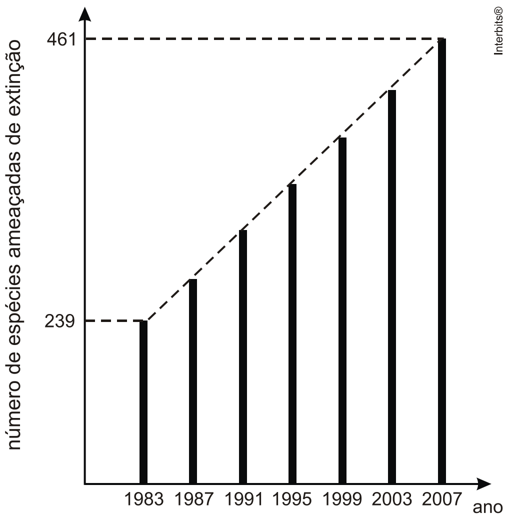
28. (Enem 2008) A figura a seguir representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.

Banco S.A.	Interbits®
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação : no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos (-) Outras deduções (+) Mora/Multa (+) Outros acréscimos (=) Valor Cobrado

Se $M(x)$ é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então

Ⓐ $M(x) = 500 + 0,4x.$
Ⓑ $M(x) = 500 + 10x.$
Ⓒ $M(x) = 510 + 0,4x.$
Ⓓ $M(x) = 510 + 40x.$
Ⓔ $M(x) = 500 + 10,4x.$

29. (Enem 2007) O gráfico a seguir, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.



Se mantida, pelos próximos anos, a tendência de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a

Ⓐ 465.
Ⓑ 493.
Ⓒ 498.
Ⓓ 538.
Ⓔ 699.

30. (Enem 2004) O jornal de uma pequena cidade publicou a seguinte notícia:

CORREIO DA CIDADE
ABASTECIMENTO COMPROMETIDO

O novo polo agroindustrial em nossa cidade tem atraído um enorme e constante fluxo migratório, resultando em um aumento da população em torno de 2000 habitantes por ano, conforme dados do nosso censo:

Ano	População
1995	11.965
1997	15.970
1999	19.985
2001	23.980
2003	27.990

Esse crescimento tem ameaçado nosso fornecimento de água, pois os mananciais que abastecem a cidade têm capacidade para fornecer até 6 milhões de litros de água por dia. A prefeitura, preocupada com essa situação, vai iniciar uma campanha visando estabelecer um consumo médio de 150 litros por dia, por habitante.

A análise da notícia permite concluir que a medida é oportuna. Mantido esse fluxo migratório e bem-sucedida a campanha, os mananciais serão suficientes para abastecer a cidade até o final de

Ⓐ 2005.
Ⓑ 2006.
Ⓒ 2007.
Ⓓ 2008.
Ⓔ 2009.

31. (Enem 2004)

VENDEDORES JOVENS
Fábrica de LONAS - Vendas no Atacado
10 vagas para estudantes, 18 a 20 anos, sem experiência.
Salário: R$ 300,00 fixo + comissão de R$ 0,50 por m^2 vendido.
Contato: 0xx97-43421167 ou atacadista@lonaboa.com.br

Interbits®

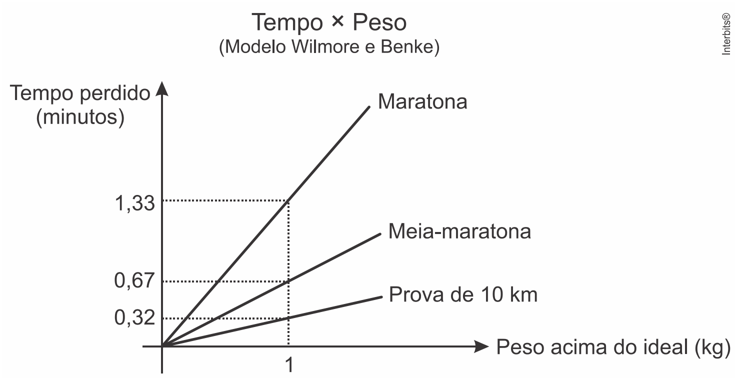
Na seleção para as vagas deste anúncio, feita por telefone ou correio eletrônico, propunha-se aos candidatos uma questão a ser resolvida na hora. Deveriam calcular seu salário no primeiro mês, se vendessem 500 m de tecido com largura de $1{,}40 \text{ m}$, e no segundo mês, se vendessem o dobro.

Foram bem-sucedidos os jovens que responderam, respectivamente,

Ⓐ R$ 300,00 e R$ 500,00.
Ⓑ R$ 550,00 e R$ 850,00.
Ⓒ R$ 650,00 e R$ 1000,00.
Ⓓ R$ 650,00 e R$ 1300,00.
Ⓔ R$ 950,00 e R$ 1900,00.

32. (Enem 2002) O excesso de peso pode prejudicar o desempenho de um atleta profissional em corridas de longa distância como a maratona (42,2 km), a meia-maratona (21,1 km) ou uma prova de 10 km. Para saber uma aproximação do intervalo de tempo a mais perdido para completar uma corrida devido ao excesso de peso, muitos atletas utilizam os dados apresentados na tabela e no gráfico:

Altura (m)	Peso (kg) ideal para atleta masculino de ossatura grande, corredor de longa distância
1,57	56,9
1,58	57,4
1,59	58,0
1,60	58,5
...	...



Usando essas informações, um atleta de ossatura grande, pesando 63 kg e com altura igual a 1,59 m, que tenha corrido uma meia-maratona, pode estimar que, em condições de peso ideal, teria melhorado seu tempo na prova em

Ⓐ 0,32 minuto.
Ⓑ 0,67 minuto.
Ⓒ 1,60 minuto.
Ⓓ 2,68 minutos.
Ⓔ 3,35 minutos.

33. (Enem 2002) Considerando que o Calendário Muçulmano teve início em 622 da era cristã e que cada 33 anos muçulmanos correspondem a 32 anos cristãos, é possível estabelecer uma correspondência aproximada de anos entre os dois calendários, dada por:

(C = Anos Cristãos e M = Anos Muçulmanos)

Ⓐ C = M + 622 - (M/33).
Ⓑ C = M - 622 + (C - 622/32).
Ⓒ C = M - 622 - (M/33).
Ⓓ C = M - 622 + (C - 622/33).
Ⓔ C = M + 622 - (M/32).

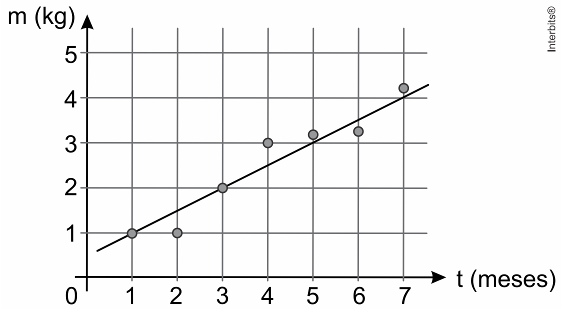
34. (Ueg 2018) No centro de uma cidade, há três estacionamentos que cobram da seguinte maneira:

Estacionamento A	Estacionamento B	Estacionamento C
R$ 5,00 pela primeira hora R$ 3,00 por cada hora subsequente	R$ 4,00 por hora	R$ 6,00 pela primeira hora R$ 2,00 por cada hora subsequente

Será mais vantajoso, financeiramente, parar

A no estacionamento A, desde que o automóvel fique estacionado por quatro horas.
B no estacionamento B, desde que o automóvel fique estacionado por três horas.
C em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.
D em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por duas horas.
E no estacionamento C, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.

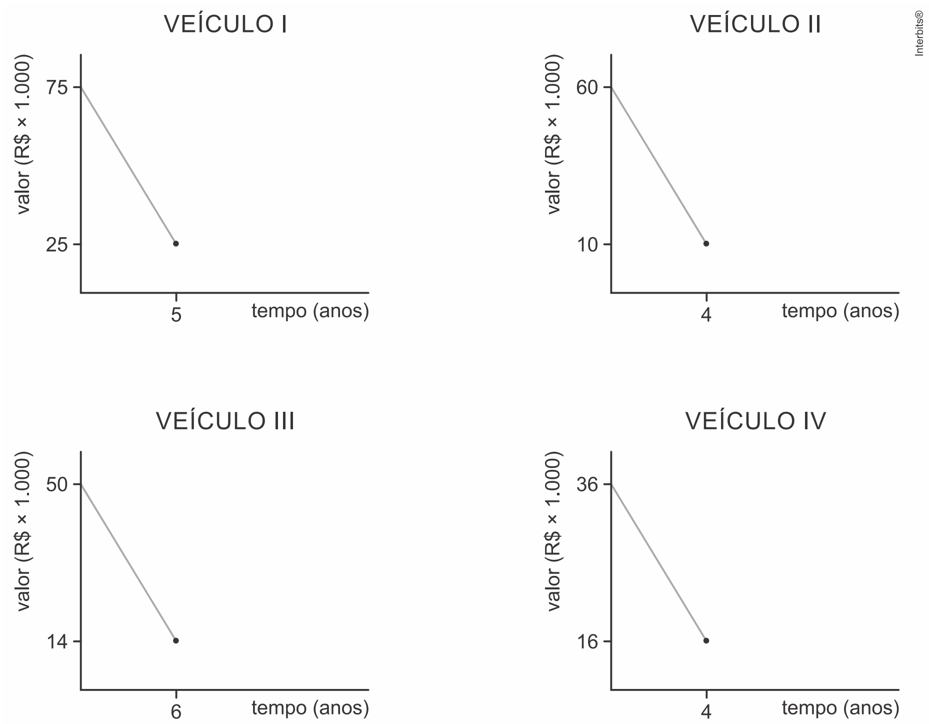
35. (Famerp 2018) Um animal, submetido à ação de uma droga experimental, teve sua massa corporal registrada nos sete primeiros meses de vida. Os sete pontos destacados no gráfico mostram esses registros e a reta indica a tendência de evolução da massa corporal em animais que não tenham sido submetidos à ação da droga experimental. Sabe-se que houve correlação perfeita entre os registros coletados no experimento e a reta apenas no 1° e no 3° mês.



Se a massa registrada no 6° mês do experimento foi 210 gramas inferior à tendência de evolução da massa em animais não submetidos à droga experimental, o valor dessa massa registrada é igual a

A 3,47 kg.
B 3,27 kg.
C 3,31 kg.
D 3,35 kg.
E 3,29 kg.

36. (Uerj 2018) Os veículos para transporte de passageiros em determinado município têm vida útil que varia entre 4 e 6 anos, dependendo do tipo de veículo. Nos gráficos está representada a desvalorização de quatro desses veículos ao longo dos anos, a partir de sua compra na fábrica.



Com base nos gráficos, o veículo que mais desvalorizou por ano foi:

Ⓐ I
Ⓑ II
Ⓒ III
Ⓓ IV

37. (G1 - cmrj 2018) *"Para que seja possível medir a temperatura de um corpo, foi desenvolvido um aparelho chamado termômetro. O termômetro mais comum é o de mercúrio, que consiste em um vidro graduado com um bulbo de paredes finas, que é ligado a um tubo muito fino, chamado tubo capilar. Quando a temperatura do termômetro aumenta, as moléculas de mercúrio aumentam sua agitação, fazendo com que este se dilate, preenchendo o tubo capilar. Para cada altura atingida pelo mercúrio está associada uma temperatura."*

http://www.sofisica.com.br/conteudos/Termologia/Termometria/escalas.php

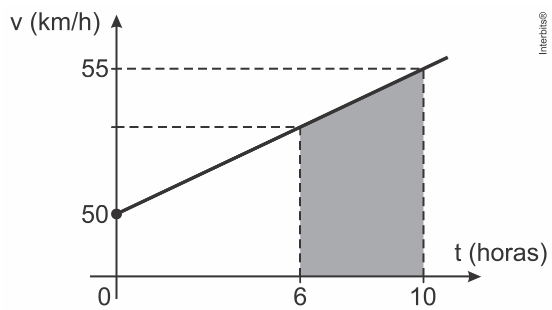
As principais escalas termométricas são Kelvin (K), Celsius $(°C)$ e Fahrenheit $(°F)$. A escala Celsius é a mais utilizada e se relaciona com as outras através das funções:

$$F = \frac{9C}{5} + 32 \text{ e } K = C + 273$$

Há uma temperatura na qual a soma dos valores numéricos que a representam, nas escalas Celsius e Kelvin, vale 317. Na escala Fahrenheit, essa temperatura é um valor situado no intervalo:

Ⓐ $(70, 71]$.
Ⓑ $(71, 72]$.
Ⓒ $(72, 73]$.
Ⓓ $(73, 74]$.
Ⓔ $(74, 75]$.

38. (G1 - epcar (Cpcar) 2018) O gráfico a seguir é de uma função polinomial do 1º grau e descreve a velocidade v de um móvel em função do tempo t:



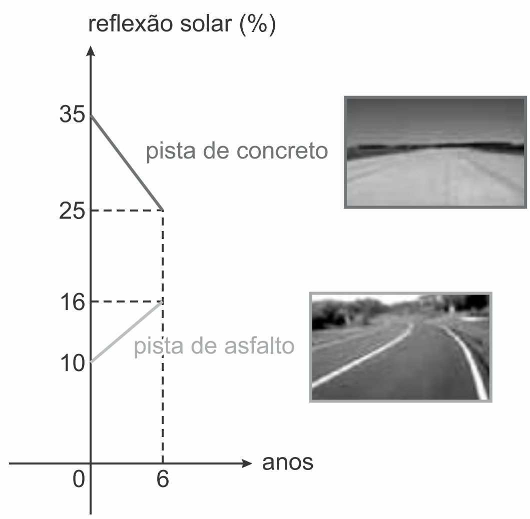
Assim, no instante $t = 10$ horas o móvel está a uma velocidade de $55\,\text{km/h}$, por exemplo.

Sabe-se que é possível determinar a distância que o móvel percorre calculando a área limitada entre o eixo horizontal t e a semirreta que representa a velocidade em função do tempo. Desta forma, a área hachurada no gráfico fornece a distância, em km, percorrida pelo móvel do instante 6 a 10 horas.

É correto afirmar que a distância percorrida pelo móvel, em km, do instante 3 a 9 horas é de

Ⓐ 318
Ⓑ 306
Ⓒ 256
Ⓓ 212

39. (Unesp 2018) Dois dos materiais mais utilizados para fazer pistas de rodagem de veículos são o concreto e o asfalto. Uma pista nova de concreto reflete mais os raios solares do que uma pista nova de asfalto; porém, com os anos de uso, ambas tendem a refletir a mesma porcentagem de raios solares, conforme mostram os segmentos de retas nos gráficos.

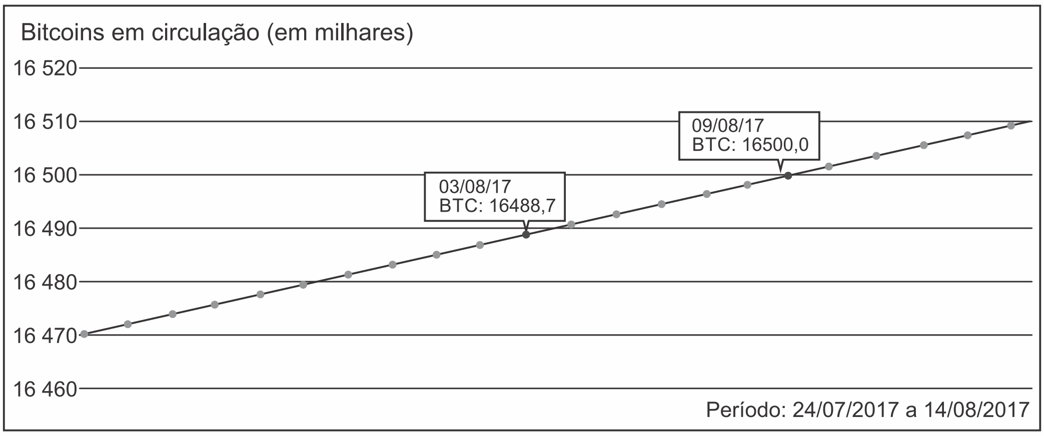


(www.epa.gov. Adaptado.)

Mantidas as relações lineares expressas nos gráficos ao longo dos anos de uso, duas pistas novas, uma de concreto e outra de asfalto, atingirão pela primeira vez a mesma porcentagem de reflexão dos raios solares após

A) $8,225$ anos.
B) $9,375$ anos.
C) $10,025$ anos.
D) $10,175$ anos.
E) $9,625$ anos.

40. (Insper 2018) Lançada em 2009, a bitcoin ganha espaço no mercado internacional como um meio de troca atrativo por permitir transações a taxas baixas sem recorrer a intermediários, como bancos ou empresas como o PayPal. Diferentemente de moedas tradicionais, ela não é gerida por um banco central, mas por uma comunidade dispersa na internet.



(www.nexojornal.com.br e https://blockchain.info. Adaptado)

Dado: Considere linear o comportamento do total de bitcoins em circulação ao longo do período indicado no gráfico.

No período analisado, a taxa diária de crescimento do total de bitcoins foi de, aproximadamente,

A 2.121,6.
B 1.614,3.
C 2.475,2.
D 1.883,3.
E 1.255,6.

41. (UNIFOR 2020) Uma pessoa pegou um táxi para ir ao trabalho. A distância de casa ao trabalho é de 12 km. Na ida, ela pagou R$ 29,10, na bandeira 1. Na volta para casa à noite, ela pegou um táxi novamente e pagou R$ 33,90, na bandeira 2, pelo mesmo trajeto.

O acréscimo, por quilômetro rodado, da bandeira 1 para a bandeira 2 foi de

A R$ 0,45
B R$ 0,40
C R$ 0,38
D R$ 0,35
E R$ 0,30

42. (UEMA) Texto para responder à questão.

Na sociedade contemporânea, as representações visuais como os gráficos, as tabelas, os diagramas e as outras formas de inscrições são consideradas ferramentas comuns para aplicações que apresentam informações quantitativas.

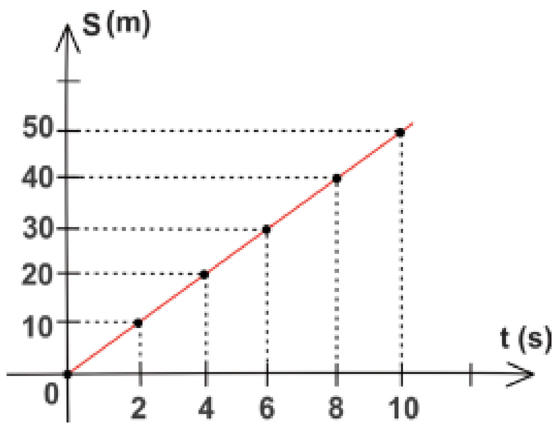
Destaca-se a utilização dos gráficos para descrever o comportamento de grandezas que são tratadas no ensino de Física. Essa disciplina faz uso de gráficos na totalidade dos assuntos por ela abordada, principalmente, no estudo do movimento - a Cinemática. Desta forma, a aprendizagem do uso da linguagem gráfica torna-se fundamental para a compreensão de fenômenos tratados pela Física e por outras Ciências.

Fonte: http://www.bibliotecadigital.ufmg.br

Analise a seguinte situação:

Corridas de 50 metros, geralmente, são para provas de aptidão física (concursos da polícia, guarda civil, etc.), na qual o candidato deverá correr 50 m em um tempo mínimo. Quanto menor o tempo, melhor será a sua classificação. Num Concurso Público para Guarda Municipal, um determinado candidato realizou o Teste de Aptidão Fisica, percorrendo o espaço e o tempo, de acordo com o gráfico representado a seguir.

Analise o gráfico que mostra o desempenho do candidato. Para tanto, considere S, em metros, e t, em segundos.



De acordo com o gráfico de desempenho do candidato, a função horária correspondente é igual

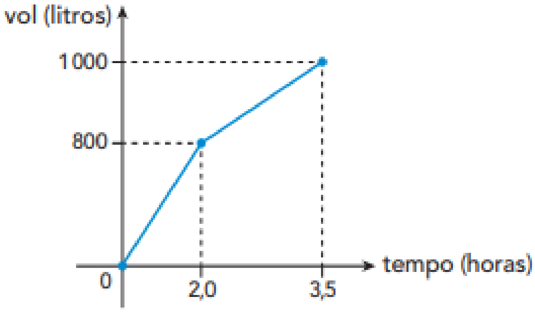
A) S = -5t
B) S = -4t
C) S = 4t
D) S = 3t
E) S = 5t

43. (FGVRJ 2019) No final do ano 2012, José Carlos comprou um carro 0km. Devido à depreciação, dois anos depois da compra, o valor do carro era R$46 000,00 e, cinco anos após a compra, ele valia R$40 000,00.

Admitindo que o valor do carro decresça linearmente com o tempo, pode-se afirmar que 8 anos e 3 meses após a compra o seu valor será:

Ⓐ R$33 000,00
Ⓑ R$34 000,00
Ⓒ R$32 500,00
Ⓓ R$33 500,00
Ⓔ R$32 000,00

44. (USS 2019) Uma caixa d'água que está inicialmente vazia tem a capacidade de 1000 L. Essa caixa é abastecida durante 3,5 h até ficar completamente cheia. O gráfico a seguir, formado por dois segmentos de retas, representa o volume de água na caixa em função do tempo.



Após a redução do fluxo de água, o tempo necessário, em minutos, para que o volume de água atinja exatamente 900 L é igual a

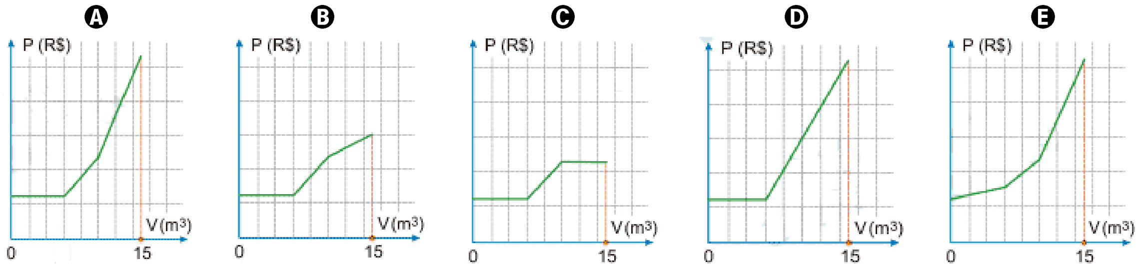
Ⓐ 35
Ⓑ 45
Ⓒ 55
Ⓓ 65

45. (ENEM 2019) Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

• Faixa 1: para consumo de até 6 m3, valor fixo de R$ 12,00;
• Faixa 2: para consumo superior a 6 m3 e até 10 m3, tarifa de R$ 3,00 por metro cúbico ao que exceder a 6 m;
• Faixa 3: para consumo superior a 10 m3, tarifa de R$ 6,00 por metro cúbico ao que exceder a 10 m3.

Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de 15 m3 por mês.

O gráfico que melhor descreve o valor P, em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumido, em metro cúbico, é



46. (FGVSP 2018) A renda líquida mensal x (em reais) de uma família pode ser decomposta em duas parcelas: o consumo e a poupança. A poupança é a parte da renda líquida que não é utilizada para consumo.

Admitindo que o consumo C seja uma função do primeiro grau de x e que, quando a renda líquida é R$8 000,00, o consumo é R$8 000,00, e, quando a renda líquida é R$12 000,00, o consumo é R$10 000,00, pode-se afirmar que a poupança P em função de x é:

Ⓐ P = 0,5x - 3500
Ⓑ P = 0,5x - 4000
Ⓒ P = 0,5x - 5000
Ⓓ P = 0,5x - 4500
Ⓔ P = 0,5x - 5500

47. (IFSudMinas 2018) Uma lanchonete de empadas, tem uma despesa mensal fixa de R$ 1.650,00. Sabe-se que cada empada é vendida por R$ 4,00, sendo que a despesa para ser produzida é de R$ 1,80.

Qual o número mínimo de empadas que devem ser vendidas em um mês para que não haja prejuízo?

Ⓐ 250
Ⓑ 450
Ⓒ 750
Ⓓ 1000
Ⓔ 1125

48. (UNEB 2018) Às 9h, o paciente M estava com 40,5°C de febre, e o paciente N estava com 37°C. Às 11h30min a temperatura de M havia diminuído para 37°C, mas a de N tinha aumentado para 38,5°C.

Se cada temperatura variou como uma função do 1° grau, então a de N ultrapassou a de M, às

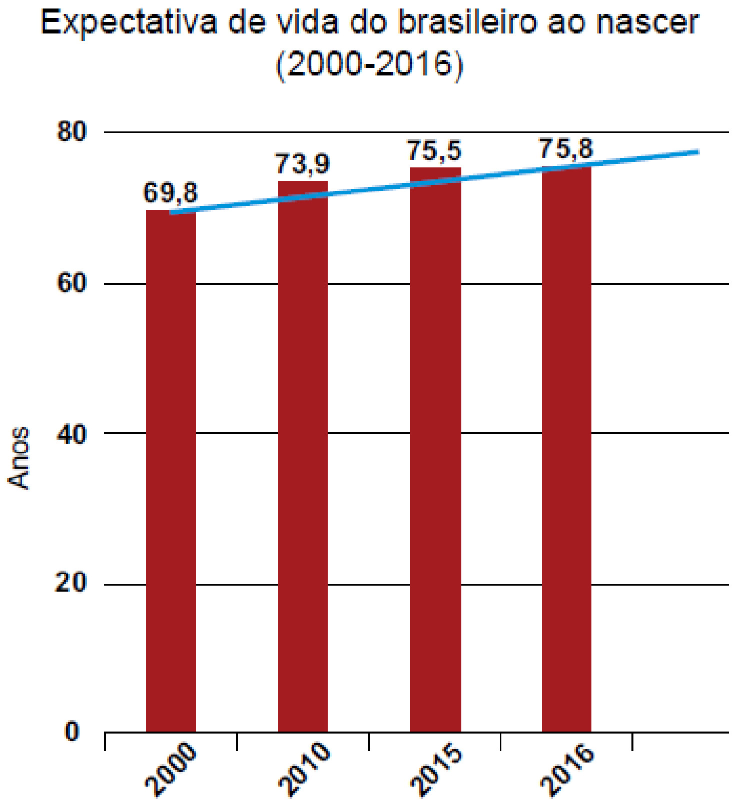
Ⓐ 10h15min.
Ⓑ 10h30min.
Ⓒ 10h45min.
Ⓓ 11h00min.
Ⓔ 11h15min.

49. (UFMS 2018) O Sr. Flávio é um apaixonado pela mobilidade e deseja pegar um transporte coletivo cuja função de custo é dada pela equação C(x) = 6,00 + 0,50.x, em que x representa a distância percorrida pelo transporte em km e C(x) o valor a ser pago em reais. Esse custo pode sofrer modificação caso a viagem seja alterada.

Se a viagem aconteceu conforme o previsto pelo aplicativo utilizado, e o Sr. Flávio percorreu uma distância de 48 km, o total a ser pago para o motorista é:

Ⓐ R$ 6,00.
Ⓑ R$ 24,00.
Ⓒ R$ 30,00.
Ⓓ R$ 48,00
Ⓔ R$ 54,00.

50. (UNIVAG 2018) O gráfico apresenta a expectativa de vida dos brasileiros baseada no seu ano de nascimento, a partir do ano 2000.



(https://g1.globo.com, 01.12.2016. Adaptado.)

O traço azul ilustra uma estimativa de crescimento linear obtida a partir dos valores apresentados para os anos de 2000 e 2016.

Segundo a estimativa do gráfico, a pessoa que nascer em 2028 terá uma expectativa de vida igual a

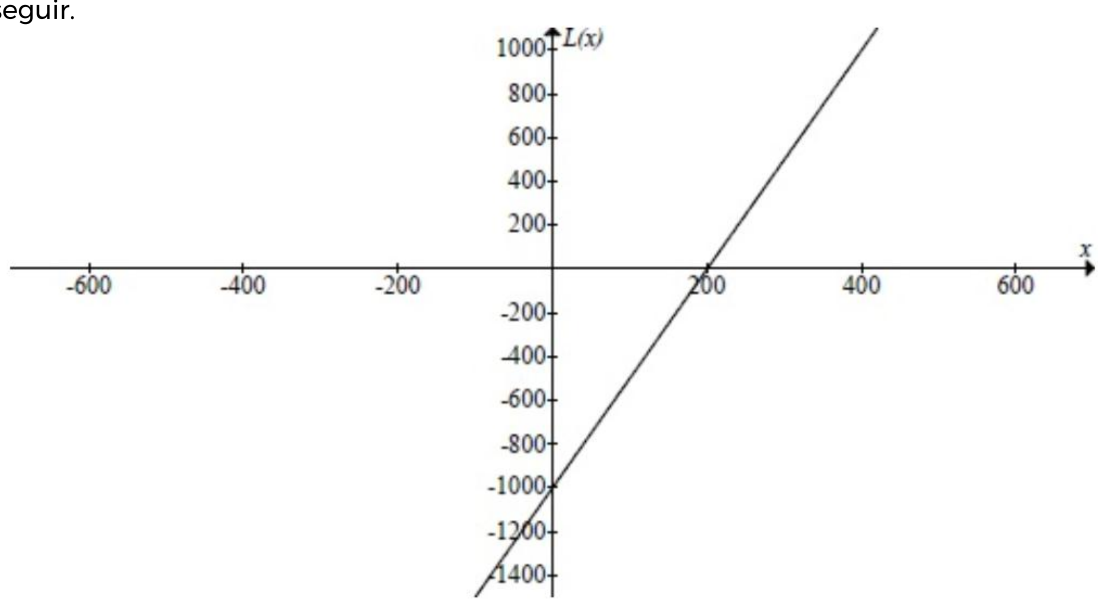
Ⓐ 81,8 anos.
Ⓑ 79,4 anos.
Ⓒ 76,2 anos.
Ⓓ 79,9 anos.
Ⓔ 80,3 anos.

51. (IFRN 2018) Uma rede hoteleira russa, para calcular os valores de hospedagem, utilizava a lei $p(x)$ = $40x$ + 5, em que $\boldsymbol{x}$ representa a quantidade de dias hospedados e $p(x)$ o valor pago em dólares para tarifas em apartamentos duplos. Após saber pelo Jornal "Moscow Times" que os valores das hospedagens em junho de 2018 podem chegar a 5 vezes o valor atual, passou a utilizar nas reservas para esse mês a nova lei $q(x)$ = $200x$ + 25 em que $\boldsymbol{x}$ representa a quantidade de dias hospedados e $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ o valor pago em dólares para tarifas em apartamentos duplos.

Assim, um casal, que se hospedará em junho de 2018, e desejar pagar sua hospedagem utilizando a cotação do dólar a R$ 3,40, irá pagar por 10 dias o valor de

Ⓐ R$ 6.885,00.
Ⓑ R$ 1.377,00.
Ⓒ R$ 6.335,00.
Ⓓ R$ 1.875,00.

52. (UEG 2018) A função que descreve o lucro mensal L de um comerciante, em função da quantidade de x produtos vendidos mensalmente, é representada pelo gráfico a seguir.



Analisando-se o gráfico, a quantidade de produtos que esse comerciante tem que vender para obter um lucro de exatamente R$ 2.000,00 é de

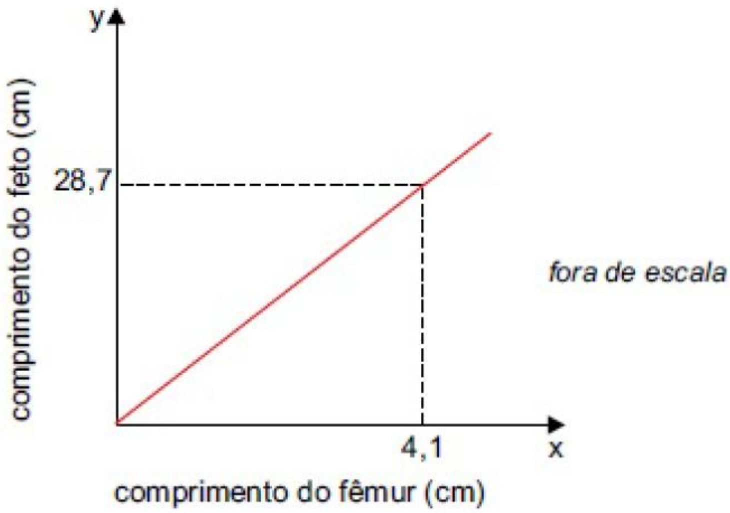
Ⓐ 200
Ⓑ 400
Ⓒ 600
Ⓓ 1.000
Ⓔ 10.000

53. (UNCISAL 2017) Em uma concessionária de carros, um vendedor tem o salário fixo mensal de R$ 3.000,00. Além disso, ele recebe R$ 500,00 de comissão para cada carro que ele vender.

Nesse contexto, o ganho mensal total do vendedor em função do número x de automóveis vendidos e a quantidade que ele precisa vender em um mês para obter um salário de R$ 10.000,00 são, respectivamente,

Ⓐ 3 000 + 500x e 6.
Ⓑ 3 000 + 500x e 14.
Ⓒ 3 000x + 500 e 3.
Ⓓ 3 500 + x e 3 500.
Ⓔ 3 500 + x e 6 500.

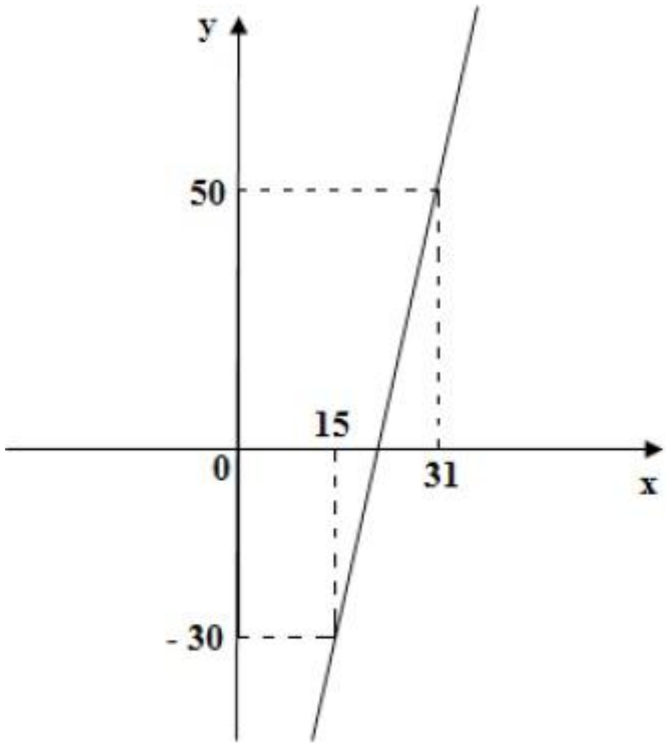
54. (FAMECA 2017) Estudos apontam que há uma forte correlação linear entre o comprimento de um feto e o de seu fêmur. O gráfico mostra que essas variáveis se comportam como grandezas diretamente proporcionais.



Com base no gráfico, o comprimento de um feto que possua um fêmur de 3,0 cm é

Ⓐ 20 cm.
Ⓑ 23 cm.
Ⓒ 22 cm.
Ⓓ 19 cm.
Ⓔ 21 cm.

55. (FASA 2017) Balança comercial é um termo econômico que representa as importações e exportações de bens entre os países. Dizemos que a balança comercial de um determinado país está favorável, quando este exporta (vende para outros países) mais do que importa (compra de outros países).
No período de 15 a 31 de maio de 2016, o saldo y, em milhões de dólares, da balança comercial de um país da América do Sul, em função do tempo x, em dias, foi representado pelo gráfico a seguir.



Diante dos dados apresentados, o saldo da balança comercial desse país foi nulo no dia

Ⓐ 21 de março de 2016.
Ⓑ 20 de março de 2016.
Ⓒ 22 de março de 2016.
Ⓓ 19 de março de 2016.

56. (ENEM 2ª APLICAÇÃO 2017) Chegando ao destino de uma mesma viagem, os turistas X e Y alugarão, cada um deles, um carro. Fizeram, previamente, cotações com as mesmas três locadoras de automóveis da região. Os valores dos aluguéis estão representados pelas expressões dadas no quadro, sendo K o número de quilômetros percorridos, e N o número de diárias pagas pelo aluguel.

Empresa	Valor cobrado, em real, pelo aluguel do carro
I	$100\,N + 0{,}8\,K$
II	$70\,N + 1{,}2\,K$
III	$120\,N + 0{,}6\,K$

O turista X alugará um carro em uma mesma locadora por três dias e percorrerá 250 km. Já a pessoa Y usará o carro por apenas um dia e percorrerá 120 km.

Com o intuito de economizarem com as locações dos carros, e mediante as informações, os turistas X e Y alugarão os carros, respectivamente, nas empresas

Ⓐ I e II.
Ⓑ I e III.
Ⓒ II e II.
Ⓓ II e III.
Ⓔ III e I.

57. (FPS 2017) Uma clínica médica tem capacidade máxima para 40 pacientes. O custo médio diário da clínica C(x), em milhares de reais, em função do número x de pacientes internados por dia, é dado por

$$C(x) = \frac{8x+288}{x}.$$

Qual o número mínimo de pacientes internados na clínica, para que o custo diário seja de, no máximo, 20.000 reais?

Ⓐ 22
Ⓑ 23
Ⓒ 24
Ⓓ 25
Ⓔ 26

58. (UP 2017) A bandeirada, valor acrescido ao valor de cada kWh, é um artifício utilizado pelas companhias de abastecimento de energia elétrica para compensarem perdas na produção de energia, tendo em vista a necessidade da utilização de termoelétricas. O valor do kWh é de R$ 0,50, enquanto a bandeira vermelha faz com que esse valor seja acrescido de R$ 0,15.

As funções que representam o valor V(x) por um consumo x de kWh com e sem a bandeirada vermelha são, respectivamente:

Ⓐ V(x) = 0,50x e V(x) = 0,50x + 0,15
Ⓑ V(x) = 0,50x + 0,15 e V(x) = 0,50x
Ⓒ V(x) = 0,50x.0,15 e V(x) = 0,50x
Ⓓ V(x) = 0,65x e V(x) = 0,50x
Ⓔ V(x) = 0,65x e V(x) = 0,50x + 0,15

59. (UFPR 2020) Uma malharia produz camisetas personalizadas para eventos esportivos. Cada novo modelo possui um custo fixo de R$ 450,00 mais R$ 9,00 por camiseta produzida.

Sabendo que cada camiseta será vendida por R$ 20,00, a desigualdade que permite calcular o número de camisetas a serem vendidas para que se tenha um lucro de no mínimo R$ 1.000,00 é:

Ⓐ $20n + 9(50 + n) \leq 1000$.
Ⓑ $10(2n - 45) - 9n \leq 1000$.
Ⓒ $9(50 + n) - 20n \geq 1000$.
Ⓓ $10(45 + 2n) - 9n \geq 1000$.
Ⓔ $20n - 9(50 + n) \geq 1000$.

60. (IFNMG 2018) A produção sustentável tem se tornado a bandeira de muitas indústrias, ressaltando o uso consciente dos recursos naturais em seus produtos. Uma empresa, que aderiu à sustentabilidade, trabalha com a produção de taças especiais e tem gastos fixos de R$ 200,00 mais o custo de R$ 2,00 por taça produzida.

Sabendo-se que cada unidade será vendida a R$ 10,00, quantas taças deverão ser produzidas para que o valor arrecadado supere os gastos e gere menos impacto ao meio ambiente?

Ⓐ Mais de 25 taças.
Ⓑ Entre 19 e 24 taças.
Ⓒ Entre 15 e 18 taças.
Ⓓ Menos de 15 taças.

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	B
02	D
03	E
04	C
05	B
06	D
07	A
08	C
09	B
10	A
11	E
12	B
13	C
14	E
15	C
16	B
17	E
18	A
19	C
20	E
21	A
22	C
23	D
24	C
25	A
26	E
27	B
28	C
29	C
30	E

QUESTÃO	ALTERNATIVA
31	C
32	E
33	A
34	D
35	E
36	B
37	B
38	A
39	B
40	D
41	B
42	E
43	D
44	B
45	A
46	B
47	C
48	C
49	C
50	E
51	A
52	C
53	B
54	E
55	A
56	B
57	C
58	D
59	E
60	A

função polinomial do segundo grau

CONHECIMENTOS ALGÉBRICOS

Antes de adentrarmos nas minúcias matemáticas da função do segundo grau, vamos analisar uma situação física para contextualizar nossas conclusões. E para isso, lançaremos mão do Movimento Retilíneo Uniformemente Variável, mais conhecido como MRUV. Você lembra a característica que nos leva a pensar em MRUV? Isso... Aceleração constante! Então vamos lá...

Considere que um automóvel se mova com aceleração constante e igual a 6 km/h², seu movimento começou a ser analisado no Km 50 da BR 230 e nesse momento a sua velocidade era de 30 km/h:

Se lembrarmos um pouco da cinemática, a equação horária da posição é dada por

$$S(t) = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Em que,

$S(t)$ é a posição do automóvel no instante t;
S_0 é a posição inicial do automóvel;
V_0 é a velocidade inicial do automóvel;
a é a aceleração do automóvel, que é constante.

Para esse caso, em particular,

$$S(t) = 50 + 30 \cdot t + \frac{1}{2} 6 \cdot t^2$$

$$S(t) = 50 + 30 \cdot t + 3 \cdot t^2$$

Preocupada com o andamento da viagem, a esposa do motorista decidiu, de hora em hora, anotar o quilômetro em que eles se encontravam, obtendo os seguintes resultados:

Tempo (h)	Posição (km)
0	50
1	83
2	122
3	167
4	218
5	275

Esses resultados são coerentes com a equação horária da posição no MRUV, vamos substituir os valores de t para conferir as posições:

$$S(0) = 50 + 30 \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 = 50 + 0 + 0 = 50$$

$$S(1) = 50 + 30 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = 50 + 30 + 3 = 83$$

$$S(2) = 50 + 30 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 50 + 60 + 12 = 122$$

$$S(3) = 50 + 30 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 = 50 + 90 + 27 = 167$$

$$S(4) = 50 + 30 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 = 50 + 120 + 48 = 218$$

$$S(5) = 50 + 30 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 = 50 + 150 + 75 = 275$$

Se analisarmos com um pouco mais de cuidado a tabela, em busca da taxa de variação absoluta da posição em função do tempo, veremos que ela não é constante. E por não ser constante, a posição no MRUV não se relaciona com o tempo de acordo com uma função do primeiro grau.

Tempo (h)	Posição (km)	
0	50	+ 33 km/h
1	83	+ 39 km/h
2	122	+ 45 km/h
3	167	+ 51 km/h
4	218	+ 57 km/h
5	275	

Lembre-se que a taxa de variação absoluta é calculada através de uma razão $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, que nesse caso, será $\left(\frac{\Delta S}{\Delta t}\right)$, ou seja, a taxa de variação da posição em função do tempo é a própria velocidade.

Observe que a velocidade não é constante, mais uma prova de que a função que relaciona a posição com o tempo não é do primeiro grau.

Que tal observarmos como se comporta a taxa de variação da taxa de variação? Que tal ver como a variação varia? Pode até parecer um pouco confuso, mas veja o que vai acontecer...

Tempo (h)	Posição (km)		
0	50	+ 33 km/h	
1	83	+ 39 km/h	+ 6 km/h²
2	122	+ 45 km/h	+ 6 km/h²
3	167	+ 51 km/h	+ 6 km/h²
4	218	+ 57 km/h	+ 6 km/h²
5	275		

A primeira taxa de variação que calculamos é a velocidade, mas a taxa de variação da taxa de variação é, na verdade, a aceleração. O que já deveríamos ter imaginado. Ou seja, a taxa de variação da posição em função do tempo é a velocidade e a taxa de variação da velocidade em função do tempo é a aceleração, que no MRUV é constante.

Tempo (h)	Posição (km)
0	50
1	83
2	122
3	167
4	218
5	275

+ 33 km/h
+ 39 km/h
+ 45 km/h
+ 51 km/h
+ 57 km/h

+ 6 km/h²
+ 6 km/h²
+ 6 km/h²
+ 6 km/h²

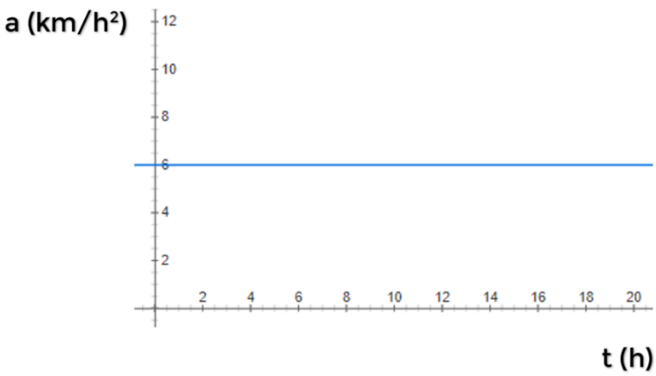
Velocidade

Aceleração

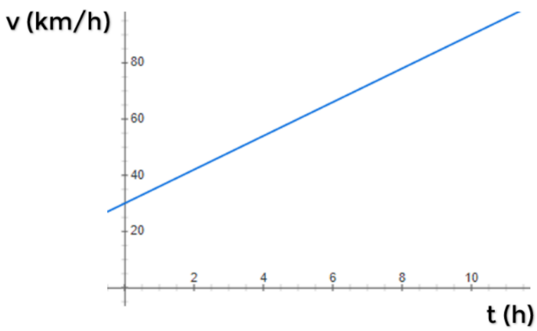
Não sei se você já percebeu, mas em uma função polinomial do segundo grau, a taxa de variação absoluta não é constante. Entretanto, a taxa de variação absoluta da taxa de variação absoluta é constante. Leia atentamente, porque é muita taxa para um só lugar! KKKKKK

Vamos representar graficamente cada taxa dessa para que possamos ter mais um recurso para consolidar o entendimento...

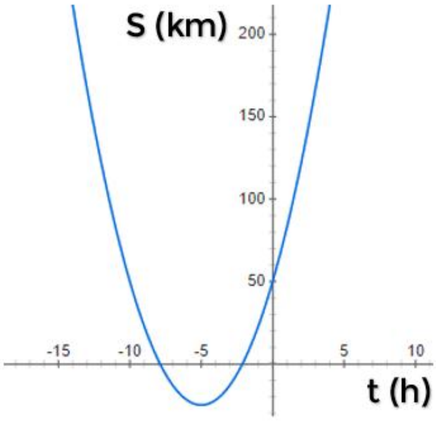
A aceleração é constante em função do tempo, por isso, seu gráfico é o de uma **função constante**:



Já a velocidade não é constante, a velocidade varia de forma constante, por isso, o gráfico da velocidade em função do tempo representa uma **função do primeiro grau**:



Finalmente, a variação da variação da posição em função do tempo é constante. Por isso, o gráfico da posição em função do tempo representa uma função do **segundo grau**.

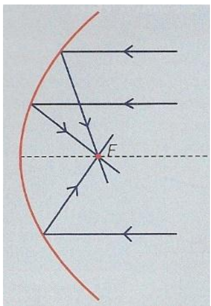


É importante ressaltar o formato **parabólico** do gráfico da função do segundo grau. E é por isso que vamos falar um pouco da parábola!

PARÁBOLA

A parábola goza de propriedades muito importantes e que tem uma grande exploração em termos de aplicações práticas.

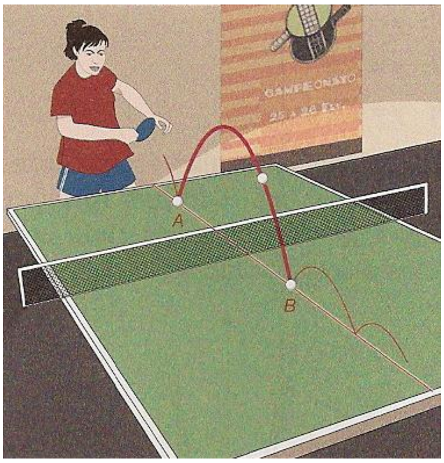
Todo o raio incidente na parábola, paralelo ao seu **eixo de simetria**, reflete-se passando pelo foco.

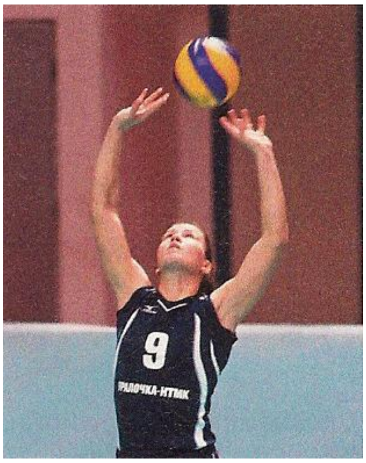


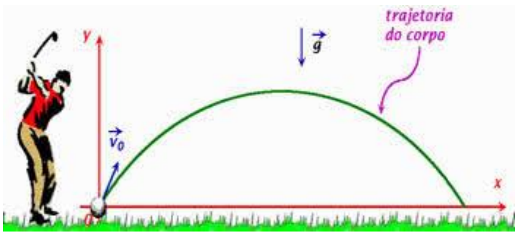
O mecanismo de funcionamento das antenas parabólicas baseia-se na propriedade focal das parábolas.

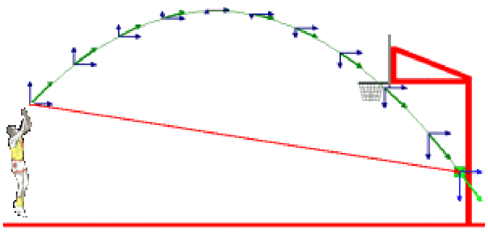
Existe um ramo da Astronomia, desenvolvido a partir dos anos 40, que é designado por radioastronomia. Através da sintonização das ondas de rádio naturais geradas pelos corpos no Espaço é possível descobrir novas constelações. Na construção dos radiotelescópios está presente a propriedade refletora da parábola.

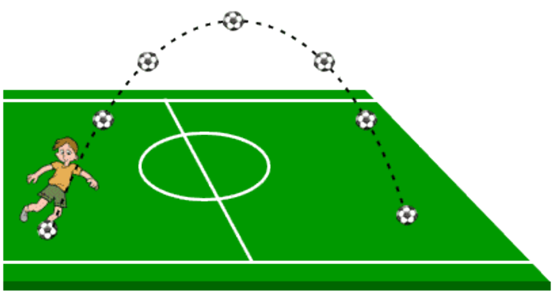
Vários movimentos são descritos por parábolas:











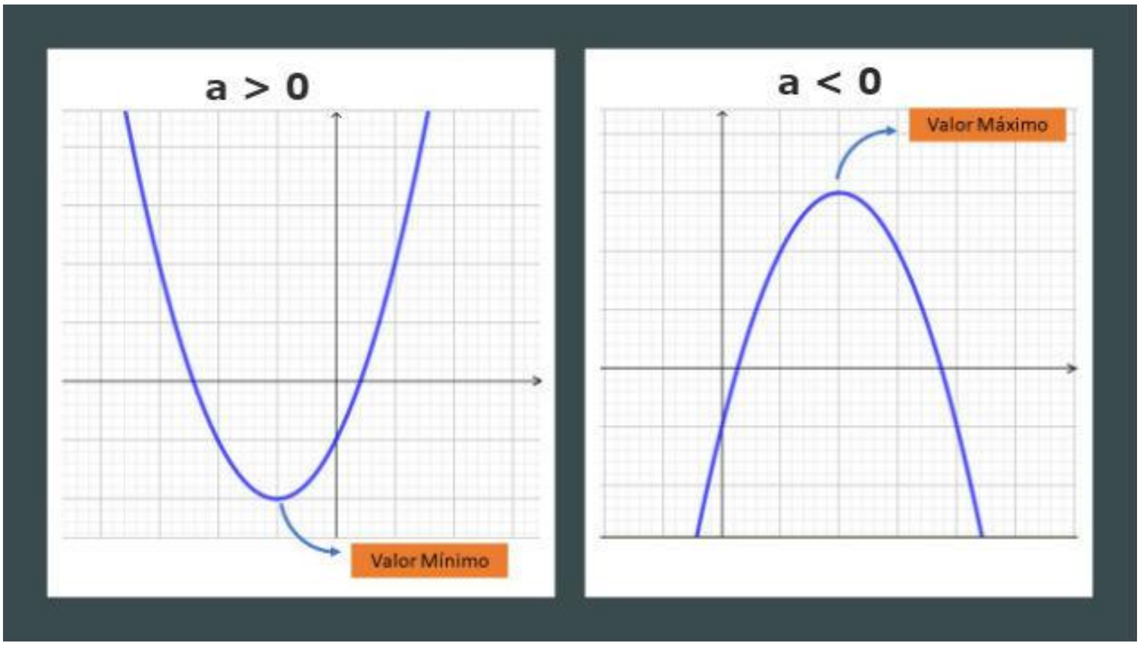
De acordo com o Dicionário Etimológico (origens das palavras), na língua portuguesa, o termo “palavra” se originou do latim vulgar paraula, que, por sua vez, tem origens no latim clássico parabola, que significa fala ou discurso. Além disso, de acordo com esse dicionário, a raiz etimológica do latim parabola está no termo parabole, que, ao ser traduzido, pode ser entendido como comparação, ou seja, esse termo é composto a partir da união de para, que significa ao lado, e ballein, que quer dizer atirar ou jogar. Na matemática, o estudo da parábola foi divulgado pelo matemático Pierre de Fermat (1601-1655), o qual estabeleceu que a equação do segundo grau representa uma parábola quando seus pontos são aplicados em um plano cartesiano.

E, algebricamente falando, como modelar esse formato parabólico? Qual a expressão matemática que representa a função polinomial do segundo grau?

$$y = ax^2 + bx + c$$

Em que x e y são números reais, a, b e c são constantes reais e a é diferente de 0.

CONCAVIDADE DA PARÁBOLA



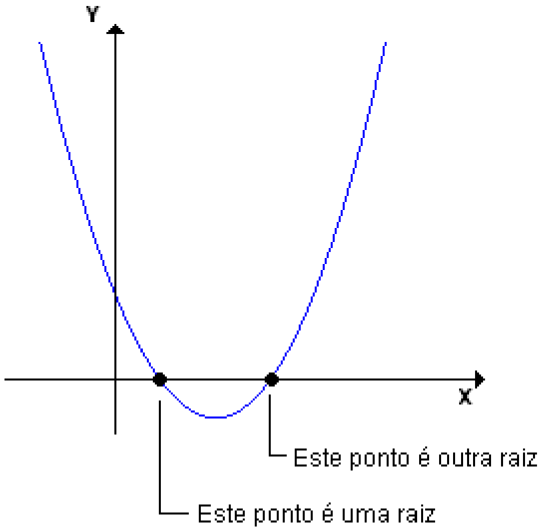
O a da função determina para onde fica voltada a concavidade (cavidade, depressão, buraco) da parábola.

Se a > 0, a concavidade fica voltada para cima.

Se a < 0, a concavidade fica voltada para baixo.

RAÍZES DA FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Conhecemos bem o formato da função do segundo grau $y = ax^2 + bx + c$, mas o que é raiz? Raiz de uma função é o valor de x que faz com que o y seja zero. Ou equivalentemente, os valores das abscissas que tornam as ordenadas nulas, ou ainda, o lugar em que a parábola toca o eixo das abscissas.



E o que fazer para obter as raízes de uma função do segundo grau? A fórmula de Bhaskara é um método resolutivo para equações do segundo grau cujo nome homenageia o grande matemático indiano que a demonstrou. Essa fórmula nada mais é do que um método para encontrar as raízes reais de uma equação do segundo grau fazendo uso apenas de seus coeficientes. A seguir demonstraremos como essa fórmula foi criada:

Começaremos simplesmente com a fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Depois multiplicamos cada lado por 4a:

$$(ax^2 + bx + c) \cdot (4a) = 0 \cdot (4a)$$

Chegando então a:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Agora passaremos o termo 4ac para o outro lado da equação:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

E então adicionaremos a o termo b^2 aos dois lados da equação:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Note que $4a^2x^2 + 4abx + b^2$ pode ser escrita como $(2ax + b)^2$, então voltamos à dedução:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Depois fica fácil, somente manobras algébricas:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

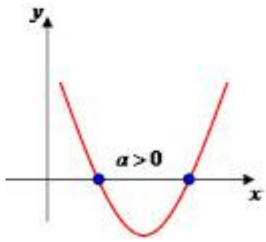
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

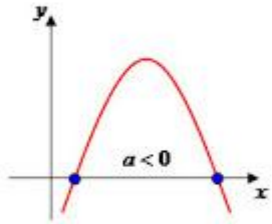
Adotando $\Delta = b^2 - 4ac$, podemos encontrar as raízes da função a partir da fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

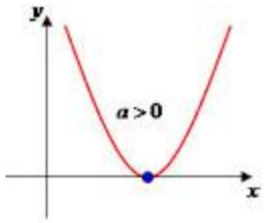
Sendo assim, o primeiro passo para obter as raízes é calcular o determinante Δ da equação do segundo grau associada à função. O Δ é chamado determinante uma vez que determina a natureza das raízes (reais ou complexas). Vamos, então, analisar as raízes de acordo com o determinante:

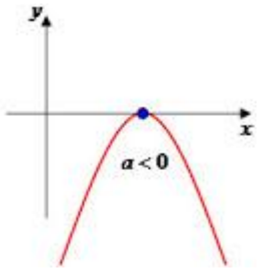
Quando o $\Delta > 0$, temos duas raízes reais distintas, fazendo com que a parábola toque duas vezes o eixo x.



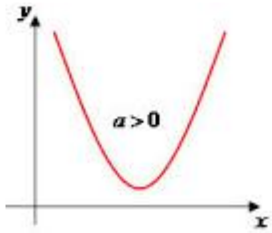


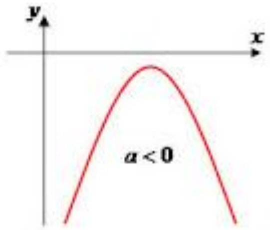
Quando o $\Delta = 0$, temos uma raiz real dupla, fazendo com que a parábola toque uma única vez o eixo x.



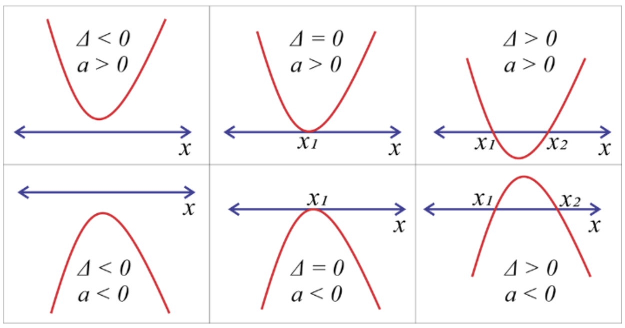


Quando o $\Delta < 0$, temos duas raízes complexas conjugadas, fazendo com que a parábola não toque o eixo x.





Resumindo, temos:



Vejamos alguns exemplos de como obter as raízes de uma função do segundo grau:

Ex1: Quem são as raízes da função $y = x^2 - 5x + 6$?

Nesta função, $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.

Deste modo, $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

Como $\Delta > 0$, temos duas raízes reais distintas, a saber:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

As raízes são $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$.

Ex2: Quem são as raízes da função $y = x^2 - 10x + 25$?

Nesta função, $a = 1$, $b = -10$ e $c = 25$.

Deste modo, $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$

Como $\Delta = 0$, temos uma raiz real dupla, a saber:

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{10 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{10}{2} = 5$$

As raízes são $x_1 = x_2 = 5$.

Ex$_3$: Quem são as raízes da função $y = x^2 - 3x + 4$?

Nesta função, $a = 1$, $b = -3$ e $c = 4$.

Deste modo, $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7$

Como $\Delta < 0$, as raízes são complexas e conjugadas, e a obtenção delas não está no conteúdo programático do Enem:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-7}}{2 \cdot 1}$$

SOMA E PRODUTO DAS RAÍZES

Sabemos que as duas raízes da função do segundo grau são dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad e \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ao somarmos as duas raízes, teremos:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b - \cancel{\sqrt{\Delta}} - b + \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

$$\boxed{S = \frac{-b}{a}}$$

Já, se fizermos o produto, teremos:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2}$$

$$P = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - (\cancel{b^2} - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\boxed{P = \frac{c}{a}}$$

Vamos revisar um pouco?

Ex$_1$: Sobre a função do segundo grau $y = 2x^2 - 12x + 10$, responda:

a) A concavidade da parábola está voltada para cima ou para baixo?

b) Qual a natureza de suas raízes? Reais ou complexas?

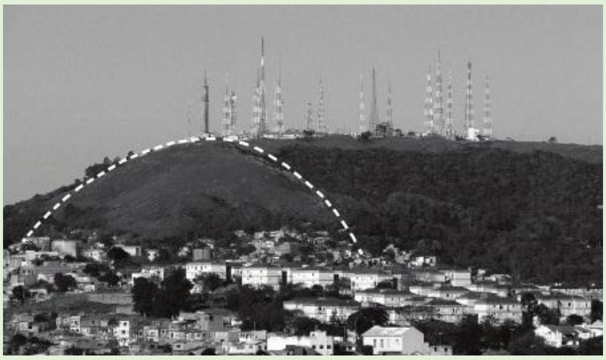
c) Em quantos pontos distintos essa parábola toca o eixo das abscissas?

d) Quais são as raízes?

e) Quanto vale a soma dessas raízes?

f) Quanto vale o produto dessas raízes?

Ex$_2$: O morro onde estão situadas as emissoras de TV em Porto Alegre pode ser representado graficamente em um sistema cartesiano, com algum prejuízo, através de uma função polinomial do 2° grau da forma $y = ax^2 + bx + c$, com a base da montanha no eixo das abscissas.



Para que fique mais adequada essa representação, qual o sinal do coeficiente “a” e qual o sinal do determinante dessa função?

Ex$_3$: O número de atendimentos **N(d)** num pronto-socorro, num dia **d** da semana, é dado pela função $N(d) = -2d^2 + 16d - 14$, em quais dias da semana não houve qualquer atendimento?

Ex$_4$: Considere o movimento de um corpo atirado ou jogado verticalmente para cima, sendo modelado de acordo com a equação $y = -20x^2 + 50x$, em que y representa a altura, em metros, alcançada por esse corpo em x segundos depois de ser arremessado. Dessa forma, por quanto tempo o corpo permanece no ar?

Ex$_5$: O saldo S de uma empresa A é calculado em função do tempo t, em meses, pela equação $S(t) = 3t^2 - 39t + 66$. Considerando essa função, em que período o saldo da empresa é negativo?

Ex$_6$: A concentração C, em partes por milhão (ppm), de certo medicamento na corrente sanguínea após t horas da sua ingestão é dada pela função polinomial $C(t)= -0{,}05t^2 + 2t + 25$. Nessa função, considera-se t = 0 o instante em que o paciente ingere a primeira dose do medicamento. Álvaro é um paciente que está sendo tratado com esse medicamento e tomou a primeira dose às 11 horas da manhã de uma segunda-feira. A que horas a concentração do medicamento na corrente sanguínea de Álvaro atingirá 40 ppm pela primeira vez?

REPRESENTAÇÃO DA FUNÇÃO ATRAVÉS DA SOMA E DO PRODUTO DAS RAÍZES

Por vezes precisamos lançar mão de estratégias para otimizar a resolução de questões. Uma delas é a representação alternativa da função do segundo grau usando a soma e o produto das raízes.

Seja a função do segundo grau:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Se dividirmos ambos os membros por a, temos:

$$\frac{y}{a} = \cancel{\frac{a}{a}}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

Lembre-se que, um sinal de "mais" pode ser obtido através da relação de sinal de "menos" por "menos". Portanto, substituiremos o sinal de "mais" em verde acima pela ralação de "menos" por "menos".

$$\frac{y}{a} = x^2 - \left(-\frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a}$$

Perceba que $-\frac{b}{a}$ é a soma das raízes, enquanto que $\frac{c}{a}$ é o produto as raízes. Substituindo-os na equação acima, temos:

$$\frac{y}{a} = x^2 - (soma \cdot x) + produto$$

Passando o a que está abaixo do y para o segundo membro multiplicando, ficaremos com:

$$y = a(x^2 - soma \cdot x + produto)$$

Ex7: Se uma função quadrática tem como raízes $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$, pergunta-se:

a) Qual a representação algébrica da função quando o coeficiente a for igual a 1?

b) Qual a representação algébrica da função quando o coeficiente a for igual a 5?

FORMA FATORADA DA FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Partindo da representação que acabamos de ver, podemos otimizar mais ainda a resolução das questões.

$$y = a(x^2 - soma \cdot x + produto)$$

$$y = a(x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2)$$

Aplicando a propriedade distributiva na parte que está em verde, temos:

$$y = a(x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2)$$

Perceba que é fator x comum no primeiro grupo e $-x_2$ é fator comum no segundo grupo. Daí, efetuando a fatoração por agrupamento, temos:

$$y = a\big(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\big)$$

Finalmente, observe que $(x - x_1)$ é fator comum, colocando-o em evidência, temos:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

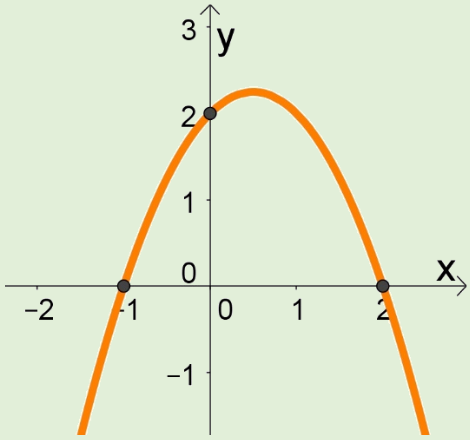
Uma função do segundo grau pode ser representada algebricamente por a, multiplicado por x menos uma raiz, multiplicado por x menos a outra raiz.

Ex$_8$: Qual a forma fatorada da função $y = x^2 - 4x + 3$?

Ex$_9$: Qual a forma fatorada da função $y = 3x^2 + 9x - 30$?

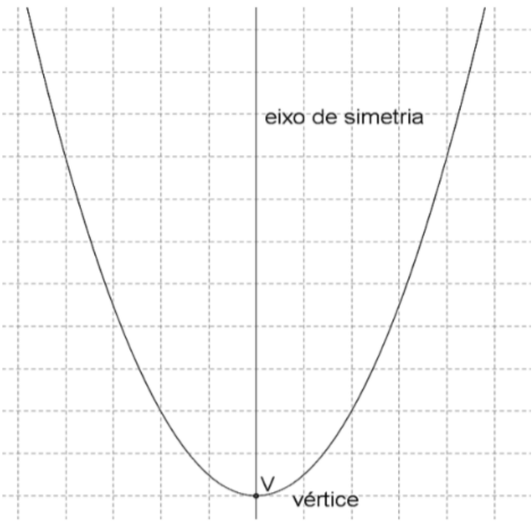
Ex$_{10}$: Na função quadrática que está forma fatorada $y = -2 \cdot (5x - 35) \cdot (6 - 3x)$, quais são as raízes?

Ex$_{11}$: Qual a representação algébrica, na forma fatorada, para a função representada pelo gráfico abaixo?

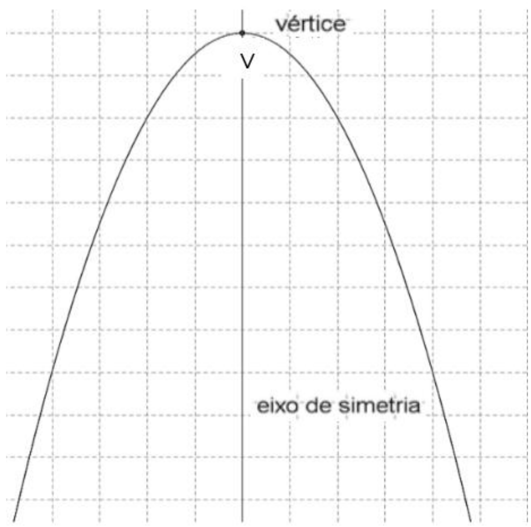


Agora que conhecemos várias características da função do segundo grau, vamos falar um pouco sobre a simetria da parábola.

SIMETRIA DA PARÁBOLA



$a > 0$



$a < 0$

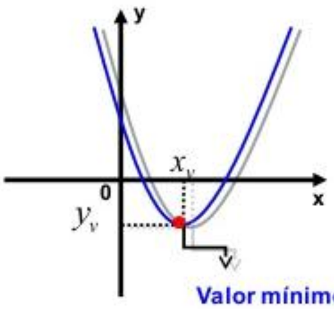
Toda parábola possui um eixo de simetria. Isso faz com que tudo que aconteça à direita do eixo seja um espelho do que aconteça à esquerda.

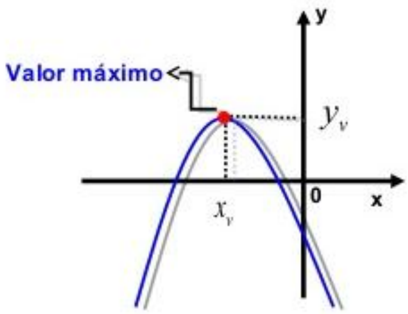
Esse eixo de simetria passa pelo "meio" da parábola e o encontro do eixo com a parábola determina o que chamamos de vértice.

O vértice de uma parábola é o ponto de máximo quando a concavidade estiver voltada para baixo $(a < 0)$ ou o ponto de mínimo quando a concavidade estiver voltada para cima $(a > 0)$.

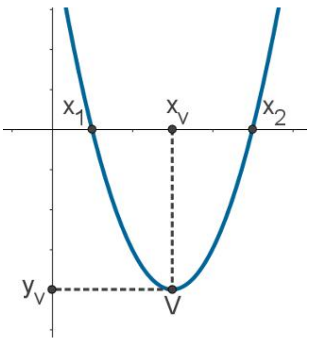
Independente do vértice ser ponto de máximo ou ponto de mínimo, devemos saber suas coordenadas, a abscissa x_v e a ordenada y_v.

COORDENADAS DO VÉRTICE





Para determinarmos as coordenadas do vértice de uma parábola, precisamos lembrar que o vértice está no "meio" da parábola, consequentemente, estará no "meio" das raízes:



Como x_v está no "meio" das raízes x_1 e x_2, ele pode ser calculado através da média aritmética das raízes:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

x_v é a média aritmética das raízes da função do segundo grau

Ou ainda,

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} + \frac{-b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-\cancel{2}b}{2a}}{\cancel{2}} = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Ex12: Qual o x_v da função $y = (4x - 28)(15 - 3x)$?

Ex13: Qual o x_v da função $y = -3x^2 + 18x + 4$?

Para encontrarmos o y_v, devemos substituir x por x_v na função:

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow y_v = ax_v^2 + bx_v + c$$

Sendo assim:

$$y_v = ax_v^2 + bx_v + c$$

$$y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y_v = \cancel{a} \cdot \frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

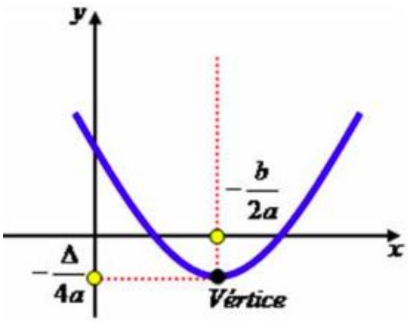
$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

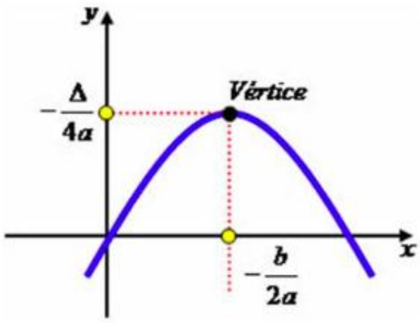
$$y_v = \frac{-(b^2 + 4ac)}{4a}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Ex14: Qual o y_v da função $y = (4x - 28)(15 - 3x)$?

Ex15: Qual o y_v da função $y = -3x^2 + 18x + 4$?





Mesmo sabendo como calculá-los, uma das maiores dificuldades dos alunos é saber quando utilizar x_v ou quando utilizar y_v. Sendo assim, vamos falar um pouco sobre as diferenças entre x_v e y_v:

Se observarmos com cuidado, não existe valor máximo para x_v, quando $a < 0$, existe um valor de x, para o qual, o y se torna máximo.

Analogamente, não existe valor mínimo para x_v, quando $a > 0$, existe um valor de x, para o qual, o y se torna mínimo.

Assumir o valor máximo ou o valor mínimo da função é atribuição do y_v, o x_v é apenas um coadjuvante, ele faz com que o y assuma o máximo ou o mínimo.

Se as perguntas forem:

- Qual o lucro máximo?
- Qual a produção máxima?
- Qual a altura máxima?
- Qual o prejuízo mínimo?
- Qual a área mínima?

Lembre-se que só quem atinge máximo ou mínimo é o y_v.
Nesses casos, sem dúvida, você deve calcular o y_v.

Mas, se as perguntas forem:

- Quantos produtos devem ser vendidos, para que o lucro seja máximo?
- Qual a quantidade de agrotóxico que deve ser utilizada para que a produção seja máxima?
- Após quanto tempo do lançamento, o móvel atingirá a altura máxima?
- Quantas pessoas devem comparecer à festa, para que o prejuízo seja mínimo?
  Quais devem ser as dimensões da cerca, para que a área seja mínima?

Perceba que existe uma grandeza que faz com que a outra assuma o valor máximo ou mínimo, essa grandeza que auxilia a maximizar ou minimizar é o x_v, nesses casos, sem dúvida, você deve calcular o x_v.

Sintetizando,

Caso a pergunta seja direta: qual deve ser o máximo/mínimo dessa grandeza?

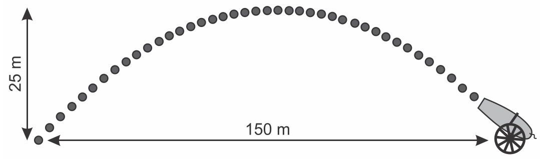
Calculamos o y_v.

Caso a pergunta seja indireta: qual deve ser o valor dessa grandeza, para que aquela grandeza seja máxima/mínima?

Calculamos o x_v.

QUESTÕES

1. (Enem PPL 2018) Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.



Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto $(150;\,0)$ e que o projétil atinge o solo no ponto $(0;\,0)$ do plano xy.

A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é

A) $y = 150x - x^2$

B) $y = 3.750x - 25x^2$

C) $75y = 300x - 2x^2$

D) $125y = 450x - 3x^2$

E) $225y = 150x - x^2$

2. (Enem (Libras) 2017) Suponha que para um trem trafegar de uma cidade à outra seja necessária a construção de um túnel com altura e largura iguais a $10\text{ m}.$ Por questões relacionadas ao tipo de solo a ser escavado, o túnel deverá ser tal que qualquer seção transversal seja o arco de uma determinada parábola, como apresentado na Figura 1. Deseja-se saber qual a equação da parábola que contém esse arco. Considere um plano cartesiano com centro no ponto médio da base da abertura do túnel, conforme Figura 2.

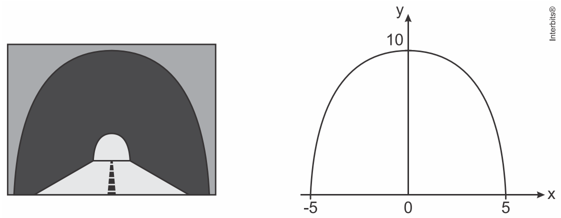


Figura 1 (Túnel) Figura 2

A equação que descreve a parábola é

A) $y = -\frac{2}{5}x^2 + 10$

B) $y = \frac{2}{5}x^2 + 10$

C) $y = -x^2 + 10$

D) $y = x^2 - 25$

E) $y = -x^2 + 25$

3. (Enem 2017) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

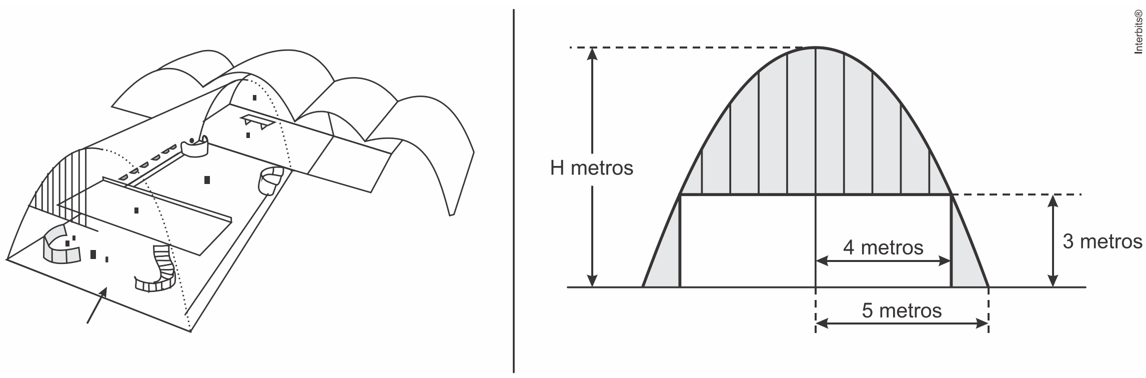


Figura 1 Figura 2

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

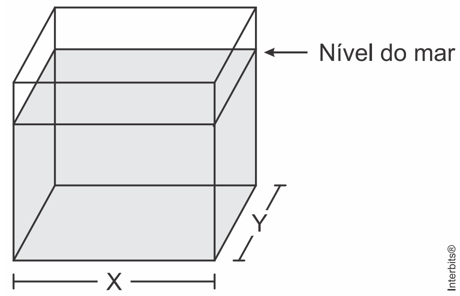
A) $\frac{16}{3}$
B) $\frac{31}{5}$
C) $\frac{25}{4}$
D) $\frac{25}{3}$
E) $\frac{75}{2}$

4. (Enem (Libras) 2017) A única fonte de renda de um cabeleireiro é proveniente de seu salão. Ele cobra R$ 10,00 por cada serviço realizado e atende 200 clientes por mês, mas está pensando em aumentar o valor cobrado pelo serviço. Ele sabe que cada real cobrado a mais acarreta uma diminuição de 10 clientes por mês.

Para que a renda do cabeleireiro seja máxima, ele deve cobrar por serviço o valor de

A) R$ 10,00.
B) R$ 10,50.
C) R$ 11,00.
D) R$ 15,00.
E) R$ 20,00.

5. (Enem 2017) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

A 1 e 49
B 1 e 99
C 10 e 10
D 25 e 25
E 50 e 50

6. (Enem 2ª aplicação 2016) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1.600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A segunda dedetização começou no

A 19º dia.
B 20º dia.
C 29º dia.
D 30º dia.
E 60º dia.

7. (Enem 2016) Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

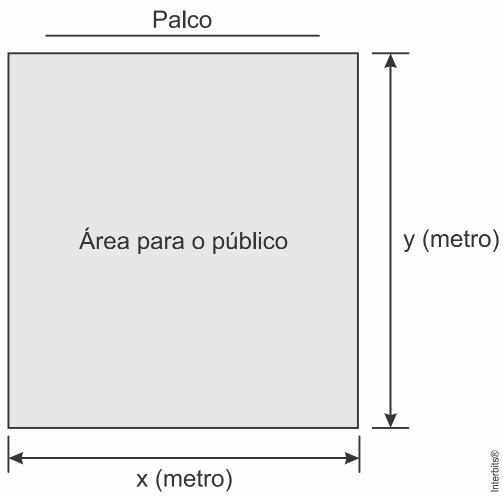
$y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel.

Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

A) 18
B) 20
C) 36
D) 45
E) 54

8. (Enem 2ª aplicação 2016) Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para shows e eventos, conforme a figura.



A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:

- nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é R$ 20,00;
- nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa R$ 5,00.

A empresa dispõe de R$ 5.000,00 para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público. A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é

A) 50,0 m da tela tipo A e 800,0 m da tela tipo B.
B) 62,5 m da tela tipo A e 250,0 m da tela tipo B.
C) 100,0 m da tela tipo A e 600,0 m da tela tipo B.
D) 125,0 m da tela tipo A e 500,0 m da tela tipo B.
E) 200,0 m da tela tipo A e 200,0 m da tela tipo B.

9. (Enem 2015) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

A) muito baixa.
B) baixa.
C) média.
D) alta.
E) muito alta.

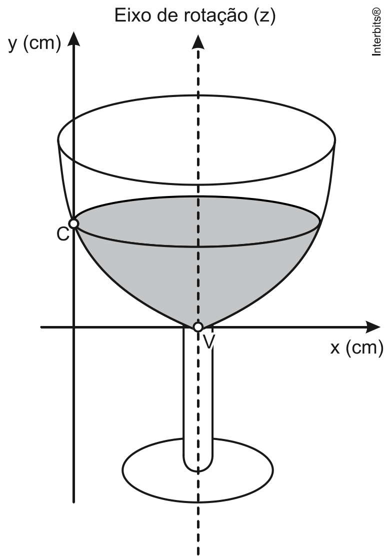
10. (Enem 2014) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

A) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x.$
B) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x.$
C) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x.$
D) $y = \frac{4}{5}x + 2.$
E) $y = x.$

11. (Enem 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C,$ onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

Ⓐ 1.
Ⓑ 2.
Ⓒ 4.
Ⓓ 5.
Ⓔ 6.

12. (Enem PPL 2013) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo.

Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a

Ⓐ 4.
Ⓑ 6.
Ⓒ 9.
Ⓓ 10.
Ⓔ 14.

13. (Enem 2013) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400,$ com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°.

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

Ⓐ 19,0
Ⓑ 19,8
Ⓒ 20,0
Ⓓ 38,0
Ⓔ 39,0

14. (Enem PPL 2013) O proprietário de uma casa de espetáculos observou que, colocando o valor da entrada a R$10,00, sempre contava com 1.000 pessoas a cada apresentação, faturando R$10.000,00 com a venda dos ingressos. Entretanto, percebeu também que, a partir de R$10,00, a cada R$2,00 que ele aumentava no valor da entrada, recebia para os espetáculos 40 pessoas a menos.

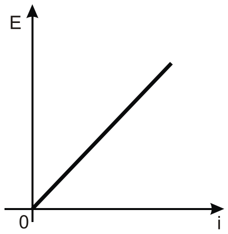
Nessas condições, considerando *P* o número de pessoas presentes em um determinado dia e *F* o faturamento com a venda dos ingressos, a expressão que relaciona o faturamento em função do número de pessoas é dada por:

Ⓐ $F = \frac{-P^2}{20} + 60P$
Ⓑ $F = \frac{P^2}{20} - 60P$
Ⓒ $F = -P^2 + 1200P$
Ⓓ $F = \frac{-P^2}{20} + 60$
Ⓔ $F = -P^2 - 1220P$

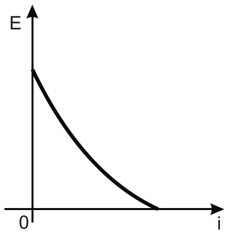
15. (Enem 2012) Existem no mercado chuveiros elétricos de diferentes potências, que representam consumos e custos diversos. A potência (P) de um chuveiro elétrico é dada pelo produto entre sua resistência elétrica (R) e o quadrado da corrente elétrica (i) que por ele circula. O consumo de energia elétrica (E), por sua vez, é diretamente proporcional à potência do aparelho.

Considerando as características apresentadas, qual dos gráficos a seguir representa a relação entre a energia consumida (E) por um chuveiro elétrico e a corrente elétrica (i) que circula por ele?

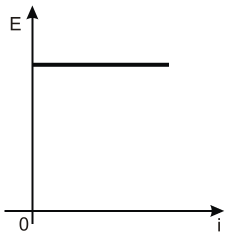
A



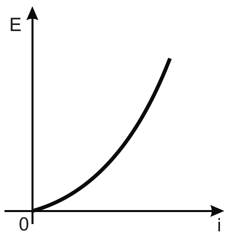
B



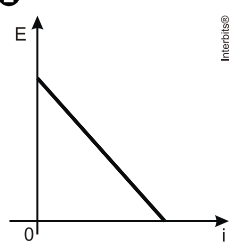
C



D



E



16. (Enem PPL 2012) O apresentador de um programa de auditório propôs aos participantes de uma competição a seguinte tarefa: cada participante teria 10 minutos para recolher moedas douradas colocadas aleatoriamente em um terreno destinado à realização da competição. A pontuação dos competidores seria calculada ao final do tempo destinado a cada um dos participantes, no qual as moedas coletadas por eles seriam contadas e a pontuação de cada um seria calculada, subtraindo do número de moedas coletadas uma porcentagem de valor igual ao número de moedas coletadas. Dessa forma, um participante que coletasse 60 moedas teria sua pontuação calculada da seguinte forma: pontuação = 60 – 36 (60% de 60) = 24. O vencedor da prova seria o participante que alcançasse a maior pontuação.

Qual será o limite máximo de pontos que um competidor pode alcançar nessa prova?

Ⓐ 0
Ⓑ 25
Ⓒ 50
Ⓓ 75
Ⓔ 100

17. (Enem cancelado 2009) A empresa WQTU Cosmético vende um determinado produto x, cujo custo de fabricação de cada unidade é dado por $3x^2 + 232$, e o seu valor de venda é expresso pela função $180x - 116$. A empresa vendeu 10 unidades do produto x, contudo a mesma deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro máximo.

A quantidade máxima de unidades a serem vendidas pela empresa WQTU para a obtenção do maior lucro é

Ⓐ 10
Ⓑ 30
Ⓒ 58
Ⓓ 116
Ⓔ 232

18. (Enem 2009) Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

Ⓐ $V = 10.000 + 50x - x^2$.
Ⓑ $V = 10.000 + 50x + x^2$.
Ⓒ $V = 15.000 - 50x - x^2$.
Ⓓ $V = 15.000 + 50x - x^2$.
Ⓔ $V = 15.000 - 50x + x^2$.

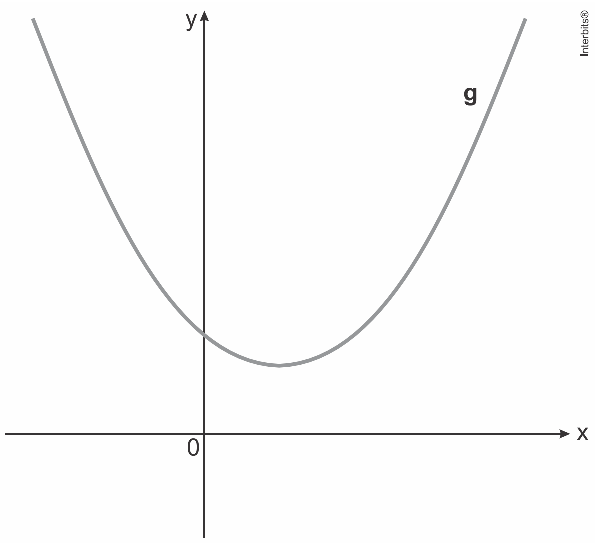
19. (Enem 2000) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:

$$R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$$, onde k é uma constante positiva característica do boato.

Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44.000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

A) 11.000.
B) 22.000.
C) 33.000.
D) 38.000.
E) 44.000.

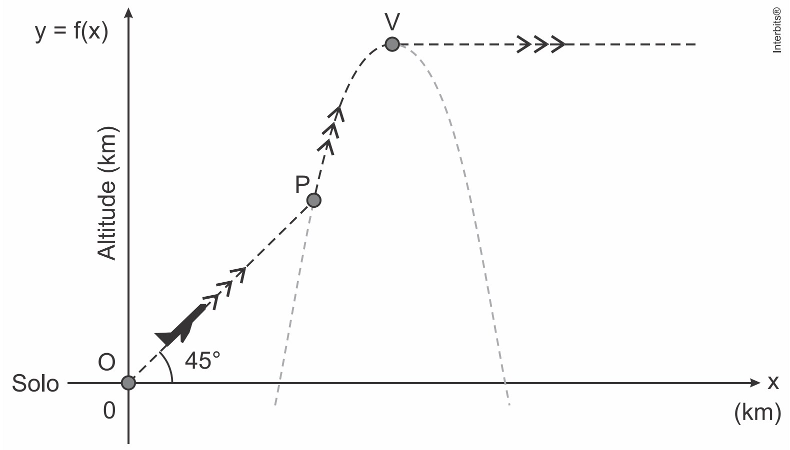
20. (Upf 2019) Na figura, está representado o gráfico de uma função quadrática g de domínio real.



Das expressões a seguir, aquela que pode definir a função g é:

A) $g(x) = x^2 + 2x + 3$
B) $g(x) = x^2 - x - 3$
C) $g(x) = -x^2 + x + 3$
D) $g(x) = -x^2 - 2x + 3$
E) $g(x) = x^2 - 2x + 3$

21. (Unesp 2019) Em relação a um sistema cartesiano de eixos ortogonais com origem em $O(0, 0)$, um avião se desloca, em linha reta, de O até o ponto P, mantendo sempre um ângulo de inclinação de $45°$ com a horizontal. A partir de P, o avião inicia trajetória parabólica, dada pela função $f(x) = -x^2 + 14x - 40$, com x e $f(x)$ em quilômetros. Ao atingir o ponto mais alto da trajetória parabólica, no ponto V, o avião passa a se deslocar com altitude constante em relação ao solo, representado na figura pelo eixo x.



Em relação ao solo, do ponto P para o ponto V, a altitude do avião aumentou

Ⓐ 2,5 km.
Ⓑ 3 km.
Ⓒ 3,5 km.
Ⓓ 4 km.
Ⓔ 4,5 km.

22. (Ueg 2019) Um lava-jato tem 50 clientes fixos por semana e cada lavagem custa R\$ 20,00. Sabe-se que a cada um real que o dono desse lava-jato aumenta no preço da lavagem, ele perde 2 clientes.

O valor do aumento que maximiza a arrecadação semanal desse lava-jato é de

Ⓐ R\$ 25,00
Ⓑ R\$ 20,00
Ⓒ R\$ 2,50
Ⓓ R\$ 10,00
Ⓔ R\$ 2,00

23. (G1 - cmrj 2019) A companhia de turismo *Vivitour* freta um ônibus de 40 lugares de acordo com as seguintes condições descritas no contrato de afretamento:

I. Cada passageiro pagará R$ 160,00, se todos os 40 lugares forem ocupados.
II. Cada passageiro pagará um adicional de R$ 8,00 por lugar não ocupado.

Quantos lugares a companhia de turismo deverá vender para garantir lucro máximo?

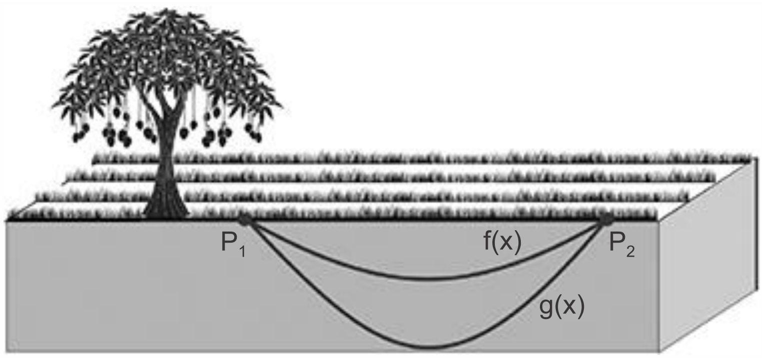
A 30
B 32
C 35
D 38
E 40

24. (Ueg 2019) Em um jogo de futebol, um jogador chuta uma bola parada, que descreve uma parábola até cair novamente no gramado.

Sabendo-se que a parábola é descrita pela função $y = 20x - x^2$, a altura máxima atingida pela bola é

A 100 m
B 80 m
C 60 m
D 40 m
E 20 m

25. (G1 - cftmg 2018) Meu avô quer construir, ao lado da mangueira de seu sítio, um lago para criar peixes. A figura a seguir mostra o projeto do engenheiro ambiental no qual a lagoa, vista por um corte horizontal do terreno, é representada por uma parábola, com raízes P_1 e P_2 distantes 8 metros. O projeto inicial previa a parábola $g(x) = x^2 - 8x$. Para conter gastos, essa parábola foi substituída pela parábola $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x$.

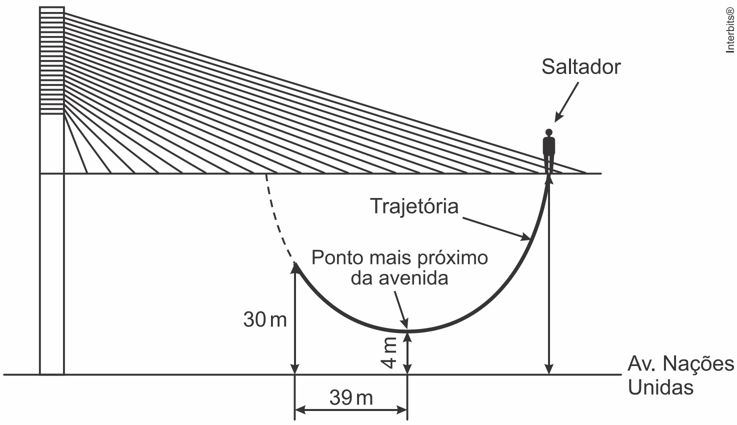


Com essa mudança, a maior profundidade da lagoa, em metros, diminuiu

A 4.
B 8.
C 12.
D 16.

26. (G1 - epcar (Cpcar) 2018) De acordo com o senso comum, parece que a juventude tem gosto por aventuras radicais. Os alunos do CPCAR não fogem dessa condição. Durante as últimas férias, um grupo desses alunos se reuniu para ir a São Paulo com o objetivo de saltar de "*Bungee Jumping*" da Ponte Octávio Frias de Oliveira, geralmente chamada de "Ponte Estaiada". Em uma publicação na rede social de um desses saltos, eles, querendo impressionar, colocaram algumas medidas fictícias da aproximação do saltador em relação ao solo. Considere que a trajetória que o saltador descreve possa ser modelada por uma função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo eixo das abscissas coincida com a reta da Av. Nações Unidas e o eixo das ordenadas contenha o "ponto mais próximo da Avenida", indicados na figura.

Considere, também, as medidas informadas.



O coeficiente de x^2 da função com as características sugeridas é igual a

A) $\frac{22}{1.521}$
B) $\frac{2}{117}$
C) $\frac{13}{1.521}$
D) $\frac{13}{117}$

27. (Efomm 2018) Uma aluna do 3º ano da EFOMM, responsável pelas vendas dos produtos da SAMM (Sociedade Acadêmica da Marinha Mercante), percebeu que, com a venda de uma caneca a R\$ 9,00, em média 300 pessoas compravam, quando colocadas as canecas à venda em um grande evento.

Para cada redução de R\$ 1,00 no preço da caneca, a venda aumentava em 100 unidades. Assim, o preço da caneca, para que a receita seja máxima, será de

A) R\$ 8,00.
B) R\$ 7,00.
C) R\$ 6,00.
D) R\$ 5,00.
E) R\$ 4,00.

28. (G1 - ifpe 2018) Quando estudamos Cinemática, em Física, aprendemos que podemos calcular a altura de uma bala atirada para cima pela fórmula $h = 200t - 5t^2$, onde h é a altura, em metros, atingida após t segundos do lançamento.

Qual o menor intervalo de tempo para a bala atingir 1.875 metros de altura?

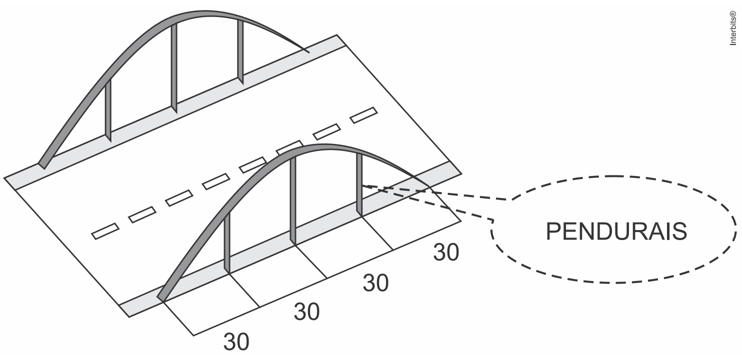
Ⓐ 20 s.
Ⓑ 15 s.
Ⓒ 5 s.
Ⓓ 11 s.
Ⓔ 17 s.

29. (G1 - ifal 2018) Certo fabricante, segundo levantamentos estatísticos, percebe que seus clientes não têm comprado mais de 10 de seus produtos por compras. Para incentivar as compras em maior quantidade, ele estabelece um preço unitário p por produto dado pela função $p(x) = 400 - x$, onde x é a quantidade de produtos comprados, considerando uma compra de, no máximo, 300 produtos.

Sabendo-se que a receita de uma empresa é o valor arrecadado com a venda de uma certa quantidade de produtos, qual a receita máxima que essa empresa pode ter quando fechar uma venda com um determinado cliente, na moeda corrente no Brasil?

Ⓐ R$ 200,00.
Ⓑ R$ 400,00.
Ⓒ R$ 20.000,00.
Ⓓ R$ 40.000,00.
Ⓔ R$ 80.000,00.

30. (G1 - cmrj 2018) Uma ponte metálica, em forma de arco de parábola, será construída. Sua sustentação será feita com seis pendurais metálicos, três de cada lado, distando 30 m um do outro, como ilustra a figura abaixo.



Sabendo que a ponte tem 40 m de altura, quantos metros de pendurais serão necessários para a construção desta ponte?

Ⓐ 120 m
Ⓑ 140 m
Ⓒ 160 m
Ⓓ 180 m
Ⓔ 200 m

31. (G1 - ifal 2017) Em uma partida de futebol, um dos jogadores lança a bola e sua trajetória passa a obedecer à função $h(t) = 8t - 2t^2$, onde h é a altura da bola em relação ao solo medida em metros e t é o intervalo de tempo, em segundos, decorrido desde o instante em que o jogador chuta a bola.

Nessas condições, podemos dizer que a altura máxima atingida pela bola é

Ⓐ 2 m.
Ⓑ 4 m.
Ⓒ 6 m.
Ⓓ 8 m.
Ⓔ 10 m.

32. (G1 - ifal 2017) No Laboratório de Química do IFAL, após várias medidas, um estudante concluiu que a concentração de certa substância em uma amostra variava em função do tempo, medido em horas, segundo a função quadrática $f(t) = 5t - t^2$.

Determine em que momento, após iniciadas as medidas, a concentração dessa substância foi máxima nessa amostra.

Ⓐ 1 hora.
Ⓑ $1,5$ hora.
Ⓒ 2 horas.
Ⓓ $2,5$ horas.
Ⓔ 3 horas.

33. (G1 - ifba 2017) Durante as competições Olímpicas, um jogador de basquete lançou a bola para o alto em direção à cesta. A trajetória descrita pela bola pode ser representada por uma curva chamada parábola, que pode ser representada pela expressão:

$$h = -2x^2 + 8x$$

(onde "h" é a altura da bola e "x" é a distância percorrida pela bola, ambas em metros)

A partir dessas informações, encontre o valor da altura máxima alcançada pela bola:

Ⓐ 4 m
Ⓑ 6 m
Ⓒ 8 m
Ⓓ 10 m
Ⓔ 12 m

34. (G1 - ifpe 2017) Um técnico em administração, formado pelo IFPE *Campus* Paulista, trabalha numa empresa e que o faturamento e o custo dependem da quantidade x de peças produzidas.

Sabendo que o lucro de uma empresa é dado pelo faturamento menos o custo e que, nessa empresa, o faturamento e o custo obedecem respectivamente às funções $f(x) = -x^2 + 3.800x$ e $c(x) = 200x + 3.200,$ o número de peças que devem ser produzidas para que a empresa obtenha o lucro máximo é

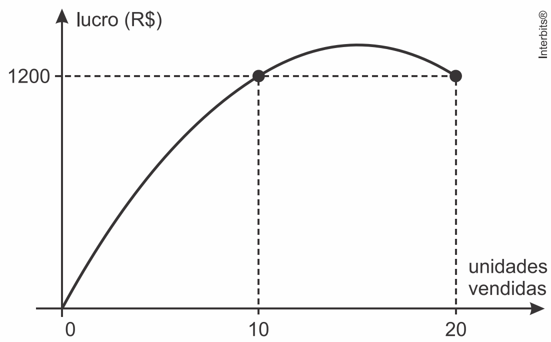
Ⓐ 3.200.
Ⓑ 1.600.
Ⓒ 3.600.
Ⓓ 2.000.
Ⓔ 1.800.

35. (Fgv 2017) Um fazendeiro dispõe de material para construir 60 metros de cerca em uma região retangular, com um lado adjacente a um rio.

Sabendo que ele não pretende colocar cerca no lado do retângulo adjacente ao rio, a área máxima da superfície que conseguirá cercar é:

Ⓐ 430 m^2
Ⓑ 440 m^2
Ⓒ 460 m^2
Ⓓ 470 m^2
Ⓔ 450 m^2

36. (Espm 2017) O lucro de uma pequena empresa é dado por uma função quadrática cujo gráfico está representado na figura abaixo:



Podemos concluir que o lucro máximo é de:

Ⓐ R$ 1.280,00
Ⓑ R$ 1.400,00
Ⓒ R$ 1.350,00
Ⓓ R$ 1.320,00
Ⓔ R$ 1.410,00

37. (Ueg 2017) A temperatura, em graus Celsius, de um objeto armazenado em um determinado local é modelada pela função $f(x) = -\frac{x^2}{12} + 2x + 10,$ com x dado em horas.

A temperatura máxima atingida por esse objeto nesse local de armazenamento é de

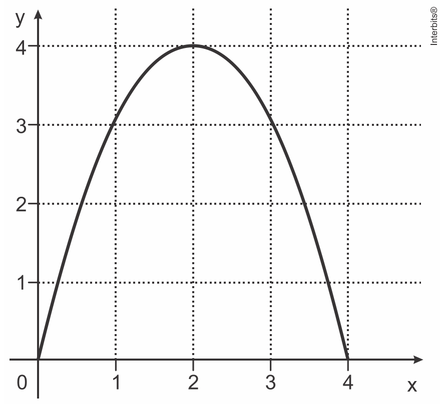
Ⓐ 0 °C
Ⓑ 10 °C
Ⓒ 12 °C
Ⓓ 22 °C
Ⓔ 24 °C

38. (G1 - cps 2017) Em um famoso jogo eletrônico de arremessar pássaros, a trajetória do lançamento corresponde a parte de uma parábola, como a da figura.

<https://tinyurl.com/zx74hnz> Acesso em: 03.03.2017.
Original colorido.

Considere que um jogador fez um lançamento de um pássaro virtual cuja trajetória pode ser descrita pela função $h(x) = -x^2 + 4x,$ com x variando entre 0 e $4.$

O gráfico mostra essa trajetória. O ponto de lançamento do pássaro coincide com a origem do plano cartesiano.



Analisando o gráfico, é correto afirmar que o pássaro começa a

Ⓐ cair a partir do ponto $(2, 4).$
Ⓑ cair a partir do ponto $(4, 2).$
Ⓒ subir a partir do ponto $(2, 4).$
Ⓓ subir a partir do ponto $(4, 2).$
Ⓔ subir a partir do ponto $(3, 3).$

39. (Acafe 2017) Utilizando-se exatamente 1.200 metros de arame, deseja-se cercar um terreno retangular de modo que a parte do fundo não seja cercada, pois ele faz divisa com um rio, e que a cerca tenha 4 fios paralelos de arame.

Nessas condições, para cercar a maior área possível do terreno com o arame disponível, os valores de x e y (em metros), respectivamente, são:

Ⓐ 100 e 100
Ⓑ 50 e 200
Ⓒ 125 e 50
Ⓓ 75 e 150

40. (G1 - ifsul 2016) Considere o movimento de um corpo atirado ou jogado verticalmente para cima, sendo modelado de acordo com a equação $y = -20x^2 + 50x$, em que y representa a altura, em metros, alcançada por esse corpo em x segundos depois de ser arremessado.

Dessa forma, a altura máxima atingida por esse corpo e o tempo em que permanece no ar, respectivamente, são

Ⓐ $31,25\text{ m}$ e $2,5\text{ s}$.
Ⓑ $1,25\text{ m}$ e $2,5\text{ s}$.
Ⓒ $31,25\text{ m}$ e $1,25\text{ s}$.
Ⓓ $2,5\text{ m}$ e $1,25\text{ s}$.

41. (CESUPA 2010) Uma espécie animal, cuja família inicial era de 288 elementos, foi testada em laboratório sob a ação de certa droga e constatado que a lei de sobrevivência entre tal família obedecia à relação:

$$N(t) = at^2 + b$$

onde N(t) é igual ao número de elementos vivos no tempo t (dado em horas) e a e b parâmetros que dependiam da droga ministrada. Sabe-se que a família desapareceu (morreu o último elemento) quando t = 12h (após o início do experimento).

Quantos elementos tinha esta família após 10h do início da experiência?

Ⓐ 148
Ⓑ 124
Ⓒ 96
Ⓓ 88

42. (UNIFOR 2019) Uma cultura de bactérias cuja família inicial era de 300 elementos foi testada num laboratório sob a ação de uma certa droga. Verificou-se que a lei de sobrevivência desta família obedecia à relação $f(t) = at^2 + b$, onde f(t) é igual ao número de elementos vivos no tempo t (dados em dias) e a e b são constantes que dependem da droga aplicada. Verificou-se também que a família morreu quando $t = 10$ dias, isto após o início da experiência.

Portanto, no oitavo dia do início da experiência, o número de elementos dessa família era

A 108.
B 118.
C 120.
D 122.
E 128.

43. (UNIFOR 2019) A quantidade de alunos da disciplina de Cálculo I que estão presentes no dia x do mês de abril é igual ao valor da função $f(x) = -x^2 + 14x - 24$. Os dias x em que as frequências dos alunos foram anotadas são aquelas em que $f(x) \geq 0$.

Se a quantidade de alunos que compareceu no dia de maior frequência corresponde a 50% do total de alunos da disciplina, então o número de alunos que a disciplina possui é

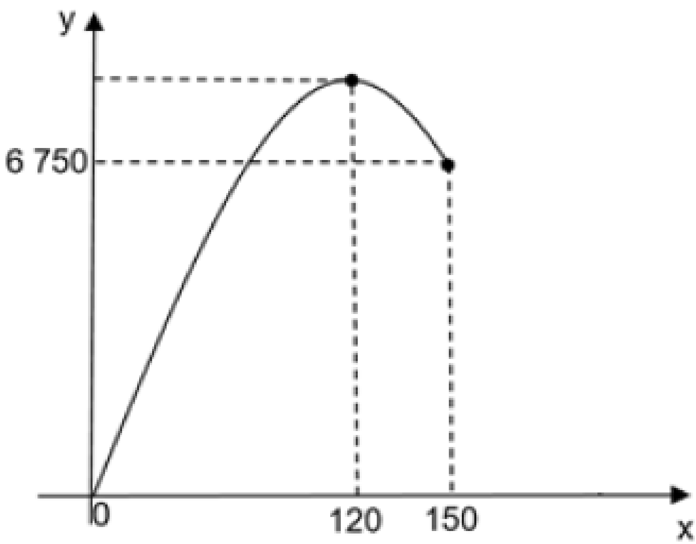
A 30.
B 35.
C 40.
D 45.
E 50.

44. (FGVSP 2019) Uma empresa produz diariamente x quilogramas de uma matéria prima, a um custo diário dado por $C(x) = 0{,}1x^2 + 40x + 3000$, em que $x \leq 400$.

Se o preço de venda por quilograma for de 80 reais, podemos afirmar que o lucro diário será positivo, para valores de x entre:

A 110 e 310
B 90 e 290
C 100 e 300
D 80 e 280
E 120 e 32

45. (USF 2019) Um empresário do ramo farmacêutico que produz e comercializa antibióticos percebeu que a quantidade vendida variava de acordo com o preço de venda. Guiando-se pela lei da oferta e da procura, elaborou uma fórmula matemática que modela a Receita (y), em reais, em função da quantidade de antibióticos (x) vendidos pela empresa, sendo $0 \le x \le 150$.



Com base no gráfico, a receita máxima obtida com a venda de antibióticos é

Ⓐ 5 040.
Ⓑ 7 200.
Ⓒ 9 320.
Ⓓ 12 000.
Ⓔ 13 680.

46. (ENEM PPL 2019) No desenvolvimento de um novo remédio, pesquisadores monitoram a quantidade Q de uma substância circulando na corrente sanguínea de um paciente, ao longo do tempo t. Esses pesquisadores controlam o processo, observando que Q é uma função quadrática de t. Os dados coletados nas duas primeiras horas foram:

t (hora)	0	1	2
Q (miligrama)	1	4	6

Para decidir se devem interromper o processo, evitando riscos ao paciente, os pesquisadores querem saber, antecipadamente, a quantidade da substância que estará circulando na corrente sanguínea desse paciente após uma hora do último dado coletado.

Nas condições expostas, essa quantidade (em miligrama) será igual a

Ⓐ 4.
Ⓑ 7.
Ⓒ 8.
Ⓓ 9.
Ⓔ 10.

47. (UFT 2019) Ao realizar o estudo de sua produção diária, uma cozinheira que faz e vende pamonhas, descobriu que o lucro em reais é calculado pela função $L(x) = -x^2 + 30x - 200$, onde x é o número de pamonhas feitas e vendidas.

Com base nestas informações, é CORRETO afirmar que o lucro máximo diário da cozinheira é:

Ⓐ R$ 10,00
Ⓑ R$ 15,00
Ⓒ R$ 20,00
Ⓓ R$ 25,00

48. (CESMAC 2018) João tem um serviço de aluguel de bicicletas. Quando o preço diário do aluguel é de R$ 12,00 por bicicleta, ele aluga 36 bicicletas por dia. Uma pesquisa entre os usuários do serviço revelou que, a cada aumento (diminuição) de cinquenta centavos no preço diário do aluguel, o número de bicicletas alugadas por dia diminuía (aumentava, respectivamente) de duas.

Qual o valor máximo diário, em reais, que João pode obter com o aluguel de bicicletas?

Ⓐ R$ 440,00
Ⓑ R$ 441,00
Ⓒ R$ 442,00
Ⓓ R$ 443,00
Ⓔ R$ 444,00

49. (UPF 2018) Um estudo das condições ambientais de um município do Rio Grande do Sul indica que a taxa média de monóxido de carbono (CO) no ar será de $C(P) = 0{,}2P - 1$ partes por milhão (ppm) quando a população for P milhares de habitantes. Sabe-se que em t anos, a população desse município será dada pela relação $P(t) = 50 + 0{,}05t^2$.

O nível de monóxido de carbono, em função do tempo t, é dado por

Ⓐ $C(t) = 9 + 0{,}01t^2$
Ⓑ $C(t) = 0{,}2(49 + 0{,}05t^2)$
Ⓒ $C(t) = 9 + 0{,}05t^2$
Ⓓ $C(t) = 0{,}1(1 + 0{,}05t^2) - 1$
Ⓔ $C(t) = 10 + 0{,}95t^2$

50. (CESMAC 2018) O custo total do dia de trabalho de uma empresa pode ser descrito pela expressão $C(x) = 3x^2 + 11x$, em que x representa a quantidade de clientes atendidos. O valor recebido pela empresa em um dia pode ser descrito pela igualdade $V(x) = 83x$. O lucro diário da empresa é dado por $L(x) = V(x) - C(x)$.

Para que o lucro seja máximo em um dia, quantos clientes devem ser atendidos?

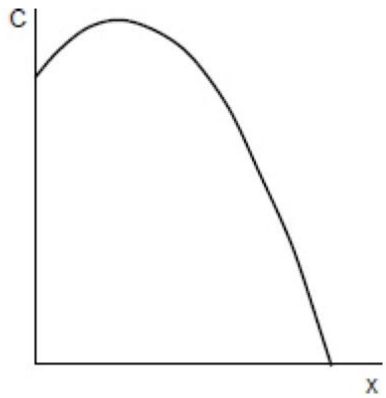
Ⓐ 12
Ⓑ 13
Ⓒ 14
Ⓓ 15
Ⓔ 16

51. (FASA 2018) Um fabricante vende, mensalmente, x unidades de um determinado artigo. O lucro desse fabricante foi modelado, matematicamente, através da função f, dada por $f(x) = -x^2 + 16x - 7$.

Quantas unidades desse artigo devem ser vendidas, mensalmente, para que o lucro do fabricante seja máximo?

Ⓐ 10.
Ⓑ 16.
Ⓒ 8.
Ⓓ 4.

52. (CESMAC 2017) A concentração C(x) de certo medicamento na corrente sanguínea, após x horas da sua ingestão, é dada por $C(x) = -0{,}06x^2 + 1{,}2x + 30$, em partes por milhão (ppm). Parte do gráfico de C, para x real não negativo está esboçado a seguir:



Qual o valor máximo que a concentração do medicamento atinge?

Ⓐ 33 ppm
Ⓑ 34 ppm
Ⓒ 35 ppm
Ⓓ 36 ppm
Ⓔ 37 ppm

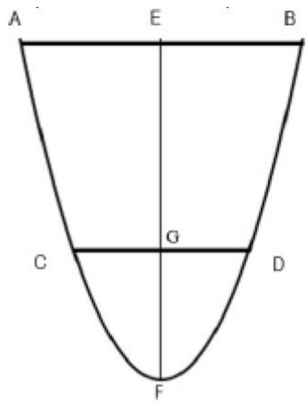
53. (UNICHRISTUS 2017) Após perder o emprego, Edileusa decidiu iniciar um negócio próprio. Como ela sempre teve uma boa desenvoltura para cozinhar, decidiu que iria fazer bolos para vender. Depois de certo tempo, com o crescimento das encomendas, Edileusa conseguiu calcular o lucro obtido por meio de uma função matemática que relaciona a quantidade de bolos produzidos e vendidos. A função é $f(x) = -x^2 + 60x$, em que f(x) representa o lucro obtido, em reais, e x a quantidade de bolos produzidos e vendidos. Porém, com o passar do tempo, Edileusa percebeu que, para atingir o lucro máximo, ela só poderá produzir certa quantidade máxima de bolos, pois, caso contrário, com uma produção muito grande, o lucro começaria a diminuir devido aos crescentes custos.

Portanto, para que Edileusa consiga um lucro máximo, ela deverá produzir e vender

Obs.: Considere que todos os bolos que são produzidos são vendidos.

Ⓐ 20 bolos
Ⓑ 30 bolos.
Ⓒ 40 bolos.
Ⓓ 50 bolos.
Ⓔ 60 bolos.

54. (UNCISAL 2017) A figura apresenta o projeto (desenhado sem escala) de um miniauditório, de contorno curvo parabólico, constituído de um palco (CDF) e da plateia (ABCD).



Se AB e CD são perpendiculares ao eixo da parábola EF, AB = EF = 20,00 m e CD = 10,00 m, a maior profundidade do palco, GF, é igual a

Ⓐ 5,00 m.
Ⓑ 6,25 m.
Ⓒ 7,25 m.
Ⓓ 8,75 m.
Ⓔ 10,00 m.

55. (UEG 2017) A temperatura, em graus Celsius, de um objeto armazenado em um determinado local é modelada pela função

$$f(x) = -\frac{x^2}{12} + 2x + 10,$$

com x dado em horas.

A temperatura máxima atingida por esse objeto nesse local de armazenamento é de

A) 0°C
B) 10°C
C) 12°C
D) 22°C
E) 24°C

56. (UNIT 2017) O lucro de uma empresa fornecedora de material hospitalar é dado, em milhares de reais, pela função $L(x) = -x^2 + 18x + 20$, em que x é o número de unidades de equipamentos vendidas.

Nessas condições, tem-se que o lucro é máximo quando x é igual a

A) 6
B) 8
C) 9
D) 18
E) 20

57. (IFRN 2017) Para atender ao consumo dos cavalos, num parque de vaquejada, existe um reservatório de água que precisa ser esvaziado para limpeza. Considerando que a expressão

$$V(t) = -\frac{1}{35280}t^2 + 5$$

representa o volume, em m^3, de água, presente no tanque, no instante t, em minutos, o tempo, em horas, necessário para esvaziar o tanque, que está completamente cheio, é

A) 4.
B) 5.
C) 6.
D) 7.

58. (UNINTA 2017) Um forno é pré-aquecido e mantém sua temperatura constante. Supondo-se que a temperatura de pré-aquecimento, em °C, é dada por

$$f(t) = \begin{cases} 25 + 20t;\ 0 \leq t < 5 \\ t^2 + 10t + 50;\ 5 \leq t \leq 15 \end{cases}$$

em que t é o tempo em minutos, pode-se afirmar que o tempo necessário para que a temperatura do forno passe de 85°C para 194°C é de

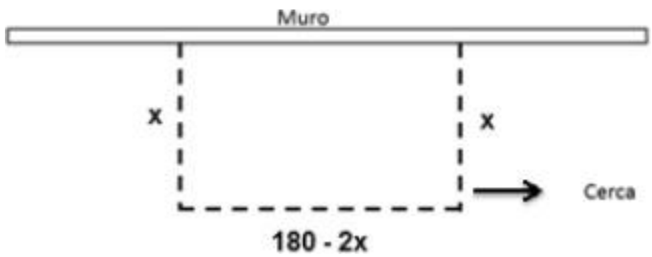
Ⓐ 5 minutos
Ⓑ 6 minutos
Ⓒ 7 minutos
Ⓓ 8 minutos
Ⓔ 9 minutos

59. (FPP 2017) O gerente de uma loja estima que a cada redução de 2 reais no preço de um determinado produto, que por ventura ele venha a oferecer aos seus clientes, 5 unidades a mais serão vendidas, semanalmente. Atualmente, sem oferecer o desconto são vendidas, em média, 40 unidades por semana, do referido produto, ao preço unitário de 24 reais.

Qual deve ser o preço de venda estabelecido pelo gerente para que a receita semanal, obtida apenas com a venda desse produto, seja máxima?

Ⓐ 2 reais.
Ⓑ 4 reais.
Ⓒ 20 reais.
Ⓓ 50 reais.
Ⓔ 1000 reais.

60. (UFGJM 2014) Dentro de sua fazenda, João deseja utilizar 180m de cerca para fazer um pequeno cercado, no formato retangular, para separar alguns animais no período que antecede a reprodução.



Utilizando um muro como um dos lados do cercado, o valor de x, indicado nessa figura, para que a área cercada seja máxima é de

Ⓐ 30m.
Ⓑ 45m.
Ⓒ 60m.
Ⓓ 75m.

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	E
02	A
03	D
04	D
05	D
06	B
07	C
08	D
09	D
10	A
11	E
12	B
13	D
14	A
15	D
16	B
17	B
18	D
19	B
20	E
21	D
22	C
23	A
24	A
25	C
26	B
27	C
28	B
29	D
30	E

QUESTÃO	ALTERNATIVA
31	D
32	D
33	C
34	E
35	E
36	C
37	D
38	A
39	D
40	A
41	D
42	A
43	E
44	C
45	B
46	B
47	D
48	B
49	A
50	A
51	C
52	D
53	B
54	A
55	D
56	C
57	D
58	A
59	C
60	B

função exponencial

CONHECIMENTOS ALGÉBRICOS

FUNÇÃO EXPONENCIAL

CONCEITOS INICIAIS

Um dos maiores problemas do aluno quando se depara com uma questão que envolve FUNÇÃO EXPONENCIAL no Enem é não saber o que fazer... E quando sabe, na maioria das vezes, opta pelo caminho mais longo! Que tal conhecermos alguns atalhos? Você sabe qual é a maneira mais rápida, simples e objetiva de caracterizar uma FUNÇÃO EXPONENCIAL?

Três coisas são extremamente importantes! Anota aí... Toda função exponencial precisa de um ponto de partida, o **VALOR INICIAL** é aquela quantidade de elementos que vai existir no início de nossa análise. É esse valor que vai sofrer alterações ao longo do tempo. Mas de que forma essas alterações são feitas? Através de um **FATOR MULTIPLICATIVO**. Na função exponencial, a variação é feita através de multiplicações, dobrar, triplicar, quadruplicar, são palavras que sempre aparecem nas questões e significam multiplicações por 2, 3 e 4, respectivamente. Estes, são chamados de fatores multiplicativos. Mas qual o **TEMPO** necessário para que dobre a quantidade inicial? Tudo isso deve ser analisado!

Pronto para entender o que é cada um desses termos? Aperta o cinto e vamos analisar alguns exemplos...

Atualmente, existem 50 porcos na fazenda de seu Zé, a quantidade de porcos duplica a cada 3 anos. Sendo assim, observe a tabela para compreender a variação da quantidade de porcos:

Tempo em Anos	Quantidade de Porcos	Expressão
+3 0	50 ×2	$50 = 50 \cdot 2^0 = 50 \cdot 2^{0/3}$
+3 3	100 ×2	$100 = 50 \cdot 2^1 = 50 \cdot 2^{3/3}$
+3 6	200 ×2	$200 = 50 \cdot 2^2 = 50 \cdot 2^{6/3}$
+3 9	400 ×2	$400 = 50 \cdot 2^3 = 50 \cdot 2^{9/3}$
12	800	$800 = 50 \cdot 2^4 = 50 \cdot 2^{12/3}$

Observe que o VALOR INICIAL é 50, o FATOR MULTIPLICATIVO é 2 e o TEMPO para que o fator seja aplicado é 3. Perceba que tanto o 50, quanto o 2 e também o 3 são constantes, o único termo que varia está no expoente da expressão:

$$Q_{porcos} = 50 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$$

Caracterizando a formação de uma função exponencial!

Se quisermos saber a quantidade de porcos daqui há 15 anos, basta utilizarmos a expressão $Q(t) = 50 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$, substituindo t por 15:

$$Q(t) = 50 \cdot 2^{\frac{15}{3}}$$

$$Q(t) = 50 \cdot 2^5$$

$$Q(t) = 50 \cdot 32$$

$$Q(t) = 1.600$$

Poderíamos ainda, continuar a tabela e entender que se adiantarmos mais três anos, teríamos o dobro da quantidade de porcos

Tempo em Anos	Quantidade de Porcos
0	50
3	100
6	200
9	400
12	800
15	1.600

+3 +3 +3 +3 +3

×2 ×2 ×2 ×2 ×2

Sintetizando, os três termos mencionados servem para encontrar a expressão utilizada para obter a quantidade de porcos:

$$V = V_0 \cdot (f_m)^{\frac{t}{p}}$$

t → tempo

p → tempo para que o fator seja aplicado

Valor futuro

Valor inicial

fator multiplicativo

É essa expressão padrão que precisamos seguir para resolver as questões de FUNÇÃO EXPONENCIAL no Enem!

Vamos analisar algumas situações e exercitar a obtenção da expressão da função exponencial...

Considere que 400g de Césio-137 foram derramados em um acidente radioativo. Sabendo que a quantidade total de Césio-137 cai pela metade a cada 30 anos, qual a expressão da função que modela esse decaimento radioativo?

O primeiro passo é identificar que o VALOR INICIAL é 400, em seguida, perceba que o FATOR MULTIPLICATIVO é 0,5, já que a quantidade sempre cai pela metade e isso em 30 anos, logo o TEMPO necessário para multiplicar pelo o fator é 30. Desse modo, a expressão que modela esse decaimento radioativo será $Q(t) = 400 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{30}}$, em que:

$$Q(t) = 400 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{30}}$$

Valor inicial

fator multiplicativo

tempo para que o fator seja aplicado

O preço atual de um celular é R$ 1.500,00, mas a alta do dólar tem feito o preço crescer 20% a cada 6 meses. Qual a expressão algébrica que relaciona o preço do celular em função do tempo?

Mais uma vez, o primeiro passo é identificar que o VALOR INICIAL é 1.500, em seguida, perceba que o FATOR MULTIPLICATIVO é 1,2, já que a multiplicação por 1,2 corresponde a um aumento de 20%, e para que esse aumento ocorra, são necessários 6 meses, que é o TEMPO necessário para multiplicar pelo o fator. Desse modo, a expressão que relaciona o preço do celular com o tempo será $P(t) = 1.500 \cdot (1{,}2)^{\frac{t}{6}}$, em que:

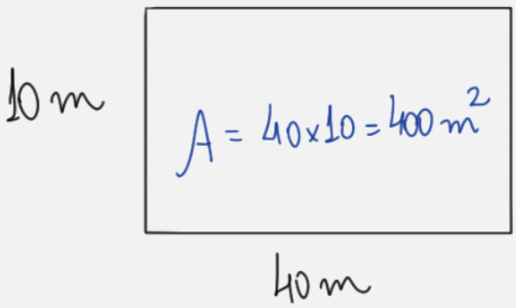
$$P(t) = \underbrace{1.500}_{\text{Valor inicial}} \cdot (\underbrace{1{,}2}_{\text{Fator multiplicativo}})^{\frac{t}{6}}$$

tempo para que o fator seja aplicado

MÉDIA GEOMÉTRICA NA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Média vem de meio, *geo* vem de terra e *metria* vem de medidas, a média geométrica é o meio das medidas de um terreno. Para que você compreenda melhor, vamos analisar um exemplo:

Considere um terreno com 10m de largura e 40m de comprimento e consequentemente com 400m² de área. O terreno tem um formato retangular, em que a largura é bem menor do que o comprimento.

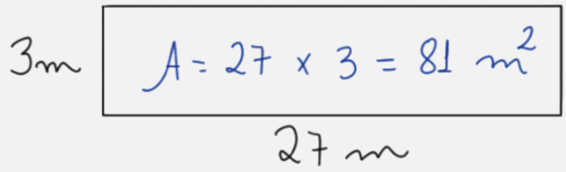


É possível transformar essa área retangular em uma área quadrada? Em que o comprimento não seja tão grande quanto o 40m e a largura não seja tão pequena quanto o 10m? É possível sim! E para isso, precisamos trazer essas duas medidas para o centro, para o meio. Devemos manter a área de 400m², mas trazê-lo para um formato quadrangular. Uma característica do quadrado é que ele possui os quatro lados com a mesma medida. E para saber o valor do lado de um quadrado, basta extrair a raiz quadrada de sua área. Portanto, o lado do quadrado para manter a área desejada é de $l = \sqrt{400} = 20m$.

Dizemos que 20 é a média geométrica entre 10 e 40. Uma vez que ela é capaz de trazer as medidas de um terreno para o meio conservando a mesma área.

Quem é a média geométrica entre 3 e 27?

Vamos utilizar o mesmo raciocínio...



A área de um retângulo 3m x 27m é de 81m². Para transformá-lo em um quadrado, é necessário que ele tenha $\sqrt{81} = 9m$ de lado.

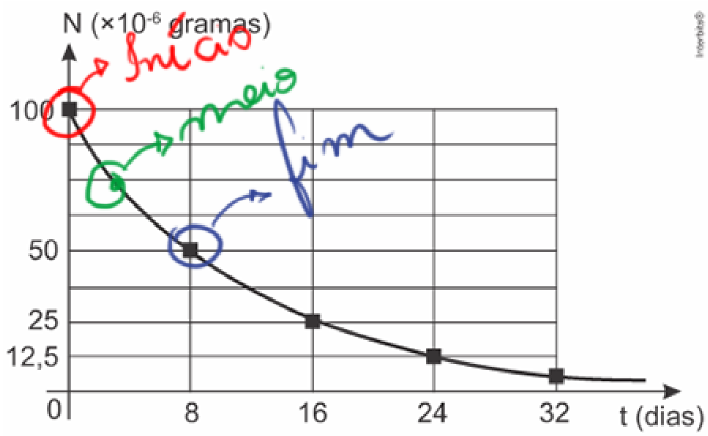
Dizemos que 9 é a média geométrica entre 3 e 27.

Analisando o processo, para calcular a média geométrica, primeiro calculamos a área do terreno retangular, multiplicando o comprimento e a largura, para em seguida extrair a raiz quadrada. Portanto, a média geométrica entre dois números é a raiz quadrada de seu produto.

$$MG(x, y) = \sqrt{x \cdot y}$$

Em funções exponenciais, o recurso da média geométrica é muito útil, para encontrarmos o termo do meio, basta calcular a média geométrica do início e do fim.

No gráfico abaixo, que relaciona a quantidade residual de um elemento com o tempo, definimos o início como sendo 100 e o fim como sendo 50. Para saber o valor intermediário, correspondente a 4 dias, precisamos fazer a média geométrica entre o início e o fim:



$$meio = \sqrt{100 \cdot 50}$$
$$meio = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 50}$$
$$meio = 50\sqrt{2}$$
$$meio \cong 50 \cdot 1,4$$
$$meio \cong 70$$

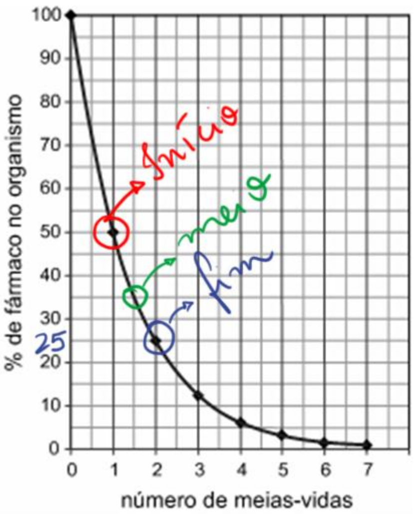
Sendo assim, a quantidade residual desse elemento quando o tempo for 4 dias, será de aproximadamente 70 x 10^{-6}g.

É importante lembrar que existe uma relação entre a Média Aritmética e a Média Geométrica.

A média aritmética é sempre maior do que a média geométrica. A igualdade só ocorre quando o início é igual ao fim, mas isso não é tema do Enem. Então, anota aí, para o Enem, **a média aritmética é sempre maior do que a geométrica**.

Mas por que isso é interessante? Como a média geométrica é um pouco mais complexa de ser calculada, é possível calcular a média aritmética, mesmo sabendo que ela não é aplicável à função exponencial, e após calcularmos a média aritmética, basta marcar uma resposta menor do que ela. Já que a média aritmética é maior do que a geométrica.

Se quisermos saber a porcentagem de um fármaco uma meia-vida e meia após a ingestão, o que fazer? O correto seria calcular a média geométrica:



$$meio = \sqrt{50 \cdot 25}$$

$$meio = \sqrt{2 \cdot 25 \cdot 25}$$

$$meio = 25\sqrt{2}$$

$$meio \cong 25 \cdot 1{,}4$$

dobrar
meiar

$$meio \cong 50 \cdot 0{,}7$$

$$meio \cong 35\%$$

O início é 50%, o final é 25%, o meio é a média geométrica que é 35%, por se tratar de uma função exponencial.

Se as alternativas fossem as seguintes, qual marcaríamos? Letra D.

A 50%
B 45%
C 37,5%
D 35%
E 25%

Mas será que existe um caminho mais curto? É possível fazer a média aritmética e marcar uma menor do que ela. Já que a média aritmética é sempre maior do que a geométrica. Observe:

$$\frac{50\% + 25\%}{2} = \frac{75\%}{2} = 37{,}5\%$$

Cuidado para não marcar 37,5%, esse é o meio aritmético, você deve marcar uma resposta menor do que essa (35%). Em ambos os casos, a letra D é a correta.

GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vamos agora dar uma olhadinha em como fica o gráfico da função exponencial. A característica que define se o gráfico será crescente ou decrescente é a base da potência, que no início dessa aula chamamos de fator multiplicativo. Lembra lá de porcentagem? Quando o fator multiplicativo é maior do que 1, estamos diante de um aumento, e se estamos aumentando, a função será crescente. se o fator multiplicativo estiver entre 0 e 1, estamos diante de uma redução, e se estamos reduzindo, a função será decrescente.

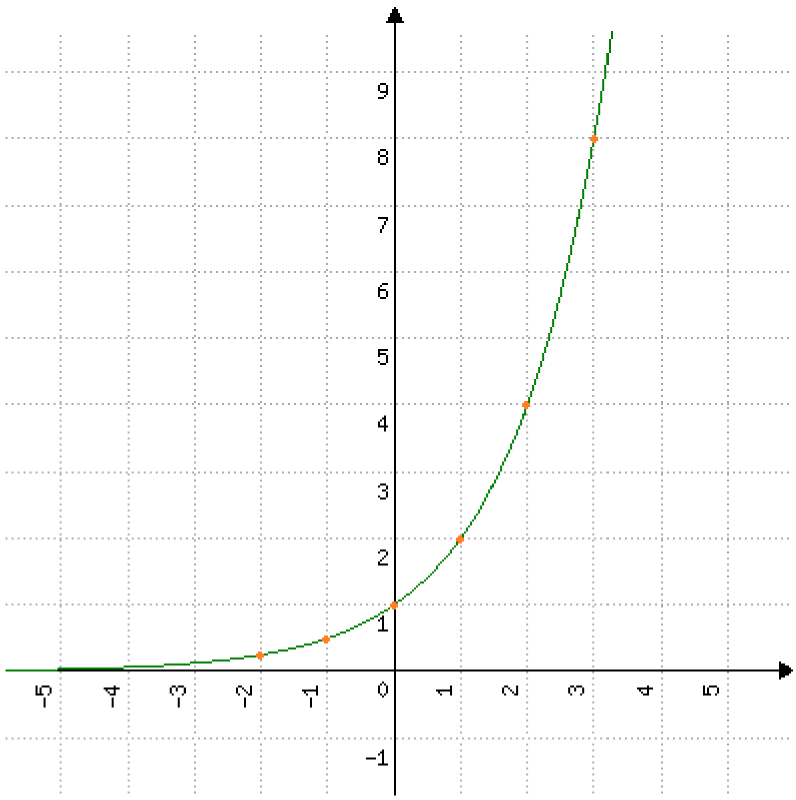
Observe a tabela com os valores numéricos de uma função crescente com fator multiplicativo 2:

$$y = f(x) = 2^x$$

x	$y = f(x) = 2^x$	y
-2	$f(-2) = 2^{-2} = 1/4 = 0{,}25$	0,25
-1	$f(-1) = 2^{-1} = 1/2 = 0{,}5$	0,5
0	$f(0) = 2^0 = 1$	1
1	$f(1) = 2^1 = 2$	2
2	$f(2) = 2^2 = 4$	4
3	$f(3) = 2^3 = 8$	8

x	y
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8

Ao marcarmos os pares ordenados (x, y) no plano cartesiano, obtermos o gráfico:



Função exponencial crescente implica em fator multiplicativo maior do que 1.

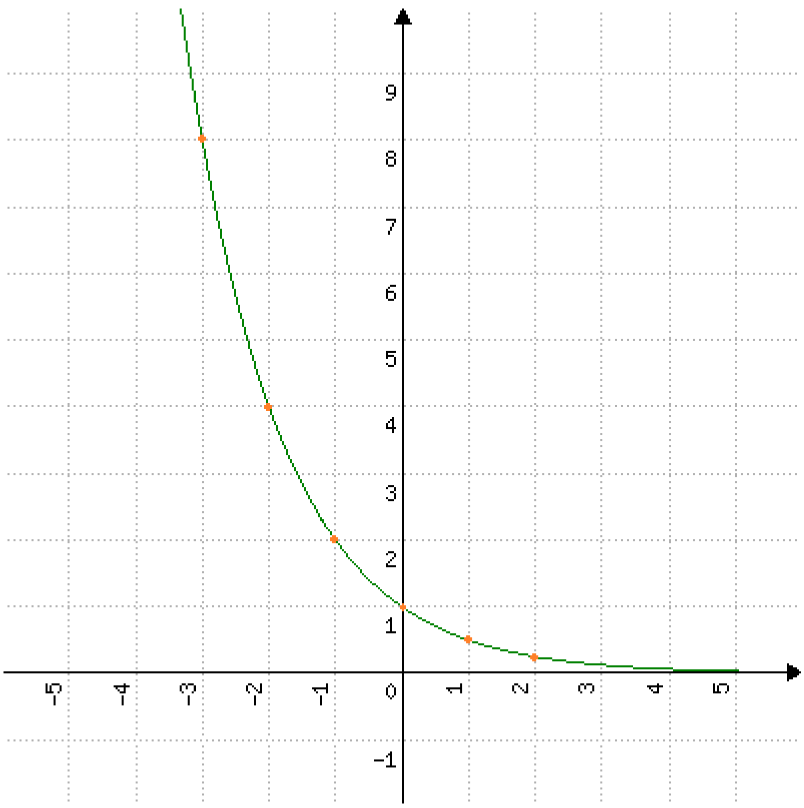
Faremos o mesmo, só que agora o fator multiplicativo será 1/2.

$$y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	$y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	y
-3	$f(-3) = (1/2)^{-3} = 2^3 = 8$	8
-2	$f(-2) = (1/2)^{-2} = 2^2 = 4$	4
-1	$f(-1) = (1/2)^{-1} = 2^1 = 2$	2
0	$f(0) = (1/2)^0 = 1$	1
1	$f(1) = (1/2)^1 = 1/2 = 0,5$	0,5
2	$f(2) = (1/2)^2 = 1/4 = 0,25$	0,25

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0,5
2	0,25

Ao marcarmos os pares ordenados (x, y) no plano cartesiano, obtermos o gráfico:



Função exponencial decrescente implica em fator multiplicativo entre 0 e 1.

PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS

Uma ferramenta muito poderosa para que possamos resolver as questões de função exponencial é saber as propriedades das potências. Vamos dar uma lembradinha?

Produto de potências de mesma base

No produto de potências de mesma base, podemos manter a base e somar os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Divisão de potências de mesma base

Na divisão de potências de mesma base, podemos manter a base e subtrair os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Potenciação de potência

Na potenciação de potência, podemos manter a base e multiplicar os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Potenciação de fração

Na potenciação de fração, o expoente "se distribui" para o numerador e para o denominador.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Potenciação de um produto

Na potenciação de produto, o expoente "se distribui" para os fatores.

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Potenciação com expoente fracionário

Na potenciação com expoente fracionário, reescrevemos a base dentro da raiz. O numerador do expoente fracionário será o expoente do radicando e o denominador será o índice da raiz.

$$a^{\left(\frac{m}{n}\right)} = \sqrt[n]{a^m}$$

Potência com expoente negativo

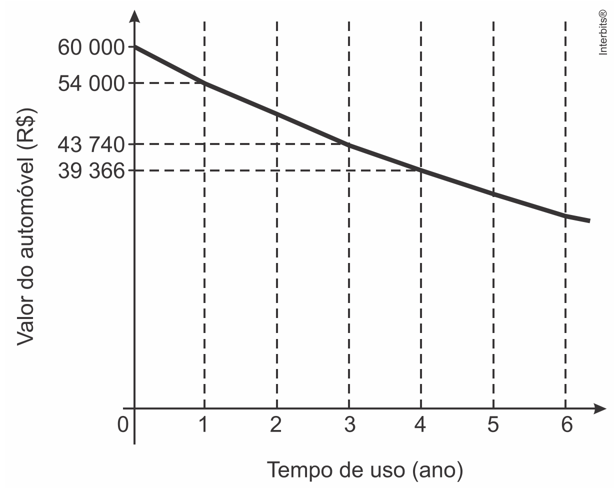
Na potenciação com expoente negativo, inverte-se a base, e o expoente fica positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Nada melhor do que umas questõezinhas para exercitar as propriedades, vamos lá?

QUESTÕES

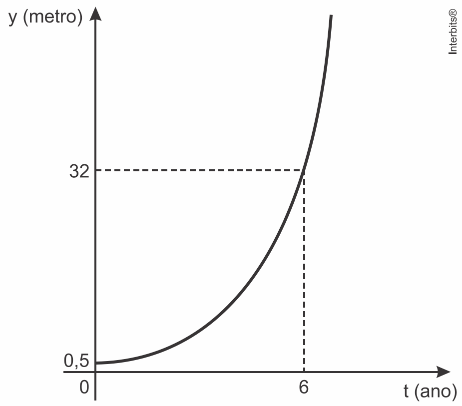
1. (Enem (Libras) 2017) Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b \cdot a^t$, com t em ano. Essa função está representada no gráfico.



Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

Ⓐ 48.000,00
Ⓑ 48.114,00
Ⓒ 48.600,00
Ⓓ 48.870,00
Ⓔ 49.683,00

2. (Enem 2ª aplicação 2016) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y.



Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem $7{,}5\text{ m}$ após o plantio.

O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a

Ⓐ 3.
Ⓑ 4.
Ⓒ 6.
Ⓓ $\log_2 7$.
Ⓔ $\log_2 15$.

3. (Enem 2ª aplicação 2016) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

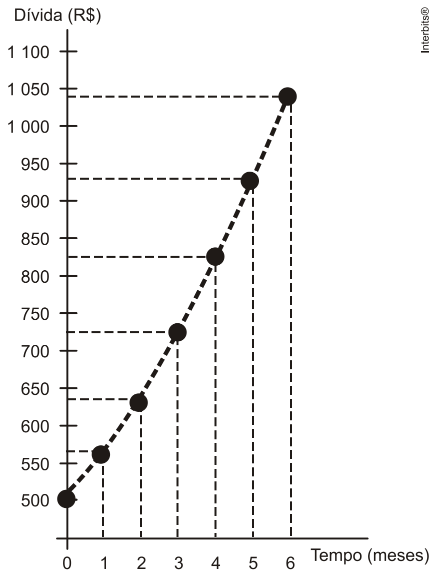
Ⓐ reduzida a um terço.
Ⓑ reduzida à metade.
Ⓒ reduzida a dois terços.
Ⓓ duplicada.
Ⓔ triplicada.

4. (Enem PPL 2015) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1.800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1.800 \cdot (1,03)^t$.

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de tempo de serviço será, em reais,

Ⓐ 7.416,00.
Ⓑ 3.819,24.
Ⓒ 3.709,62.
Ⓓ 3.708,00.
Ⓔ 1909,62.

5. (Enem PPL 2013) Um trabalhador possui um cartão de crédito que, em determinado mês, apresenta o saldo devedor a pagar no vencimento do cartão, mas não contém parcelamentos a acrescentar em futuras faturas. Nesse mesmo mês, o trabalhador é demitido. Durante o período de desemprego, o trabalhador deixa de utilizar o cartão de crédito e também não tem como pagar as faturas, nem a atual nem as próximas, mesmo sabendo que, a cada mês, incidirão taxas de juros e encargos por conta do não pagamento da dívida. Ao conseguir um novo emprego, já completados 6 meses de não pagamento das faturas, o trabalhador procura renegociar sua dívida. O gráfico mostra a evolução do saldo devedor.



Com base no gráfico, podemos constatar que o saldo devedor inicial, a parcela mensal de juros e a taxa de juros são

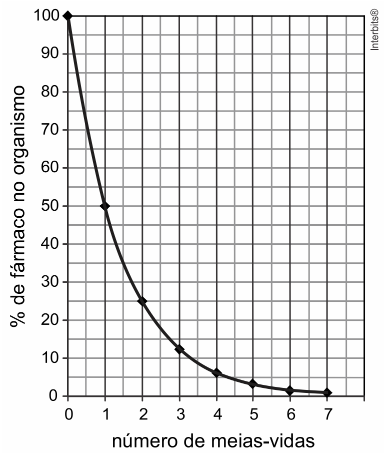
Ⓐ R$ 500,00; constante e inferior a 10% ao mês.
Ⓑ R$ 560,00; variável e inferior a 10% ao mês.
Ⓒ R$ 500,00; variável e superior a 10% ao mês.
Ⓓ R$ 560,00; constante e superior a 10% ao mês.
Ⓔ R$ 500,00; variável e inferior a 10% ao mês.

6. (Enem PPL 2013) Em um experimento, uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida.

Neste experimento, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo

A afim.
B seno.
C cosseno.
D logarítmica crescente.
E exponencial.

7. (Enem 2007) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



O gráfico anterior representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

F. D. Fuchs e Cher I. Wannma. *Farmacologia Clínica.* Rio de Janeiro: Guanabara Koogan,1992, p. 40.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às $12\,\text{h}$ em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às $13\,\text{h}\,30\text{min}$ será aproximadamente de

A 10%.
B 15%.
C 25%.
D 35%.
E 50%.

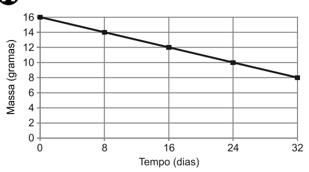
8. (Esc. Naval 2015) O elemento químico Califórnio, Cf^{251}, emite partículas alfa, transformando-se no elemento Cúrio, Cm^{247}. Essa desintegração obedece à função exponencial $N(t) = N_0 e^{-\alpha t}$, onde $N(t)$ é quantidade de partículas de Cf^{251} no instante t em determinada amostra; N_0 é a quantidade de partículas no instante inicial; e α é uma constante, chamada constante de desintegração.

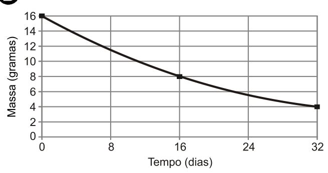
Sabendo que em 898 anos a concentração de Cf^{251} é reduzida à metade, pode-se afirmar que o tempo necessário para que a quantidade de Cf^{251} seja apenas 25% da quantidade inicial está entre

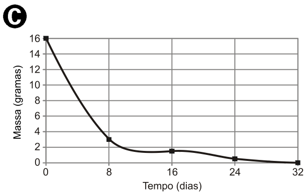
A) 500 e 1000 anos.
B) 1000 e 1500 anos.
C) 1500 e 2000 anos.
D) 2000 e 2500 anos.
E) 2500 e 3000 anos.

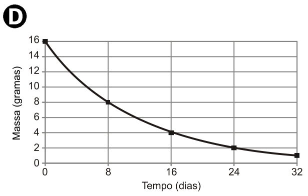
9. (Ufg 2014) No acidente ocorrido na usina nuclear de Fukushima, no Japão, houve a liberação do iodo Radioativo 131 nas águas do Oceano Pacífico.

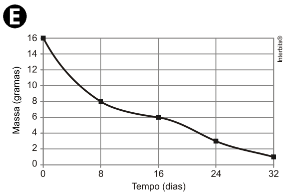
Sabendo que a meia-vida do isótopo do iodo Radioativo 131 é de 8 dias, o gráfico que representa a curva de decaimento para uma amostra de 16 gramas do isótopo $^{131}_{53}I$ é:

A)


B)


C)


D)


E)


10. (Usf 2018) Em um experimento, o número de bactérias presentes nas culturas A e B, no instante t, em horas, é dado, respectivamente, por: $A(t) = 10 \cdot 2^{t-1} + 238$ e $B(t) = 2^{t+2} + 750$.

De acordo com essas informações, o tempo decorrido, desde o início desse experimento, necessário para que o número de bactérias presentes na cultura A seja igual ao da cultura B é

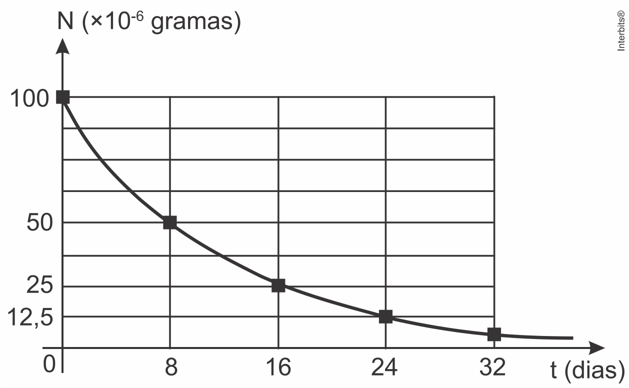
A) 5 horas.
B) 6 horas.
C) 7 horas.
D) 9 horas.
E) 12 horas.

11. (Pucrj 2018) Cientistas brasileiros verificaram que uma determinada colônia de bactérias triplica a cada meia hora. Uma amostra de 10.000 bactérias por mililitro foi colocada em um tubo de ensaio e, após um tempo x, verificou-se que o total era de $2,43 \times 10^6$ bactérias por mililitro.

Qual é o valor de x?

A) duas horas
B) duas horas e 30 minutos
C) 3 horas e trinta minutos
D) 48 horas
E) 264 horas

12. (Pucrs 2018) Em hospitais de grande porte das principais cidades do país são realizados tratamentos que utilizam radioisótopos emissores de radiações alfa, beta e gama. O iodo 131, por exemplo, é um radioisótopo utilizado no tratamento de hipertireoidismo. O gráfico abaixo representa a massa residual de iodo $131\,(N)$ presente em uma amostra em função do tempo (t).



A função que melhor descreve a massa residual de iodo 131 presente na amostra, em função do tempo, é $N(t) = N_0 e^{kt}$, onde

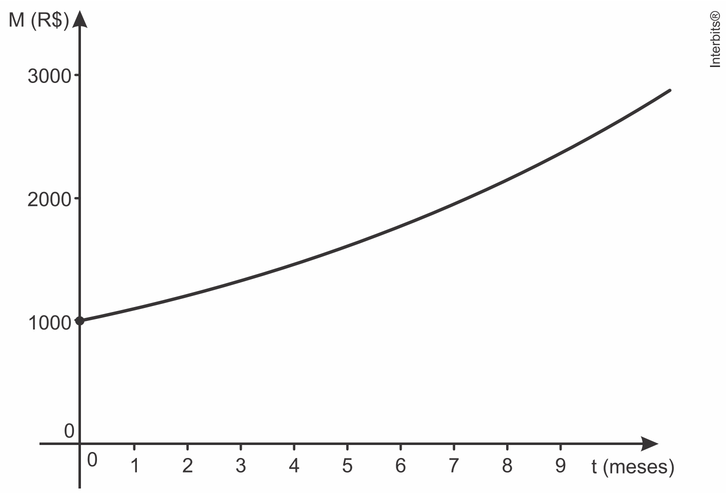
A) $N_0 > 0$ e $k > 0$
B) $N_0 < 0$ e $k > 0$
C) $N_0 > 0$ e $k < 0$
D) $N_0 < 0$ e $k < 0$

13. (G1 - ifpe 2017) No início do ano de 2017, Carlos fez uma análise do crescimento do número de vendas de refrigeradores da sua empresa, mês a mês, referente ao ano de 2016. Com essa análise, ele percebeu um padrão matemático e conseguiu descrever a relação $V(x) = 5 + 2^x$, onde V representa a quantidade de refrigeradores vendidos no mês x. Considere: $x = 1$ referente ao mês de janeiro; $x = 12$ referente ao mês de dezembro.

A empresa de Carlos vendeu, no 2º trimestre de 2016, um total de

Ⓐ 39 refrigeradores.
Ⓑ 13 refrigeradores.
Ⓒ 127 refrigeradores.
Ⓓ 69 refrigeradores.
Ⓔ 112 refrigeradores.

14. (G1 - ifsul 2017) Uma aplicação bancária é representada graficamente conforme figura a seguir.



M é o montante obtido através da função exponencial $M = C \cdot (1{,}1)^t$, C é o capital inicial e t é o tempo da aplicação.

Ao final de 04 meses o montante obtido será de

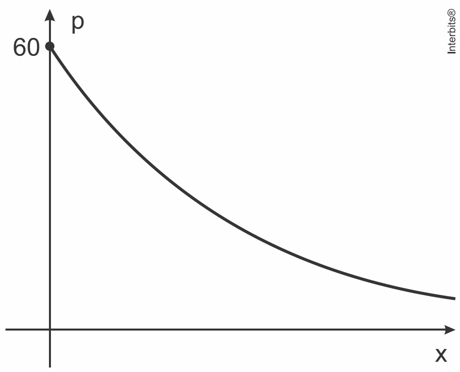
Ⓐ R\$ 121,00
Ⓑ R\$ 146,41
Ⓒ R\$ 1.210,00
Ⓓ R\$ 1.464,10

15. (Fcmmg 2017) Em 1798, Thomas Malthus, no trabalho "An Essay on the Principle of Population", formulou um modelo para descrever a população presente em um ambiente em função do tempo. Esse modelo, utilizado para acompanhar o crescimento de populações ao longo do tempo t, fornece o tamanho $N(t)$ da população pela lei $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$, onde N_0 representa a população presente no instante inicial e k, uma constante que varia de acordo com a espécie de população. A população de certo tipo de bactéria está sendo estudada em um laboratório, segundo o modelo de Thomas Malthus. Inicialmente foram colocadas 2.000 bactérias em uma placa de Petri e, após 2 horas, a população inicial havia triplicado.

A quantidade de bactérias presente na placa 6 horas após o início do experimento deverá aumentar:

A) 6 vezes
B) 8 vezes
C) 18 vezes
D) 27 vezes

16. (Insper 2016) Pretendendo oferecer cursos extras aos seus alunos fora do período de aulas, a coordenação de uma escola fez um levantamento do interesse dos pais por esses cursos dependendo do valor cobrado por eles. O resultado da pesquisa é mostrado no gráfico abaixo, em que p e x representam, respectivamente, o percentual de alunos que se matricularia em algum curso extra e o preço, em reais, cobrado por curso.



Dentre as equações abaixo, a única que poderia representar a relação entre p e x descrita pelo gráfico é

A) $p = 60 - \frac{x}{6}$
B) $p = 60 - \frac{x^2}{2000}$
C) $p = 60 \cdot (0,9)^{\frac{x}{10}}$
D) $p = 60 + \log_{1,5}(10x + 1)$
E) $p = 60 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{600}\right)$

17. (Ulbra 2016) Em um experimento de laboratório, 400 indivíduos de uma espécie animal foram submetidos a testes de radiação, para verificar o tempo de sobrevivência da espécie. Verificou-se que o modelo matemático que determinava o número de indivíduos sobreviventes, em função do tempo era $N_{(t)} = C \cdot A^{t}$, com o tempo t dado em dias e A e C dependiam do tipo de radiação. Três dias após o início do experimento, havia 50 indivíduos.

Quantos indivíduos vivos existiam no quarto dia após o início do experimento?

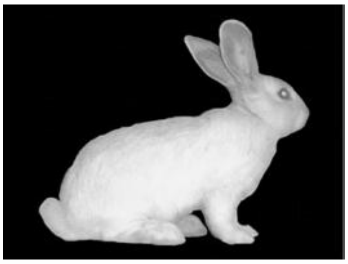
A) 40
B) 30
C) 25
D) 20
E) 10

18. (Ufpr 2016) A análise de uma aplicação financeira ao longo do tempo mostrou que a expressão $V(t) = 1000 \cdot 2^{0{,}0625 \cdot t}$ fornece uma boa aproximação do valor V (em reais) em função do tempo t (em anos), desde o início da aplicação.

Depois de quantos anos o valor inicialmente investido dobrará?

A) 8.
B) 12.
C) 16.
D) 24.
E) 32.

19. (Uel 2016)



Eduardo Kac, GFP *Bunny*, 2000

Em 2000, o artista Eduardo Kac, carioca radicado nos Estados Unidos, criou GFP Bunny, um coelho geneticamente modificado que brilha em presença de luz azul graças à Proteína Fluorescente (GFP) inserida em seu DNA.

<http://www.museudavida.fiocruz.br/brasiliana/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=263&sid=19>..

A meia-vida de um elemento radioativo é o tempo necessário para que sua atividade seja reduzida à metade da atividade inicial, ou seja, o elemento radioativo perde metade de sua massa a cada período de tempo. A braquiterapia é uma das modalidades de tratamento da radioterapia contra o câncer, e um dos elementos radioativos utilizados é o $^{103}Pd,$ cuja meia-vida é de 17 dias.

Considerando a massa inicial de 16 g de $^{103}Pd,$ assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a massa desse elemento radioativo decorridos 136 dias.

A) $\frac{1}{16}\text{ g}$
B) $\frac{1}{4}\text{ g}$
C) $\frac{1}{2}\text{ g}$
D) 2 g
E) 8 g

20. (Imed 2015) Em um experimento no laboratório de pesquisa, observou-se que o número de bactérias de uma determinada cultura, sob certas condições, evolui conforme a função $B(t) = 10 \cdot 3^{t-1},$ em que $B(t)$ expressa a quantidade de bactérias e t representa o tempo em horas.

Para atingir uma cultura de 810 bactérias, após o início do experimento, o tempo decorrido, em horas, corresponde a:

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

21. (Ucs 2015) A concentração C de certa substância no organismo altera-se em função do tempo t, em horas, decorrido desde sua administração, de acordo com a expressão $C(t) = K \cdot 3^{-0,5t}$.

Após quantas horas a concentração da substância no organismo tornou-se a nona parte da inicial?

A 3
B 3,5
C 4
D 6
E 9

22. (Upe 2015) Os biólogos observaram que, em condições ideais, o número de bactérias $Q(t)$ em uma cultura cresce exponencialmente com o tempo t, de acordo com a lei $Q(t) = Q_0 \cdot e^{kt}$, sendo $k > 0$ uma constante que depende da natureza das bactérias; o número irracional e vale aproximadamente $2,718$ e Q_0 é a quantidade inicial de bactérias.

Se uma cultura tem inicialmente 6.000 bactérias e, 20 minutos depois, aumentou para 12.000, quantas bactérias estarão presentes depois de 1 hora?

A $1,8 \times 10^4$
B $2,4 \times 10^4$
C $3,0 \times 10^4$
D $3,6 \times 10^4$
E $4,8 \times 10^4$

23. (Fatec 2015) "O número de deslocamentos de pessoas entre cidades paulistas dobrou em uma década, enquanto o crescimento populacional foi de 1% ao ano. A pesquisa obtida pelo **Estado** considera viagens feitas por maiores de 15 anos na macrometrópole paulista – 173 municípios entre a Baixada Santista e o Vale do Paraíba, passando por São Paulo, Campinas e São José dos Campos."

(Tiago Dantas. *Estado de São Paulo*, 27.02.2013. Adaptado)

A notícia revela um fenômeno social chamado migração pendular, que ocorre quando pessoas se deslocam entre diferentes cidades diariamente para trabalhar ou estudar.

Suponha que, nos próximos anos, o número de deslocamentos de pessoas entre cidades paulistas continue dobrando a cada década e que o crescimento populacional continue aumentando à taxa de 1% ao ano.

Com base nessas suposições, podemos afirmar corretamente que

- **A** o crescimento dos deslocamentos será linear, enquanto que o crescimento populacional será exponencial.
- **B** o crescimento dos deslocamentos será logarítmico, enquanto que o crescimento populacional será linear.
- **C** o crescimento dos deslocamentos será exponencial, enquanto que o crescimento populacional será linear.
- **D** tanto o crescimento dos deslocamentos quanto o crescimento populacional serão exponenciais.
- **E** tanto o crescimento dos deslocamentos quanto o crescimento populacional serão lineares.

24. (Uepb 2014) Biólogos e Matemáticos acompanharam em laboratório o crescimento de uma cultura de bactérias e concluíram que esta população crescia com o tempo $t \geq 0$, ao dia, conforme a lei $P(t) = P_0 5^{\lambda t}$, onde P_0, é a população inicial da cultura (t = 0) e λ é uma constante real positiva.

Se, após dois dias, o número inicial de bactérias duplica, então, após seis dias, esse número é:

- **A** $10P_0$
- **B** $6P_0$
- **C** $3P_0$
- **D** $8P_0$
- **E** $4P_0$

25. (Uepa 2014) Os dados estatísticos sobre violência no trânsito nos mostram que é a segunda maior causa de mortes no Brasil, sendo que 98% dos acidentes de trânsito são causados por erro ou negligência humana e a principal falha cometida pelos brasileiros nas ruas e estradas é usar o celular ao volante. Considere que em 2012 foram registrados 60.000 mortes decorrentes de acidentes de trânsito e destes, 40% das vítimas estavam em motos.

Texto Adaptado: *Revista Veja*, 19/08/2013.

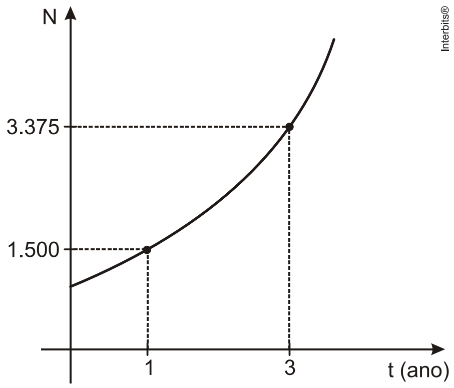
A função $N(t) = N_0(1,2)^t$ fornece o número de vítimas que estavam de moto a partir de 2012, sendo t o número de anos e N_0 o número de vítimas que estavam em moto em 2012.

Nessas condições, o número previsto de vítimas em moto para 2015 será de:

A 41.472.
B 51.840.
C 62.208.
D 82.944.
E 103.680.

26. (Ufsm 2014) As matas ciliares desempenham importante papel na manutenção das nascentes e estabilidade dos solos nas áreas marginais. Com o desenvolvimento do agronegócio e o crescimento das cidades, as matas ciliares vêm sendo destruídas. Um dos métodos usados para a sua recuperação é o plantio de mudas.

O gráfico mostra o número de mudas $N(t) = ba^t (0 < a \neq 1 \text{ e } b > 0)$ a serem plantadas no tempo t (em anos), numa determinada região.



De acordo com os dados, o número de mudas a serem plantadas, quando $t = 2$ anos, é igual a

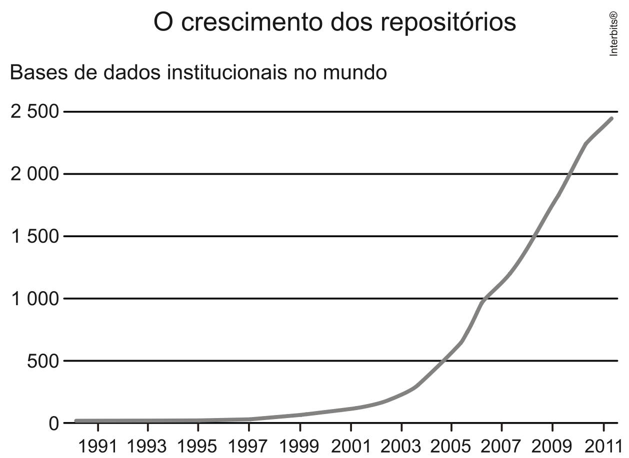
A 2.137.
B 2.150.
C 2.250.
D 2.437.
E 2.500.

27. (Ufpr 2014) Uma pizza a 185°C foi retirada de um forno quente. Entretanto, somente quando a temperatura atingir 65°C será possível segurar um de seus pedaços com as mãos nuas, sem se queimar. Suponha que a temperatura T da pizza, em graus Celsius, possa ser descrita em função do tempo t, em minutos, pela expressão $T = 160 \times 2^{-0,8 \times t} + 25.$

Qual o tempo necessário para que se possa segurar um pedaço dessa pizza com as mãos nuas, sem se queimar?

Ⓐ 0,25 minutos.
Ⓑ 0,68 minutos.
Ⓒ 2,5 minutos.
Ⓓ 6,63 minutos.
Ⓔ 10,0 minutos.

28. (Unesp 2013) A revista *Pesquisa Fapesp*, na edição de novembro de 2012, publicou o artigo intitulado *Conhecimento Livre*, que trata dos repositórios de artigos científicos disponibilizados gratuitamente aos interessados, por meio eletrônico. Nesse artigo, há um gráfico que mostra o crescimento do número dos repositórios institucionais no mundo, entre os anos de 1991 e 2011.



Observando o gráfico, pode-se afirmar que, no período analisado, o crescimento do número de repositórios institucionais no mundo foi, aproximadamente,

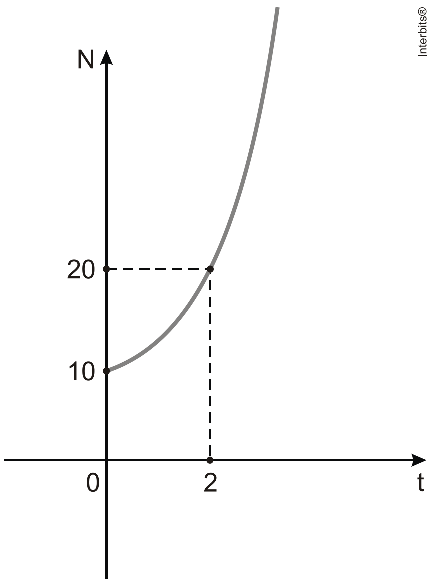
Ⓐ exponencial.
Ⓑ linear.
Ⓒ logarítmico.
Ⓓ senoidal.
Ⓔ nulo.

29. (Pucrs 2013) A desintegração de uma substância radioativa é um fenômeno químico modelado pela fórmula $q = 10 \cdot 2^{k \cdot t}$, onde **q** representa a quantidade de substância radioativa (em gramas) existente no instante **t** (em horas). Quando o tempo **t** é igual a 3,3 horas, a quantidade existente **q** vale 5.

Então, o valor da constante **k** é

Ⓐ –35/5
Ⓑ –33/10
Ⓒ –5/33
Ⓓ –10/33
Ⓔ –100/33

30. (Ufrn 2013) A pedido do seu orientador, um bolsista de um laboratório de biologia construiu o gráfico a seguir a partir dos dados obtidos no monitoramento do crescimento de uma cultura de micro-organismos.



Analisando o gráfico, o bolsista informou ao orientador que a cultura crescia segundo o modelo matemático, $N = k \cdot 2^{at}$, com t em horas e N em milhares de micro-organismos.

Para constatar que o modelo matemático apresentado pelo bolsista estava correto, o orientador coletou novos dados com t = 4 horas e t = 8 horas. Para que o modelo construído pelo bolsista esteja correto, nesse período, o orientador deve ter obtido um aumento na quantidade de micro-organismos de

Ⓐ 80.000.
Ⓑ 160.000.
Ⓒ 40.000.
Ⓓ 120.000.

31. (Ucs 2012) Um modelo matemático para determinar o número de bactérias em determinado objeto é a função definida por $N(t) = 500 \cdot 2^t$, em que t é o tempo, em horas, a partir da observação inicial.

Segundo esse modelo, o tempo, em horas, para que a quantidade de bactérias no objeto atinja 7.000, é dado por um número pertencente ao intervalo

Ⓐ [99, 100].
Ⓑ [13, 14].
Ⓒ [6, 7].
Ⓓ [3, 4].
Ⓔ [1, 2].

32. (Acafe 2012) Um dos perigos da alimentação humana são os microrganismos, que podem causar diversas doenças e até levar a óbito. Entre eles, podemos destacar a *Salmonella*. Atitudes simples como lavar as mãos, armazenar os alimentos em locais apropriados, ajudam a prevenir a contaminação pelos mesmos.

Sabendo que certo microrganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 minutos, pode-se concluir que o tempo que a população de 100 microrganismos passará a ser composta de 3.200 indivíduos é:

Ⓐ 1 h e 35 min.
Ⓑ 1 h e 40 min.
Ⓒ 1 h e 50 min.
Ⓓ 1 h e 55 min.

33. (Unioeste 2012) O *Saccharomyces cerevisiae* é um fungo com bastante importância econômica. É utilizado como fermento para a massa de pão, produzindo dióxido de carbono e fazendo a massa crescer. É também utilizado na produção de bebidas alcoólicas fermentadas, pois converte o açúcar em álcool etílico. Sob certas condições de cultura, este fungo cresce exponencialmente de forma que a quantidade presente em um instante t dobra a cada 1,5 horas.

Nestas condições, se colocarmos uma quantidade q_0 deste fungo em um meio de cultura, a quantidade q(t) existente do fungo, decorridas t horas com $t \in [0, \infty)$, pode ser calculada pela função

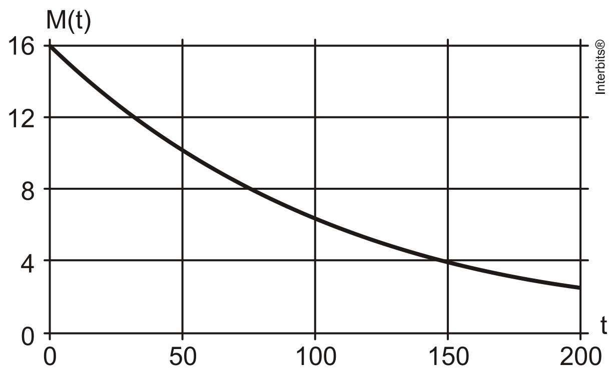
Ⓐ $q(t) = q_0 4^{3t}$.
Ⓑ $q(t) = \frac{4}{9}t^2 q_0 + q_0$.
Ⓒ $q(t) = \left(\frac{3}{2}q_0\right)^2$.
Ⓓ $q(t) = q_0\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}$.
Ⓔ $q(t) = \sqrt[3]{4^t}q_0$.

34. (Espcex (Aman) 2012) Na pesquisa e desenvolvimento de uma nova linha de defensivos agrícolas, constatou-se que a ação do produto sobre a população de insetos em uma lavoura pode ser descrita pela expressão $N(t)=N_0 \cdot 2^{kt}$, sendo N_0 a população no início do tratamento, N(t), a população após t dias de tratamento e k uma constante, que descreve a eficácia do produto. Dados de campo mostraram que, após dez dias de aplicação, a população havia sido reduzida à quarta parte da população inicial.

Com estes dados, podemos afirmar que o valor da constante de eficácia deste produto é igual a

A) 5^{-1}
B) -5^{-1}
C) 10
D) 10^{-1}
E) -10^{-1}

35. (Unicamp 2011) Em uma xícara que já contém certa quantidade de açúcar, despeja-se café. A curva a seguir representa a função exponencial M(t), que fornece a quantidade de açúcar não dissolvido (em gramas), t minutos após o café ser despejado.



Pelo gráfico, podemos concluir que

A) $M(t) = 2^{4-\frac{t}{75}}$.

B) $M(t) = 2^{4-\frac{t}{50}}$.

C) $M(t) = 2^{5-\frac{t}{50}}$.

D) $M(t) = 2^{5-\frac{t}{150}}$.

36. (Pucmg 2010) O valor de certo equipamento, comprado por R$60.000,00, é reduzido à metade a cada 15 meses. Assim, a equação V (t) = 60.000. $2^{-\frac{t}{15}}$, onde t é o tempo de uso em meses e V(t) é o valor em reais, representa a variação do valor desse equipamento.

Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que o valor do equipamento após 45 meses de uso será igual a:

Ⓐ R$ 3.750,00
Ⓑ R$ 7.500,00
Ⓒ R$10.000,00
Ⓓ R$20.000,00

37. (G1 - cftmg 2010) Uma emissora de TV vende seu horário comercial da seguinte maneira: o cliente escolhe quantas pessoas no mínimo devem ver seu produto e a emissora calcula quantos dias a propaganda deve ser veiculada. Para isso, ela usa a relação entre o número "**P**" de pessoas que conheceram o produto após "**n**" dias consecutivos de propaganda expressa por P = 6 + 6.$(36)^n$.

O valor de **n**, para que 7.782 pessoas conheçam esse produto, deve ser igual a

Ⓐ 1
Ⓑ 2
Ⓒ 3
Ⓓ 4

38. (Unifesp 2009) Sob determinadas condições, o antibiótico gentamicina, quando ingerido, é eliminado pelo organismo à razão de metade do volume acumulado a cada 2 horas. Daí, se K é o volume da substância no organismo, pode-se utilizar a função

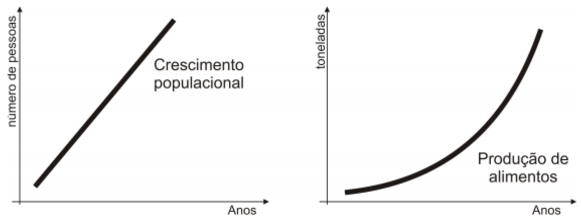
$$f(t) = K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$$

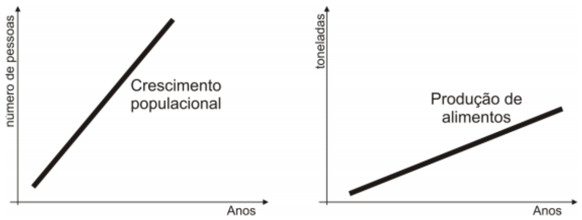
para estimar a sua eliminação depois de um tempo t, em horas. Neste caso, o tempo mínimo necessário para que uma pessoa conserve no máximo 2 mg desse antibiótico no organismo, tendo ingerido 128 mg numa única dose, é de:

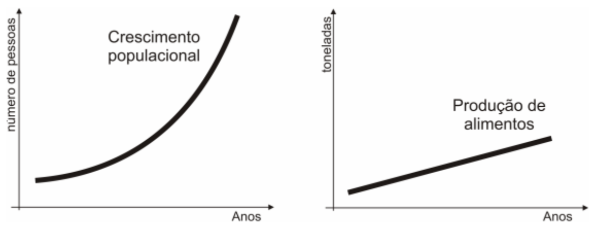
Ⓐ 12 horas e meia.
Ⓑ 12 horas.
Ⓒ 10 horas e meia.
Ⓓ 8 horas.
Ⓔ 6 horas.

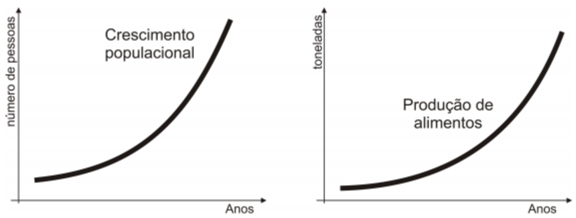
39. (Uel 2009) "Thomas Malthus (1766-1834) assegurava que, se a população não fosse de algum modo contida, dobraria de 25 em 25 anos, crescendo em progressão geométrica, ao passo que, dadas as condições médias da terra disponíveis em seu tempo, os meios de subsistência só poderiam aumentar, no máximo, em progressão aritmética".

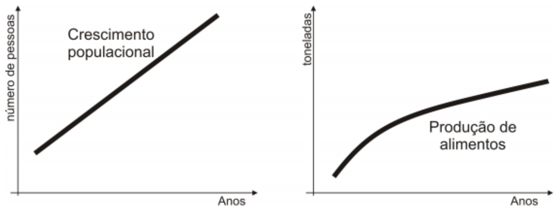
Analise os gráficos e assinale a alternativa em que a lei de Malthus está representada.

A


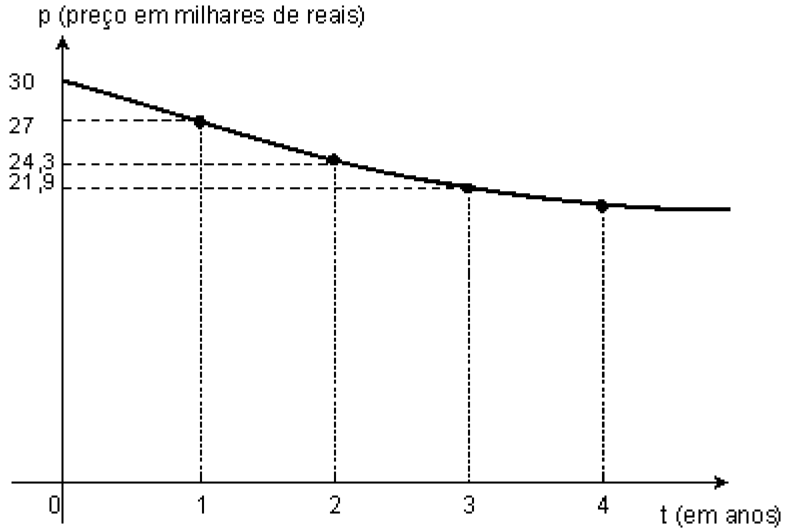
B


C


D


E


40. (G1 - cftmg 2008) O valor de um determinado tipo de automóvel desvaloriza x% em relação ao ano anterior, conforme o gráfico seguinte.



O preço inicial do veículo de R$ 30.000,00, após 4 anos será, aproximadamente,

Ⓐ R$ 18.000,00
Ⓑ R$ 18.600,00
Ⓒ R$ 19.200,00
Ⓓ R$ 19.700,00

41. (UNIFOR 2020) Em uma colônia de formigas, observou-se que, no instante t = 0, o número de formigas era de 1000 e que o crescimento desse formigueiro é dado pela função f definida por $f(t) = 1000 \cdot 2^{3t/5}$, onde t é o tempo decorrido em dias.

Supondo que não haja morte de formigas nesse formigueiro, então, em quantos dias, no mínimo, esse formigueiro atingirá 64.000 formigas?

Ⓐ 10 dias.
Ⓑ 12 dias.
Ⓒ 13 dias.
Ⓓ 14 dias.
Ⓔ 15 dias.

42. (UERJ 2020) Em uma fábrica, uma caixa com a forma de um paralelepípedo retângulo, com 25 cm de comprimento, 10 cm de largura e 8 cm de altura, é preenchida com pequenos cubos de 0,5 cm^3. Inicialmente, apenas um cubo é colocado na caixa. Em seguida, a cada minuto, duplica-se o número de cubos dentro dela. Considere a tabela:

x	0,30	0,48	0,60	0,70
10^x	2	3	4	5

O valor do tempo t, em minutos, necessário para a caixa ser totalmente preenchida, é igual a:

Ⓐ 12
Ⓑ 14
Ⓒ 16
Ⓓ 18

43. (UFJF 2020) Em um mesmo instante colocam-se 5 bactérias de um certo tipo em um recipiente e 5 bactérias de um segundo tipo em outro recipiente.

Representando por f(t) a quantidade de bactérias do primeiro tipo e por g(t) a do segundo tipo, t minutos após o início do experimento, observa-se que $f(t) = 9^t + 4$ e $g(t) = 5 \times 3^t$.

Após iniciado o experimento, as quantidades de bactérias nos dois recipientes voltam a se igualar quando em ambos recipientes existirem quantas bactérias?

Ⓐ 7
Ⓑ 8
Ⓒ 10
Ⓓ 12
Ⓔ 20

44. (UEMA 2019) Cultura Bacteriana. Áreas como microbiologia e biologia molecular utilizam com muita frequência a técnica conhecida como “cultura bacteriana”. A referida técnica consiste basicamente em promover o crescimento populacional de uma colônia bacteriana in vitro. Analise a seguinte situação:

Em laboratório da UEMA, sob condições específicas com acompanhamento rigoroso do crescimento populacional de uma colônia de bactérias, foi observado que este crescimento estava descrito pela função $N = 300 \times 2^t$, onde t representa o tempo em dias e N é o número de bactérias total da colônia num dado tempo.

Fonte: U.S. Army Medical Research Institute of Infectious Diseases photo [Public domain], via Wikimedia Commons

Considerando a função descrita no laboratório da UEMA. Indique em quantos dias a população de bactérias será igual a 76800 bactérias nessa colônia.

Ⓐ 8
Ⓑ 7
Ⓒ 25,6
Ⓓ 12,8
Ⓔ 128

45. (CESMAC 2019) Um adulto tomou 400 mg de Ibuprofeno. A cada hora que passa, a quantidade de Ibuprofeno no organismo do indivíduo diminui de 30%. Em certo momento, estão presentes 67,228 mg do Ibuprofeno no organismo do adulto.

Quantas horas se passaram desde a ingestão do Ibuprofeno?

Dado: use que $67{,}228 = 400 \cdot 0{,}7^5$.

Ⓐ Uma hora
Ⓑ Duas horas
Ⓒ Três horas
Ⓓ Quatro horas
Ⓔ Cinco horas

46. (ENEM PPL 2019) Em um laboratório, cientistas observaram o crescimento de uma população de bactérias submetida a uma dieta magra em fósforo, com generosas porções de arsênico.

Descobriu-se que o número de bactérias dessa população, após t horas de observação, poderia ser modelado pela função exponencial $N(t) = N_0 e^{kt}$, em que N_0 é o número de bactérias no instante do início da observação ($t = 0$) e representa uma constante real maior que 1, e k é uma constante real positiva.

Sabe-se que, após uma hora de observação, o número de bactérias foi triplicado.

Cinco horas após o início da observação, o número de bactérias, em relação ao número inicial dessa cultura, foi

Ⓐ $3N_0$
Ⓑ $15N_0$
Ⓒ $243N_0$
Ⓓ $360N_0$
Ⓔ $729N_0$

47. (UNIFOR 2019) João tem observado uma queda de 5% no preço do quilo do feijão de corda, com relação ao mês anterior, nos últimos 5 meses, consecutivamente.

Se n é o número de meses desde que o preço começou a baixar e x é o preço do quilo de feijão, qual das seguintes expressões modela o preço do quilo de feijão neste período de tempo?

Ⓐ $x = 4{,}8 + 0{,}95n$
Ⓑ $x = 4{,}8 + 1{,}05n$
Ⓒ $x = 4{,}8(0{,}95)^n$
Ⓓ $x = 4{,}8(1{,}05)^n$
Ⓔ $x = 4{,}8(0{,}05)^n$

48. (FCMMG 2019) Em um laboratório, adotou-se a lei **y(t)= P.C$^{k\ t}$** para simular um modelo matemático de crescimento de determinada população ao longo de tempo **t**, onde **y(t)** representa a quantidade de indivíduos da população no instante (**t**), **P** a população presente no instante inicial, **C** e **k** constantes que variam de acordo com a espécie de população.

Para o procedimento de validação da lei, considerou-se **C = 2**. Se no início do experimento a população era composta por 30 indivíduos, após 1 hora, identificou-se a presença de 240 indivíduos.

A partir do instante inicial, para este cenário, pode-se estimar que a população alcance o total de 61.440 indivíduos após

Ⓐ 37 minutos.
Ⓑ 4 horas e 7 minutos.
Ⓒ 3 horas e 40 minutos.
Ⓓ 2 horas e 30 minutos.

49. (IFPE 2019) Assim como acontece com parte dos alimentos e líquidos, medicamentos ingeridos por seres humanos também são eliminados pelo corpo. A meia vida biológica de um medicamento é o tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade, independe da concentração inicial. O tempo de meia vida do medicamento azitromicina di-hidratada é de 3 dias.

Sabendo que Cláudio tomou 1000 mg de azitromicina di-hidratada, indique a fórmula que expressa a quantidade ***Q*** do medicamento, em miligramas, que restará no organismo em função do número ***d*** de dias.

Ⓐ $Q = 1000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{d}{3}}$
Ⓑ $Q = 1000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{d}{2}}$
Ⓒ $Q = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{3}}$
Ⓓ $Q = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{2}}$
Ⓔ $Q = 1000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{d}{2}}$

50. (UNIT 2019) A população, em uma cultura bacteriana, aumenta 44% a cada 2 horas.

Se a população inicial for P_0, então a população t, horas depois, será dada por

Ⓐ $P(t) = P_0 + (0{,}44)^{2t}$
Ⓑ $P(t) = P_0 + (1{,}2)^{t/2}$
Ⓒ $P(t) = P_0 . (0{,}44)^{t/2}$
Ⓓ $P(t) = P_0 . (1{,}2)^{t}$
Ⓔ $P(t) = P_0 + (1{,}44)^{2t}$

51. (IFNMG 2018) Leia a reflexão a seguir e responda à questão.

"O hiperconsumo nos vende uma ideia de liberdade de expressão e escolhas. Mas estamos mesmo sendo capazes de escolher ou somos, na realidade, induzidos por um fluxo mandatório de consumo embutido na sociedade contemporânea?"

https://mediaetpotere.wordpress.com/2015/04/08/a-era-das-sensacoes-e-do-hiperconsumo/.
Acesso em: 2 abr. 2018.

Um determinado carro após vendido se deprecia de tal forma que seu valor, t meses após sua compra, é dado por $V(t) = V_o \cdot 2^{-t/2}$, em que V_o é o valor pago pelo produto.

Se após 10 meses o veículo estiver valendo R$ 1.000,00, qual o valor que ele foi comprado?

Ⓐ R$ 23.000,00
Ⓑ R$ 32.000,00
Ⓒ R$ 42.500,00
Ⓓ R$ 45.000,00

52. (UFGD 2018) Um grupo de estudantes verificou que o crescimento de uma determinada população de bactérias é dado pela função

$$P(t) = 200.3^{\frac{3}{2}t}$$

na qual ***P*** identifica a população e a variável ***t*** indica o tempo em anos.

Considerando as condições apresentadas, qual o tempo mínimo para que a população de bactérias seja o triplo da população inicial?

Ⓐ 3 meses.
Ⓑ 4 meses.
Ⓒ 6 meses.
Ⓓ 8 meses.
Ⓔ 12 meses.

53. (UPE 2018) A população inicial de uma colônia de bactérias, que cresce 40% a cada hora, é de $8 \cdot 10^5$ bactérias.

Qual é o número aproximado de bactérias dessa colônia ao final de 16 horas?

Considere $(1,4)^{16} = 218$

Ⓐ $1,7 \times 10^8$
Ⓑ $2,2 \times 10^5$
Ⓒ $1,8 \times 10^6$
Ⓓ $3,4 \times 10^8$
Ⓔ $4,6 \times 10^5$

54. (UP MEDICINA 2018) Após se tomar uma injeção de 200 mg de penicilina, uma hora depois somente 60% do medicamento permanece ativo. Após mais uma hora, o mesmo ocorre: apenas 60% da penicilina presente no fim da hora anterior permanece ativa; e assim sucessivamente.

A função que representa a quantidade de penicilina (P) depois de t horas é:

Ⓐ $P(t) = 200 \,.\, 1{,}6^t$
Ⓑ $P(t) = 200 \,.\, \log 0{,}6^t$
Ⓒ $P(t) = 200 + 0{,}6^t$
Ⓓ $P(t) = 200 + \log 0{,}6^t$
Ⓔ $P(t) = 200 \,.\, 0{,}6^t$

55. (FIPMOC 2018) A nutricionista responsável pelas refeições servidas em um hospital, visando a um melhor preparo de seu pessoal, informou às cozinheiras que, sob condições ideais, o número de bactérias em uma cultura cresce de tal forma, que a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes no início da infestação.

Ela informou, por exemplo, que, se no momento inicial da infestação estiverem presentes 1000 bactérias em uma cultura, após 15 minutos essa quantidade de bactérias dobra de tamanho.

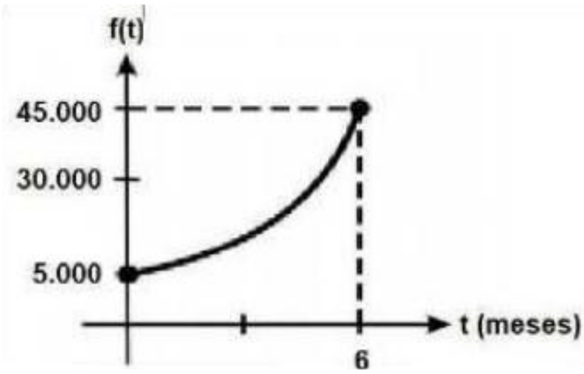
No exemplo apresentado, ao final de 2 horas, a quantidade de bactérias presentes é:

Ⓐ 212000.
Ⓑ 123000.
Ⓒ 256000.
Ⓓ 345000.
Ⓔ 435000.

56. (UVV 2018) Problemas na saúde pública brasileira, como o não atendimento de usuários, levam cada vez mais pessoas à busca de respostas rápidas para seus problemas diários de saúde. A utilização de medicamentos, por conta própria ou até mesmo por indicação de alguém sem conhecimento técnico na área, é uma das práticas mais comuns na sociedade.

Esse ato, também chamado de automedicação, pode levar a inúmeras complicações de saúde, como reações alérgicas e dependência e, em alguns casos, até a morte. Além disso, de acordo com o Ministério da Saúde, o hábito pode aumentar a resistência de microrganismos e inibir a eficácia dos remédios.

Considerando-se os dados obtidos em uma pesquisa, após ser ministrado determinado medicamento a um grupo de pacientes, obteve-se o gráfico abaixo, que indica o crescimento de certa substância nos organismos, ao longo de 6 meses. Admitindo a lei de formação da função que representa essa situação como $f(t) = k \cdot p^t$, onde K e p são constantes reais:



Nas condições dadas, qual é o número que indica o crescimento da substância após 3 meses?

A 11.400.
B 12.600.
C 15.000.
D 18.400.
E 21.300.

57. (FGV SP 2018) O patrimônio líquido (PL) de um investidor cresce exponencialmente de forma que daqui a *t* anos ele será igual a $P(t) = A \cdot e^{0{,}06\,t}$, em que *A* é o PL inicial.

Se tomarmos um intervalo de tempo de 2 anos, o aumento porcentual do PL entre o início e o fim desse período será de

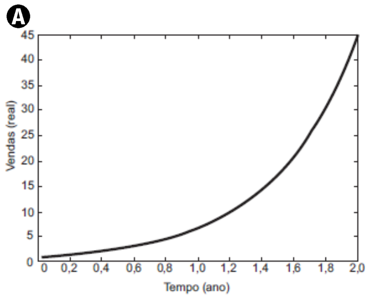
Use a tabela abaixo:

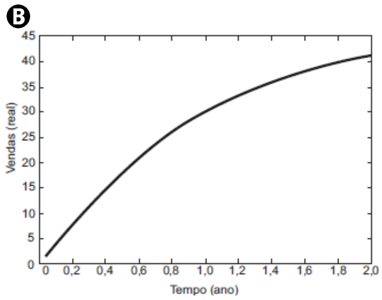
x	0	0,06	0,12	0,24	0,96	1,06	1,12
e^x	1	1,0618	1,1275	1,2712	2,6117	2,8864	3,0649

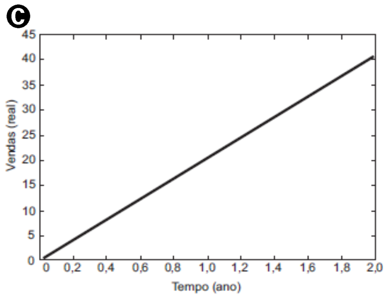
A 12,75%
B 27,12%
C 26,12%
D 28,86%
E 30,65%

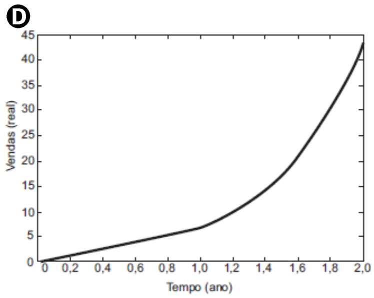
58. (ENEM 2ª APLICAÇÃO 2017) Ao abrir um negócio, um microempresário descreveu suas vendas, em milhares de reais (unidade monetária brasileira), durante os dois primeiros anos. No primeiro ano, suas vendas cresceram de modo linear. Posteriormente, ele decidiu investir em propaganda, O que fez suas vendas crescerem de modo exponencial.

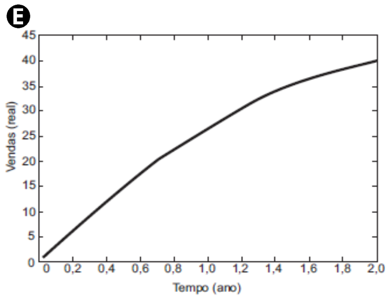
Qual é o gráfico que melhor descreve as vendas em função do tempo?

A


B


C


D


E


59. (UFRGS 2017) No estudo de uma população de bactérias, identificou-se que o número N de bactérias, t horas após o início do estudo, é dado por $N(t) = 20 \cdot 2^{1.5t}$

Nessas condições, em quanto tempo a população de mosquitos duplicou?

Ⓐ 15 min.
Ⓑ 20 min.
Ⓒ 30 min.
Ⓓ 40 min.
Ⓔ 45 min.

60. (UEFS 2017) Considerando-se que, sob certas condições, o número de colônias de bactérias, t horas ($t \geq 0$) após ser preparada a cultura, pode ser dado pela função $N(t) = 9^t - 2.3^t + 3$.

Pode-se estimar que o tempo mínimo necessário para esse número ultrapassar 678 colônias é de

Ⓐ 2 horas.
Ⓑ 3 horas.
Ⓒ 4 horas.
Ⓓ 5 horas.
Ⓔ 6 horas.

ANDERSON MATEMÁTICA

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	C
02	B
03	D
04	E
05	C
06	E
07	D
08	C
09	D
10	D
11	B
12	C
13	C
14	D
15	D
16	C
17	C
18	C
19	A
20	E
21	C
22	E
23	D
24	D
25	A
26	C
27	C
28	A
29	D
30	D

QUESTÃO	ALTERNATIVA
31	D
32	B
33	E
34	B
35	A
36	B
37	B
38	B
39	C
40	D
41	A
42	A
43	E
44	A
45	E
46	C
47	C
48	C
49	C
50	D
51	B
52	D
53	A
54	E
55	C
56	C
57	A
58	D
59	D
60	B

função logarítmica

CONHECIMENTOS
ALGÉBRICOS

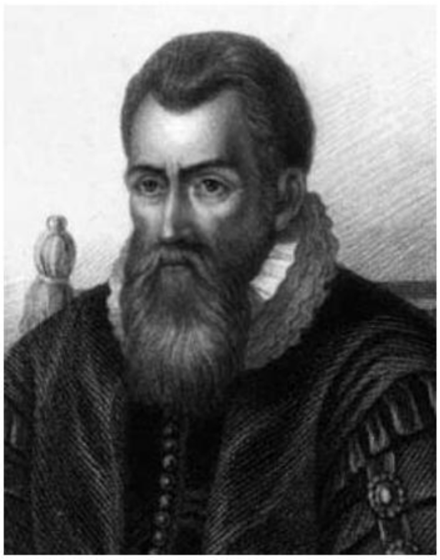
FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Para falarmos sobre a função logarítmica precisamos relembrar um pouco sobre os logaritmos. Eles são fundamentais no entendimento dessa tão temida função. Mas fique calmo, começaremos com um pouco de história, para saber como os logaritmos surgiram. O desenvolvimento dos logaritmos nasceu da necessidade de simplificação de alguns cálculos matemáticos, principalmente por conta do desenvolvimento da Astronomia e da expansão do comércio causada pelas grandes navegações. Uma maior intensidade nesse desenvolvimento se deu entre os séculos XVI e XVII e os logaritmos surgiram como meios de cálculos, que transformavam complexas operações de multiplicação e divisão em simples operações de adição e subtração.

A INVENÇÃO DO LOGARITMO

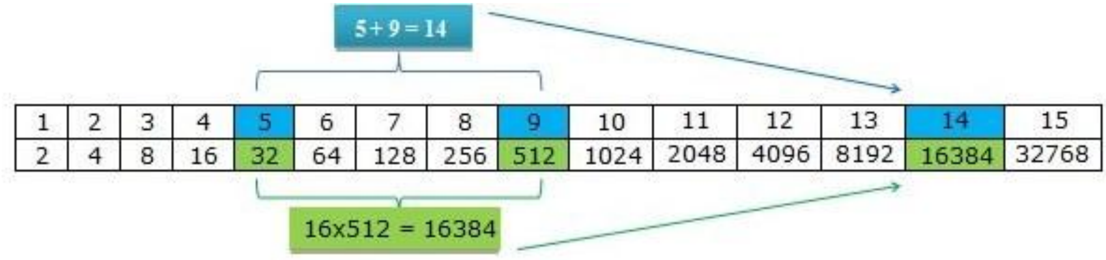
O inventor dos logaritmos foi o escocês John Napier (1550-1617). Mais conhecido por Napier, ele não foi o único de sua época a apresentar desenvolvimentos no campo dos logaritmos, alguns outros matemáticos também apresentaram propostas idênticas à sua. A proposta de Napier baseou-se numa propriedade já conhecida à época, a multiplicação de potências de mesma base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, que em linguagem simples quer dizer que a multiplicação de duas potências de mesma base resulta em uma outra potência, formada pela conservação de uma das bases anteriores e elevada ao expoente que resulta da soma dos dois expoentes das potências anteriores.

John Napier não foi um matemático profissional. Ele era dono de várias propriedades na Escócia, onde administrava os seus bens enquanto escrevia sobre vários assuntos. prova da versatilidade dele foi à afirmação que ele fez no Livro das Revelações, dizendo que o papa em Roma era o anticristo. Não eram todos os temas da matemática que despertavam o interesse de Napier, especialmente os assuntos ligados à computação e a trigonometria lhes chamava atenção. Segundo depoimentos do próprio Napier, até que os resultados de suas descobertas sobre os logaritmos fossem publicados pela primeira vez passaram-se vinte anos, portanto, uma vida dedicada a este assunto. Este fato remete a origem das ideias logarítmicas de Napier ao ano de 1594. Movido por observações das sequências de potências sucessivas, publicadas cinquenta anos antes por Stifel e também nas obras de Arquimedes, ele deparou-se com a evidência de que as somas ou diferenças dos índices das potências eram na verdade produtos ou quocientes das potências dadas, mas com uma particularidade nas sequências de potências inteiras de mesma base, a exemplo do 2, que não poderia ser usada para computações, devido as imprecisões geradas por interpolações realizadas em grandes lacunas entre os termos sucessivos.



O MÉTODO DE NAPIER

Para melhor compreensão do método de Napier, atente-se na tabela que se segue. Os números da primeira linha são os expoentes, enquanto a segunda linha contém as potências de 2 correspondentes a esses expoentes. Segundo a tabela, podemos calcular produtos complicados, como 32 x 512, operando com uma simples operação de adição.



$$32 \cdot 512 = 2^5 \cdot 2^9 = 2^{5+9} = 2^{14} = 16384$$

O que Napier fez foi uma tabela similar a esta, com a ideia de ter facilitado o cálculo de dois números quaisquer. Porém, ele precisaria que a sequência de números da segunda linha fosse uma progressão aritmética formada por números cuja razão se aproximasse de 1, ou seja, ele estava buscando reduzir as lacunas entre os números da segunda linha, o que lhe daria maioria chances de encontrar quaisquer que fosse o produto procurado.

Na verdade, ele queira que na segunda linha estivessem todos os números inteiros positivos (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...), saber-se-ia assim como escrever todos esses números em potências na base desejada.

Na tabela exemplificada anteriormente, temos uma progressão geométrica de razão é 2, isso gera grandes lacunas entre os números dessa sequência, o que nos impede de saber como escrever vários números, por exemplo, 3, como escrever 3 como potência de base 2? 2 elevado a quem resulta em 3? Essas lacunas precisavam ser preenchidas! Napier solucionou o problema das lacunas utilizando a razão $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$ como resultado aproximado para 0,9999999 e para resolver o problema dessas casas decimais que se repetem, ele resolveu multiplicar as potências obtidas com essa razão por 10^7. A tabela que ele propôs, como reflexo dessas conclusões, foi formada, na primeira linha, pelos expoentes L e na segunda por números N, ficando na forma seguinte:

$$N = 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

O expoente L foi por ele chamado de logaritmo de N, sendo a palavra logaritmo devida do latim, onde *logos = razão* e *aritmos = número*.

O Método dos Logaritmos significava para Napier o desejo de expressar a criação de um método de cálculo a partir de razões numéricas ou da proporção de números. Perceba que fazendo L = 0 obteremos $N = 10^7$, o que quer dizer que, para Napier, o logaritmo de $10^7 = 1$.

Em 1614, John Napier publicou o resultado de suas descobertas no livro Mirifici logarithmorum canonis descriptio (Descrição do maravilhoso método dos logaritmos).

É importante lembrar que Napier principiou a sua obra com explicações que utilizavam termos geométricos. Ele não pensou uma base para o seu sistema, basicamente escrevendo multiplicações repetidas que equivaliam a 0,9999999.

BURGI E BRIGSS

Na mesma época de Napier, eis que surge, de forma independente, o suíço Joost Burgi (1552-1632) com a proposta de um método idêntico ao dele, empregando uma razão de valor 1,0001, e primeiro termo 10^8. Burgi criou um método de cálculo de logaritmos e construiu uma tabela com aproximadamente 20.000 termos.

Mas foi o matemático inglês Henry Briggs (1561-1630) quem os adaptou para valores mais fáceis de serem utilizados por meio dos **logaritmos decimais**, como hoje os conhecemos.

> “A descoberta acontece na mente dos que se dedicam ao estudo disciplinado.”
> (Robison Sá)

DEFINIÇÃO

Sendo *a* e *b* números reais positivos, chama-se logaritmo de *a* na base *b*, o expoente *x* que deve ser colocado em *b* de modo que a potência de base *b* obtida seja igual a *a*.

$$\log_b a = x \leftrightarrow b^x = a$$

Com $b > 0, b \neq 1$ e $a > 0$.

Assim, o logaritmo nada mais é do que um expoente.

Dizemos que *b* é a base do logaritmo, *a* é o logaritmando e *x* é o logaritmo de *a* na base *b*.

Exemplo 01: Quanto vale $\log_2 16$?

Encontrar o logaritmo de 16 na base 2, equivale a encontrar o expoente que deve ser colocado em 2 para se obter 16.

Equivale a perguntar: 2 elevado a quanto dá 16?

A resposta é 4.

$$\log_2 16 = x \rightarrow 2^x = 16 \rightarrow 2^x = 2^4 \rightarrow x = 4$$

$$\log_2 16 = 4$$

Exemplo 02: Quanto vale $\log_3 2187$?

Encontrar o logaritmo de 2187 na base 3, equivale a encontrar o expoente que deve ser colocado em 3 para se obter 2187.

Equivale a perguntar: 3 elevado a quanto dá 2187?

A resposta é 7.

$$\log_3 2187 = x \rightarrow 3^x = 2187 \rightarrow 3^x = 3^7 \rightarrow x = 7$$

$$\log_3 2187 = 7$$

Exemplo 03: Quanto vale $\log_{\sqrt{5}} 125$?

Encontrar o logaritmo de 125 na base $\sqrt{5}$, equivale a encontrar o expoente que deve ser colocado em $\sqrt{5}$ para se obter 125.

Equivale a perguntar: $\sqrt{5}$ elevado a quanto dá 125?

A resposta é 6.

$$\log_{\sqrt{5}} 125 = x \rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^x = 125 \rightarrow \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^x = 5^3 \rightarrow 5^{\frac{x}{2}} = 5^3$$

$$\frac{x}{2} = 3 \rightarrow x = 6$$

$$\log_{\sqrt{5}} 125 = 6$$

Exemplo 04: Quanto vale $\log_{10} 0{,}1$?

Encontrar o logaritmo de 0,1 na base 10, equivale a encontrar o expoente que deve ser colocado em 10 para se obter 0,1.

Equivale a perguntar: 10 elevado a quanto dá 0,1?

A resposta é -1.

$$\log_{10} 0{,}1 = x \rightarrow 10^x = 0{,}1 \rightarrow 10^x = 10^{-1} \rightarrow x = -1$$

$$\log_{10} 0{,}1 = -1$$

OBS.: quando a base do logaritmo for 10, podemos omití-la.

$\log_{10} 2$ pode ser reescrito como $\log 2$

$\log_{10} 3$ pode ser reescrito como $\log 3$

$\log_{10} x$ pode ser reescrito como $\log x$

LOGARITMO DECIMAL

Como vimos, logaritmo nada mais é do que o expoente instalado em uma base para que obtenhamos o resultado desejado, no nosso caso, a base é 10.

Por exemplo, quem é o logaritmo decimal de 1000?

A pergunta equivale a: qual o expoente que devo colocar na base 10 para que cheguemos em 1000?

A resposta é 3, uma vez que $10^3 = 1000$.

Dizemos então, que 3 é o logaritmo de 1000 quando a base é 10.

Vamos acompanhar um pouco do trabalho de Briggs, que foi encontrar todos os expoentes necessários para escrever todos números inteiros positivos como potências de base 10.

Começaremos com o número um. Dez elevado a quanto dá um? A resposta é zero!

$$10^0 = 1$$

Ou seja, o logaritmo de um na base dez é zero ($\log_{10} 1 = 10$).

E para o número dois? Dez elevado a quanto dá dois? Essa é um pouco mais difícil!

Vamos observar algumas potências de base dez:

$$10^{0,1} \cong 1,25892541179$$

$$10^{0,2} \cong 1,58489319246$$

$$10^{0,3} \cong 1,99526231497$$

$$10^{0,4} \cong 2,51188643151$$

$$10^{0,5} \cong 3,16227766017$$

Perceba que $10^{0,3}$ resulta em quase dois, se quisermos um pouco mais de precisão, $10^{0,301029995663981} \cong 2$, estamos cientes que a intenção é reduzir o trabalho, então vamos aproximar e usar $10^{0,3} \cong 2$. Vale salientar que estamos usando uma aproximação, logo $10^{0,3}$ não dá exatamente 2, mas chega muito próximo, o suficiente para nos ajudar, e muito, nos cálculos vindouros.

O logaritmo de 2 na base 10 é aproximadamente 0,3, ($\log_{10} 2 \cong 0,3$), ou ainda, se usarmos 0,3 como expoente para uma potência de base 10 obteremos o número 2.

$$10^{0,3} \cong 2$$

O nosso trabalho continua para o número três. Dez elevado a quanto resulta em três? Veja que na listinha anterior, $10^{0,4}$ é menor que 3, porém $10^{0,5}$ é maior que 3. Que tal verificarmos $10^{0,45}$?

$10^{0,45} \cong 2{,}81838293126$, ainda não chegamos lá!

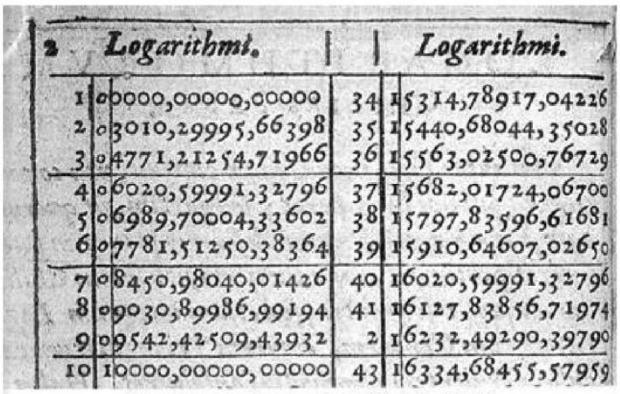
Após algumas tentativas, encontramos $10^{0,477121254719662} \cong 3$. Aproximando, temos:

$$10^{0,48} \cong 3$$

0,48 é o logaritmo de 3 na base 10. ($\log_{10} 3 \cong 0{,}48$)

Bom, esse foi o trabalho de Briggs, procurar, número inteiro por número inteiro, qual era o expoente que precisaríamos colocar na base dez para obtê-los, construindo então uma tabela enorme, contendo cada um dos expoentes encontrados com várias casas decimais de precisão.

A tabela constitui o que chamamos de tábua dos logaritmos:



2	Logarithmi.			Logarithmi.
1	0	0000,00000,00000	34	1	5314,78917,04226
2	0	3010,29995,66398	35	1	5440,68044,35028
3	0	4771,21254,71966	36	1	5563,02500,76729
4	0	6020,59991,32796	37	1	5682,01724,06700
5	0	6989,70004,33602	38	1	5797,83596,61681
6	0	7781,51250,38364	39	1	5910,64607,02650
7	0	8450,98040,01426	40	1	6020,59991,32796
8	0	9030,89986,99194	41	1	6127,83856,71974
9	0	9542,42509,43932	2	1	6232,49290,39790
10	1	0000,00000,00000	43	1	6334,68455,57959

Nessa imagem, vemos apenas parte dessa tabela, observe que na quarta linha da coluna da esquerda aparece o número 4 seguido por 0|6020,59992,32796, o que quer dizer isso?

Isso significa que $10^{0,602059992327 96} \cong 4$. Ou seja, o logaritmo de 4 na base 10 é $0{,}60205999232796$.

Sintetizando, quais são os mais importantes para memorizarmos?

$$10^0 = 1 \rightarrow \log_{10} 1 = 0$$

$$10^{0,3} \cong 2 \rightarrow \log_{10} 2 \cong 0{,}3$$

$$10^{0,48} \cong 3 \rightarrow \log_{10} 3 \cong 0{,}48$$

$$10^{0,7} \cong 5 \rightarrow \log_{10} 5 \cong 0{,}7$$

Outros logaritmos podem ser encontrados através de operações básicas.

Quem é o logaritmo de 6 na base 10? Que expoente colocaremos sobre o 10 para obter 6?

$$6 = 2 \cdot 3 \cong 10^{0,3} \cdot 10^{0,48} = 10^{0,78}$$

Se colocarmos 0,78 como expoente de 10 obteremos 6, ou ainda, 0,78 é o logaritmo de 6 na base 10. $(\log_{10} 6 \cong 0{,}78)$

Usamos anteriormente uma propriedade operatória de potências: em uma multiplicação de potências de mesma base, conserva-se a base e soma-se os expoentes. Isso dará origem a primeira propriedade operatória dos logaritmos. Como logaritmo é um expoente, tem-se que o expoente de um produto de duas potências de mesma base é o expoente da primeira somado ao expoente da segunda potência.

$\log_b (a.c) = \log_b a + \log_b a$

Exemplo 05: Quanto vale $\log_{10} 15$? Ou simplesmente $\log 15$?

$$\log 15 = \log 3 \cdot 5 = \log 3 + \log 5 = 0{,}48 + 0{,}7 = 1{,}18$$

$$\log 15 = 1{,}18$$

Olhando por outro ângulo:

$$15 = 3 \cdot 5 = 10^{0,48} \cdot 10^{0,7} = 10^{1,18}$$

Ou seja, se colocarmos 1,18 como expoente de 10 o resultado da potência será 15.

Portanto, o logaritmo decimal de 15 é 1,18.

Exemplo 06: Quanto vale $\log_{10} 16$? Ou simplesmente $\log 16$?

$$\log 16 = \log 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\log 16 = \log 2 + \log 2 + \log 2 + \log 2$$

$$\log 16 = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3$$

$$\log 16 = 4 \cdot 0{,}3$$

$$\log 16 = 1{,}2$$

Olhando por outro ângulo:

$$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10^{0,3} \cdot 10^{0,3} \cdot 10^{0,3} \cdot 10^{0,3} = 10^{1,2}$$

Ou seja, se colocarmos 1,2 como expoente de 10 o resultado da potência será 16.

Portanto, o logaritmo decimal de 16 é 1,2.

É importante notar, no exemplo anterior, que:

$$\log 16 = \log 2 + \log 2 + \log 2 + \log 2$$

$$\log 2^4 = 4 \cdot \log 2$$

O que vai gerar uma nova propriedade operatória dos logaritmos, conhecida como tudo que sobe na vida, um dia desce!☺

$$\log_b a^c = c.\log_b a$$

Exemplo 07: Quanto vale $\log_{10} 243$? Ou simplesmente $\log 243$?

$$\log 243 = \log 3^5 = 5 \cdot \log 3 = 5 \cdot 0{,}48 = 2{,}4$$

$$\log 243 = 2{,}4$$

Outra propriedade importante dos logaritmos é advinda da divisão de duas potências de mesma base, em que conservamos a base e subtraímos os expoentes.

Quem é o logaritmo de 1,5 na base 10? Que expoente colocaremos sobre o 10 para que obtenhamos 1,5?

$$1{,}5 = \frac{3}{2} = \frac{10^{0{,}48}}{10^{0{,}3}} = 10^{0{,}48-0{,}3} = 10^{0{,}18}$$

Veja que isso equivale a:

$$log_b\left(\frac{a}{c}\right) = log_b a - log_b c$$

Exemplo 08: Quanto vale $\log_{10}\left(\frac{27}{4}\right)$? Ou simplesmente $\log\left(\frac{27}{4}\right)$?

$$\log\left(\frac{27}{4}\right) = \log 27 - \log 4$$

$$\log\left(\frac{27}{4}\right) = \log 3^3 - \log 2^2$$

$$\log\left(\frac{27}{4}\right) = 3 \cdot \log 3 - 2 \cdot \log 2$$

$$\log\left(\frac{27}{4}\right) = 3 \cdot 0{,}48 - 2 \cdot 0{,}3$$

$$\log\left(\frac{27}{4}\right) = 1{,}44 - 0{,}6$$

$$\log\left(\frac{27}{4}\right) = 0{,}84$$

Mas nem só de base 10 vive o homem, não é?

Exemplo 09: Quanto vale $\log_2 3$?

$$\log_2 3 = x$$

$$2^x = 3$$

E agora? Como deixar as bases iguais? Imagina? Vamos para a base 10? ☺

Lembre-se que $2 = 10^{0,3}$ e que $3 = 10^{0,48}$, então, substituindo na equação acima, teremos:

$$2^x = 3$$

$$(10^{0,3})^x = 10^{0,48}$$

$$10^{0,3 \cdot x} = 10^{0,48}$$

$$0,3 \cdot x = 0,48$$

$$x = \frac{0,48}{0,3}$$

$$x = 1,6$$

$$\log_2 3 = 1,6$$

O exemplo acima nos dá base para mais uma propriedade operatória, que é a mudança de base. Observe o que aconteceu:

$$\log_2 3 = \frac{0,48}{0,3} = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

Para descobrirmos o logaritmo de 3 na base 2, tivemos que mudar para base 10.

De maneira geral,

$$log_c a = \frac{log_b a}{log_b c}$$

Exemplo 10: Quanto vale $\log_2 5$?

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{0{,}7}{0{,}3} \cong 2{,}3$$

Podemos sofisticar essa última propriedade um pouco mais:

Exemplo 11: Quanto vale $\log_{16} 1024$?

Nosso primeiro passo será a mudança de base.

$$\log_{16} 1024 = \frac{\log 1024}{\log 16}$$

Em seguida, perceba que tanto $1024 = 2^{10}$ quanto o $32 = 2^4$ podem ser escritos como potências.

Donde, temos:

$$\log_{16} 1024 = \frac{\log 1024}{\log 16}$$

$$\log_{16} 1024 = \frac{\log 2^{10}}{\log 2^4}$$

$$\log_{16} 1024 = \frac{10 \cdot \cancel{\log 2}}{4 \cdot \cancel{\log 2}}$$

$$\log_{16} 1024 = \frac{10}{4}$$

$$\log_{16} 1024 = 2{,}5$$

Vale a pena destacar que,

$$\log_{16} 1024 = \frac{\log 2^{10}}{\log 2^4} = \frac{10 \cdot \log 2}{4 \cdot \log 2} = \frac{10}{4} \cdot \frac{\log 2}{\log 2} = \frac{10}{4} \cdot \log_2 2$$

Ou seja,

$$\log_{2^4} 2^{10} = \frac{10}{4} \cdot \log_2 2$$

Generalizando,

$$\boxed{\log_{b^q} a^p = \frac{p}{q} \cdot \log_b a}$$

Exemplo 12: Quanto vale $\log_8 81$?

$$\log_8 81 = \log_{2^3} 3^4 = \frac{4}{3} \cdot \log_2 3 = \frac{4}{3} \cdot 1{,}6 \cong 2{,}13$$

Vide exemplo 09

Já que relembramos um pouco sobre os logaritmos, falaremos sobre a função logarítmica.

Função logarítmica de base b é toda função $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f\ x = \log_b x$ com $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$.

Podemos observar neste tipo de função que a variável independente *x* encontra-se no logaritmando, por isto a denominamos **função logarítmica**. Observe que a base *b* é um valor real constante, não é uma variável, mas sim um número real.

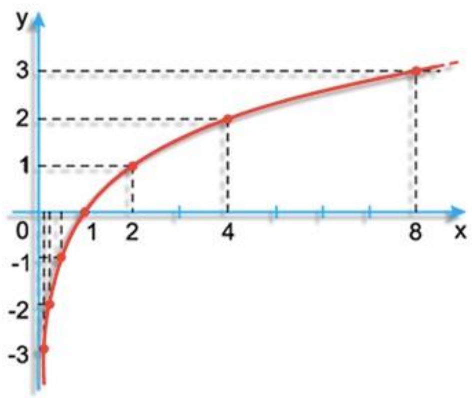
GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Podemos representar graficamente uma função logarítmica da mesma forma que fizemos com a **função exponencial**, ou seja, escolhendo alguns valores para *x* e montando uma tabela com os respectivos valores de *f(x)*. Depois localizamos os pontos no **plano cartesiano** e traçamos a curva do gráfico.

Vamos representar graficamente a função $f(x) = \log_2 x$ e como estamos trabalhando com um logaritmo de base 2, para simplificar os cálculos vamos escolher para *x* alguns valores que são potências de 2:

x	$\log_2 x$
...	...
1/8	– 3
1/4	– 2
1/2	– 1
1	0
2	1
4	2
8	3
...	...

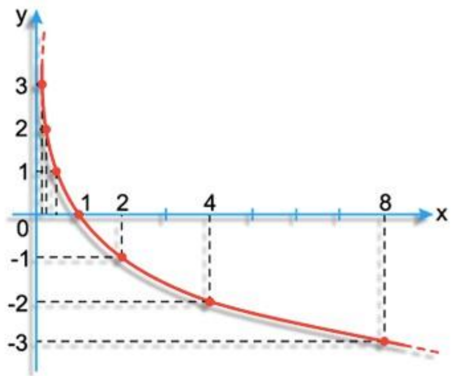
A função logarítmica de base $b > 1$ é estritamente crescente e contínua em $\mathbb{R}_+^*$. Assim, para $f(x) = \log_2 x$, temos a representação gráfica:



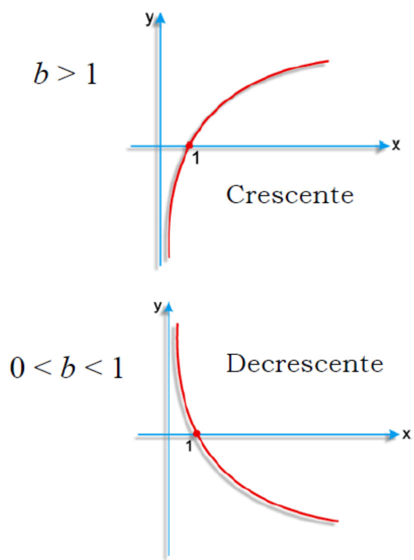
Se mudarmos um pouco a base da função e colocarmos $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$, por exemplo, o gráfico ficará um pouco diferente!

x	$\log_{1/2} x$
...	...
1/8	3
1/4	2
1/2	1
1	0
2	– 1
4	– 2
8	– 3
...	...

A função logarítmica de base $0 < b < 1$ é estritamente decrescente e contínua em $\mathbb{R}_+^*$. Assim, para $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$, temos a representação gráfica:



A que se deve essa mudança na representação gráfica? A base da função logarítmica é quem determina se a função é crescente ou decrescente. Exatamente da mesma maneira que acontecia na função exponencial.

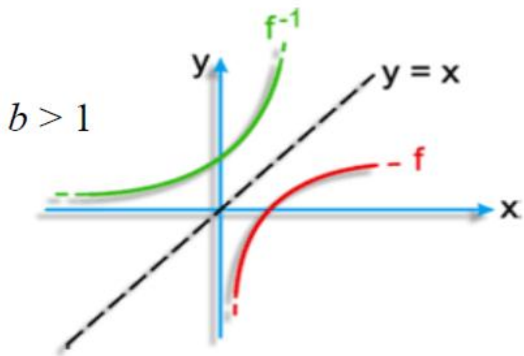


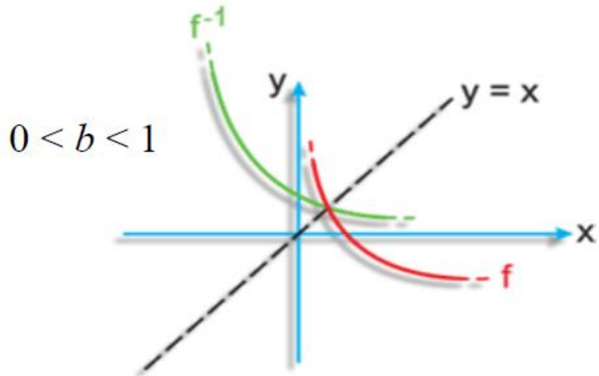
Se a base da função logarítmica for maior que um ($b > 1$), a função é crescente, já se a base da função logarítmica estiver entre zero e um ($0 < b < 1$), a função é dita decrescente.

Lembre-se também, que a **função logarítmica** é a inversa da **função exponencial** e vice-versa, pois:

$$\log_b x = y \leftrightarrow b^y = x$$

O que nos diz que os gráficos das funções logarítmica e exponencial são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares:





A função logarítmica possui várias aplicações na Matemática e em diversas áreas do conhecimento, como Física, Biologia, Química, Medicina, Geografia entre outras.

Iremos através de exemplos demonstrar sua utilização na busca de resultados para as variadas situações em questão.

Exemplo 13: Matemática Financeira

Fernando, exímio investidor, aplicou um capital em um fundo de investimento que rende 20% ao ano. Em quantos anos, seu capital triplicará?

Solução:

Sejam C, o capital investido por Fernando, e x o tempo, em anos, que o capital permanence aplicado. Aumentar 20% equivale a multiplicar por 1,2. Logo, para saber o montante gerado pela aplicação, teremos a seguinte expressão:

$$M = C \cdot (1{,}2)^x$$

Queremos que esse montante seja o triplo do capital, então:

$$M = C \cdot (1{,}2)^x = 3C$$

$$C \cdot (1{,}2)^x = 3C$$

$$(1{,}2)^x = 3$$

É aqui que entra o logaritmo, uma vez que há dificuldade de colocar (1,2) e 3 na mesma base.

Aplicaremos, então, o logaritmo em ambos os membros:

$$\log(1{,}2)^x = \log 3$$

$$x \cdot \log(1{,}2) = \log 3$$

$$x \cdot \log\left(\frac{12}{10}\right) = 0{,}48$$

$$x \cdot (\log 12 - \log 10) = 0{,}48$$

$$x \cdot [\log(2 \cdot 2 \cdot 3) - 1] = 0{,}48$$

$$x \cdot (\log 2 + \log 2 + \log 3 - 1) = 0{,}48$$

$$x \cdot (0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}48 - 1) = 0{,}48$$

$$x \cdot (1{,}08 - 1) = 0{,}48$$

$$x \cdot 0{,}08 = 0{,}48$$

$$x = \frac{0{,}48}{0{,}08}$$

$$x = 6$$

Em seis anos, o capital triplicará, se investido a uma taxa de 20% ao ano.

Exemplo 14: Geografia das Populações

Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 7,2% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Dados: $\log(1{,}072) = 0{,}03$

A expressão que modela esse crescimento populacional, será:

$$P = P_0 \cdot (1{,}072)^x$$

Sendo P a população x anos, a partir do início em que a população era P_0.

Queremos que a população inicial dobre, logo:

$$P_0 \cdot (1{,}072)^x = 2 \cdot P_0$$

$$(1{,}072)^x = 2$$

Mais uma vez, aplicaremos o logaritmo em ambos os membros.

$$\log(1{,}072)^x = \log 2$$

$$x \cdot \log(1{,}072) = 0{,}3$$

$$x \cdot 0{,}03 = 0{,}3$$

$$x = \frac{0{,}3}{0{,}03}$$

$$x = 10$$

Em dez anos, a população duplicará!

Exemplo 15: Decaimento Radioativo

Sendo a meia-vida do Césio de 30 anos, em quanto tempo sua quantidade se reduzirá a 10% da quantidade inicial?

A expressão que modela o decaimento radioativo do Césio é $Q = Q_0 \cdot 2^{-\frac{x}{30}}$, em que Q é a quantidade de Césio existente x anos após a quantidade inicial Q_0 existente.

Queremos que a quantidade seja 10% da inicial, então:

$$Q_0 \cdot 2^{-\frac{x}{30}} = 0{,}1 \cdot Q_0$$

$$2^{-\frac{x}{30}} = 0{,}1$$

Aplicando o logaritmo em ambos os membros:

$$\log\left(2^{-\frac{x}{30}}\right) = \log 0{,}1$$

$$-\frac{x}{30} \cdot \log 2 = \log\frac{1}{10}$$

$$-\frac{x}{30} \cdot 0{,}3 = \log 1 - \log 10$$

$$-\frac{x}{10} = 0 - 1$$

$$-\frac{x}{10} = -1$$

$$x = 10$$

Em 10 anos a quantidade de Césio se reduzirá a 10% da inicial.

POTENCIAL HIDROGENIÔNICO

Segundo a teoria de Arrhenius, os <u>**ácidos**</u> são compostos que reagem com água e sofrem ionização, originando como único cátion o hidrônio ($H_3O^+_{(aq)}$). Já as <u>**bases**</u> são compostos que, em meio aquoso, sofrem dissociação iônica, liberando como único ânion a hidroxila ($OH^-_{(aq)}$).

Mas existem várias substâncias diferentes no cotidiano, além de soluções químicas usadas em laboratórios e indústrias que apresentam diferentes níveis de acidez e basicidade. Só para citar um exemplo, o café é ácido, mas quase todos sabem que o ácido sulfúrico é um ácido bem mais forte que o café. Assim, para medir o grau de acidez e de basicidade das soluções, foram criadas as escalas de **pH** e **pOH**, respectivamente.

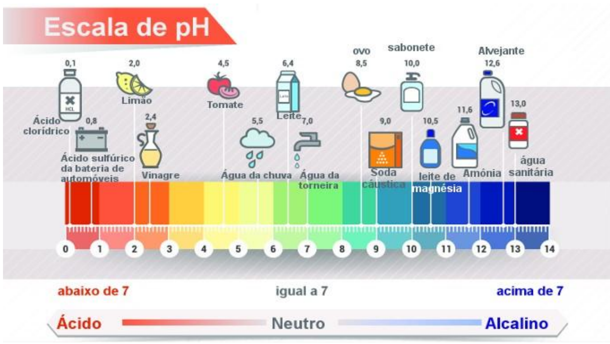
A sigla pH significa potencial hidrogeniônico e indica o teor de íons hidrônio ($H_3O^+_{(aq)}$) livres por unidade de volume da solução. Quanto mais hidrônios houver no meio, mais ácida será a solução. Por consequência, podemos dizer que quanto mais íons $OH^-_{(aq)}$ houver no meio, mais básica ou alcalina será a solução.

Assim, para ser ácida, uma solução deve ter uma concentração maior de cátions H_3O^+ do que de OH^- livres em seu meio, e o contrário ocorre com as soluções básicas.

Ácidas: $[H_3O^+] > [OH^-]$
Básicas: $[H_3O^+] < [OH^-]$

Isso nos ajuda a entender melhor a escala de pH, que costuma ser usada entre os valores de 0 a 14, em temperatura de 25°C. A temperatura precisa ser especificada porque ela altera a quantidade de íons no meio. Se aumentarmos a temperatura, por exemplo, a energia das partículas também aumentará. Por isso, elas se movimentarão mais rápido, o que resultará em um maior número de choques entre elas e, portanto, em uma maior quantidade de íons produzidos.

Veja a escala de pH a seguir e algumas soluções do cotidiano com o seu pH aproximado:



Quanto menor o valor do pH, mais ácida é a solução, pois a escala de pH é definida como o logaritmo negativo da concentração de íons H_3O_+, ou H_+, na base 10.

Veja como ele pode ser determinado a seguir:

$$[H^+] = 10^{-pH}, \text{ em mol/L}$$
$$pH = \text{colog } [H^+] = -\log [H^+]$$
$$pH = -\log [H^+]$$

Exemplo 16: pH de uma Solução

Sabendo que a concentração de hidrônio em um cafezinho é igual a $5 \cdot 10^{-5}$, qual será o pH presente nessa solução?

Como o exercício forneceu a concentração de hidrônios no cafezinho, podemos utilizar a fórmula simplificada do pH:

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log(5 \cdot 10^{-5})$$

$$pH = -(\log 5 + \log 10^{-5})$$

$$pH = -(0{,}7 - 5 \cdot \log 10)$$

$$pH = -(0{,}7 - 5 \cdot 1)$$

$$pH = -(0{,}7 - 5)$$

$$pH = -(-4{,}3)$$

$$pH = 4{,}3$$

Como o pH é menor que 7, a solução é ácida.

LOGARITMO NATURAL

Para entendermos o logaritmo natural, precisamos conhecer um pouco o número de Euler.

Na matemática, o número de Euler, denominado em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, é a base dos logaritmos naturais.

A primeira referência à constante foi publicada em 1618 na tabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de John Napier. No entanto, este não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta.

A primeira indicação da constante foi descoberta por Jakob Bernoulli, quando tentava encontrar um valor para a seguinte expressão (muito comum no cálculo de juros compostos):

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Cujo valor, com as 510 primeiras casas decimais, segue:

$$\begin{aligned} e = 2{,}718\ &281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352\ 662\ 497\ 757\ 247 \\ &093\ 699\ 959\ 574\ 966\ 967\ 627\ 724\ 076\ 630\ 353\ 547\ 594\ 571\ 382 \\ &178\ 525\ 166\ 427\ 427\ 466\ 391\ 932\ 003\ 059\ 921\ 817\ 413\ 596\ 629 \\ &043\ 572\ 900\ 334\ 295\ 260\ 595\ 630\ 738\ 132\ 328\ 627\ 943\ 490\ 763 \\ &233\ 829\ 880\ 753\ 195\ 251\ 019\ 011\ 573\ 834\ 187\ 930\ 702\ 154\ 089 \\ &149\ 934\ 884\ 167\ 509\ 244\ 761\ 460\ 668\ 082\ 264\ 800\ 168\ 477\ 411 \\ &853\ 742\ 345\ 442\ 437\ 107\ 539\ 077\ 744\ 992\ 069\ 551\ 702\ 761\ 838 \\ &606\ 261\ 331\ 384\ 583\ 000\ 752\ 044\ 933\ 826\ 560\ 297\ 606\ 737\ 113 \\ &200\ 709\ 328\ 709\ 127\ 443\ 747\ 047\ 230\ 696\ 977\ 209\ 310\ 141\ 692 \\ &836\ 819\ 025\ 515\ 108\ 657\ 463\ 772\ 111\ 252\ 389\ 784\ 425\ 056\ 953 \\ &696\ 770\ 785\ 449\ 969\ 967\ 946\ 864\ 454\ 905\ 987\ 931\ 636\ 889\ 230 \\ &098\ 793\ 127\ 736\ 178\ 215\ 4\ \ldots \end{aligned}$$

Vários fenômenos naturais só podem ser compreendidos com o uso do logaritmo na base natural, esse número irracional *e* contribuiu imensamente para essa compreensão.

O logaritmo natural é, portanto, um logaritmo na base *e*:

$$\ln x = log_e\, x$$

Então, sabe-se que:

$\ln 2$, na verdade, é $\log_e 2$, ou seja, devemos procurar o expoente que ao ser colocado em ***e*** resulte em 2.

$$\ln 2 = \log_e 2 = x \Rightarrow e^x = 2$$

Uma pesquisa minuciosa, nos mostra que

$$e^{0{,}693147180559945\ldots} = 2$$

Se quisermos economizar, diremos que $\ln 2 \cong 0{,}7$.

As mesmas propriedades operatórias que estudamos para os logaritmos até agora, valem para o logaritmo natural.

$$\ln(a \cdot c) = \ln a + \ln c$$

$$\ln\left(\frac{a}{c}\right) = \ln a - \ln c$$

$$\ln(a^c) = c \cdot \ln a$$

É importante ressaltar algumas relações básicas para utilizarmos o logaritmo natural:

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^x = x$$

Exemplo 17: A corrente elétrica que atravessa um circuito é dada por $i = i_0 \cdot e^{-0,02 \cdot t}$, em que i_0 é o valor da corrente no instante $t = 0$ e i é o valor da corrente decorridos t segundos. Determine em quantos segundos a corrente atinge 2% do seu valor inicial.

(Dado: $\ln 0,02 = -4$)

Queremos que a corrente atinja 2% do valor inicial, então:

$$i_0 \cdot e^{-0,02 \cdot t} = 0,02 \cdot i_0$$

$$e^{-0,02 \cdot t} = 0,02$$

Aplicamos o logaritmo natural em ambos os membros:

$$\ln e^{-0,02\cdot t} = \ln 0,02$$

$$-0,02 \cdot t \cdot \ln e = -4$$

$$-0,02 \cdot t \cdot 1 = -4$$

$$t = \frac{-4}{-0,02}$$

$$t = 200s$$

A corrente elétrica leva 200 segundos para atingir 2% do seu valor inicial.

01. (ENEM PPL 2018) Em março de 2011, um terremoto de 9,0 graus de magnitude na escala Richter atingiu o Japão matando milhares de pessoas e causando grande destruição. Em janeiro daquele ano, um terremoto de 7,0 graus na escala Richter atingiu a cidade de Santiago Del Estero, na Argentina. A magnitude de um terremoto, medida A pela escala Richter, é $R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, em que A é a amplitude do movimento vertical do solo, informado em um sismógrafo, A_0 é uma amplitude de referência e log representa o logaritmo na base 10.

Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado).

A razão entre as amplitudes dos movimentos verticais dos terremotos do Japão e da Argentina é

Ⓐ 1,28
Ⓑ 2,0
Ⓒ $10^{9/7}$
Ⓓ 100
Ⓔ $10^9 - 10^7$

02. (ENEM PPL 2018) A água comercializada em garrafões pode ser classificada como muito ácida, ácida, neutra, alcalina ou muito alcalina, dependendo do seu pH, dado pela expressão pH = $\log_{10}$ (1/H), em que H é a concentração de íons de hidrogênio, em mol por decímetro cúbico.

A classificação da água de acordo com seu pH é mostrada no quadro:

pH	Classificação
$pH \geq 9$	Muito alcalina
$7{,}5 \leq pH < 9$	Alcalina
$6 \leq pH < 7{,}5$	Neutra
$3{,}5 \leq pH < 6$	Ácida
$pH < 3{,}5$	Muito ácida

Para o cálculo da concentração H, uma distribuidora mede dois parâmetros A e B, em cada fonte, e adota H como sendo o quociente de A por B. Em análise realizada em uma fonte, obteve A = 10^{-7} e a água dessa fonte foi classificada como neutra.

O parâmetro B, então, encontra-se no intervalo

Ⓐ $(-10^{14,5}, -10^{13}]$
Ⓑ $[10^{-6/7}, 10^{-1})$
Ⓒ $[10^{-1}, 10^{1/2})$
Ⓓ $[10^{13}, 10^{14,5})$
Ⓔ $[10^{6 \cdot 10^7}, 10^{7,5 \cdot 10^7})$

03. (ENEM 2018) Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P \cdot (1 + i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R$ 820,00, a uma taxa de juros de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Utilize 0,2877 como aproximação para $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ e 0,0131 como aproximação para $\ln(1{,}0132)$.

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a

- **A** 56ª
- **B** 55ª
- **C** 52ª
- **D** 51ª
- **E** 45ª

04. (ENEM 2017) Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5.000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação P é calculado em função do número de prestações n segundo a fórmula

$$P = \frac{5000 \cdot 1{,}013^n \cdot 0{,}013}{(1{,}013^n - 1)}$$

Se necessário, utilize:
0,005 como aproximação para log 1,013;
2,602 como aproximação para log 400;
2,525 como aproximação para log 335.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

- **A** 12.
- **B** 14.
- **C** 15.
- **D** 16.
- **E** 17.

05. (ENEM 2016) Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3 000°C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min.

Use 0,477 como aproximação para $\log_{10} 3$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10} 11$.

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30°C é mais próximo de

A 22
B 50
C 100
D 200
E 400

06. (ENEM 2016) Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador tsunami no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

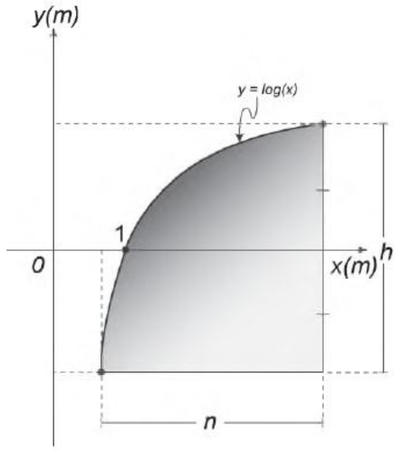
sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva.
Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Qual a relação entre E1 e E2?

A $E_1 = E_2 + 2$
B $E_1 = 10^2 \times E_2$
C $E_1 = 10^3 \times E_2$
D $E_1 = 10^{9/7} \times E_2$
E $E_1 = 9/7 \times E_2$

07. (ENEM 2015) Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação y = log (x), conforme a figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura h do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura h do vidro em função da medida n de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

A $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)-\log\left(\dfrac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

B $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right)-\log\left(1-\dfrac{n}{2}\right)$

C $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right)+\log\left(1-\dfrac{n}{2}\right)$

D $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

E $2\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

08. (ENEM 2013) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

A 27
B 36
C 50
D 54
E 100

09. (ENEM 2011) A Escala e Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina·cm. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina cm)?

A $10^{-5,10}$
B $10^{-0,73}$
C $10^{12,00}$
D $10^{21,65}$
E $10^{27,00}$

10. (IFAL 2017) O potencial de hidrogênio (pH) das soluções é dado pela função: pH = - log[H^+], onde [H^+] é a concentração do cátion H^+ ou H_3O^+ na solução.

Se, em uma solução, a concentração de H^+ é 2×10^{-8}, qual o pH dessa solução?

Adote: log 2 = 0,3.

Ⓐ 2,4
Ⓑ 3,8
Ⓒ 6,7
Ⓓ 7,7
Ⓔ 11

11. (FUVEST 2017) Um analgésico é aplicado via intravenosa. Sua concentração no sangue, até atingir a concentração nula, varia com o tempo de acordo com a seguinte relação:

$$c(t) = 400 - k \cdot \log_3 (a \cdot t + 1),$$

em que t é dado em horas e c(t) é dado em mg/L. As constantes a e k são positivas.

Qual é a concentração do analgésico no instante inicial t = 0?

Ⓐ 100 mg/L
Ⓑ 200 mg/L
Ⓒ 400 mg/L
Ⓓ 800 mg/L
Ⓔ 900 mg/L

12. (ESPM 2013) Em 1997 iniciou-se a ocupação de uma fazenda improdutiva no interior do país, dando origem a uma pequena cidade. Estima-se que a população dessa cidade tenha crescido segundo a função $P = 0{,}1 + log_2(x - 1996)$ onde P e a população no ano x, em milhares de habitantes.

Considerando $\sqrt{2} \cong 1{,}4$ podemos concluir que a população dessa cidade atingiu a marca dos 3600 habitantes em meados do ano:

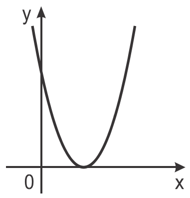
Ⓐ 2005
Ⓑ 2002
Ⓒ 2011
Ⓓ 2007
Ⓔ 2004

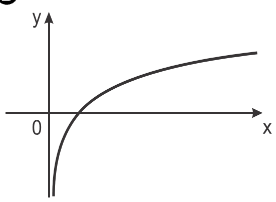
13. (UEL 2016) Um dos principais impactos das mudanças ambientais globais é o aumento da frequência e da intensidade de fenômenos extremos, que quando atingem áreas ou regiões habitadas pelo homem, causam danos. Responsáveis por perdas significativas de caráter social, econômico e ambiental, os desastres naturais são geralmente associados a terremotos, tsunamis, erupções vulcânicas, furacões, tornados, temporais, estiagens severas, ondas de calor etc.

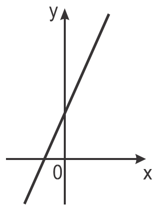
(Disponível em: <www.inpe.br>. Acesso em: 20 maio 2015.)

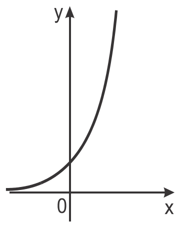
Em relação aos tremores de terra, a escala Richter atribui um número para quantificar sua magnitude. Por exemplo, o terremoto no Nepal, em 12 de maio de 2015, teve magnitude 7,1 graus nessa escala.

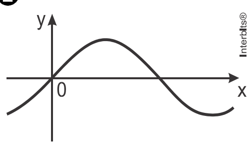
Sabendo-se que a magnitude y de um terremoto pode ser descrita por uma função logarítmica, na qual x representa a energia liberada pelo terremoto, em quilowatts-hora, assinale a alternativa que indica, corretamente, o gráfico dessa função.

A)


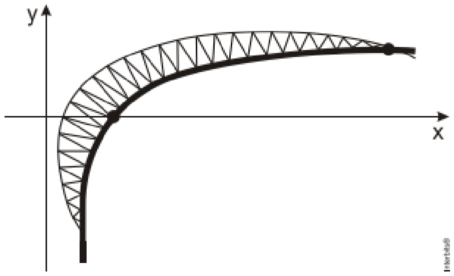
B)


C)


D)


E)


14. (PUCRS 2014) O modelo da cobertura que está sendo colocada no Estádio Beira-Rio está representado na figura abaixo.



Colocada devidamente em um plano cartesiano, é possível afirmar que, na forma em que está, a linha em destaque pode ser considerada uma restrição da representação da função dada por

Ⓐ $y = \log x$
Ⓑ $y = x^2$
Ⓒ $y = |x|$
Ⓓ $y = \sqrt{-x}$
Ⓔ $y = 10^x$

15. (UFMG 2007) Em uma danceteria, há um aparelho com várias caixas de som iguais. Quando uma dessas caixas é ligada no volume máximo, o nível R de ruído contínuo é de 95 dB.

Sabe-se que

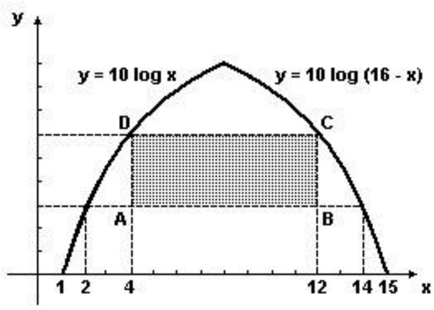
- $R = 120 + 10 \cdot log_{10} I_s$, em que I_s é a intensidade sonora, dada em watt/m²; e
- a intensidade sonora I_s é proporcional ao número de caixas ligadas.

Seja N o maior número dessas caixas de som que podem ser ligadas, simultaneamente, sem que se atinja o nível de 115 dB, que é o máximo suportável pelo ouvido humano.

Então, é CORRETO afirmar que N é

Ⓐ menor do que 25.
Ⓑ maior do que 25 e menor do que 50.
Ⓒ maior do que 50 e menor do que 75.
Ⓓ maior do que 75 e menor do que 100.

16. (UFPB 2007) Um artista plástico pintou um painel na fachada de um prédio, que está representado, graficamente, pela parte hachurada da figura a seguir.



Sabe-se que a região retangular ABCD representa o painel. De acordo com a figura, pode-se concluir que a área do painel, em m², é:

Ⓐ 16·log 32
Ⓑ 20·log 8
Ⓒ 80·log 4
Ⓓ 20·log 12
Ⓔ 80·log 3

17. (UERJ 2004) O número, em centenas de indivíduos, de um determinado grupo de animais, x dias após a liberação de um predador no seu ambiente, é expresso pela seguinte função:

$$\boxed{f(x) = \log_{5\sqrt[3]{5}}(x^4)}$$

Após cinco dias da liberação do predador, o número de indivíduos desse grupo presentes no ambiente será igual a:

Ⓐ 3
Ⓑ 4
Ⓒ 300
Ⓓ 400

18. (PUCSP 2004) Em 1996, uma indústria iniciou a fabricação de 6.000 unidades de certo produto e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 20% ao ano.

Nessas condições, em que ano a produção foi igual ao triplo da de 1996?

(Dados: log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48)

Ⓐ 1998
Ⓑ 1999
Ⓒ 2000
Ⓓ 2001
Ⓔ 2002

19. (UNESP 2004) A expectativa de vida em anos em uma região, de uma pessoa que nasceu a partir de 1900 no ano x ($x \geq 1900$), é dada por

$$E\,(x) = 12 \cdot (-651 + 199 \log x)$$

Considerando $\log_{10} 2 = 0{,}3$, uma pessoa dessa região que nasceu no ano 2000 tem expectativa de viver:

Ⓐ 48,7 anos.
Ⓑ 54,6 anos.
Ⓒ 64,5 anos.
Ⓓ 68,4 anos.
Ⓔ 72,3 anos.

20. (UFSM 2001) Um piscicultor construiu uma represa para criar traíras. Inicialmente, colocou 1.000 traíras na represa e, por um descuido, soltou 8 lambaris. Suponha-se que o aumento das populações de lambaris e traíras ocorre, respectivamente, segundo as leis $L(t) = L_0 \cdot 10^t$ e $T(t) = T_0 \cdot 2^t$, onde L_0 é a população inicial de lambaris, T_0, a população inicial de traíras e t, o número de anos que se conta a partir do ano inicial.

Considerando-se $\log 2 = 0{,}3$, o número de lambaris será igual ao de traíras depois de quantos anos?

Ⓐ 30
Ⓑ 18
Ⓒ 12
Ⓓ 6
Ⓔ 3

21. (ENEM PPL 2019) Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é $h = 5 \cdot \log_2 (t + 1)$, em que t é o tempo contado em dia e h, a altura da planta em centímetro.

A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dia, ela alcançará sua altura máxima?

Ⓐ 63
Ⓑ 96
Ⓒ 128
Ⓓ 192
Ⓔ 255

22. (ENEM 2019) Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_s) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_s) (μm . Hz)
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3{,}9$
Ligeiro	$4{,}0 \leq M_s \leq 4{,}9$
Moderado	$5{,}0 \leq M_s \leq 5{,}9$
Grande	$6{,}0 \leq M_s \leq 9{,}9$
Extremo	$M_s \geq 10{,}0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_s = 3{,}30 + \log(A \cdot f)$, em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e f representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2 000 μm e frequência de 0,2 Hz.

Disponivel em: http://ce jarj cecier) edu.br. Acesso em: 1 fev. 2015(adaptado).

Utilize 0,3 como aproximação para log 2.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

Ⓐ Pequeno.
Ⓑ Ligeiro.
Ⓒ Moderado.
Ⓓ Grande.
Ⓔ Extremo.

23. (UPDC 2019) A relação entre o nível sonoro L e a intensidade sonora S de um ruído é $L = \log_{10} S + 12$.

Se a diferença entre o nível sonoro de dois ruídos é 2, o valor da razão entre as intensidades correspondentes será:

Ⓐ 24.
Ⓑ 48.
Ⓒ 68.
Ⓓ 100.
Ⓔ 120.

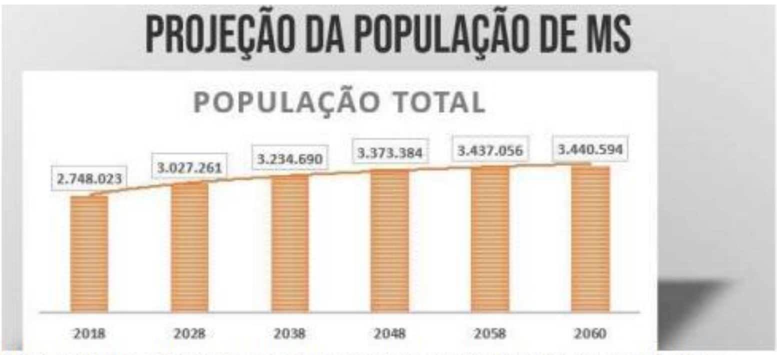
24. (UNIT 2019) Se for mantida a 4°C, uma amostra biológica pode ser armazenada por até 5 dias, mas cada aumento de 1°C na temperatura reduz esse tempo em 20%.

Usando-se $\log_{10}2 \cong 0{,}3$ se preciso, é correto calcular que, para ela poder ser armazenada por, pelo menos, 1 dia, a temperatura deve ser de, no máximo,

Ⓐ 8°C
Ⓑ 9°C
Ⓒ 10°C
Ⓓ 11°C
Ⓔ 12°C

25. (UFMS 2019) **IBGE prevê crescimento de 25,20% no número de habitantes no estado**

A população de Mato Grosso do Sul não deve diminuir pelo menos até 2065, segundo projeção divulgada nesta quarta-feira (25) pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística). O estudo prevê crescimento de 25,20% no número de habitantes no estado, que deve chegar a 3.440.594 em 2060.



(Disponível em: https://www.campograndenews.com.br/economia/ibge-mostra-populacao-de-ms-em-crescimento-e-envelhecida. Acesso em 10 nov. 2018).

O crescimento previsto no texto é descrito pela função:

Ⓐ afim.
Ⓑ constante.
Ⓒ quadrática.
Ⓓ logarítmica.
Ⓔ trigonométrica.

26. (UFRGS) Leia o texto abaixo, sobre terremotos

Magnitude é uma medida quantitativa do tamanho do terremoto. Ela está relacionada com a energia sísmica liberada no foco e também com a amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos. Para cobrir todos os tamanhos de terremotos, desde os microtremores de magnitudes negativas até os grandes terremotos com magnitudes superiores a 8.0, foi idealizada uma escala logarítmica, sem limites. No entanto, a própria natureza impõe um limite superior a esta escala, já que ela está condicionada ao próprio limite de resistência das rochas da crosta terrestre.

Magnitude e energia podem ser relacionadas pela fórmula descrita por Gutenberg e Richter em 1935:

$$\log(E) = 11{,}8 + 1{,}5M$$

E= energia liberada em Erg;
M = magnitude do terremoto.

Sabendo que o terremoto que atingiu o México em setembro de 2017 teve magnitude 8,2, assinale a alternativa que representa a melhor aproximação para a energia liberada por esse terremoto, em Erg

Ⓐ 13,3
Ⓑ 20
Ⓒ 24
Ⓓ 10^{24}
Ⓔ 10^{28}

27. (UNIPE 2018) Na década de 1960, uma região registrou 1000 casos de uma doença. Desde então, campanhas de prevenção reduziram o número de casos em cerca de 10% a cada década.

Supondo que o número de casos continue diminuindo no mesmo ritmo, e usando, se preciso, $\log_{10}2 \cong 0{,}3$ e $\log_{10}3 \cong 0{,}477$, é correto estimar que tal número ficará abaixo de 400 na década de

A [2020, 2030[
B [2030, 2040[
C [2040, 2050[
D [2050, 2060[
E [2060, 2070[

28. (FMJ 2018) Analise o gráfico.

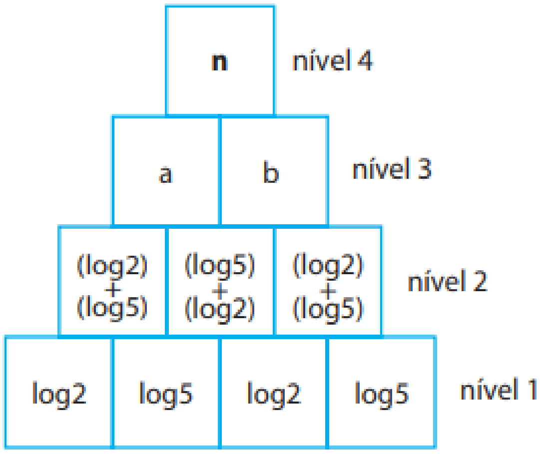
(http://g1.globo.com)

Suponha que essa arrecadação, no período de 2014 a 2017, possa ser expressa, aproximadamente, pela função $f(x) = 81{,}1 + 7{,}5\,(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 4) + 64 \cdot \log_a x$, sendo $f(x)$ o valor arrecadado (em milhões de reais) e $x = 1, 2, 3$ e 4 correspondendo aos anos de 2014, 2015, 2016 e 2017, respectivamente.

Considerando $\log_a 2 = 0{,}69$, a arrecadação aproximada esperada para 2017 é

A R$ 162.800.000,00.
B R$ 158.700.000,00.
C R$ 154.600.000,00.
D R$ 146.200.000,00.
E R$ 169.400.000,00.

29. (USS 2018) A figura abaixo é formada por 10 quadrados que contêm um número real cada, dispostos em quatro níveis.



A partir do nível 2, o número em cada quadrado é obtido pela soma dos números representados nos dois quadrados que estão imediatamente abaixo dele:

Como **n** = a+b, o valor de **n** é igual a:

- **A** 4
- **B** 5
- **C** 7
- **D** 10

30. (UNIC 2018) Em uma comunidade, o número aproximado de pessoas que toma conhecimento de determinado fato, t meses após ele ter ocorrido, pode ser estimado através do modelo matemático definido pela função

$$f(t)=\frac{1800}{3+5.2^{-t}}$$

A partir dessa expressão, considerando-se log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, para que 375 pessoas tomem conhecimento de um fato, após a sua ocorrência, estima-se que o número de dias necessários é igual a

- **A** 36
- **B** 44
- **C** 52
- **D** 60
- **E** 72

31. (ENEM 2018) Com o avanço em ciência da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.

Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100 000 transistores distribuídos em 0,25 cm2 de área. Desde então, o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).

Disponivel em: www.pocket-lint.com. Acesso em: 1 dez. 2017 (adaptado).

Considere 0,30 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores?

- Ⓐ 1999
- Ⓑ 2002
- Ⓒ 2022
- Ⓓ 2026
- Ⓔ 2146

32. (EBMSP 2018) Para o resgate de uma dívida, a forma de pagamento acertada foi de o devedor pagar R$1000,00 em janeiro de 2018 e se comprometer a pagar, a cada mês subsequente, 90% da parcela paga no mês anterior.

Sabendo-se que a primeira parcela inferior a R$100,00 quitará a dívida e, considerando, se necessário, log 3 = 0,477, é correto afirmar que esse pagamento deverá ser feito em

- Ⓐ dezembro de 2018.
- Ⓑ maio de 2019.
- Ⓒ julho de 2019.
- Ⓓ novembro de 2019.
- Ⓔ fevereiro de 2020.

33. (UNINTA 2018) Considere-se que, próximo à superfície terrestre, a pressão atmosférica P, dada em atmosferas(atm), varia aproximadamente conforme o modelo matemático $P(h) = (0,9)^h$, em que h é a altura dada em hectômetros (hm).

Admitindo-se log 3 = 0,48 e de acordo com o modelo apresentado, é correto afirmar que uma montanha cuja pressão atmosférica, no seu topo, seja de 0,03atm tem altura aproximadamente igual a

- Ⓐ 38hm.
- Ⓑ 42hm.
- Ⓒ 45hm.
- Ⓓ 48hm.
- Ⓔ 52hm.

34. (FAMECA 2017) Para resolver uma questão da prova discursiva de Matemática, João precisou calcular o $\log_{10}(2016)$. Após uma análise, verificou que, considerando $\log_{10}(2) = a$, $\log_{10}(3) = b$ e $\log_{10}(7) = c$, era possível escrever $\log_{10}(2016)$ em função de a, b e c.

A partir desse raciocínio, o valor do $\log_{10}(2016)$ encontrado por João foi

- A) 5a + 2b + c.
- B) 5a + 3b + 7c.
- C) 2a + 3b + 7c.
- D) 2a + 3b + c.
- E) a + 2b + 7c.

35. (ENEM 2ª APLICAÇÃO 2017) Nas informações veiculadas nos órgãos de comunicação quando da ocorrência de um terremoto, faz-se referência a magnitude (M), que se refere a quantos graus o fenômeno atingiu na escala Richter. Essa medida quantifica a energia liberada no epicentro do terremoto, e em seu cálculo utilizam-se como parâmetros as medidas da amplitude sísmica (A), em micrômetro, e da frequência (f), em hertz. Esses parâmetros são medidos por aparelhos especiais chamados sismógrafos, e relacionam-se segundo a função $M = \log (A \times f) + 3{,}3$. Pela magnitude do terremoto na escala Richter, pode-se estimar seus efeitos de acordo com o quadro, onde não estão considerados terremotos de magnitudes superiores a 7,9.

Magnitude (Grau)	Efeitos do terremoto segundo a escala Ricther
$M \leq 3{,}5$	Registrado (pelos aparelhos), mas não perceptível pelas pessoas.
$3{,}5 < M \leq 5{,}4$	Percebido, com pequenos tremores notados pelas pessoas.
$5{,}4 < M \leq 6{,}0$	Destrutivo, com consequências significativas em edificações pouco estruturadas.
$6{,}0 < M \leq 6{,}9$	Destrutivo, com consequências significativas para todo tipo de edificação.
$6{,}9 < M \leq 7{,}9$	Destrutivo, retiram os edifícios de suas fundações, causam fendas no solo e danificam as tubulações contidas no subsolo.

Um terremoto teve sua amplitude e frequências medidas e obteve-se A = 1 000 micrômetros e f = 0,2 hertz.

Use -0,7 como aproximação para log (0,2).
Disponível em: www.mundoeducacao.com.br. Acesso em: 11 jul. 2012 (adaptado).

Considerando o quadro apresentado, e analisando o resultado da expressão que fornece a magnitude desse terremoto, conclui-se que ele foi

- A) registrado, mas não percebido pelas pessoas.
- B) percebido, com pequenos tremores notados pelas pessoas.
- C) destrutivo, com consequências significativas em edificações pouco estruturadas.
- D) destrutivo, com consequências significativas para todo tipo de edificação.
- E) destrutivo, com consequências nas fundações dos edifícios, fendas no solo e tubulações no subsolo.

36. (UPMEDICINA 2017) Com vistas a cumprir condições mínimas de segurança para o consumo de água de um reservatório que sofreu infiltrações de toxinas, gerando uma toxicidade dez vezes acima do nível de segurança, será necessário aguardar um determinado tempo.

Matemáticos construíram a função $T(d) = 10 \cdot S \cdot (0{,}5)^{\frac{d}{10}}$, que permite calcular o nível de toxidez depois de d dias, em uma situação em que o nível atual de toxicidade é 10.S. Para que o nível de toxicidade T(d) seja igual ao nível de segurança S, quanto tempo será necessário aguardar?

(Use log 2 = 0,3)

Ⓐ 3 dias.
Ⓑ 3 dias e 8 horas.
Ⓒ 30 dias.
Ⓓ 33 dias e 8 horas.
Ⓔ 36 dias e 8 horas.

37. (UFN 2017)

O restaurante quer fazer propaganda diária na TV e pretende atingir no mínimo 70.000 pessoas na cidade de Santa Maria. O setor comercial da TV vende somente pacotes com o número de inserções sendo múltiplos de 10, ou seja, 10 ou 20 ou 30 inserções, e assim por diante. Foi mostrado ao anunciante um modelo matemático $y(t) = 1 + 3.(1{,}1)^t$, onde t representa o número de inserções da propaganda na TV e y, em milhares de pessoas, o número de pessoas que ficam conhecendo o produto, no caso, o restaurante.

Para atingir o objetivo proposto, o restaurante deve fechar com a TV um pacote de (Dados: log 1,1 = 0,04, log 3 = 0,48 e log 69 = 1,84).

Ⓐ 10 inserções.
Ⓑ 20 inserções.
Ⓒ 30 inserções.
Ⓓ 40 inserções.
Ⓔ 50 inserções.

38. (FACERES 2017) Aplicar o dinheiro em caderneta de poupança é ter segurança na aplicação, porém, é uma das piores taxas de rendimentos encontradas no mercado financeiro. Sendo assim, uma pessoa opta por comprar uma casa esperando valorização do seu dinheiro.

Sabendo-se que este imóvel valorizou 12% ao ano, e desprezando qualquer forma de taxação de impostos, é correto afirmar que seu valor duplicou num período de:

Use os dados: log 2 = 0,30 e log 7 = 0,85

A 6 anos.
B 8 anos.
C 10 anos.
D 12 anos.
E 15 anos.

39. (UNICENTRO 2017) A temperatura T (em °C) de um objeto varia em função do tempo t (em minutos), de acordo com $T(t) = 75 \cdot 2^{-kt}$, em que k é uma constante.

Se, em 3min, a temperatura caiu pela metade, é correto calcular, usando $\log_2 5 \approx 2{,}32$, se preciso, que, para a temperatura chegar a 10% da inicial, será necessário aguardar, aproximadamente, mais outros

A 3min
B 5min
C 7min
D 9min
E 11min

40. (IFAL 2016) Num determinado mês, a quantidade vendida Q de um certo produto, por dia, em uma loja, em função do dia d do mês, é representada pela função $Q = \log_2 d$.

Qual a quantidade vendida desse produto no dia 16 desse mês?

A 0.
B 1.
C 2.
D 3.
E 4.

41. (FAC. ALBERT EINSTEIN 2016) Uma pesquisa foi desenvolvida a partir de 250 bactérias de uma cultura. Estimou-se então, de maneira aproximada, que, durante certo tempo, o aumento percentual do número de bactérias na cultura poderia ser obtido pela expressão $B(t) = -30 \cdot \log_3 (t + 21) + 150$, em que t é o tempo decorrido, em minutos, após o início da pesquisa.

Nessas condições, ao fim da primeira hora da pesquisa, quantas bactérias havia em tal cultura?

A 325
B 400
C 450
D 525

42. (FATEC 2017) O relatório anual “Tendências Globais”, que registra o deslocamento forçado ao redor do mundo, aponta um total de 65,3 milhões de pessoas deslocadas por guerras e conflitos até o final de 2015 – um aumento de quase 10% se comparado com o total de 59,5 milhões registrado em 2014. Esta é a primeira vez que o deslocamento forçado ultrapassa o marco de 60 milhões de pessoas. No final de 2005, o Alto Comissariado das Nações Unidas para Refugiados (ACNUR) registrou uma média de 6 pessoas deslocadas a cada minuto. Hoje (2015), esse número é de 24 por minuto. O universo de 65,3 milhões inclui 21,3 milhões de refugiados ao redor do mundo, 3,2 milhões de solicitantes de refúgio e 40,8 milhões de deslocados que continuam dentro de seus países.

<http://tinyurl.com/k2q6v9y>. Acesso em: 03.02.2017. Original colorido. Adaptado.

Suponha um aumento exato de 10% no número de pessoas deslocadas no ano de 2015 em relação a 2014, e que esse crescimento ocorrerá a essa mesma taxa anualmente.

O número de pessoas deslocadas, em relação a 2014, dobrará no ano

Adote:
log 2 = 0,30
log 1,1 = 0,04

Ⓐ 2018.
Ⓑ 2020.
Ⓒ 2022.
Ⓓ 2024.
Ⓔ 2026.

43. (FPP 2016) Um líquido evapora à razão de 4% do seu volume a cada hora.

O tempo necessário para que o volume desse líquido seja 1/4 do volume inicial é:
(Dados: log 2 = 0,3 e log 3 = 0,48)

Ⓐ 18 horas.
Ⓑ 21 horas.
Ⓒ 25 horas.
Ⓓ 28 horas.
Ⓔ 30 horas.

44. (UESB 2016) Após um medicamento ser administrado a um paciente, sua concentração C, (em mg/l), na corrente sanguínea varia em função do tempo t, em horas, de acordo com a expressão

$$C(t) = 3{,}2 \,.\, 4^{-\frac{t}{6}}$$

Usando-se $\log_2 \cong 0{,}3$, se preciso, o tempo contado até que a concentração atinja um valor C pode ser obtido, aproximadamente, por meio da função

A

$t(C) = -5 \,.\, \log\left(\frac{C}{32}\right)$

B

$t(C) = 8 \,.\, \log\left(\frac{5C}{16}\right)$

C

$t(C) = 5 - 10 \cdot \log C$

D

$t(C) = 8 + 6 \cdot \log C$

E

$t(C) = 6 + 46 \cdot \log C$

45. (FMC 2016) A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é dada por

$$I = \frac{2}{3} log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

onde E é a energia liberada no terremoto em kWh (quilowatt-hora) e $E_0 = 7.10^{-3}$ kWh.

Considerando-se esse fato, em um terremoto de intensidade 6, na escala Richter, é liberada a energia de:

A $\frac{1}{7} \cdot 10^6 kWh$

B $7 \cdot 10^6 kWh$

C $6 \cdot 10^7 kWh$

D $\frac{1}{7} \cdot 10^7 kWh$

E $7 \cdot 10^{12} kWh$

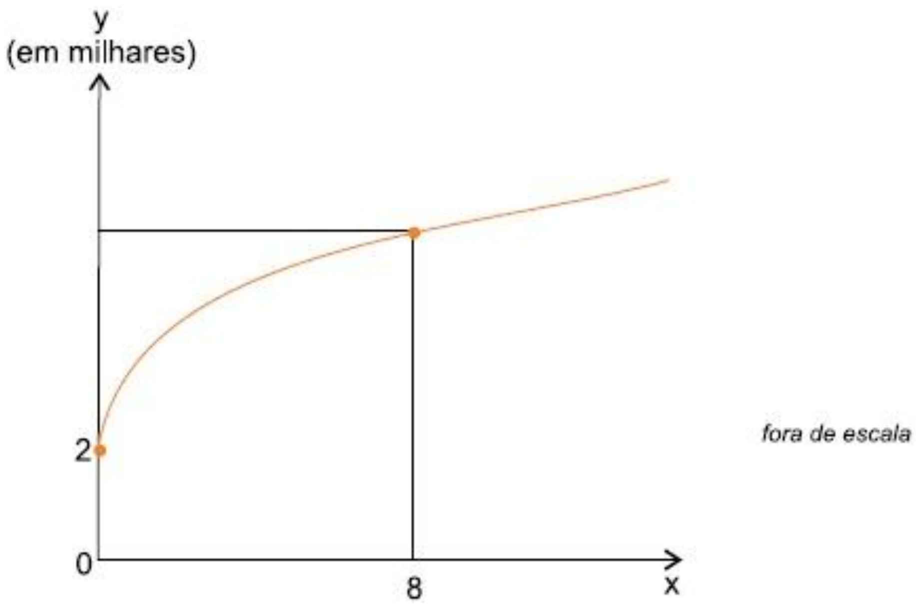
46. (UNEB 2016) Segundo uma pesquisa, após t meses da constatação da existência de uma epidemia, o número de pessoas, por ela atingidas, é obtido por

$$N(t) = \frac{10000}{1 + 8 \cdot 4^{-2t}}$$

Considerando-se que o mês tenha 30 dias, log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, pode-se estimar que 2500 pessoas serão atingidas por essa epidemia em, aproximadamente,

Ⓐ dez dias.
Ⓑ vinte e seis dias
Ⓒ três meses.
Ⓓ dez meses.
Ⓔ um ano.

47. (UNIFAE 2016) O número de pessoas infectadas por uma determinada doença obedece à função y = k + log (3x +1), com k ∈ R, sendo y o número de pessoas infectadas (em milhares) e x o número de semanas, conforme mostra o gráfico.



Usando log 2 = 0,3 e supondo que o crescimento do número de pessoas infectadas permaneça o mesmo pelas próximas semanas, caso nenhuma providência seja tomada, é correto concluir que o número de pessoas infectadas na 8ª semana será de

Ⓐ 3 700.
Ⓑ 3 100.
Ⓒ 4 800.
Ⓓ 4 300.
Ⓔ 3 400.

48. (FACISB 2016) Durante os testes para o desenvolvimento de um novo repelente de insetos, voluntários colocaram por 5 minutos suas mãos, cobertas com pano impregnado com diferentes concentrações da substância DEPA, em uma câmara contendo 200 fêmeas de mosquitos. A partir dos resultados, os pesquisadores desenvolveram um modelo matemático que prevê a quantidade P(x) de picadas recebidas pelos voluntários em função da concentração x de DEPA, em porcentagem.

O modelo é dado por:

$$P(x) = 25 - 30 \cdot \log x$$

De acordo com esse modelo e considerando log 2 = 0,30, conclui-se que, quando a concentração de DEPA é duplicada, o número de picadas

A permanece igual.
B é reduzido em 9 picadas.
C cai pela metade.
D é reduzido em 3 picadas.
E cai cerca de 10%.

49. (FMABC 2016) Um comerciante usa a equação $y = \log_2 800 - \log_2 x$ para estabelecer a relação entre y (número de unidades que ele compra de certo produto), e x (preço pelo qual deve ser vendida a unidade desse mesmo produto).

Nessas condições, pela compra de 6 unidades, que quantia o comerciante deverá estabelecer para o preço unitário de venda de tal produto?

A R$ 12,00
B R$ 12,50
C R$ 14,00
D R$ 14,50

50. (UNIPE 2016) Em 2007, certa cidade apresentou 420 casos de Zika. Campanhas de prevenção reduziram esse número, ano a ano, até chegar a 60 casos, em 2016, quando um corte de gastos levou à interrupção das campanhas.

Supondo-se que, a partir de 2016, o número de casos comece a subir 20% ao ano, é correto estimar, usando-se os logaritmos decimais log 7 ≅ 0,85 e log 12 ≅ 1,08, se preciso, que a cidade passará a ter mais casos do que tinha em 2007, por volta do ano de

A 2024
B 2025
C 2026
D 2027
E 2028

GABARITO

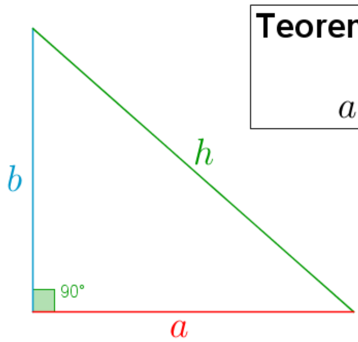
QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	D
02	C
03	C
04	D
05	D
06	C
07	E
08	E
09	E
10	D
11	C
12	D
13	B
14	A
15	D
16	A
17	C
18	E
19	D
20	E
21	D
22	C
23	D
24	D
25	D
26	D
27	C
28	E
29	A
30	B
31	C
32	D
33	A
34	A
35	C
36	D
37	D
38	A
39	C
40	E
41	A
42	C
43	E
44	C
45	B
46	A
47	E
48	B
49	B
50	D

trigonometria e funções trigonométricas

CONHECIMENTOS ALGÉBRICOS

CONCEITOS INICIAIS

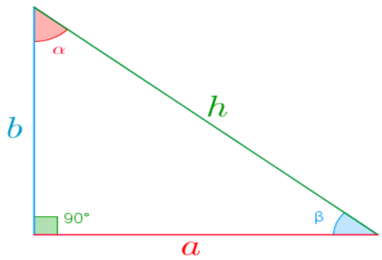
Ao falarmos sobre triângulos retângulos, a primeira propriedade que vem à cabeça de muitos de vocês, certamente, é o Teorema de Pitágoras. Mas, apesar de sua beleza e aplicabilidade, o Teorema de Pitágoras não é a única propriedade importante dos triângulos retângulos.



Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = h^2$$

Em nossas aulas, vamos explorar os triângulos retângulos utilizando ferramentas da Geometria como, por exemplo, semelhança, para obtermos várias propriedades interessantes e largamente utilizadas em medições indiretas. E, diferentemente do Teorema de Pitágoras, que utiliza apenas as medidas dos lados dos triângulos retângulos, aqui utilizaremos também as medidas dos dois ângulos agudos desses triângulos, já que o início das nossas discussões será estabelecer, de alguma forma, relações entre as medidas dos lados e dos ângulos internos de um triângulo retângulo.



O ramo da matemática que estuda relações entre ângulos e lados de um triângulo é a **Trigonometria**.

A palavra trigonometria vem do grego – **τριγωνομετρία** – que é a composição das palavras gregas **τρίγωνον** (trigonon: triângulo) e **μέτρον** (metron: medida). A primeira dessas, por sua vez, é composta das palavras **τρεῖς, τρία** (tris, tría: três) e **γωνία** (gonia: ângulo). Assim, utilizaremos os significados dos três radicais gregos que formam a palavra Trigonometria para apresentar o objetivo central das nossas aulas:

tri (três) + gonos (ângulos) + metron (medidas)

estudar medições em triângulos.

A Trigonometria atua direta ou indiretamente em vários ramos da Matemática que requerem medidas de precisão e tem numerosas aplicações na Astronomia, na Topografia, no estudo de imagens digitais, em sistemas de navegação por satélite, e, de maneira geral, na determinação de ângulos e de distâncias inacessíveis. Em nossas aulas, apresentaremos algumas das aplicações geométricas da Trigonometria. E se vocês estão habituados a ver a palavra trigonometria em tópicos do Enem, não se preocupem: para entender o que vai ser tratado aqui, vocês só precisam saber um pouco sobre triângulos!

UM POUCO DE HISTÓRIA

Há mais de 3000 anos, os egípcios e os babilônicos assistiram ao início do desenvolvimento da Trigonometria, que surgiu, principalmente, devido a problemas da Astronomia, Agrimensura, Construção e Navegação. Medidas na agrimensura, medidas para a construção de pirâmides, previsão de rotas e posições de corpos celestes, melhoria na exatidão de rotas de navegação e no cálculo do tempo foram situações específicas nas quais são encontrados os primeiros indícios de rudimentos da Trigonometria.

No **papiro *Rhind***, por exemplo, são encontrados problemas envolvendo trigonometria. O papiro *Rhind*, ou *Ahmes*, mede 5,5 m de comprimento por 0,32 m de largura e data de, aproximadamente, 1650 a.C. É um texto matemático escrito na forma de manual prático e contém 85 problemas copiados em escrita hierática, pelo escriba *Ahmes*, de um trabalho mais antigo.

Estudiosos apontam que na tábua cuneiforme ***Plimpton* 322** há indícios de elementos de trigonometria. A *Plimpton* 322 é considerada a mais notável dentre todas as tabletas babilônicas já encontradas. É uma tábua de argila, parcialmente quebrada, medindo cerca de 12,7 cm de largura, 8,8 cm de altura e 2 cm de espessura, que foi recuperada no deserto do Iraque. Estima-se que o texto foi escrito entre 1900 e 1600 a.C.

Uma parte do papiro Rhind – Museu Britânico, Londres.

Plimpton 322 – Columbia University

Ainda como parte da Astronomia, o estudo da Trigonometria se difundiu pela Grécia, Índia e Arábia. Os gregos antigos fizeram um estudo sistemático das relações entre ângulos – ou arcos – numa circunferência e os comprimentos de suas cordas.

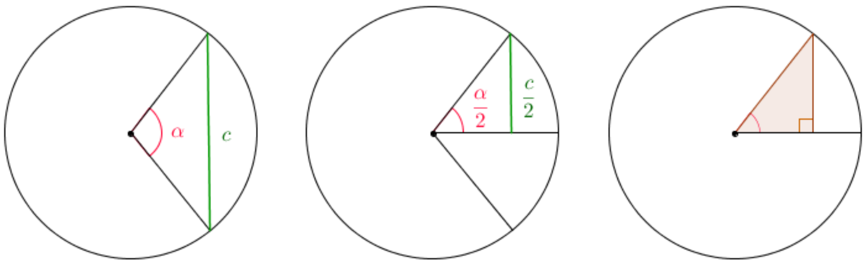
Particularmente o astrônomo, construtor, cartógrafo e matemático grego ***Hiparco de Nicéia***, que viveu entre os anos 180 e 125 a.C. e que ganhou o direito de ser chamado de o "Pai da Trigonometria", construiu uma tabela com comprimentos de cordas que é considerada a primeira tabela trigonométrica. Com a ajuda dessa tabela ele podia relacionar facilmente os lados e os ângulos de qualquer triângulo do plano. Mais do que isso, fortemente influenciado pela matemática babilônica, *Hiparco* acreditava que a melhor base numérica para contagem era a 60. Dessa forma, introduziu na Grécia a divisão da circunferência em 360360 partes iguais, atribuiu o nome *"arco de 1 grau"* a cada parte em que a circunferência ficou dividida e dividiu cada arco de 1 grau em 60 partes obtendo, assim, o *"arco de 1 minuto"*. Infelizmente, os doze livros que continham a trigonometria de *Hiparco*, assim como o restante da sua obra, se perderam com o tempo...

Hiparco de Nicéia (180 – 125 a.C)

Cláudio Ptolomeu (90 – 168)

No entanto, o conhecimento produzido por *Hiparco* foi preservado e ampliado brilhantemente por ***Cláudio Ptolomeu*** (90 – 168): extraordinário astrônomo, geógrafo, físico e matemático da Universidade de Alexandria que também estudou os astros com a ajuda da trigonometria. É dele o mais influente e significativo compêndio de Astronomia da Antiguidade: *Syntaxis mathematica*. Escrita em 13 volumes, essa obra ficou conhecida como ***Almagesto***, que significa "o maior", em árabe, já que os tradutores árabes a consideravam a maior obra sobre Astronomia existente na época. A trigonometria de Ptolomeu aparece nos capítulos dez e onze do primeiro livro do *Almagesto*, como pré-requisito para o restante da obra. O *Almagesto* foi a mais importante fonte de consulta para os astrônomos até o século VIII, época na qual o mundo começa a conhecer a matemática hindu.

Com a matemática hindu apareceram razões trigonométricas, como as que trabalharemos nesta Sala, e os métodos de se obter tabelas trigonométricas foram aperfeiçoados. Mais do que isso, a Índia revolucionou a Trigonometria com um conjunto de textos denominados ***Siddhanta***, que significa sistemas de Astronomia. Apesar das poucas explicações e de nenhuma prova, o *Siddhanta* segue um caminho diferente do caminho do *Almagesto* de Ptolomeu e substitui a relação entre "as cordas de um círculo e os ângulos centrais correspondentes" pela relação entre "a metade das cordas de um círculo e a metade dos ângulos centrais correspondentes", relação essa chamada por eles de *jiva*. Surge aí a "Trigonometria no triângulo retângulo".



O conflito entre a Trigonometria do Almajesto e a Trigonometria hindu termina quando o matemático árabe ***al-Battani*** (850 – 929) adota a Trigonometria hindu, introduzindo uma inovação preciosa para a matemática: o círculo de raio unitário.
Da Arábia, a Trigonometria alcançou a Europa, onde se separa da Astronomia para se tornar um ramo independente da Matemática. Nesse novo caminho, a Trigonometria ganha um tratamento analítico com o matemático francês ***François Viète*** (1540-1603), que também desenvolveu métodos para determinar triângulos planos e esféricos. No início do século XVII, o matemático escocês ***John Napier*** (1550-1617) fez, também, contribuições para a trigonometria esférica.

No século XVIII, como não poderia deixar de ser, a trigonometria recebeu contribuições importantes do matemático inglês ***Isaac Newton*** (1643-1727) e do matemático suíço ***Leonhard Euler*** (1707-1783). Particularmente, *Euler* fundou a trigonometria moderna, introduziu a notação atual das funções trigonométricas e estabeleceu a relação da função exponencial com as funções trigonométricas, o que permitiu inseri-las no campo dos números complexos. Com *Euler*, a trigonometria toma a sua forma atual!

François Viète

John Napier

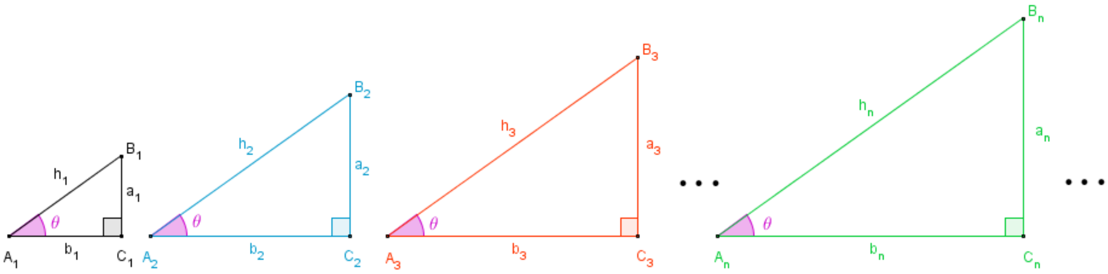
Isaac Newton

Leonhard Euler

RAZÕES ESPECIAIS

Vamos iniciar este tópico estabelecendo três razões entre números reais: essas razões aparecem de maneira natural quando lidamos com triângulos retângulos semelhantes e são conhecidas como razões trigonométricas.

Considere uma família de triângulos retângulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ..., $A_nB_nC_n$, ... de modo que cada triângulo $A_nB_nC_n$ tenha um dos ângulos com medida θ, $0^o < \theta < 90^o$.



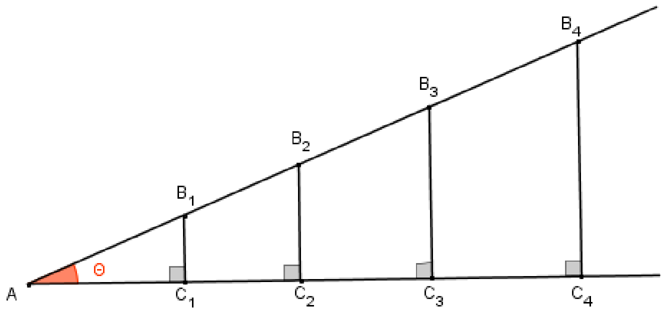
Como esses triângulos têm dois ângulos com a mesma medida, θ e 90^o, então todos os triângulos são semelhantes e, consequentemente:

- $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n} = \cdots$
- $\dfrac{a_1}{h_1} = \dfrac{a_2}{h_2} = \dfrac{a_3}{h_3} = \cdots = \dfrac{a_n}{h_n} = \cdots$
- $\dfrac{b_1}{h_1} = \dfrac{b_2}{h_2} = \dfrac{b_3}{h_3} = \cdots = \dfrac{b_n}{h_n} = \cdots$

Uma observação essencial é que, fixado um ângulo agudo de medida θ, em graus, para todo triângulo retângulo que tenha um de seus ângulos agudos com medida θ, as razões

$$\frac{\textit{cateto oposto a } \theta}{\textit{cateto adjacente a } \theta} \qquad \frac{\textit{cateto oposto a } \theta}{\textit{hipotenusa}} \qquad \frac{\textit{cateto adjacente a } \theta}{\textit{hipotenusa}}$$

são sempre as mesmas.



$$\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} = \frac{B_4C_4}{AC_4} = \ldots$$

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \frac{B_4C_4}{AB_4} = \ldots$$

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \frac{AC_3}{AB_3} = \frac{AC_4}{AB_4} = \ldots$$

Assim, essas razões não dependem dos comprimentos dos lados dos triângulos retângulos considerados:

Elas são determinadas pelo ângulo de medida θ desses triângulos.

Daremos, então, nomes especiais a essas razões, explicitando a dependência entre elas e o ângulo de medida θ:

A constante definida pelas razões entre os comprimentos dos catetos opostos e dos catetos adjacentes dos triângulos retângulos semelhantes será denominada "tangente de θ" e denotada por tg θ:

$$\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} = \frac{B_4C_4}{AC_4} = \ldots$$

A constante definida pelas razões entre os comprimentos dos catetos opostos e das hipotenusas dos triângulos retângulos semelhantes será denominada "seno de θ" e denotada por sen θ:

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \frac{B_4C_4}{AB_4} = \ldots$$

A constante definida pelas razões entre os comprimentos dos catetos adjacentes e das hipotenusas dos triângulos retângulos semelhantes será denominada "cosseno de θ" e denotada por cos θ:

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \frac{AC_3}{AB_3} = \frac{AC_4}{AB_4} = \ldots$$

Como os valores para o seno, o cosseno e a tangente de ângulos com medidas $\theta, 0^o < \theta < 90^o$ são constantes, é possível construir tabelas contendo aproximações para tais valores, o que facilita enormemente a manipulação desses dados em aplicações. Essas tabelas são conhecidas como tabelas trigonométricas ou tábuas trigonométricas.

Embora razões trigonométricas possam ser calculadas para ângulos com medidas não inteiras, as tabelas trigonométricas mais simples são as que apresentam as razões trigonométricas definidas para ângulos com medidas inteiras entre 0 e 90 graus.

ângulo	seno	cosseno	tangente
1°	0,017452	0,999848	0,017455
2°	0,034899	0,999391	0,034921
3°	0,052336	0,998630	0,052408
4°	0,069756	0,997564	0,069927
5°	0,087156	0,996195	0,087489
6°	0,104528	0,994522	0,105104
7°	0,121869	0,992546	0,122785
8°	0,139173	0,990268	0,140541
9°	0,156434	0,987688	0,158384
10°	0,173648	0,984808	0,176327
11°	0,190809	0,981627	0,194380
12°	0,207912	0,978148	0,212557
13°	0,224951	0,974370	0,230868
14°	0,241922	0,970296	0,249328
15°	0,258819	0,965926	0,267949
16°	0,275637	0,961262	0,286745
17°	0,292372	0,956305	0,305731
18°	0,309017	0,951057	0,324920
19°	0,325568	0,945519	0,344328
20°	0,342020	0,939693	0,363970
21°	0,358368	0,933580	0,383864
22°	0,374607	0,927184	0,404026
23°	0,390731	0,920505	0,424475
24°	0,406737	0,913545	0,445229
25°	0,422618	0,906308	0,466308
26°	0,438371	0,898794	0,487733
27°	0,453990	0,891007	0,509525
28°	0,469472	0,882948	0,531709
29°	0,484810	0,874620	0,554309
30°	0,500000	0,866025	0,577350
31°	0,515038	0,857167	0,600861
32°	0,529919	0,848048	0,624869
33°	0,544639	0,838671	0,649408
34°	0,559193	0,829038	0,674509
35°	0,573576	0,819152	0,700208
36°	0,587785	0,809017	0,726543
37°	0,601815	0,798636	0,753554
38°	0,615661	0,788011	0,781286
39°	0,629320	0,777146	0,809784
40°	0,642788	0,766044	0,839100
41°	0,656059	0,754710	0,869287
42°	0,669131	0,743145	0,900404
43°	0,681998	0,731354	0,932515
44°	0,694658	0,719340	0,965689
45°	0,707107	0,707107	1,000000
46°	0,719340	0,694658	1,035530
47°	0,731354	0,681998	1,072369
48°	0,743145	0,669131	1,110613
49°	0,754710	0,656059	1,150368
50°	0,766044	0,642788	1,191754
51°	0,777146	0,629320	1,234897
52°	0,788011	0,615661	1,279942
53°	0,798636	0,601815	1,327045
54°	0,809017	0,587785	1,376382
55°	0,819152	0,573576	1,428148
56°	0,829038	0,559193	1,482561
57°	0,838671	0,544639	1,539865
58°	0,848048	0,529919	1,600335
59°	0,857167	0,515038	1,664279
60°	0,866025	0,500000	1,732051
61°	0,874620	0,484810	1,804048
62°	0,882948	0,469472	1,880726
63°	0,891007	0,453990	1,962611
64°	0,898794	0,438371	2,050304
65°	0,906308	0,422618	2,144507
66°	0,913545	0,406737	2,246037
67°	0,920505	0,390731	2,355852
68°	0,927184	0,374607	2,475087
69°	0,933580	0,358368	2,605089
70°	0,939693	0,342020	2,747477
71°	0,945519	0,325568	2,904211
72°	0,951057	0,309017	3,077684
73°	0,956305	0,292372	3,270853
74°	0,961262	0,275637	3,487414
75°	0,965926	0,258819	3,732051
76°	0,970296	0,241922	4,010781
77°	0,974370	0,224951	4,331476
78°	0,978148	0,207912	4,704630
79°	0,981627	0,190809	5,144554
80°	0,984808	0,173648	5,671282
81°	0,987688	0,156434	6,313752
82°	0,990268	0,139173	7,115370
83°	0,992546	0,121869	8,144346
84°	0,994522	0,104528	9,514364
85°	0,996195	0,087156	11,430052
86°	0,997564	0,069756	14,300666
87°	0,998630	0,052336	19,081137
88°	0,999391	0,034899	28,636253
89°	0,999848	0,017452	57,289962

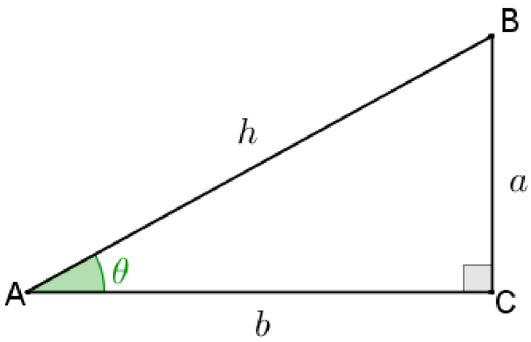
Se vocês nunca utilizaram uma tabela trigonométrica, observem que, a partir do valor de um ângulo, podemos encontrar os valores aproximados dos seus respectivos seno, cosseno e tangente; assim como, a partir do valor de uma razão trigonométrica, conseguimos identificar a medida aproximada do ângulo que a produz. E, por favor, não se assustem com esse monte de números, pois não é preciso decorar o seno, o cosseno e a tangente de todos os possíveis ângulos agudos: tabelas como a que apresentamos podem ser facilmente obtidas em livros ou na Internet. Num primeiro momento, o importante é vocês entenderem direitinho o que é o seno, o cosseno e a tangente de um dado ângulo agudo e terem a certeza de que, se necessário, aproximações para esses valores podem ser obtidas, mesmo sem recorrer a tabelas prontas.

Vale a pena observarmos, mais uma vez, a praticidade da ideia de que a tangente, o seno e o cosseno de um determinado ângulo agudo de medida θ podem ser obtidos a partir de um triângulo retângulo conveniente que tenha um de seus ângulos agudos medindo θ. Isso significa que podemos utilizar tabelas trigonométricas (e calculadoras científicas são tabelas modernas) para obtermos valores de seno, cosseno e tangente de vários ângulos e com isso determinarmos características de triângulos retângulos que apareçam em problemas e até em situações do nosso cotidiano.

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Apenas com o que foi até agora exposto, vocês já têm informações mais do que suficientes para resolverem os exercícios. Mas antes vamos fazer algumas adaptações na linguagem matemática para trabalharmos especificamente com a trigonometria em triângulos retângulos. A trigonometria do triângulo retângulo nada mais é do que o estudo das propriedades da tangente, do seno e do cosseno de ângulos agudos, a partir de triângulos retângulos escolhidos segundo nossa conveniência. Vamos pôr em prática essa ideia, estabelecendo as próximas definições.

Seja ACB um triângulo retângulo com catetos e hipotenusa com comprimentos a, b e h, respectivamente. Seja θ a medida em graus de um dos ângulos agudos desse triângulo, $0^o < \theta < 90^o$.



Chamamos de

- *tangente de* θ, e denotamos por tg θ, a razão entre os comprimentos do cateto oposto e do cateto adjacente a θ:

$$tg\ \theta = \frac{a}{b}$$

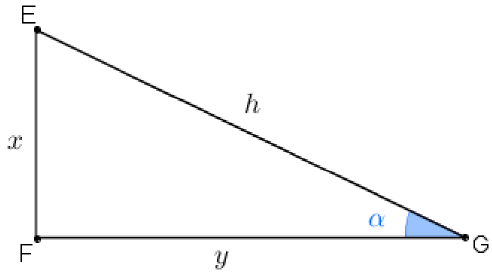
- *seno de* θ, e denotamos por sen θ, a razão entre os comprimentos do cateto oposto a θ e da hipotenusa:

$$sen\ \theta = \frac{a}{h}$$

- *cosseno de* θ, e denotamos por cos θ, a razão entre os comprimentos do cateto adjacente a θ e da hipotenusa:

$$cos\ \theta = \frac{b}{h}$$

A facilidade de aplicarmos essas definições nos permite determinar os comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo, conhecendo apenas o comprimento de sua hipotenusa e a medida de um de seus ângulos agudos. Com efeito, suponhamos que h seja o comprimento da hipotenusa e α seja a medida de um dos ângulos agudos do triângulo retângulo EFG da figura abaixo.



Neste caso o comprimento x e y dos catetos são dados por:

$$x = h \cdot \text{sen}\, \alpha$$
$$y = h \cdot \cos \alpha$$

Em particular, se o comprimento da hipotenusa é 1; então, os catetos são dados simplesmente por:

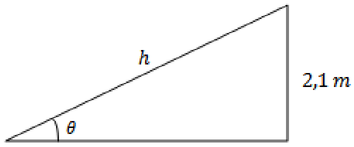
$$x = \text{sen}\, \alpha$$
$$y = \cos \alpha$$

Já que conhecemos as razões trigonométricas, que tal tentarmos solucionar um probleminha? Então, vamos lá!

Em uma oficina mecânica, será necessário construir uma rampa para carros, de modo a vencer um desnível de 2,1 m.

Se o ângulo de inclinação deve ter, no máximo, 25º, qual deve ser o comprimento mínimo da rampa? Considerem para a rampa comprimentos representados com uma casa decimal.

Solução:



Observem que, matematicamente, o problema solicita que seja determinada a medida h mínima da hipotenusa de um triângulo retângulo que tem um de seus ângulos agudos medindo, no máximo, 25º, sendo que o cateto oposto a esse ângulo tem 2,1 m.

Na tabela trigonométrica disponibilizada anteriormente, podemos observar que, conforme a medida de um ângulo agudo aumenta, seu seno também aumenta; assim, se queremos que o ângulo θ de inclinação tenha, no máximo, 25º, então o seno de θ deve ser, no máximo, sen 25º.

Como $sen\ \theta = \frac{2,1}{h}$ e $sen\ 25^o = 0,4227$, então $\frac{2,1}{h} < 0,4227$.

Sendo assim,

$$\frac{2,1}{0,4227} < h$$

E, então

$$h > 4,9681\ m$$

Portanto, para respeitar a exigência de a representação ser expressa com uma casa decimal, o comprimento da rampa deve ser, no mínimo, 5,0 m.

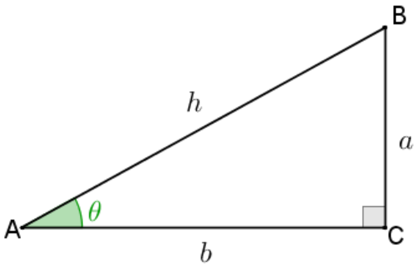
RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Embora tenhamos definido as razões trigonométricas geometricamente é bastante razoável a seguinte pergunta:

Senos, cossenos e tangentes têm algum tipo de relação algébrica entre si?

A resposta positiva à essa pergunta nos permitirá trabalhar algebricamente com as razões trigonométricas e isso nos abre a possibilidade de, quem sabe, determinarmos senos, cossenos e tangentes sem fazermos medições, necessariamente. Isso seria bem legal e “econômico”!

Vamos então, para a primeira relação...



Vimos anteriormente que $sen\ \theta = \frac{a}{h}$, que $cos\ \theta = \frac{b}{h}$ e que $tg\ \theta = \frac{a}{b}$.

Que tal dividirmos o seno pelo cosseno para ver o que acontece?

$$\frac{sen\ \theta}{cos\ \theta} = \frac{\frac{a}{h}}{\frac{b}{h}} = \frac{a}{h} \times \frac{h}{b} = \frac{a}{b} = tg\ \theta$$

Pois é, a primeira relação trigonométrica diz que:

$$tg\ \theta = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta}$$

Agora, que tal elevar tanto o seno quanto o cosseno ao quadrado e depois somá-los para ver o que acontece?

$$sen^2\ \theta = \frac{a^2}{h^2}$$

$$cos^2\ \theta = \frac{b^2}{h^2}$$

$$sen^2\ \theta + cos^2\ \theta = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \frac{a^2 + b^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$$

A segunda relação trigonométrica nos diz que:

$$sen^2\ \theta + cos^2\ \theta = 1$$

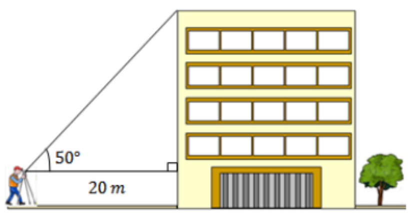
MEDINDO O QUE NÃO PODEMOS ALCANÇAR

Não é necessário nem pensar em medir a distância entre a Lua e o Sol para verificar que existem situações para as quais os chamados “métodos diretos de medição da distância entre dois pontos” não dão certo, mesmo fazendo uma série de contorcionismos. Como o próprio nome sugere, a medida de uma distância de modo direto consiste simplesmente na leitura da distância entre dois pontos mediante a utilização de um instrumento de medida: uma régua graduada, uma fita métrica, uma trena.

Já nos chamados processos indiretos de medida, uma distância é obtida via cálculos matemáticos que vinculam a “distância a ser calculada” a “outras que são obtidas de modo direto”. O probleminha inicial ilustra um processo de medição indireta: o dono da oficina mecânica obteve o comprimento da rampa mesmo sem medi-la, aliás, mesmo sem ter a rampa... O probleminha inicial ilustra também o modo de se resolver muitos dos problemas que envolvem a determinação indireta de distâncias: a partir dos dados, tentamos encontrar um triângulo retângulo de modo que o comprimento da sua hipotenusa ou de um de seus catetos forneça a distância a ser determinada. Fatalmente, a solução desse tipo de problema requer a utilização de razões trigonométricas. Arquitetos, engenheiros e topógrafos se deparam muitas vezes com problemas desse tipo nos projetos que desenvolvem.

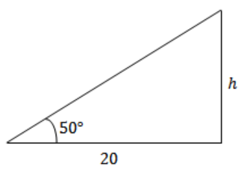
Veremos aqui, três exemplos clássicos de problemas que envolvem distâncias que precisam ser obtidas por medição indireta não só para que vocês os resolvam, mas, principalmente, para que vocês observem exemplos de medições diretas necessárias para a solução desse tipo de problema. Por falar em medida, informamos que as figuras que ilustram os problemas não estão em escala.

Problema 01:



Uma pessoa com $1,75\ m$ de altura e que se encontra a $20\ m$ da base de um edifício vê o ponto mais alto dele sob um ângulo de 50°. Qual a altura aproximada do edifício?

Seja h o comprimento, em metros, do segundo cateto do triângulo retângulo que aparece na figura.

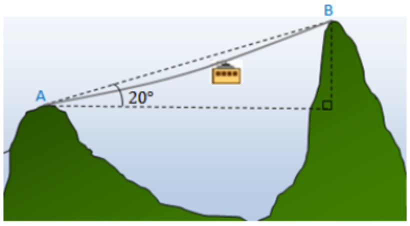


Assim, $tg\ 50^\circ = \dfrac{h}{20}$, donde $h = 20 \times tg\ 50^\circ$.

Portanto $h \approx 23,84$ e, então, a altura do edifício é, aproximadamente, $25,6\ m$.

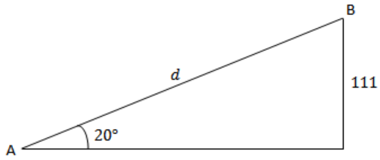
Simples assim...

Problema 02:



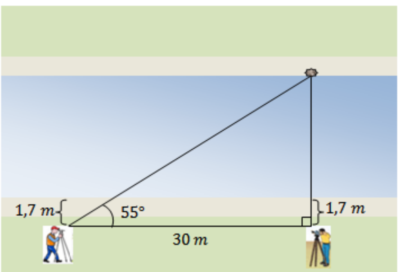
A Secretaria de Turismo de uma cidade vai instalar um teleférico ligando os topos de duas montanhas, uma com $872\ m$ e a outra com $761\ m$ de altura, conforme a figura. Os engenheiros responsáveis pelo projeto mediram o ângulo de vértice A e calcularam que o cabo de aço que sustentará o teleférico tem curvatura e, por isso, seu comprimento é 7% maior que a medida do segmento de reta AB. Assim, calculem o comprimento do cabo.

O desnível em metros entre os pontos A e B é a diferença $872 - 761$, ou seja, $111\ m$. Assim, temos o triângulo retângulo abaixo.



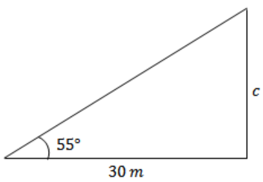
A distância d, em metros, entre os pontos A e B é, portanto, dada por $d = \dfrac{111}{sen\ 20^\circ}$ e assim $d \approx 324,54\ m$.
Como o comprimento do cabo deve ser 7% maior que a medida do segmento de reta AB, então esse comprimento é, aproximadamente, $\boxed{347,26\ m}$.

Problema 03:



Dois engenheiros estão de um mesmo lado de um rio, separados por $30\ m$ um do outro. Cada um deles, em sua respectiva posição, observa uma pedra que está na margem do outro lado, segundo um ângulo específico, conforme mostra a figura. Supondo que ambos estão afastados da margem de uma distância de $1,7\ m$ e que as duas margens do rio são paralelas, qual é a largura do rio? (Desconsiderar a diferença de altura entre os observadores e a pedra.)

Se c é o comprimento em metros do segundo cateto do triângulo retângulo que aparece na figura dada, podemos redesenhar assim esse triângulo:



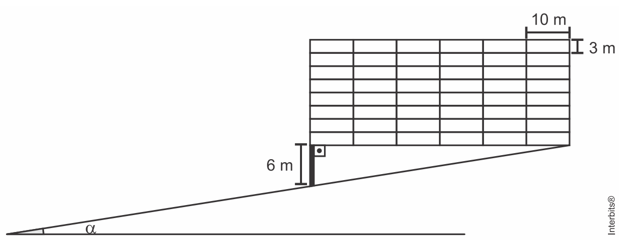
Temos, então, que $tg\ 55^\circ = \dfrac{c}{30}$ e assim:

$c = 30 \times tg\ 55^\circ \approx 42,84\ m$.

Como a distância dos engenheiros à margem mais próxima é $1,7\ m$, então a largura do rio é, aproximadamente, $42,84 - 1,7 = \boxed{41,14\ m}$.

01. (FGV 2015) Um edifício comercial tem 48 salas, distribuídas em 8 andares, conforme indica a figura. O edifício foi feito em um terreno cuja inclinação em relação à horizontal mede α graus. A altura de cada sala é $3\,\text{m}$, a extensão $10\,\text{m}$, e a altura da pilastra de sustentação, que mantém o edifício na horizontal, é $6\,\text{m}$.

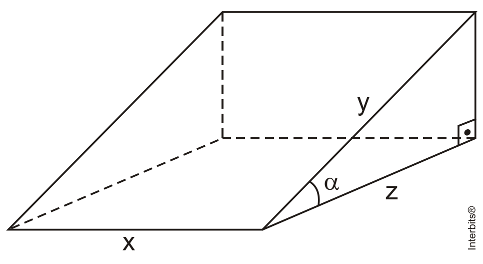
α	$\text{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\text{tg}\alpha$
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405



Usando os dados da tabela, a melhor aproximação inteira para α é

A) 4°
B) 5°
C) 6°
D) 7°
E) 8°

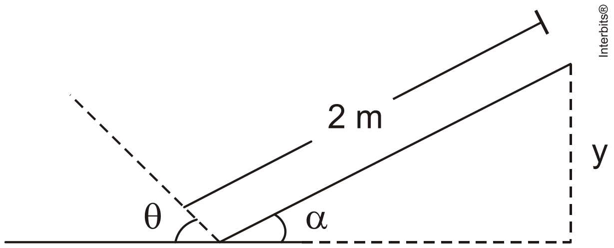
02. (UNIFOR 2014) Uma rampa retangular, medindo $10\,\text{m}^2$, faz um ângulo de $25°$ em relação ao piso horizontal. Exatamente embaixo dessa rampa, foi delimitada uma área retangular A para um jardim, conforme figura.



Considerando que $\cos 25° \cong 0,9$, a área A tem aproximadamente:

A) $3\,\text{m}^2$
B) $4\,\text{m}^2$
C) $6\,\text{m}^2$
D) $8\,\text{m}^2$
E) $9\,\text{m}^2$

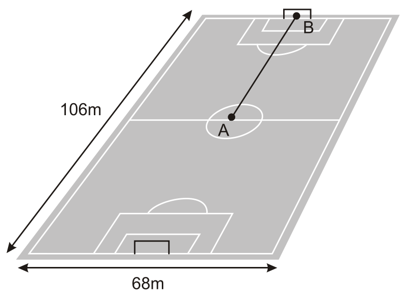
03. (UNIFOR 2014) Uma cama de hospital, equipada com um ajustador hidráulico, move-se de acordo com um controle manual de subir e descer.



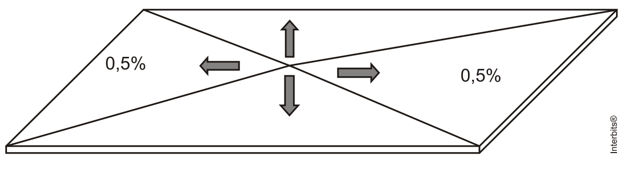
A altura y que a cama varia em função de θ é de:

A) $y = 2\ \text{sen}\theta$
B) $y = 2\ \text{sen}\theta + 2$
C) $y = \text{tg}\theta + 2$
D) $y = 2\cos\theta$
E) $y = 2\cos\theta + 2$

04. (UPE 2014) A figura a seguir representa o campo de jogo da Arena Pernambuco. O ponto A situa-se exatamente no meio do campo, e o ponto B, exatamente no meio da linha do gol.



Nivelada a partir de medições a laser, a fundação tem inclinações muito suaves que evitam o acúmulo de água nas zonas centrais, conforme o esquema a seguir:

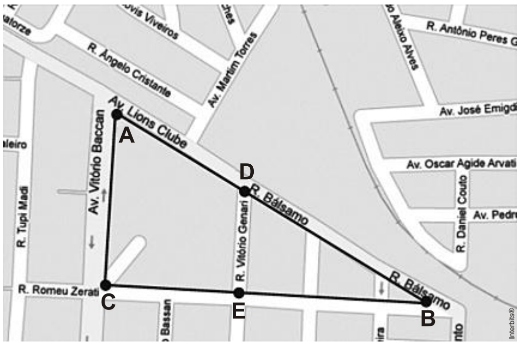


Considerando essas inclinações do campo, qual a diferença de altura entre os pontos A e B, representados no desenho do campo?

A) 15,90 cm
B) 26,50 cm
C) 29,00 cm
D) 34,00 cm
E) 53,00 cm

05. (CPS 2012) As ruas e avenidas de uma cidade são um bom exemplo de aplicação de Geometria. Um desses exemplos encontra-se na cidade de Mirassol, onde se localiza a Etec Prof. Mateus Leite de Abreu.

A imagem apresenta algumas ruas e avenidas de Mirassol, onde percebemos que a Av. Vitório Baccan, a Rua Romeu Zerati e a Av. Lions Clube/Rua Bálsamo formam uma figura geométrica que se aproxima muito de um triângulo retângulo, como representado no mapa.



(http://maps.google.com.br/ Acesso em: 18.02.2012. Adaptado)

Considere que

– a Rua Bálsamo é continuação da Av. Lions Clube;
– o ponto A é a intersecção da Av. Vitório Baccan com a Av. Lions Clube;
– o ponto B é a intersecção da Rua Romeu Zerati com a Rua Bálsamo;
– o ponto C é a intersecção da Av. Vitório Baccan com a Rua Romeu Zerati;
– o ponto D é a intersecção da Rua Bálsamo com a Rua Vitório Genari;
– o ponto E é a intersecção da Rua Romeu Zerati com a Rua Vitório Genari;
– a medida do segmento $\overline{AC}$ é 220 m;
– a medida do segmento $\overline{BC}$ é 400 m e
– o triângulo ABC é retângulo em C.

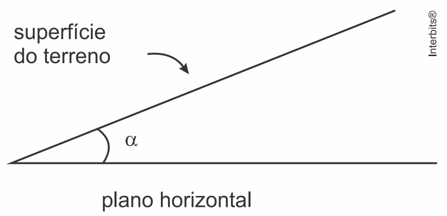
Para resolver a questão, utilize a tabela abaixo.

	26°	29°	41°	48°	62°
sen	0,44	0,48	0,66	0,74	0,88
cos	0,90	0,87	0,75	0,67	0,47
tg	0,49	0,55	0,87	1,11	1,88

No triângulo ABC, o valor do seno do ângulo $A\hat{B}C$ é, aproximadamente,

Ⓐ 0,44.
Ⓑ 0,48.
Ⓒ 0,66.
Ⓓ 0,74.
Ⓔ 0,88.

06. (CPS 2016) Um terreno inclinado traz dificuldades para a construção civil, para a agricultura e para um caminhante aventureiro. Seja α a medida do angulo que a superfície do terreno faz com o plano horizontal, conforme a figura.



A taxa de declividade, ou apenas declividade, de um terreno é a tangente desse angulo $\alpha.$ A declividade de um terreno é, normalmente, expressa em porcentagem, por exemplo, se $\operatorname{tg} \alpha = 0,23,$ então, a taxa de declividade é $23\%.$ Um excursionista sobe uma montanha que tem declividade de $50\%.$ Considere que, do ponto que o excursionista partiu até o topo da montanha, o desnível vencido foi de 1.000 metros.

Nessas condições, a menor distância percorrida pelo excursionista até o topo da montanha e, em quilômetros,

A) $\sqrt{2}$
B) $\sqrt{3}$
C) $\sqrt{4}$
D) $\sqrt{5}$
E) $\sqrt{6}$

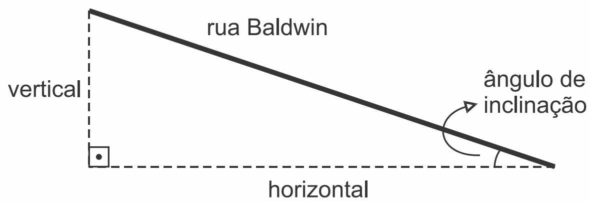
07.

A inclinação das vias públicas é um problema para o transporte. Na cidade de Dunedin, na Nova Zelândia, está localizada a rua Baldwin que, em seu trecho inferior, tem uma rampa de inclinação moderada e, em seu trecho superior, tem uma rampa extremamente íngreme. O trecho com maior inclinação apresenta uma taxa de $1:2{,}86$, o que significa que, para cada $2{,}86$ metros percorridos horizontalmente, é necessário vencer 1 metro na vertical.

<http://tinyurl.com/nxluef7> Acesso em: 22.02.2015. Adaptado.

Considere que:

- o ângulo de inclinação de uma rampa é medido entre a horizontal e a rampa;
- a inclinação de uma rampa é expressa pela tangente do seu ângulo de inclinação; e
- o triângulo retângulo, da figura, representa parte do trecho com maior inclinação da rua Baldwin.



Adote:

Ângulo	Tangente
12°	0,213
15°	0,268
19°	0,344
21°	0,384
24°	0,445

Nessas condições, o ângulo de inclinação desse trecho da rua Baldwin é mais próximo de

Ⓐ 12°
Ⓑ 15°
Ⓒ 19°
Ⓓ 21°
Ⓔ 24°

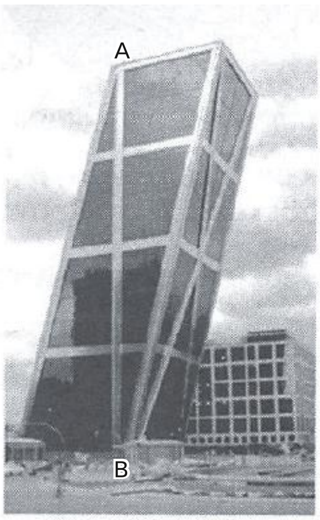
08. (UNEB 2014) A tirolesa é uma técnica utilizada para o transporte de carga de um ponto a outro. Nessa técnica, a carga é presa a uma roldana que desliza por um cabo, cujas extremidades geralmente estão em alturas diferentes. A tirolesa também é utilizada como prática esportiva, sendo considerado um esporte radical.

Em certo ecoparque, aproveitando a geografia do local, a estrutura para a prática da tirolesa foi montada de maneira que as alturas das extremidades do cabo por onde os participantes deslizam estão a cerca de 52m e 8m, cada uma, em relação ao nível do solo, e o ângulo de descida formado com a vertical é de 80°.

Nessas condições, considerando-se o cabo esticado e que tg 10° = 0,176, pode-se afirmar que a distância horizontal percorrida, em metros, ao final do percurso, é aproximadamente igual a

Ⓐ 250
Ⓑ 252
Ⓒ 254
Ⓓ 256
Ⓔ 258

09. (ENEM 2013) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

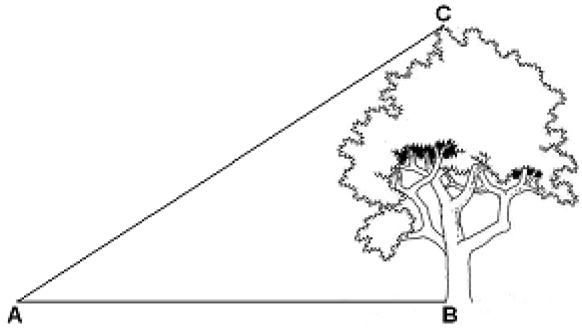


Disponível em: www.flickr.com.
Acesso em: 27 mar. 2012

Utilizando 0,26 como valor aproximado para tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

Ⓐ menor que $100m^2$.
Ⓑ entre $100m^2$ e $300m^2$.
Ⓒ entre $300m^2$ e $500m^2$.
Ⓓ entre $500m^2$ e $700m^2$.
Ⓔ maior que $700m^2$.

10. (CONSUPLAN 2012) O segmento AB na figura representa a sombra de uma árvore sobre superfície plana e horizontal. Se os comprimentos dos segmentos AB e CA são, respectivamente, iguais a 16 m e 20 m, então a altura da árvore é



- A 9 m.
- B 8 m.
- C 12 m.
- D 14 m.
- E 10 m.

ÂNGULOS NOTÁVEIS

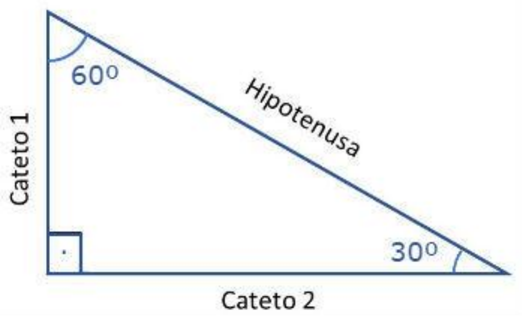
Os ângulos de 30°, 45° e 60° são chamados de notáveis, pois são os que com mais frequência calculamos. Sendo assim, é importante conhecer os valores do seno, cosseno e tangente desses ângulos.

SENO E COSSENO DE 30° E 60°

Os ângulos de 30° e 60° são complementares, ou seja, somam 90°. Encontramos o valor do seno de 30° calculando a razão entre o cateto oposto a 30° e a hipotenusa.

Já o valor do cosseno de 60° é a razão entre o cateto adjacente a 60° e a hipotenusa.

Desta forma, o seno de 30° e cosseno de 60° do triângulo representado abaixo, serão dados por:



$$sen\ 30° = \frac{cateto\ 1}{hipotenusa}$$

$$e$$

$$cos\ 60° = \frac{cateto\ 1}{hipotenusa}$$

Assim, identificamos que o valor do seno de 30° é igual ao valor do cosseno de 60°.

O mesmo acontece com o seno de 60° e o cosseno de 30°, pois:

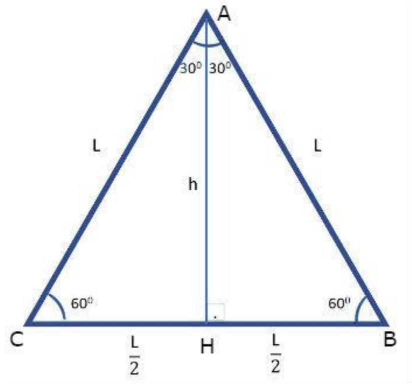
$$sen\ 60° = \frac{cateto\ 2}{hipotenusa}$$

$$e$$

$$cos\ 30° = \frac{cateto\ 2}{hipotenusa}$$

Portanto, quando dois ângulos são complementares, o valor do seno de um é igual ao valor do cosseno do outro.

Para encontrar o valor do seno de 30° (cosseno de 60°) e o cosseno de 30° (seno de 60°), vamos considerar um triângulo equilátero ABC de lados iguais a L, representado abaixo:



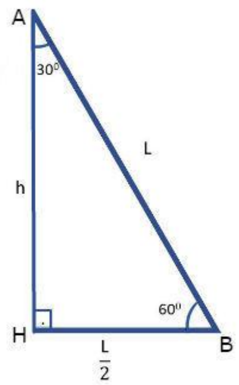
A altura (h) do triângulo equilátero coincide com a mediana, assim, a altura divide o lado relativo ao meio $\frac{L}{2}$.

Além disso, a altura coincide com a bissetriz. Desta forma, o ângulo também fica dividido ao meio, conforme mostrado na figura.

Vamos ainda considerar que o valor da altura é dado por:

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Para calcular o seno e o cosseno de 30°, iremos considerar o triângulo retângulo AHB, que foi obtido a partir do triângulo ABC.



Assim, temos:

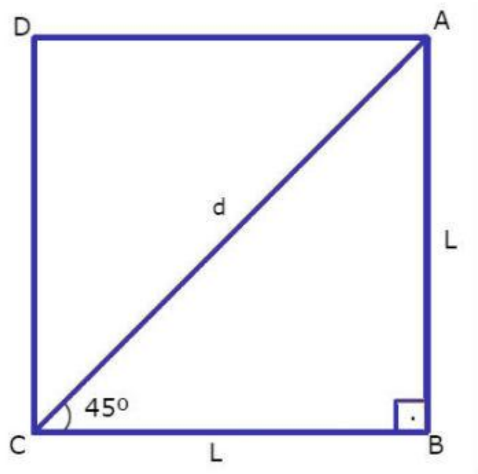
$$sen\ 30° = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{1}{2}$$

e

$$\cos 30° = \frac{h}{L} = \frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

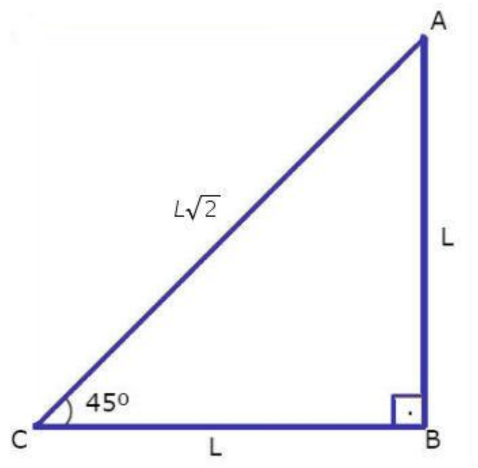
SENO E COSSENO DE 45°

Iremos calcular o valor do seno e do cosseno do ângulo de 45°, a partir de um quadrado de lado L representado abaixo:



A diagonal do quadrado é a bissetriz do ângulo, ou seja, a diagonal divide o ângulo ao meio (45°). Além disso, a diagonal mede $L\sqrt{2}$.

Para encontrar o valor do seno e do cosseno de 45° vamos considerar o triângulo retângulo ABC indicado na figura:



Então:

$$sen\ 45° = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$\cos 45° = \frac{L}{L\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

TANGENTE DE 30°, 45° E 60°

Para calcular a tangente dos ângulos notáveis usaremos a relação trigonométrica:

$$tg\ \theta = \frac{sen\ \theta}{\cos\ \theta}$$

Assim:

$$tg\ 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\ 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$tg\ 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

SENO, COSSENO E TANGENTE DE 30°, 45° E 60°

Reunindo tudo que calculamos anteriormente, podemos montar uma tabela com as informações:

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Colocar o traço de fração em toda a linha. Preencher os numeradores das frações com 1,2 e 3. Colocar 2 nos denominadores. Por último colocar o símbolo de √ (raiz) nos numeradores.

Colocar o traço de fração em toda a linha. Preencher os numeradores das frações com 3, 2 e 1. Colocar 2 nos denominadores. Por último colocar o símbolo de √ (raiz) nos numeradores.

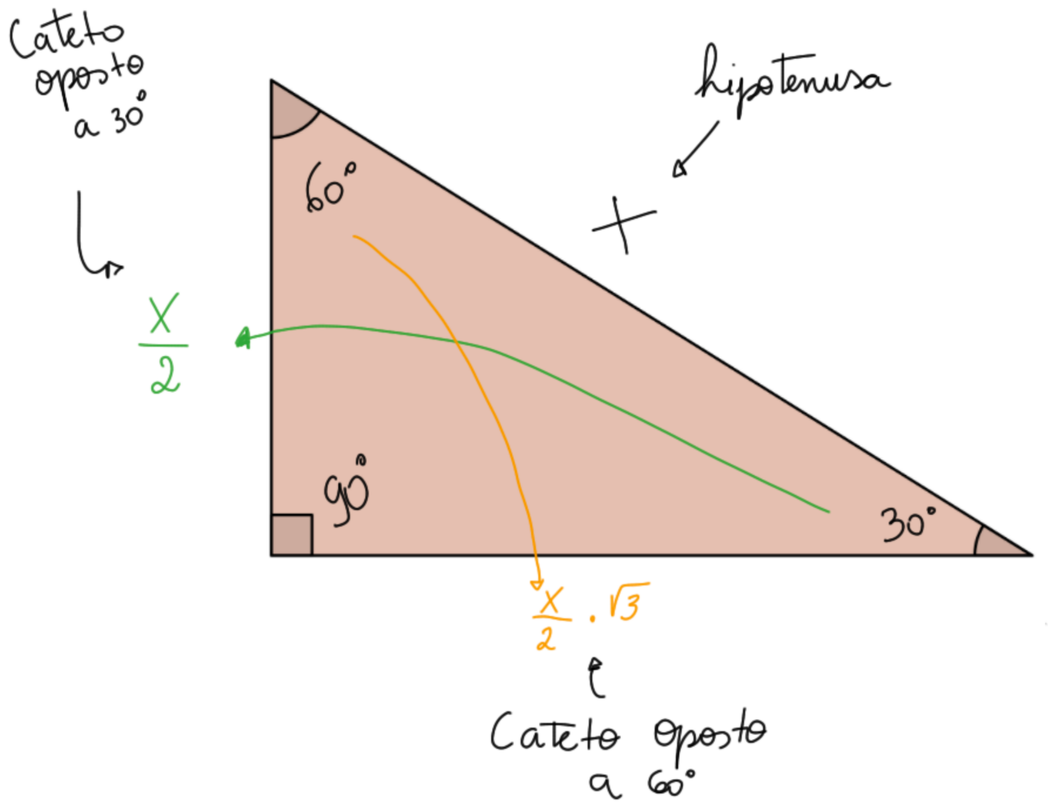
Dividir o valor do sen pelo cos, racionalizando quando necessário

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO 30° - 60° - 90°

Essa dica é importantíssima para que você que não quer perder mais tempo decorando seno, cosseno e tangente de 30°, 60° ou 90°. Ao conhecer o que vamos conversar, você vai reduzir o tempo de resolução dessas questões em mais de 80%. Preparado? Vamos que depois dessa dica, seus estudos de trigonometria nunca mais serão os mesmos!

Então anota aí:

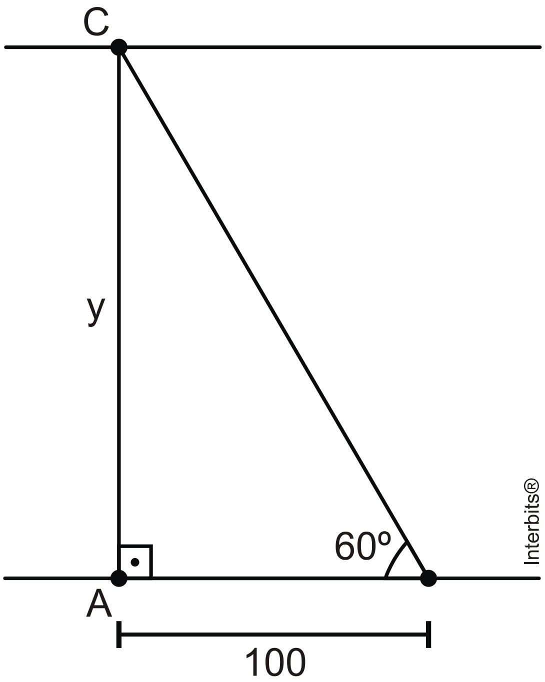
Em um triângulo retângulo 30° - 60° - 90°,
o cateto oposto a 30° mede metade da hipotenusa e
o oposto a 60° mede metade da hipotenusa, multiplicado por $\sqrt{3}$.



Essa dica tem a intenção de não ter que decorar aqueles senos, cossenos e tangentes naquelas tabelas intermináveis.

Com essa dica simples, conseguimos resolver uma quantidade enorme de questões, em muito menos tempo do que o normal! Veja só...

11. (Pucrs 2012) Em uma aula prática de Topografia, os alunos aprendiam a trabalhar com o teodolito, instrumento usado para medir ângulos. Com o auxílio desse instrumento, é possível medir a largura **y** de um rio. De um ponto **A**, o observador desloca-se 100 metros na direção do percurso do rio, e então visualiza uma árvore no ponto **C**, localizada na margem oposta sob um ângulo de 60°, conforme a figura abaixo.



Nessas condições, conclui-se que a largura do rio, em metros, é

A) $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$

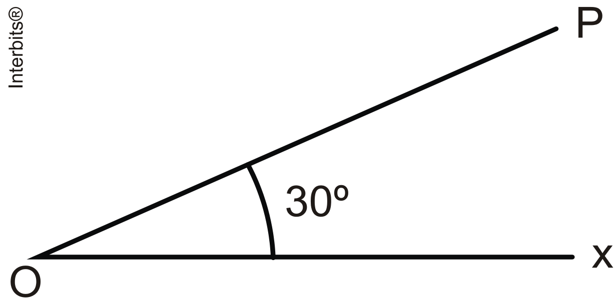
B) $\dfrac{100\sqrt{3}}{2}$

C) $100\sqrt{3}$

D) $\dfrac{50\sqrt{3}}{3}$

E) 200

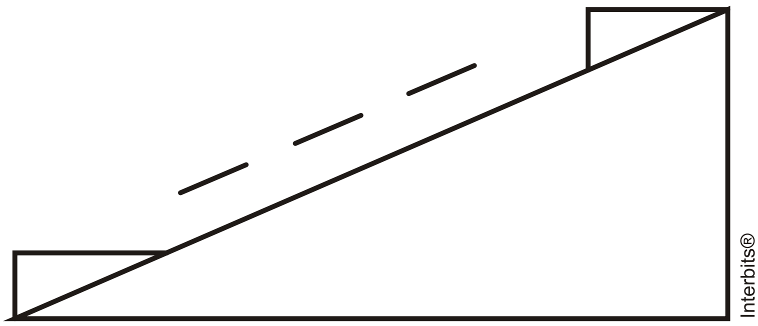
12. (Ifba 2012) Um atleta do IFBA se desloca com velocidade de 10 km/h ao longo da reta OP, que forma um ângulo de 30° com a reta Ox, partindo do ponto O.



Após 3 horas, qual a distância do atleta até a reta Ox?

A) 30 km
B) 15 km
C) $15\sqrt{3}$ km
D) $5\sqrt{3}$ km
E) $7{,}5\sqrt{3}$ km

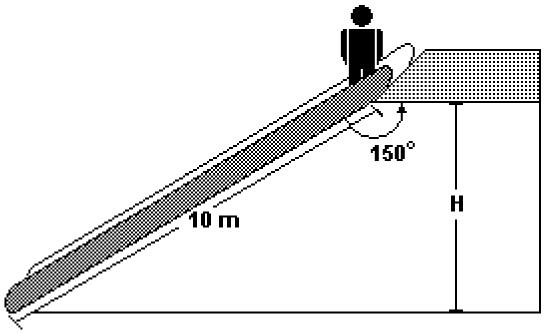
13. (Unifor 2014) Sobre uma rampa de 3m de comprimento e inclinação de $30°$ com a horizontal, devem-se construir degraus de altura 30cm.



Quantos degraus devem ser construídos?

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

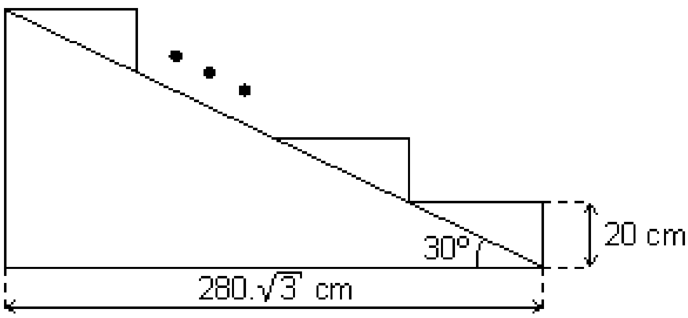
14. (Ufpb 2007) Em um shopping, uma pessoa sai do primeiro pavimento para o segundo através de uma escada rolante, conforme a figura a seguir.



A altura H, em metros, atingida pela pessoa, ao chegar ao segundo pavimento, é:

- Ⓐ 15
- Ⓑ 10
- Ⓒ 5
- Ⓓ 3
- Ⓔ 2

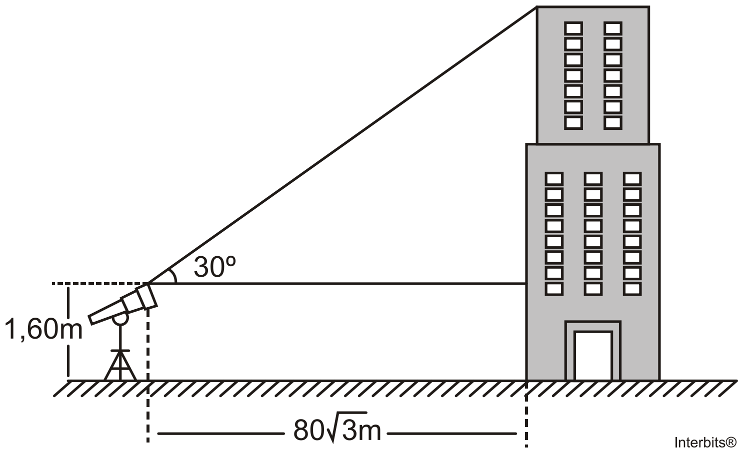
15. (Udesc 2009) Sobre um plano inclinado deverá ser construída uma escadaria.



Sabendo que cada degrau da escada deverá ter uma altura de 20 cm e que a base do plano inclinado mede 280 $\sqrt{3}$ cm, conforme mostra a figura, então a escada deverá ter:

- Ⓐ 10 degraus.
- Ⓑ 28 degraus.
- Ⓒ 14 degraus.
- Ⓓ 54 degraus.
- Ⓔ 16 degraus.

16. (Unifor 2014) Uma pessoa está a $80\sqrt{3}$ m de um prédio e vê o topo do prédio sob um ângulo de $30°$, como mostra a figura abaixo.

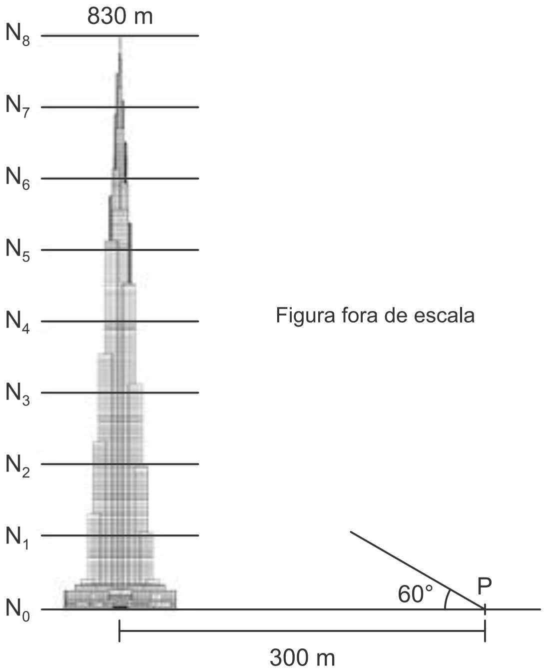


Se o aparelho que mede o ângulo está a $1,6$ m de distância do solo, então podemos afirmar que a altura do prédio em metros é:

- **A** 80,2
- **B** 81,6
- **C** 82,0
- **D** 82,5
- **E** 83,2

17. (Puccamp 2017) Burj Khalifa, localizado em Dubai, é considerado o edifício mais alto do mundo, com cerca de $830\text{ m}.$ A figura ao lado da fotografia representa a extensão vertical desse edifício altíssimo, dividida em 8 níveis igualmente espaçados.

Burj Khalifa



Dado: adote $\sqrt{3} = 1{,}73$ em suas contas finais.

Utilizando os dados fornecidos, um feixe de laser emitido a partir do ponto indicado na figura por P atingiria a coluna central do Burj Khalifa, aproximadamente, na marca

Ⓐ N_5
Ⓑ N_6
Ⓒ N_7
Ⓓ N_4
Ⓔ N_3

18. (G1 - cp2 2016) A Figura 1 apresenta a imagem de um poste que pode ser visto nas ruas de algumas cidades brasileiras.

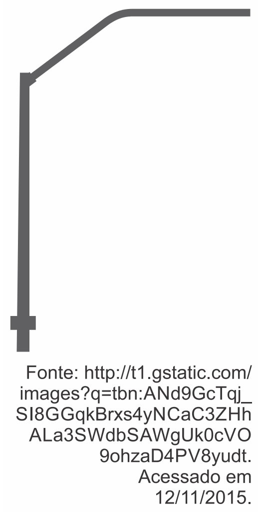


Figura 1

A seguir temos uma representação de um desses postes (Figura 2), que pode ser dividido em 3 partes: uma haste AB, vertical e fixada no chão plano (horizontal), medindo 3 metros; uma haste AE medindo 1 metro, tal que $B\hat{A}E = 120°$; e uma haste ED, paralela ao chão plano (horizontal).

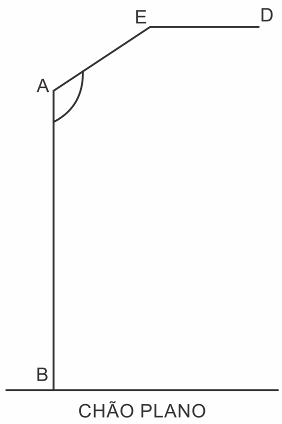
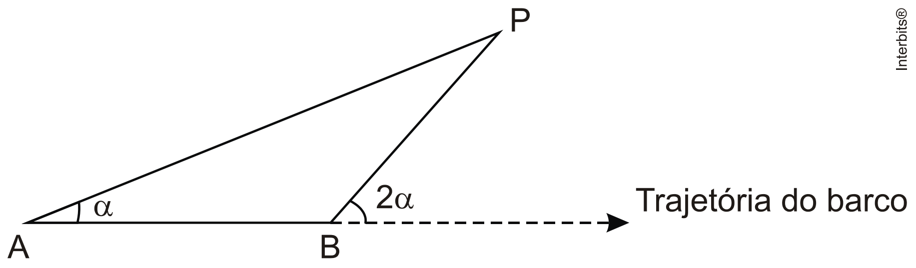


Figura 2

Uma lâmpada será instalada no ponto D. A altura, em relação ao chão plano, em que esta lâmpada será instalada, em metros, é

(A) $3,2.$
(B) $3,5.$
(C) $3,6.$
(D) $4,0.$

19. (Enem 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual a fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:

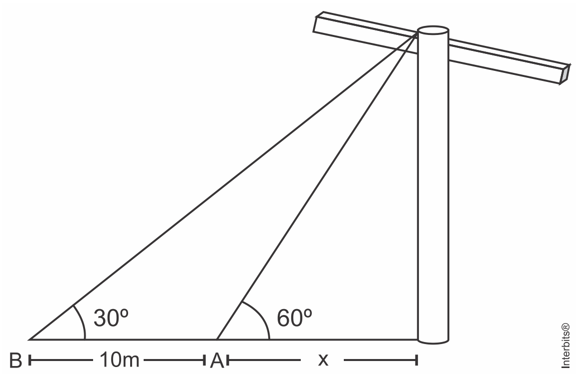


Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^{\circ}$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000\text{ m}$. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

A) 1000 m.
B) $1000\sqrt{3}\text{ m}$.
C) $2000\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{m}$.
D) 2000 m.
E) $2000\sqrt{3}\text{ m}$.

20. (G1 - ifsc 2015) Em uma aula prática, um professor do curso técnico de edificações do campus Florianópolis do IFSC, pede para que seus alunos determinem a altura de um poste que fica nas instalações da instituição, porém há uma impossibilidade para se chegar tanto ao topo do poste, bem como sua base. Para realizar tal medida, são disponibilizados para os alunos uma trena (fita métrica) e um teodolito. É realizado o seguinte procedimento: primeiro crava-se uma estaca no ponto A a x metros da base do poste e mede-se o ângulo formado entre o topo do poste e o solo, que é de $60°$ (sessenta graus); em seguida, afastando-se $10\,m$ (dez metros) em linha reta do ponto A e cravando uma nova estaca no ponto B, mede-se novamente o ângulo entre o topo do poste e o solo, que é de $30°$ (trinta graus).

A partir do procedimento descrito e da figura abaixo, é CORRETO afirmar que a altura do poste é de aproximadamente:



Dados: $\text{sen}30° = 0,5;\ \cos 30° = 0,86;\ \text{tg}30° = 0,58$

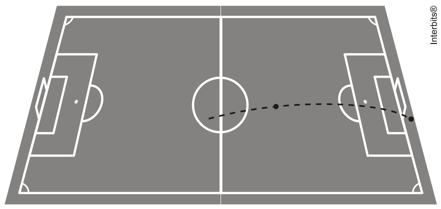
$\text{sen}60° = 0,86;\ \cos 60° = 0,5;\ \text{tg}60° = 1,73$

A) $8,65\,m$
B) $5\,m$
C) $6,65\,m$
D) $7,65\,m$
E) $4\,m$

21. (UNIFESP 2012) O gol que Pelé não fez

Na copa de 1970, na partida entre Brasil e Tchecoslováquia, Pelé pega a bola um pouco antes do meio de campo, vê o goleiro tcheco adiantado, e arrisca um chute que entrou para a história do futebol brasileiro. No início do lance, a bola parte do solo com velocidade de 108 km/h (30 m/s), e três segundos depois toca novamente o solo atrás da linha de fundo, depois de descrever uma parábola no ar e passar rente à trave, para alívio do assustado goleiro.

Na figura vemos uma simulação do chute de Pelé.

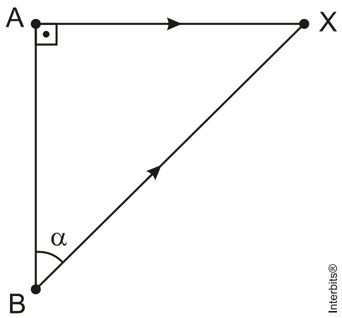


(http://omnis.if.ufrj.br/~carlos/futebol/textoCatalogoExpo.pdf. Adaptado.)

Considerando que o vetor velocidade inicial da bola após o chute de Pelé fazia um ângulo de 30° com a horizontal (sen30° = 0,50 e cos30° = 0,85) e desconsiderando a resistência do ar e a rotação da bola, pode-se afirmar que a distância horizontal entre o ponto de onde a bola partiu do solo depois do chute e o ponto onde ela tocou o solo atrás da linha de fundo era, em metros, um valor mais próximo de

A) 52,0.
B) 64,5.
C) 76,5.
D) 80,4.
E) 86,6.

22. (UNIFOR 2014) Um corredor A está sobre uma linha reta e corre sobre ela no sentido AX com velocidade constante igual à metade do corredor B que se desloca no sentido BX.

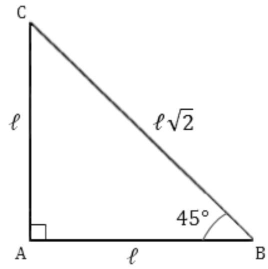


Sendo a partida simultânea e considerando que a reta BA faz um ângulo reto com a reta AX, o ângulo α que a trajetória de B deve fazer com a reta BA para que seja possível o encontro é de:

A) 30°
B) 35°
C) 40°
D) 45°
E) 60°

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO 45° - 45° - 90°

Outra dica muito importante é a do triângulo 45° - 45° - 90°.



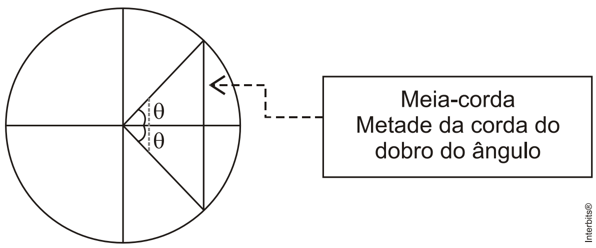
Anota aí!

Em um triângulo 45° - 45° - 90°, os catetos são iguais e
a hipotenusa mede o cateto multiplicado por raiz $\sqrt{2}$.

23. (UEPA 2014) Num dos trabalhos escritos no começo do século V d.C. na Índia, encontramos uma tabela "meias-cordas", representado na figura abaixo. Essas "meias-cordas" representam os nossos atuais senos.

Os indianos pensavam na meia-corda como o real segmento em um círculo com raio particular, como, por exemplo, ocorre no livro *Almagest* de Claudius Ptolomeu (85 – 165), que utilizou um círculo de raio 60.

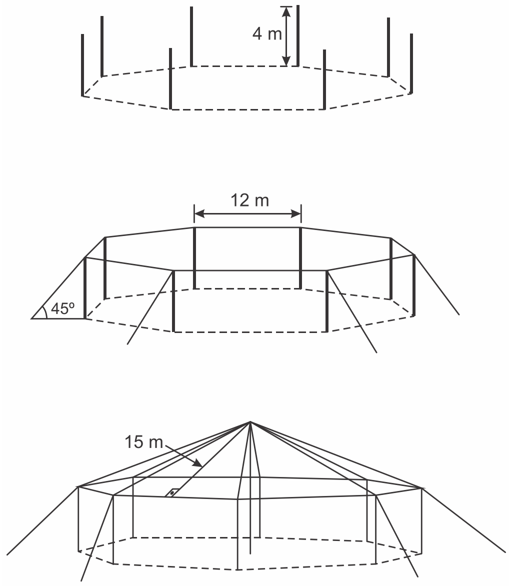
Texto adaptado do livro *A Matemática através dos tempos*, Editora Edgard Blücher, 2008.



Utilizando o mesmo raio considerado por Ptolomeu, o valor da meia corda indicado na figura para um ângulo de $\theta = 45°$ é:

A $30\sqrt{2}$.
B $15\sqrt{2}$.
C $15\sqrt{2}/2$.
D $\sqrt{2}/2$.
E $\sqrt{2}/4$.

24. (CPS 2015) O circo é uma expressão artística, parte da cultura popular, que traz diversão e entretenimento. É um lugar onde as pessoas têm a oportunidade de ver apresentações de vários artistas como mágicos, palhaços, malabaristas, contorcionistas e muito mais. Mas antes que a magia desse mundo se realize, há muito trabalho na montagem da estrutura do circo. A tenda de um circo deve ser montada em um terreno plano e para isso deve ser construída uma estrutura, conforme a sequência de figuras.



Nas figuras, considere que:

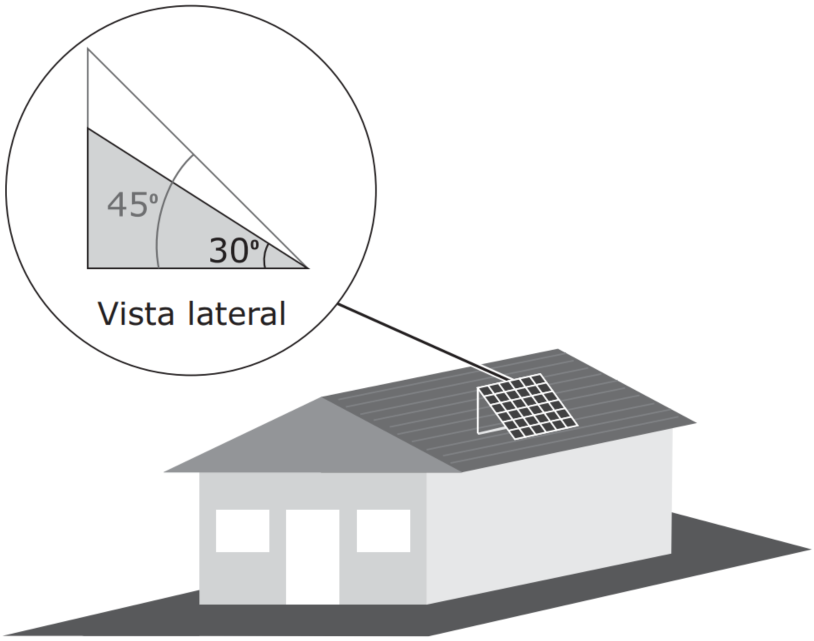
- foram colocadas 8 estacas congruentes perpendiculares ao plano do chão;
- cada estaca tem $4\,\text{m}$ acima do solo;
- as estacas estão igualmente distribuídas, sendo que suas bases formam um octógono regular;
- os topos das estacas consecutivas estão ligados por varas de $12\,\text{m}$ de comprimento;
- para imobilizar as estacas, do topo de cada uma delas até o chão há um único cabo esticado que forma um ângulo de $45°$ com o solo (a figura mostra apenas alguns desses cabos). Todos os cabos têm a mesma medida;
- no centro do octógono regular é colocado o mastro central da estrutura, que é vertical;
- do topo de cada estaca até o topo do mastro é colocada uma outra vara. Todas essas varas têm a mesma medida;
- na estrutura superior, são formados triângulos isósceles congruentes entre si; e
- em cada um desses triângulos isósceles, a altura relativa à base é de $15\,\text{m}$.

A quantidade de cabo utilizada para imobilizar as oito estacas, é, em metros. Para o cálculo, considere apenas a quantidade de cabo do topo de cada estaca até o solo. Despreze as amarras.

A) $16\sqrt{2}$.
B) $24\sqrt{2}$.
C) $32\sqrt{2}$.
D) $40\sqrt{2}$.
E) $48\sqrt{2}$.

25. (UFSM 2016) Nos últimos anos, a busca por fontes de energia renováveis tem se intensificado; uma das razões é a crise hídrica mundial. Uma importante fonte de

energia renovável são as placas solares. Para uma melhor captação de energia, as placas devem ser instaladas levando em consideração a latitude da cidade. Em uma cidade, as placas devem ser instaladas com inclinação de 45°. Considere uma placa quadrada de 1 metro de lado, que deve ser instalada em uma residência cujo telhado tem inclinação de 30°, conforme a figura a seguir.



Qual é a altura da borda superior da placa até o telhado?

A $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

B $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$

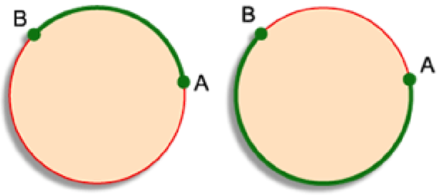
C $\sqrt{2}-1$

D $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

E $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

MEDIDAS DE ARCOS E ÂNGULOS

Seja uma circunferência em que são tomados dois pontos, **A** e **B**. A circunferência ficará dividida em duas partes chamadas **arcos**. Os pontos **A** e **B** são as extremidades desses arcos.



Representação: $\overset{\frown}{AB}$

Se **A** e **B** coincidem, esses arcos são chamados:

- arco **nulo** (de medida **0°**);
- arco de **uma volta** (de medida **360°**).

Dessa forma,

1 grau (1°)
=
$\frac{1}{360}$ do arco de uma volta

Como submúltiplos do grau, temos:

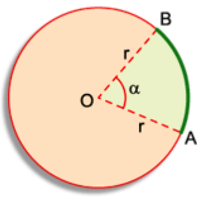
1 minuto (1')
=
$\frac{1}{60}$ do grau ou 60 minutos
=
1 grau (60' = 1°)

e ainda:

1 segundo (1")
=
$\frac{1}{60}$ do minuto ou 60 segundos
=
1 minuto (60" = 1').

Definição

A medida de um arco, em **radianos**, é a razão entre o **comprimento do arco** e o **raio** da circunferência sobre a qual este arco está determinado.



$$\alpha = \frac{\text{comprimento } \overset{\frown}{AB}}{\text{raio}}$$

Observações

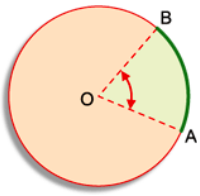
O arco de **uma volta**, cuja medida em graus é **360°**, tem comprimento igual a $\mathbf{2\pi r}$, portanto sua **medida em radianos** é:

$$\alpha = \frac{\text{comp}(\overset{\frown}{AB})}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \cong 6{,}28$$

O arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 1 radiano, se o seu comprimento é igual ao raio da circunferência.

A medida de um arco, em radianos, é um número real, portanto é costume omitir-se o símbolo **rad**. Se, por exemplo, escrevermos que um arco mede **3**, fica subentendido que sua medida é de **3 radianos**.

Seja AÔB o **ângulo central**, determinado pelo arco $\overset{\frown}{AB}$. Adota-se como medida (em graus ou radianos) do **ângulo central** a própria medida do arco $\overset{\frown}{AB}$.



As conversões entre as medidas de arcos (ou ângulos) em graus e radianos são feitas por uma regra de três simples (direta), a partir da relação:

360° são equivalentes a $\mathbf{2\pi}$ radianos, ou **180°** são equivalentes a $\boldsymbol{\pi}$ radianos.

Exemplo:
Conversão de 210° em radianos.

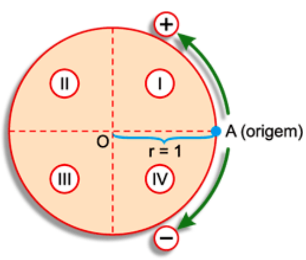
$$\begin{matrix} 180° & — & \pi \text{ rad} \\ 210° & — & x \text{ rad} \end{matrix} \Leftrightarrow \frac{180}{210} = \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow \frac{6}{7} = \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow x = \frac{7.\pi}{6}$$

Portanto, 210° equivale a $\frac{7\pi}{6}$ radianos.

CICLO TRIGONOMÉTRICO

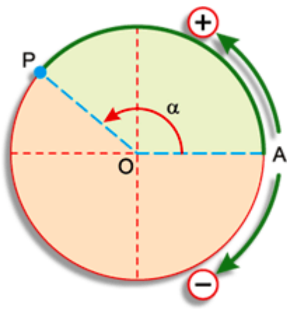
O **ciclo trigonométrico** é uma circunferência de raio unitário, sobre a qual fixamos um ponto (**A**) como origem dos arcos e adotamos um sentido (o anti-horário) como sendo o positivo.

O ciclo trigonométrico é dividido em 4 partes, denominadas **quadrantes**.



Chama-se **arco trigonométrico** $\overset{\frown}{AP}$ ao conjunto dos **infinitos arcos** que são obtidos partindo-se da origem **A** até a extremidade **P**, girando no sentido positivo (ou negativo), seja na primeira passagem ou após várias voltas completas no ciclo trigonométrico.

O **ângulo trigonométrico** AÔP é o conjunto dos **infinitos ângulos** centrais associados ao arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$.



Se, por exemplo, escrevemos que um arco trigonométrico mede 1120°, significa que, partindo da origem, no sentido +, foram dadas 3 voltas completas (3.360° = 1080°) e ainda percorremos mais 40° (1120° = 3.360° + 40°) no ciclo trigonométrico.

Dessa forma, todas as funções trigonométricas do arco de **1120°** são **iguais** às correspondentes funções do arco de **40°**.

A **determinação** de um arco $\overset{\frown}{AP}$ é a medida desse arco precedida de um sinal de + ou -, conforme o sentido de percurso de **A** para **P** seja o anti-horário ou o horário, respectivamente.

Ao **arco trigonométrico** $\overset{\frown}{AP}$ associamos **infinitas** determinações, que são obtidas adicionando-se e subtraindo-se múltiplos de 360° (ou 2π) à **1.ª determinação** a (positiva ou negativa), e que vão constituir o **conjunto** das determinações:

a é a 1.ª determinação (+ ou -)

$$a + 360°$$
$$a - 360°$$
$$a + 2 \,.\, 360°$$
$$a - 2 \,.\, 360°$$
$$a + 3 \,.\, 360°$$
$$a - 3 \,.\, 360°$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{a + n \,.\, 360°}, \text{ com } n \in \mathbb{Z}$$

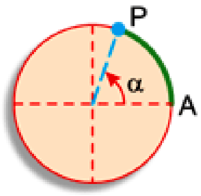
O conjunto das determinações, em radianos, é $\mathbf{a + n \,.\, 2\,\pi}$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Lembrete:

Como a medida do **arco trigonométrico** $\overset{\frown}{AP}$ (em graus ou radianos) é igual à medida do **ângulo trigonométrico** AÔP, conclui-se que ambos têm o **mesmo conjunto das determinações**.

Na trigonometria, os casos mais comuns são os apresentados a seguir:

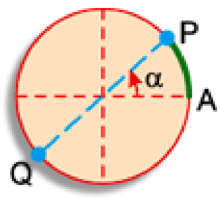
I)



Conjunto das determinações:

a + **n . 2** p a + **n . 360°**	n ∈ ℤ

II)



Conjunto das determinações:

a + **n .** p a + **n . 180°**	n ∈ ℤ

No ciclo trigonométrico trabalhamos três tipos de simetria: em relação ao eixo vertical (seno), eixo horizontal (cosseno) e em relação ao centro.

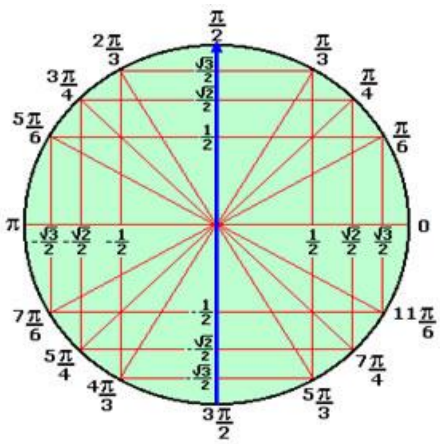
SENO

Alguns valores envolvendo seno de ângulos são conhecidos e fáceis de aprimorar, por exemplo, sen π/6 = sen 30° = 1/2.

Outro bem familiar é sen π/4 = 45° = √2/2.

Para identificarmos o seno dos outros ângulos utilizamos a simetria vertical.

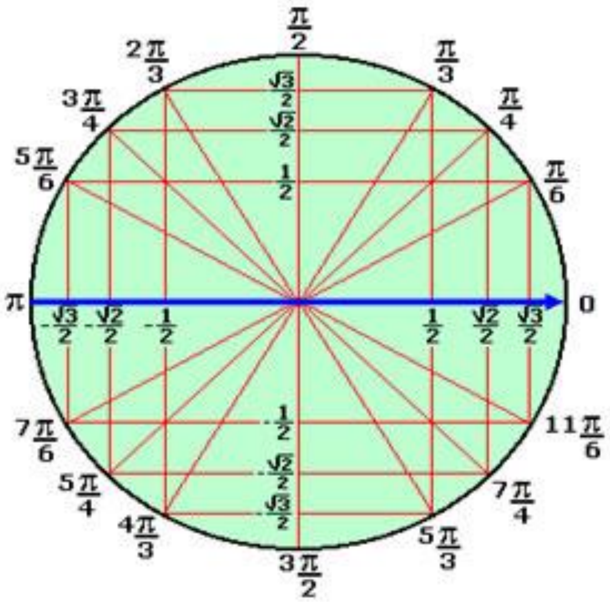
Observe a circunferência trigonométrica a seguir:



Ângulo	Arco	Seno	
0	0	0	Crescente
30°	π/6	1/2	
45°	π/4	√2/2	
60°	π/3	√3/2	
90°	π/2	1	
120°	2π/3	√3/2	Decrescente
135°	3π/4	√2/2	
150°	5π/6	1/2	
180°	π	0	
210°	7π/6	-1/2	Decrescente
225°	5π/4	-√2/2	
240°	4π/3	-√3/2	
270°	3π/2	-1	
300°	5π/3	-√3/2	Crescente
315°	7π/4	-√2/2	
330°	11π/6	-1/2	

COSSENO

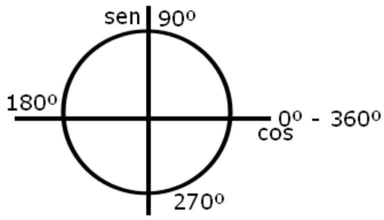
No caso dos cossenos vamos utilizar a simetria horizontal para determinar o cosseno dos ângulos do círculo trigonométrico.



Ângulo	Arco	Cosseno	
0	0	0	Decrescente
30°	π/6	√3/2	
45°	π/4	√2/2	
60°	π/3	1/2	
90°	π/2	0	
120°	2π/3	-1/2	Decrescente
135°	3π/4	-√2/2	
150°	5π/6	-√3/2	
180°	π	-1	
210°	7π/6	-√3/2	Crescente
225°	5π/4	-√2/2	
240°	4π/3	-1/2	
270°	3π/2	0	
300°	5π/3	1/2	Crescente
315°	7π/4	√2/2	
330°	11π/6	√3/2	

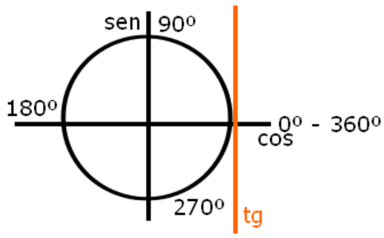
TANGENTE

A primeira coisa que você deve lembrar com relação ao círculo trigonométrico é que normalmente o eixo horizontal (o eixo x) é o eixo do cosseno, assim como o eixo vertical (eixo y) é chamado de eixo do seno:



Vai então, uma dica valiosa lembre-se que a linha "de pé" (linha vertical) é a linha do seno, ou seja, ela está ***sem*** sono (sen). Já a linha "deitada" (linha horizontal) é a linha do cosseno porque ele está ***com*** sono (cos). Depois de pensar nisso você nunca mais esquece quais são os eixos corretamente, certo?

Mas e a tangente? A tangente é uma linha reta infinita que é tangente (como seu próprio nome diz) à circunferência, ou seja, ela encosta no círculo trigonométrico:

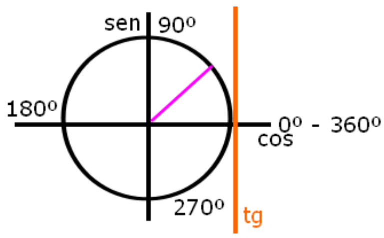


Agora vamos à um exemplo prático para vermos como se comportam os eixos e a tangente do círculo trigonométrico com seus ângulos:

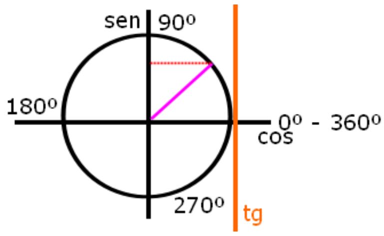
Vamos descobrir os sinais do seno, cosseno e tangente do ângulo de 50 graus:

sen(50º) =
cos(50º) =
tg(50º) =

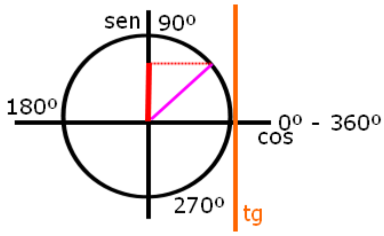
Vamos lá... Vamos criar o ângulo de 50 graus na circunferência. Como? Primeiro vamos identificar em qual quadrante ele se encontra... 50 graus está entre 0 e 90 graus, concorda?? Então ele se localiza no primeiro quadrante, mais ou menos aqui:



Certo... Agora podemos traçar uma pequena projeção ortogonal para encontrarmos o limite deste ângulo, com relação ao eixo do seno, ou seja, o eixo vertical:



Então a partir desta projeção, você encontra exatamente o seno deste ângulo:

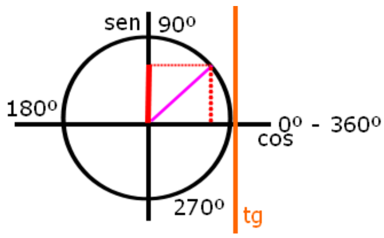


Agora para saber o sinal do seno de 50° lembre-se daquela relação de sinais nos quadrantes do círculo trigonométrico... O eixo do seno deste ângulo está na parte superior ou inferior do eixo y? Na parte superior, não? Então ele leva sinal positivo. Logo, o seno de 50° tem valor positivo.

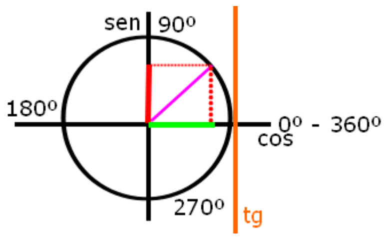
Se você for ver na calculadora, o seno de 50° é aproximadamente 0,76. Isso indica que a distância do raio desta circunferência (que é unitário) até seu centro é de 76%.

Foi a partir destes cálculos que os antigos matemáticos conseguiram determinar os valores de seno, cosseno e tangente para a trigonometria, que a gente encontra na tabela trigonométrica.

Continuando, vamos encontrar agora o sinal do cosseno de 50 graus, realizando a projeção a partir do eixo vertical, teremos o seguinte:

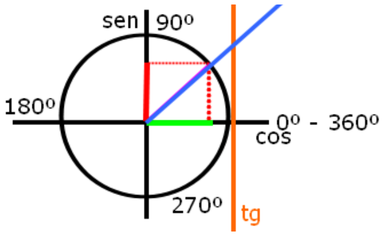


Então o cosseno de 50 graus está aqui:



E observando sua posição com relação ao eixo x, ele também é um valor positivo por se encontrar ao lado direito do eixo horizontal.

Para descobrirmos a tangente é bem simples, basta prolongarmos o raio da circunferência que utilizamos para criar o ângulo de 50°:



Note que como a reta é crescente, nós temos um valor positivo para tangente.

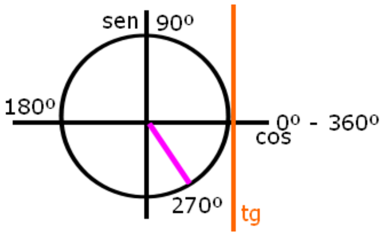
Resposta:

sen(50°) = +
cos(50°) = +
tg(50°) = +

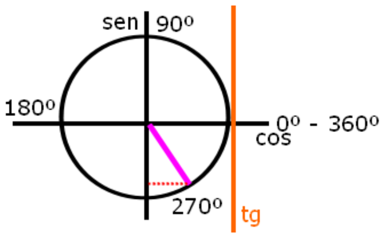
Vamos agora encontrar os sinais do ângulo de 287 graus:

sen(287°) =
cos(287°) =
tg(287°) =

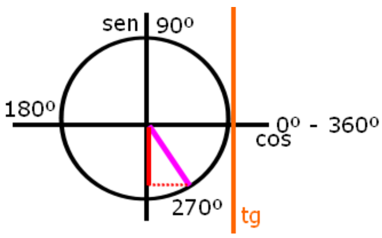
O ângulo se encontra no quarto quadrante, onde temos ângulos de 270 a 360 graus, portanto ele estará mais ou menos aqui:



Agora para encontrar a linha do seno deste ângulo, faremos a projeção:

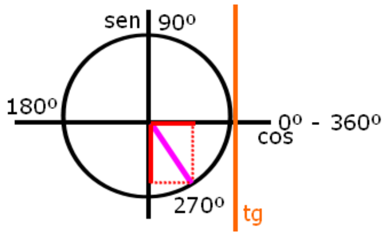


Então temos a linha do seno de 287° aqui:



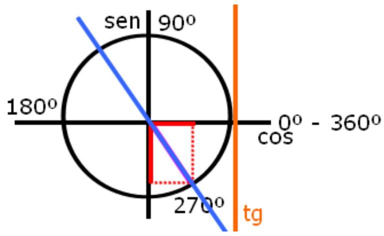
Já que esta linha se encontra na parte inferior do eixo y, o seno de 287 graus é negativo. Confira numa calculadora e encontre aproximadamente o valor de -0,96.

Vamos encontrar a linha do cosseno de 287 graus, agora:



Perceba que a linha do cosseno do ângulo de 287° está localizada na parte direita do eixo x, ou seja, um valor positivo.

Agora para a tangente, apenas prolongue o raio da circunferência:



Como a linha é decrescente, a tangente é negativa:

sen(287°) = -
cos(287°) = +
tg(287°) = -

Uma dica para descobrir rapidamente o sinal da tangente de um ângulo sem ter a necessidade de tracejar um desenho é você se lembrar que a tangente é a divisão entre o seno e o cosseno do ângulo.

Então, se o seno tiver sinal positivo por exemplo, e o cosseno sinal negativo, basta fazer a regra de sinais:

+ . + = +
- . - = +
+ . - = -
- . + = -

Logo, se o seno tiver sinal positivo e o cosseno negativo, a tangente terá sinal negativo.

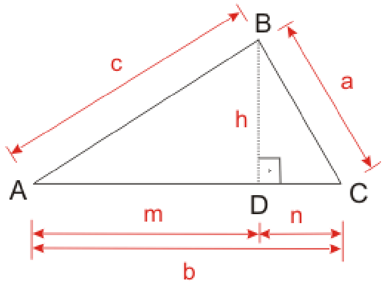
RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

LEI DOS COSSENOS

Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles. A saber:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\hat{A} \, b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\hat{C}$$

Considerando a figura, podemos observar três triângulos: ABC, BCD, BAD.



Destes, pode-se extrair as seguintes relações:

$$b = n + m \quad \text{e} \quad m = c \cdot \cos\hat{A}.$$

Usando o Teorema de Pitágoras para obter uma relação entre os lados dos triângulos, temos:

- Para BCD : $a^2 = n^2 + h^2$
- Para BAD : $c^2 = m^2 + h^2$

Substituindo $n = b - m$ e $h^2 = c^2 - m^2$ em $a^2 = n^2 + h^2$:

$$a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - 2b \cdot m + m^2 + c^2 - m^2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot m$$

Entretanto, pode-se substituir a relação $m = c \cdot cos\hat{A}$, do triângulo BAD, na equação acima. Dessa maneira, encontra-se uma expressão geral da Lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$$

Da mesma forma, pode-se demonstrar as demais relações:

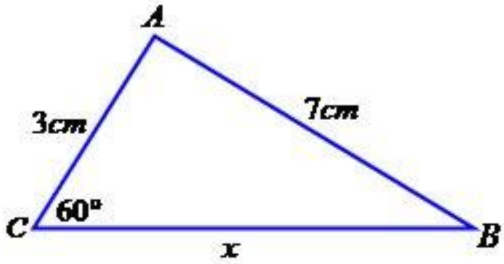
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\hat{C}$$

APLICAÇÃO

A Lei dos Cossenos permite calcular o comprimento de um lado de qualquer triângulo conhecendo o comprimento dos demais lados e a medida do ângulo oposto a esse. Ela também permite calcular todos os ângulos de um triângulo, desde que se saiba o comprimento de todos os lados.

Exemplo 1
Utilizando a lei dos cossenos, determine o valor do segmento x no triângulo a seguir:



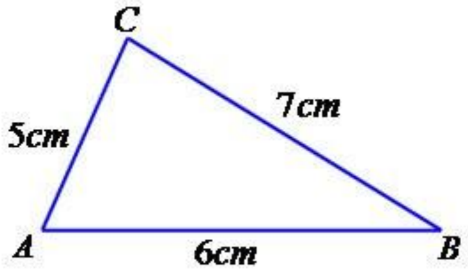
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos \hat{A}$$
$$7^2 = x^2 + 3^2 - 2 * 3 * x * \cos 60°$$
$$49 = x^2 + 9 - 6 * x * 0{,}5$$
$$49 = x^2 + 9 - 3x$$
$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

Aplicando o método resolutivo da equação do 2° grau, temos: x' = 8 e x" = – 5, por se tratar de medidas descartamos x" = –5 e utilizamos x' = 8.
Então o valor de x no triângulo é 8 cm.

Exemplo 2
Em um triângulo ABC, temos as seguintes medidas: AB = 6 cm, AC = 5 cm e BC = 7 cm.

Determine a medida do ângulo A.

Vamos construir o triângulo com as medidas fornecidas no exercício.

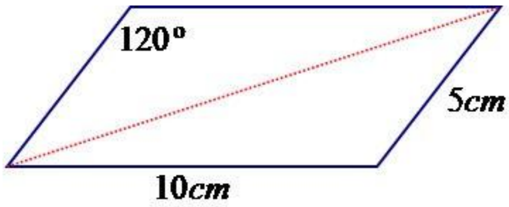


Aplicando a lei dos cossenos para a = 7, b = 6 e c = 5:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos \hat{A}$$
$$7^2 = 6^2 + 5^2 - 2 * 6 * 5 * \cos \hat{A}$$
$$49 = 36 + 25 - 60 * \cos \hat{A}$$
$$49 - 36 - 25 = -60 * \cos \hat{A}$$
$$-12 = -60 * \cos \hat{A}$$
$$12 = 60 * \cos \hat{A}$$
$$12/60 = \cos \hat{A}$$
$$\cos \hat{A} = 0{,}2$$

O ângulo que possui cosseno com valor aproximado de 0,2 mede 78°.

Exemplo 3
Calcule a medida da maior diagonal do paralelogramo da figura a seguir, utilizando a lei dos cossenos.



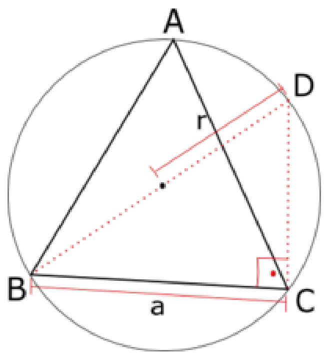
cos 120° = –cos(180° – 120°) = – cos 60° = – 0,5

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos \hat{A}$$
$$x^2 = 5^2 + 10^2 - 2 * 5 * 10 * (-\cos 60°)$$
$$x^2 = 25 + 100 - 100 * (-0{,}5)$$
$$x^2 = 125 + 50$$
$$x^2 = 175$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{175}$$
$$x = \sqrt{5^2 * 7}$$
$$x = 5\sqrt{7}$$

LEI DOS SENOS

O seno de um ângulo de um triângulo qualquer é proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo. A saber:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2r$$



Para demonstrar a lei dos senos, tomamos um triângulo *ABC* qualquer inscrito em uma circunferência de raio *r*. A partir do ponto *B* pode-se encontrar um ponto diametralmente oposto *D*, e, ligando *D* a *C*, formamos um novo triângulo *BCD* retângulo em *C*.

Da figura, podemos perceber também que $\hat{A} = \hat{D}$, porque determinam na circunferência uma mesma corda $\overline{BC}$. Desta forma, podemos relacionar:

$$\operatorname{sen}\widehat{D} = \frac{a}{2r}$$

$$\Rightarrow a = 2R \cdot \operatorname{sen}\widehat{A}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = 2r$$

Fazendo todo este mesmo processo para os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, teremos as relações:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = 2r$$

e

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2r,$$

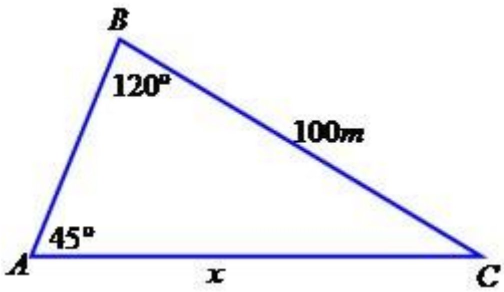
Em que *b* é a medida do lado *AC*, oposto a $\hat{B}$, *c* é a medida do lado *AB*, oposto a $\hat{C}$, e *2r* é uma constante.

Logo, podemos concluir que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2r$$

Exemplo 1

Determine o valor de x no triângulo a seguir.



sen120° = sen(180° – 120°) = sen60° = √3/2 ou 0,865

sen45° = √2/2 ou 0,705

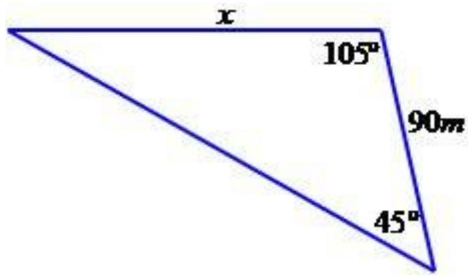
$$\frac{x}{sen60°} = \frac{100}{sen45°}$$

$$\frac{x}{0,866} = \frac{100}{0,707}$$

$$0,707x = 86,6$$

$$x \cong 122,5$$

Exemplo 2
No triângulo a seguir temos dois ângulos, um medindo 45°, outro medindo 105°, e um dos lados medindo 90 metros. Com base nesses valores determine a medida de x.



Para determinarmos a medida de x no triângulo devemos utilizar a lei dos senos, mas para isso precisamos descobrir o valor do terceiro ângulo do triângulo.

Para tal cálculo utilizamos a seguinte definição: a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

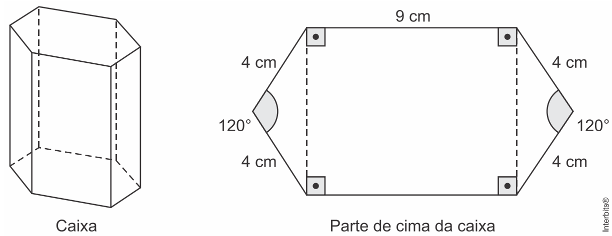
Portanto:

$$\alpha + 105^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha + 150^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha = 180^\circ - 150^\circ$$
$$\alpha = 30^\circ$$

Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{x}{sen45^\circ} = \frac{90}{sen30^\circ}$$
$$\frac{x}{0{,}707} = \frac{90}{0{,}5}$$
$$0{,}5x = 63{,}63$$
$$x \cong 127{,}26$$

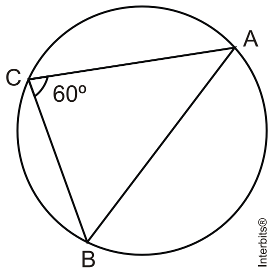
26. (CPII) Certo fabricante vende biscoitos em forma de canudinhos recheados, de diversos sabores. A caixa em que esses biscoitos são vendidos tem a forma de um prisma hexagonal. A parte de cima dessa caixa tem a forma de um hexágono, com as medidas indicadas na figura:



Considerando a aproximação racional $1,7$ para o valor de $\sqrt{3}$, a área da parte de cima dessa caixa, em centímetros quadrados, mede

Ⓐ $49,6$.
Ⓑ $63,2$.
Ⓒ $74,8$.
Ⓓ $87,4$.

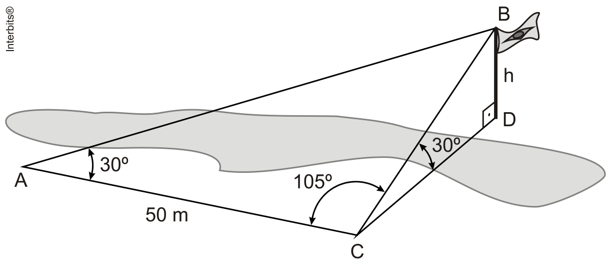
27. (UFJF 2012) Uma praça circular de raio *R* foi construída a partir da planta a seguir:



Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ simbolizam ciclovias construídas no interior da praça, sendo que $\overline{AB} = 80\text{ m}$. De acordo com a planta e as informações dadas, é CORRETO afirmar que a medida de *R* é igual a:

Ⓐ $\dfrac{160\sqrt{3}}{3}$ m
Ⓑ $\dfrac{80\sqrt{3}}{3}$ m
Ⓒ $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ m
Ⓓ $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ m
Ⓔ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m

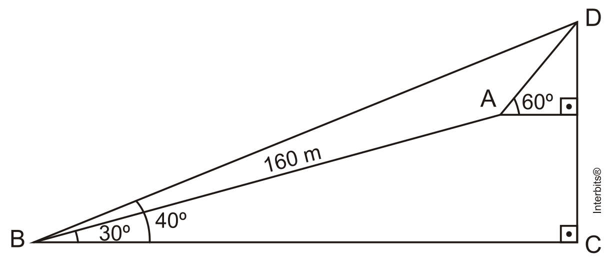
28. (UNESP 2011) Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície, às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto B. Com o objetivo de determinar a altura h do mastro, ela anda, em linha reta, 50 m para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o pé do mastro, avalia que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ valem 30°, e o $A\hat{C}B$ vale 105°, como mostra a figura:



Ⓐ 12,5.
Ⓑ $12{,}5\sqrt{2}$.
Ⓒ 25,0.
Ⓓ $25{,}0\sqrt{2}$.
Ⓔ 35,0.

29. (CFTMG) Um grupo de escoteiros pretende escalar uma montanha ate o topo, representado na figura abaixo pelo ponto D, visto sob ângulos de 40° do acampamento B e de 60° do acampamento A.

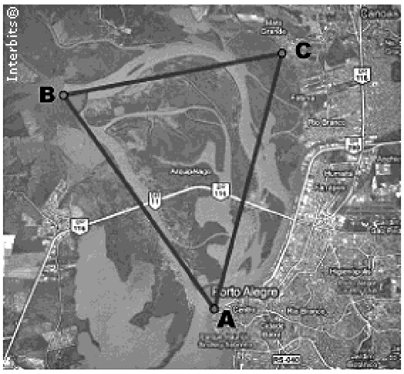
Dado: $\text{sen } 20^\circ = 0{,}342$



Considerando que o percurso de 160 m entre A e B e realizado segundo um angulo de 30° em relação a base da montanha, então, a distância entre B e D, em m, e de, aproximadamente,

Ⓐ 190.
Ⓑ 234.
Ⓒ 260.
Ⓓ 320.

30. (UFSM 2011) A figura a seguir apresenta o delta do rio Jacuí, situado na região metropolitana de Porto Alegre. Nele se encontra o parque estadual Delta do Jacuí, importante parque de preservação ambiental. Sua proximidade com a região metropolitana torna-o suscetível aos impactos ambientais causados pela atividade humana.



http://maps.google.com.br

A distância do ponto B ao ponto C é de 8 km, o ângulo $\hat{A}$ mede 45° e o ângulo $\hat{C}$ mede 75°.

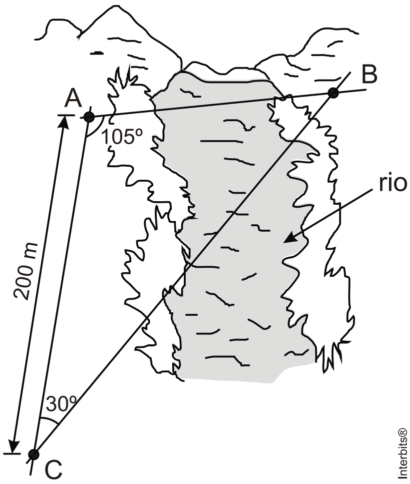
Uma maneira de estimar quanto do Delta do Jacuí está sob influência do meio urbano é dada pela distância do ponto A ao ponto C. Essa distância, em km, é

A) $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$
B) $4\sqrt{6}$
C) $8\sqrt{2}+\sqrt{3}$
D) $8(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
E) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

31. (UFPB 2010) A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, A e B, localizados nas margens opostas do rio.

Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, C, distante $200\,m$ do ponto A e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto A.

Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ mediam, respectivamente, 30° e 105°, conforme ilustrado na figura a seguir.



Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto A ao ponto
B é de:

Ⓐ $200\sqrt{2}$
Ⓑ $180\sqrt{2}$
Ⓒ $150\sqrt{2}$
Ⓓ $100\sqrt{2}$
Ⓔ $50\sqrt{2}$

32. (UFPA 2008) Considere as seguintes informações:

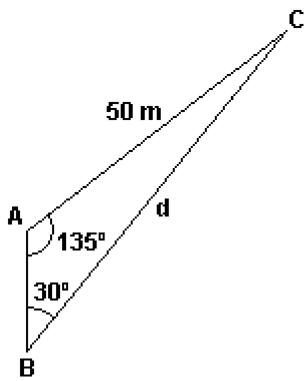
- De dois pontos A e B, localizados na mesma margem de um rio, avista-se um ponto C, de difícil acesso, localizado na margem oposta;
- Sabe-se que B está distante 1000 metros de A;
- Com o auxílio de um teodolito (aparelho usado para medir ângulos) foram obtidas as seguintes medidas: $B\hat{A}C = 30^{\circ}$ e $A\hat{B}C = 80^{\circ}$.

Deseja-se construir uma ponte sobre o rio, unindo o ponto C a um ponto D entre A e B, de modo que seu comprimento seja mínimo. Podemos afirmar que o comprimento da ponte será de aproximadamente

Ⓐ 524 metros
Ⓑ 532 metros
Ⓒ 1048 metros
Ⓓ 500 metros
Ⓔ 477 metros

Considere:
sen 80° = 0,985;
sen 70° = 0,940;
cos 80° = 0,174 e
cos 70° = 0,340.

33. (UFSM 2005) Na instalação das lâmpadas de uma praça de alimentação, a equipe necessitou calcular corretamente a distância entre duas delas, colocadas nos vértices B e C do triângulo, segundo a figura.

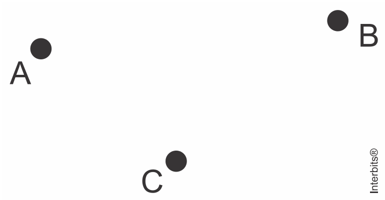


Assim, a distância "d" é

Ⓐ $50\sqrt{2}$ m
Ⓑ $50\ \dfrac{(\sqrt{6})}{3}$ m
Ⓒ $50\sqrt{3}$ m
Ⓓ $25\sqrt{6}$ m
Ⓔ $50\sqrt{6}$ m

34. (IFSUL 2015) Em certa cidade, a igreja está localiza no ponto $A,$ a prefeitura no ponto $B,$ e a livraria no ponto $C,$ como mostra os pontos a seguir.

Sabendo-se que a distância da igreja à prefeitura é de 10 metros, a distância da prefeitura à livraria corresponde a 15 metros, e que o ângulo formado por essas duas direções é $60°,$ a distância da livraria à igreja é



Ⓐ $17\sqrt{5}$ m
Ⓑ $5\sqrt{7}$ m
Ⓒ $25\sqrt{7}$ m
Ⓓ $7\sqrt{5}$ m

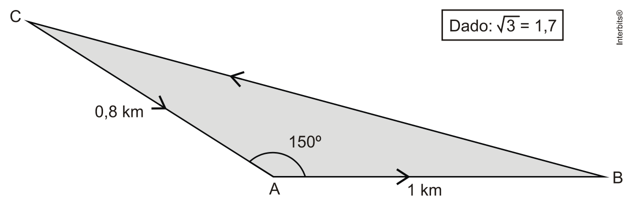
35. (UFPR 2014) Dois navios deixam um porto ao mesmo tempo. O primeiro viaja a uma velocidade de 16 km/h em um curso de 45° em relação ao norte, no sentido horário. O segundo viaja a uma velocidade 6 km/h em um curso de 105° em relação ao norte, também no sentido horário.

Após uma hora de viagem, a que distância se encontrarão separados os navios, supondo que eles tenham mantido o mesmo curso e velocidade desde que deixaram o porto?

Ⓐ 10 km.
Ⓑ 14 km.
Ⓒ 15 km.
Ⓓ 17 km.
Ⓔ 22 km.

36. (UFSM 2013) A caminhada é uma das atividades físicas que, quando realizada com frequência, torna-se eficaz na prevenção de doenças crônicas e na melhora da qualidade de vida.

Para a prática de uma caminhada, uma pessoa sai do ponto A, passa pelos pontos B e C e retorna ao ponto A, conforme trajeto indicado na figura.



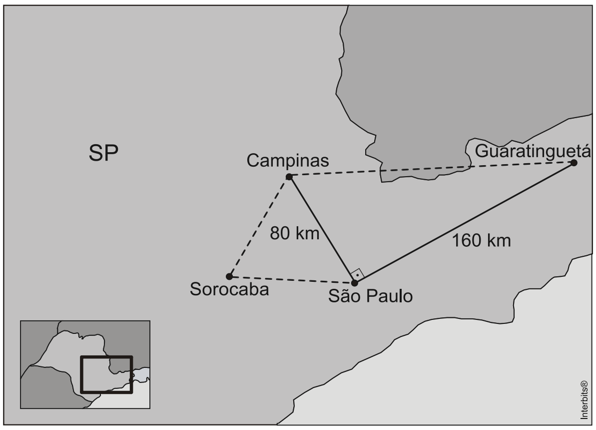
Quantos quilômetros ela terá caminhado, se percorrer todo o trajeto?

Ⓐ 2,29.
Ⓑ 2,33.
Ⓒ 3,16.
Ⓓ 3,50.
Ⓔ 4,80.

37. (UNESP 2013) Um professor de geografia forneceu a seus alunos um mapa do estado de São Paulo, que informava que as distâncias aproximadas em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Campinas e entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Guaratinguetá eram, respectivamente, 80km e 160km.

Um dos alunos observou, então, que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Campinas e Sorocaba formavam um triângulo equilátero.

Já um outro aluno notou que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Guaratinguetá e Campinas formavam um triângulo retângulo, conforme mostra o mapa.

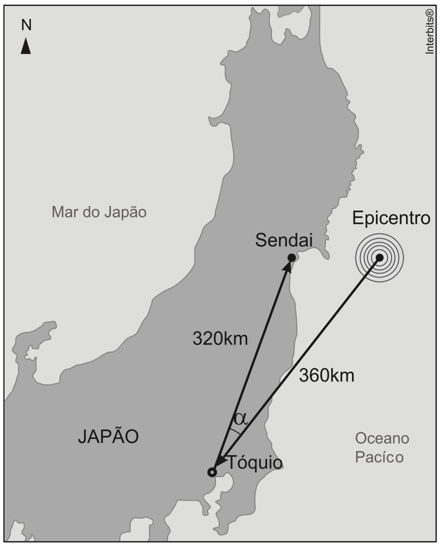


Com essas informações, os alunos determinaram que a distância em linha reta entre os pontos que representam as cidades de Guaratinguetá e Sorocaba, em km, é próxima de

A) $80 \cdot \sqrt{2+5 \cdot \sqrt{3}}$
B) $80 \cdot \sqrt{5+2 \cdot \sqrt{3}}$
C) $80 \cdot \sqrt{6}$
D) $80 \cdot \sqrt{5+3 \cdot \sqrt{2}}$
E) $80 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{3}}$

38. (UNESO 2012) *No dia 11 de março de 2011, o Japão foi sacudido por terremoto com intensidade de 8,9 na Escala Richter, com o epicentro no Oceano Pacífico, a 360 km de Tóquio, seguido de tsunami. A cidade de Sendai, a 320 km a nordeste de Tóquio, foi atingida pela primeira onda do tsunami após 13 minutos.*

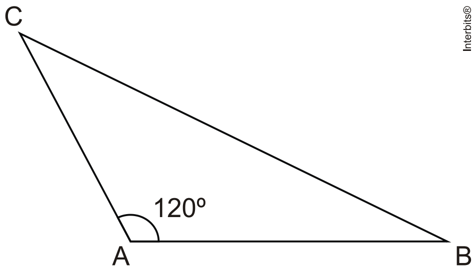
(*O Estado de S.Paulo*, 13.03.2011. Adaptado.)



Baseando-se nos dados fornecidos e sabendo que $\cos\alpha \cong 0,934$, onde α é o ângulo Epicentro-Tóquio-Sendai, e que $2^8 \cdot 3^2 \cdot 93,4 \cong 215\ 100$, a velocidade média, em km/h, com que a 1ª onda do tsunami atingiu até a cidade de Sendai foi de:

A) 10.
B) 50.
C) 100.
D) 250.
E) 600.

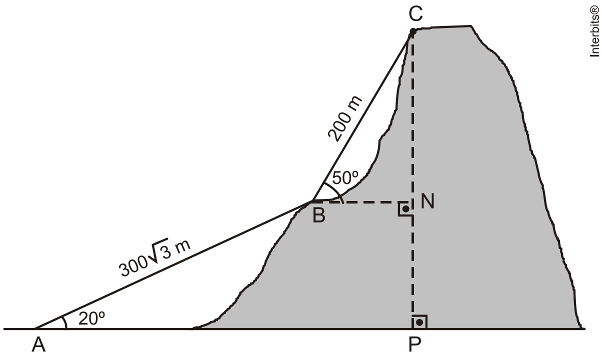
39. (UFTM 2012) Na figura estão posicionadas as cidades vizinhas A, B e C, que são ligadas por estradas em linha reta. Sabe-se que, seguindo por essas estradas, a distância entre A e C é de 24 km, e entre A e B é de 36 km.



Nesse caso, pode-se concluir que a distância, em km, entre B e C é igual a

A) $8\sqrt{17}$.
B) $12\sqrt{19}$.
C) $12\sqrt{23}$.
D) $20\sqrt{15}$.
E) $20\sqrt{13}$.

40. (UFPB 2011) Para explorar o potencial turístico de uma cidade, conhecida por suas belas paisagens montanhosas, o governo pretende construir um teleférico, ligando o terminal de transportes coletivos ao pico de um morro, conforme a figura a seguir.



Para a construção do teleférico, há duas possibilidades:

- o ponto de partida ficar localizado no terminal de transportes coletivos (ponto A), com uma parada intermediária (ponto B), e o ponto de chegada localizado no pico do morro (ponto C);
- o ponto de partida ficar localizado no ponto A e o de chegada localizado no ponto C, sem parada intermediária.

Supondo que $\overline{AB} = 300\sqrt{3}$ m, $\overline{BC} = 200$ m, $B\hat{A}P = 20°$ e $C\hat{B}N = 50°$, é correto afirmar que a distância entre os pontos A e C é de:

Ⓐ 700 m
Ⓑ 702 m
Ⓒ 704 m
Ⓓ 706 m
Ⓔ 708 m

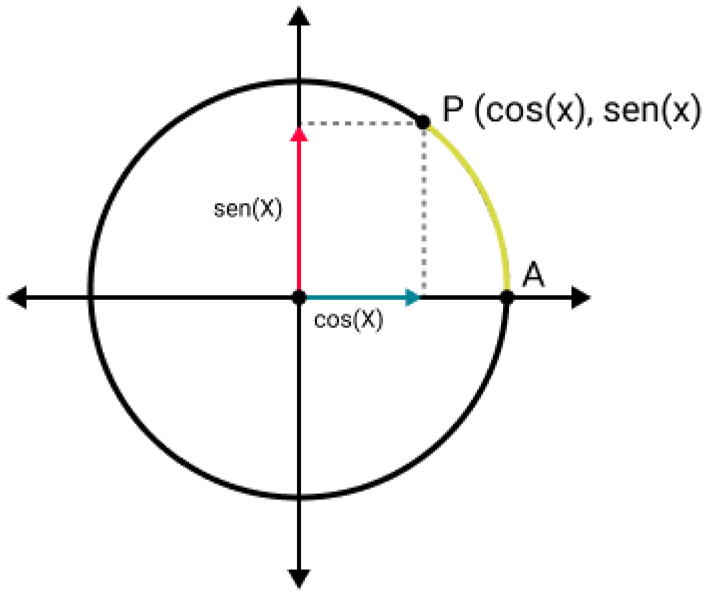
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As **funções trigonométricas** são funções angulares obtidas através do auxílio do círculo trigonométrico.

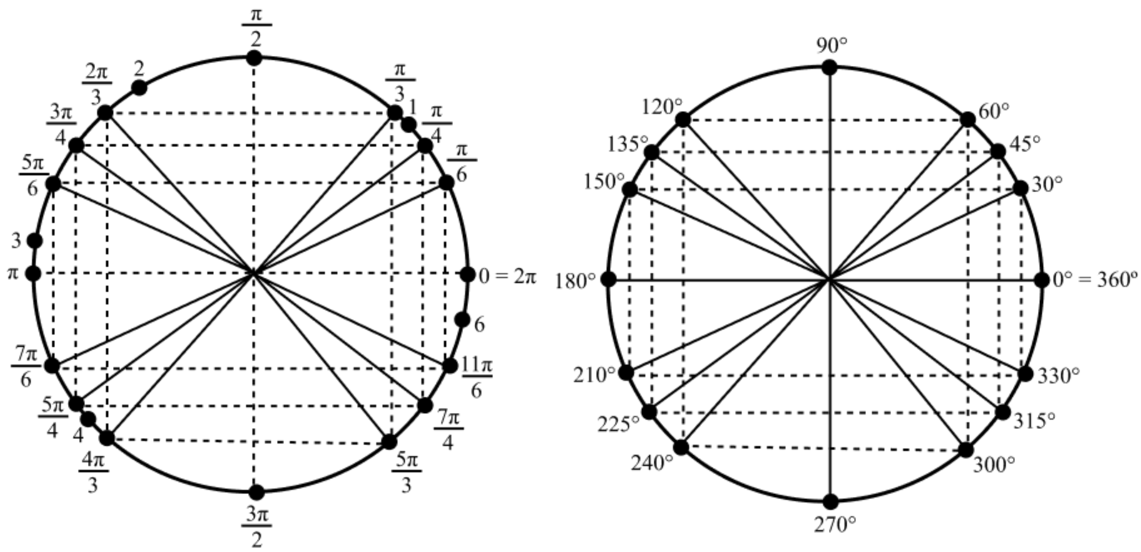
Destacamos as principais funções trigonométricas:

- Função Seno;
- Função Cosseno;
- Função Tangente.

Considerando um número real **x** qualquer e um ponto **P** do círculo (ciclo) trigonométrico, associamos esse ponto a um único valor para as funções trigonométricas seno e cosseno, chamaremos de **sen(x)** e **cos(x)**.



Esse ponto **P** mostrado acima pode ser qualquer um dos valores do círculo (ciclo) trigonométrico em graus ou radiano.



Círculo Trigonométrico em Radianos e Graus

FUNÇÃO SENO

A função seno é uma função periódica que possui imagem dentro do intervalo [-1, 1], isto é, **-1 ≤ sen(x) ≤ 1**, onde **x** é um número real.

Domínio da Função Seno

O domínio da função seno é o conjunto dos números reais, ou seja, **sen(x)** é definido para qualquer **x** real, então o domínio de **f(x) = sen(x)**é o conjunto **R**. Logo: **D = R**

Imagem da Função Seno

A função **sen(x)** assume o valor máximo igual a **1**, isso ocorre quando o valor de **x** representa um arco com primeira determinação **π/2**. E o valor mínimo igual a **-1**, quando **x** representa um arco com primeira determinação **3π/2**.

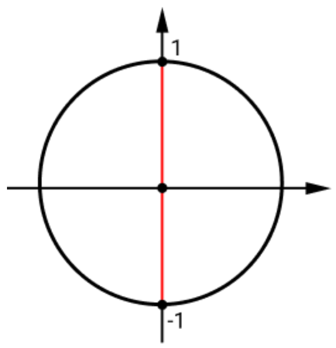


Imagem da Função Seno

Então, o conjunto imagem para a função **f(x) = sen(x)** é o intervalo [-1, 1], assim:
Im = [-1, 1]

Arcos Notáveis da Função Seno

Os arcos notáveis são valores, em radianos, para os ângulos **0°**, **30°**, **45°**, **60°**, **90°**, **180°**, **270°** e **360°**.

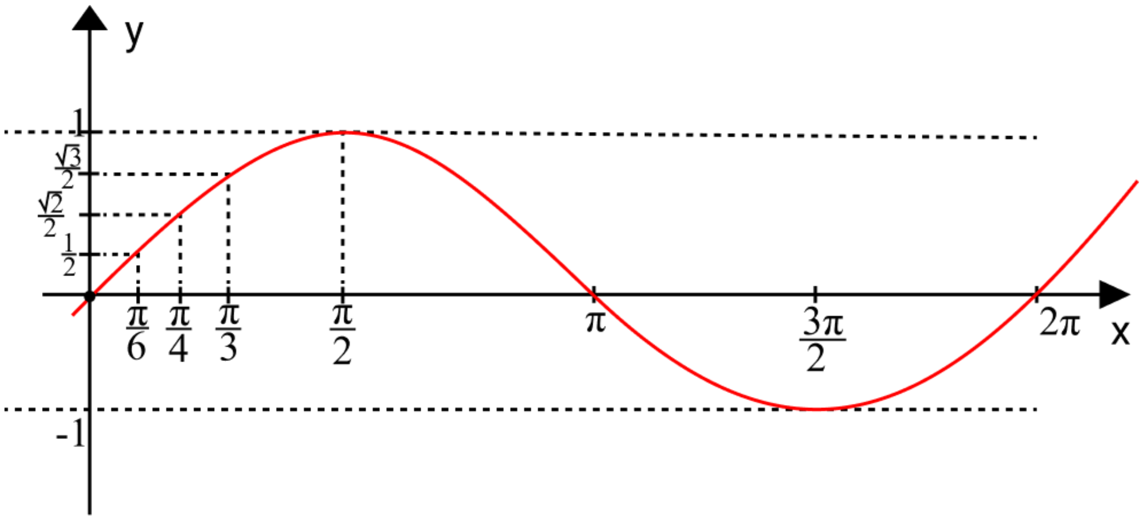
Então, assumindo que **x** seja um dos valores notáveis acima, temos a seguinte tabela com os valores em radianos para os ângulos em graus e o seno para o respetivo ângulo.

x	sen(x)
0	0
π/6	½
π/4	√2/2
π/3	√3/2
π/2	1
π	0
3π/2	-1
2π	0

A partir dessa tabela podemos construir o gráfico da função seno.

Gráfico da Função Seno

Vamos construir o gráfico da função seno colocando os valores notáveis no plano cartesiano. O comportamento da função seno é uma variação entre -1 e 1, por esse motivo a função seno é chamada de função periódica.



Período da Função Seno

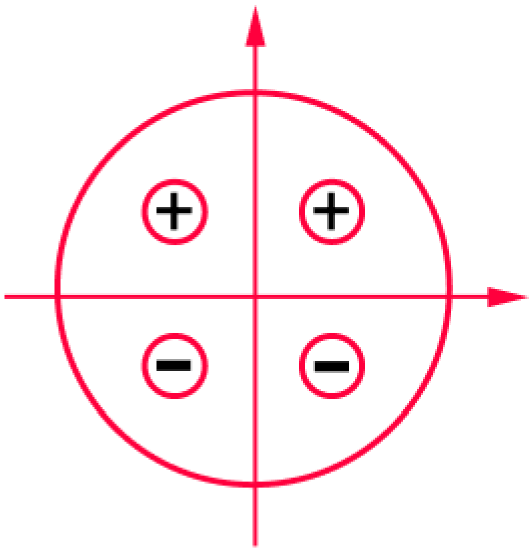
O período é a curva do gráfico no intervalo **0** a **2π**, e é chamado de **senoide**. Então o período da função seno é **2π**.

Paridade da Função Seno

A paridade da função seno é dada por **sen(-x) = – sen(x)**. Assim, **f(x) = sen(x)** é **ímpar**.

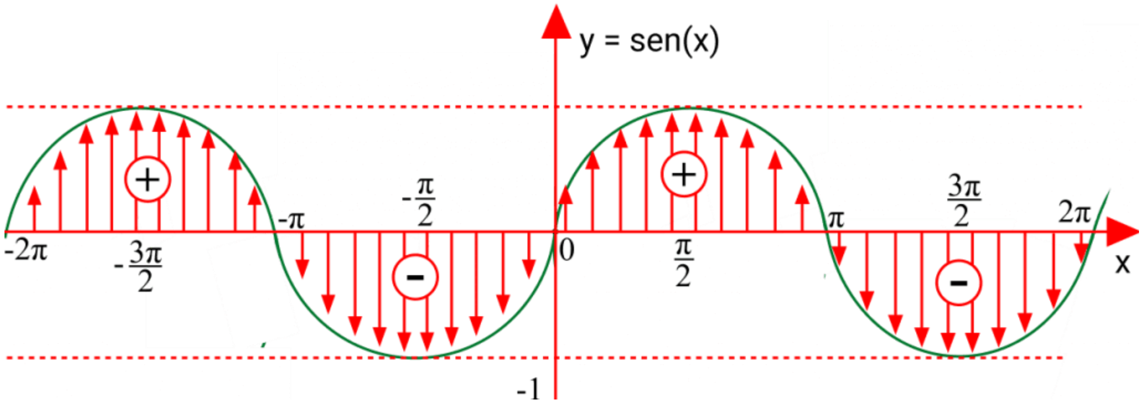
Sinal da Função Seno

No círculo trigonométrico a função seno tem sinal positivo nos quadrantes **I** e **II** e sinal negativo nos quadrantes **III** e **IV**. Considerando uma volta completa no ciclo.



Sinal da Função Seno

Pelo gráfico podemos ver quando a função seno assume valores negativos, positivos e zero.



FUNÇÃO COSSENO

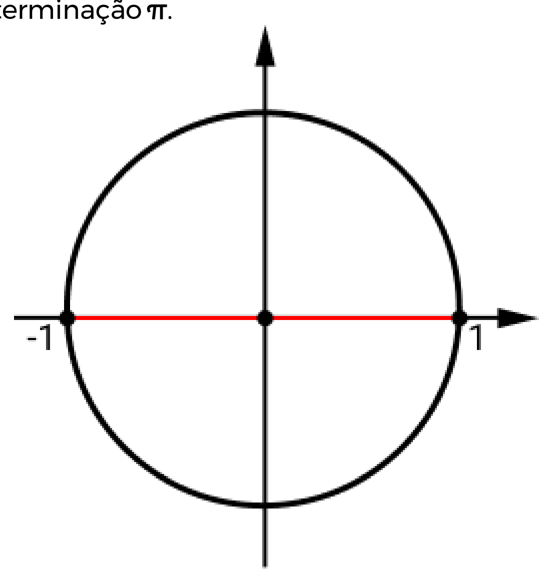
A função cosseno também é uma função periódica que possui imagem no intervalo [-1, 1], isto é, para um **x** real **-1 ≤ cos(x) ≤ 1**.

Domínio da Função Cosseno

O domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais, isto é, **cos(x)** é definido para qualquer **x** real, então o domínio de **f(x) = cos(x)**é o conjunto **R**. Assim: **D = R**

Imagem da Função Cosseno

A função **cos(x)** assume valor máximo igual a **1**, ocorre quando o valor de **x** representa um arco com primeira determinação **0**. E o valor mínimo igual a **-1**, quando **x** representa um arco com primeira determinação **π**.



Assim, o conjunto imagem para **f(x) = cos(x)** é o intervalo [-1, 1]. Logo: **Im = [-1, 1]**

ANDERSON
MATEMÁTICA

Arcos Notáveis da Função Cosseno

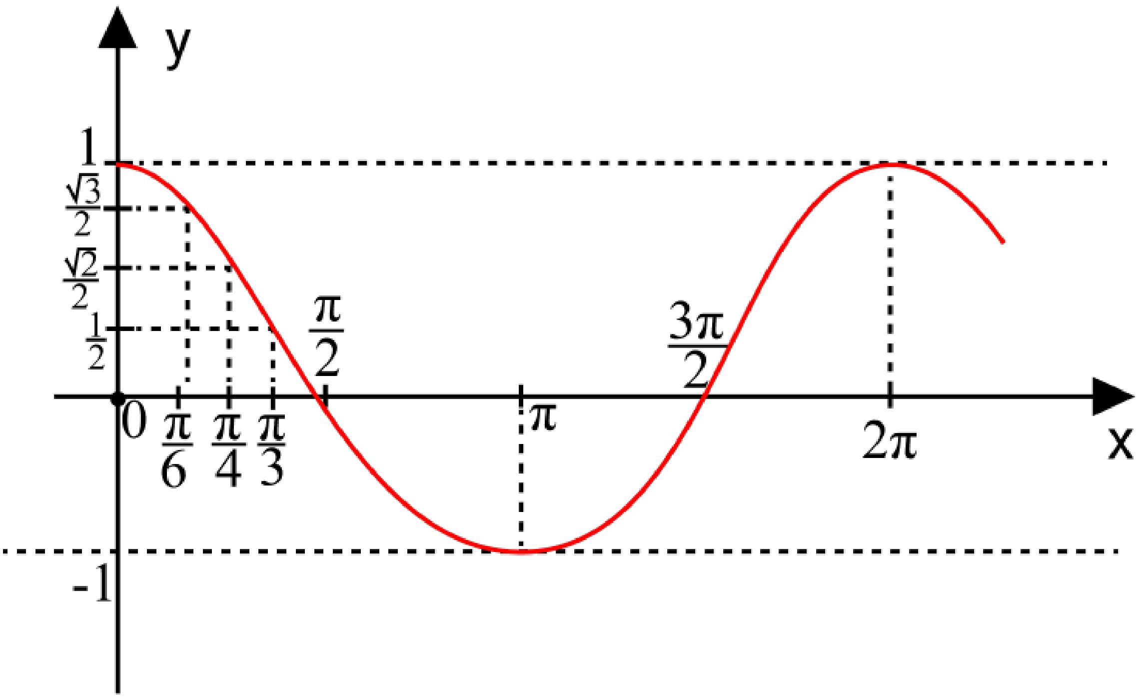
Os arcos notáveis são valores, em radianos, para os ângulos **0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270° e 360°.**

x	cos(x)
0	1
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	½
$\pi/2$	0
π	-1
$3\pi/2$	0
2π	1

Esses valores nos auxiliarão na construção do gráfico da função cosseno.

Gráfico da Função Cosseno

Usando os valores dos arcos notáveis acima vamos construir o gráfico da função cosseno no plano cartesiano. A função cosseno é uma variação entre -1 e 1. Também é uma função periódica.



Período da Função Cosseno

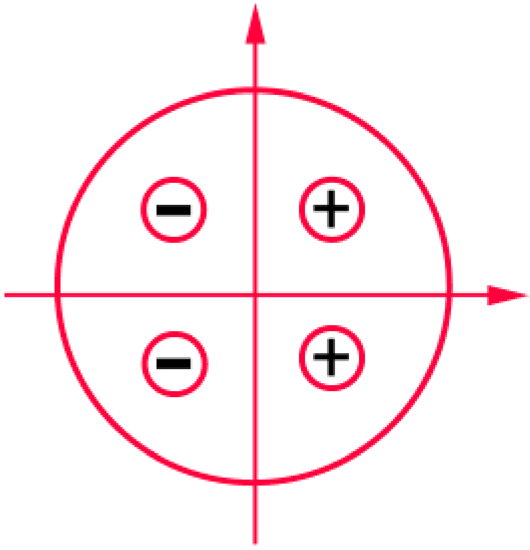
O período é a curva do gráfico no intervalo **0** a **2π**, e é chamado de **cossenoide**. Então, o período da função cosseno é **2π**.

Paridade da Função Cosseno

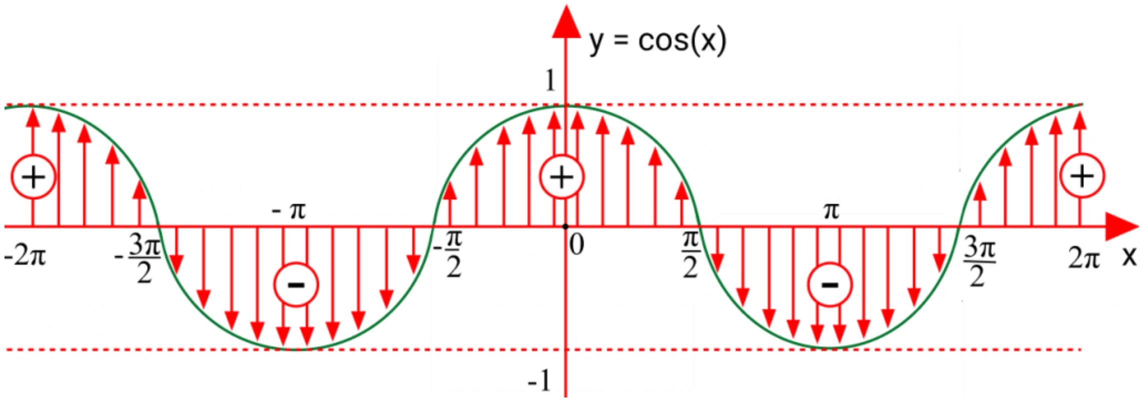
A paridade da função cosseno é dada por **cos(-x) = cos(x)**. Assim, **f(x) = cos(x)** é **par**.

Sinal da Função Cosseno

No círculo trigonométrico a função cosseno tem sinal positivo nos quadrantes **I** e **IV** e negativo nos quadrantes **II** e **III**. Considerando uma volta completa no ciclo.



Pelo gráfico podemos ver quando a função cosseno assume valores negativos, positivos e zero.



FUNÇÃO TANGENTE

A função tangente para um número real **x** é a razão entre o seno e o cosseno desse número. É uma função ilimitada, ou seja, não é limitada por um intervalo como as funções seno e cosseno, mas é periódica.

Domínio da Função Tangente

A função tangente existe, se, e somente se, o **cos(x) ≠ 0**, então definimos o domínio da função **f(x) = tan(x)** como:

$$D = \{x \in R \mid x \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in Z\}$$

Imagem da Função Tangente

A tangente de um número real **x** pode assumir qualquer valor, já que a função tangente é ilimitada. Dessa forma, a imagem da função tangente é:

$$Im =]-\infty, \infty[$$

Ou seja, pode assumir infinitos valores negativos ou positivos.

Arcos Notáveis da Função Tangente

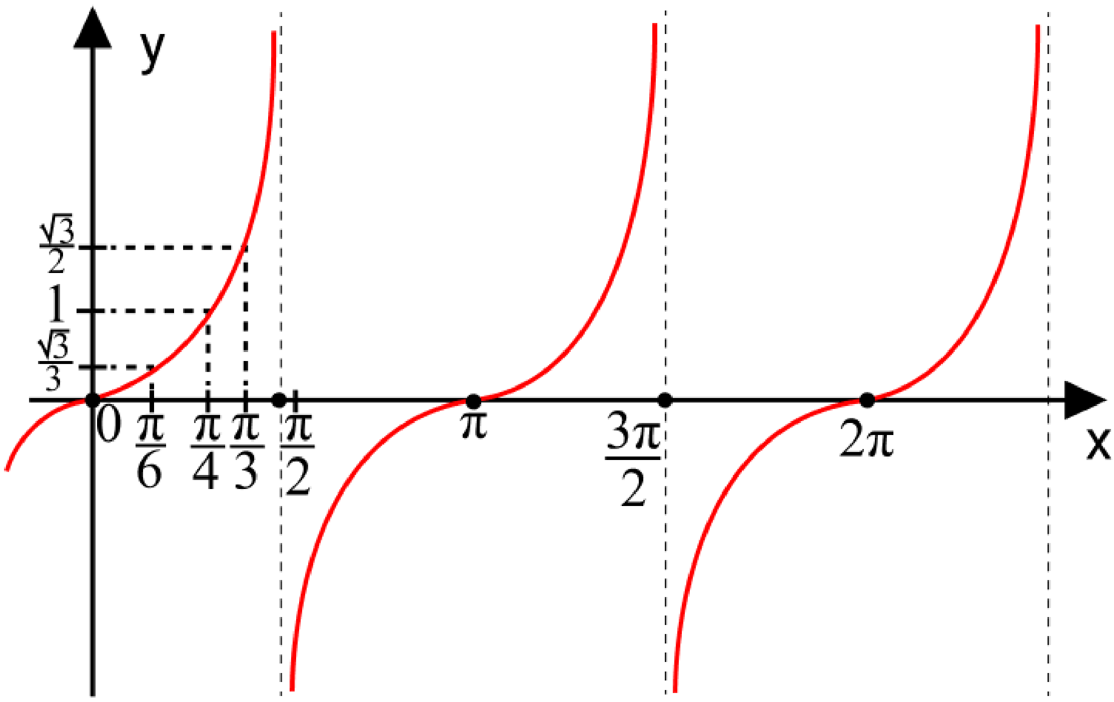
Os arcos notáveis são valores, em radianos, para os ângulos **0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°** e **360°**.

x	tan(x)
0	0
π/6	√3/2
π/4	1
π/3	√3
π/2	∄
π	0
3π/2	∄
2π	0

*Este símbolo (∄) significa **não existe**.*
Esses valores nos auxiliarão na construção do gráfico da função tangente.

Gráfico da Função Tangente

Com os valores notáveis para a função tangente em mãos, vamos construir o gráfico. A função tangente é ilimitada, isto é, não está dentro de um intervalo. É uma função periódica, ou seja, ocorre em determinados períodos.



Período da Função Tangente

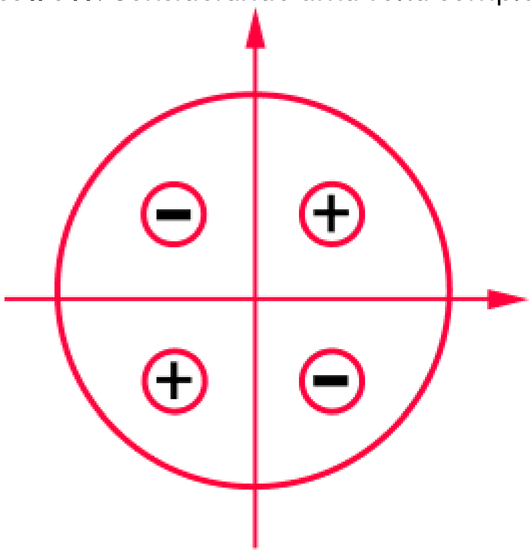
O período da função tangente é π.

Paridade da Função Tangente

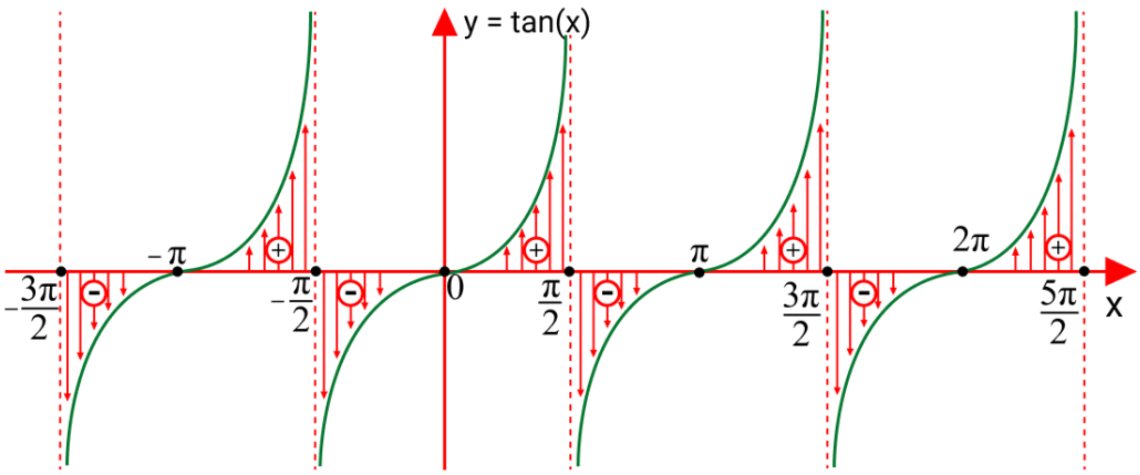
A paridade da função tangente é dada por **tan(-x) = – tan(x)**.
Assim, **f(x) = tan(x)** é **ímpar**.

Sinal da Função Tangente

No círculo trigonométrico função tangente tem sinal positivo nos quadrantes **I** e **III** e negativo nos quadrantes **II** e **IV**. Considerando uma volta completa no ciclo.



Pelo gráfico podemos ver quando a função tangente assume valores negativos, positivos e zero.



Já que conhecemos as funções trigonométricas, vamos exercitar?

41. (IFBA 2016) A partir do solo, o pai observa seu filho numa roda gigante. Considere a altura A, em metros, do filho em relação ao solo, dada pela função $A(t) = 12,6 + 4\ \text{sen}[(\pi/18)\cdot(t-26)]$, onde o tempo (t) é dado em segundos e a medida angular em radianos.

Assim sendo, a altura máxima e mínima e o tempo gasto para uma volta completa, observados pelo pai, são, respectivamente:

Ⓐ 10,6 metros; 4,6 metros e 40 segundos.
Ⓑ 12,6 metros; 4,0 metros e 26 segundos.
Ⓒ 14,6 metros; 6,6 metros e 24 segundos.
Ⓓ 14,6 metros; 8,4 metros e 44 segundos.
Ⓔ 16,6 metros; 8,6 metros e 36 segundos.

42. (PUCSP 2016) Suponha que uma revista publicou um artigo no qual era estimado que, no ano de $2015 + x$, com $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}$, o valor arrecadado dos impostos incidentes sobre as exportações de certo país, em milhões de dólares, poderia ser obtido pela função $f(x) = 250 + 12\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$.

Caso essa previsão se confirme, então, relativamente ao total arrecadado a cada ano considerado, é correto afirmar que:

Ⓐ o valor máximo ocorrerá apenas em 2021.
Ⓑ atingirá o valor mínimo somente em duas ocasiões.
Ⓒ poderá superar 300 milhões de dólares.
Ⓓ nunca será inferior a 250 milhões de dólares.

43. (IFPE 2016) Na cidade de Recife, mesmo que muito discretamente, devido à pequena latitude em que nos encontramos, percebemos que, no verão, o dia se estende um pouco mais em relação à noite e, no inverno, esse fenômeno se inverte.

Já em outros lugares do nosso planeta, devido a grandes latitudes, essa variação se dá de forma muito mais acentuada.

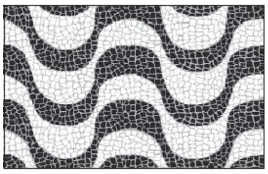
É o caso de Ancara, na Turquia, onde a duração de luz solar L, *em horas,* no dia d do ano, após 21 de março, é dada pela função:

$$L(d) = 12 + 2,8\cdot \text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(d-80)\right]$$

Determine, em horas, respectivamente, a máxima e a mínima duração de luz solar durante um dia em Ancara.

Ⓐ $12,8$ e 12
Ⓑ $14,8$ e $9,2$
Ⓒ $12,8$ e $9,2$
Ⓓ 12 e 12
Ⓔ $14,8$ e 12

44. (PUCRS 2015) O calçadão de Copacabana é um dos lugares mais visitados no Rio de Janeiro. Seu traçado é baseado na praça do Rocio, em Lisboa, e simboliza as ondas do mar.



Quando vemos seus desenhos, fica evidente que podemos pensar na representação gráfica de uma função

A logarítmica.
B exponencial.
C seno ou cosseno.
D polinomial de grau 1.
E polinomial de grau 2.

45. (ESPCEX AMAN 2015) A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3\left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right) + 5\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

A o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.
B a população atinge seu máximo em $t = 6$.
C o período de seca corresponde a 4 meses do ano.
D a população média anual é de 6.000 animais.
E a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6.000 animais.

46. (UFSM 2015) Cerca de $24,3\%$ da população brasileira é hipertensa, quadro que pode ser agravado pelo consumo excessivo de sal. A variação da pressão sanguínea P (em mmHg) de um certo indivíduo é expressa em função do tempo por

$$P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$$

onde t é dado em segundos. Cada período dessa função representa um batimento cardíaco. Analise as afirmativas:

I. A frequência cardíaca desse indivíduo é de 80 batimentos por minuto.
II. A pressão em $t = 2$ segundos é de $110\,\text{mmHg}$.
III. A amplitude da função $P(t)$ é de $30\,\text{mmHg}$.

Está(ão) correta(s)

A apenas I.
B apenas I e II.
C apenas III.
D apenas II e III.
E I, II e III.

47. (UCS 2014) Suponha que, em determinado lugar, a temperatura média diária T, em $^{\circ}$C, possa ser expressa, em função do tempo t, em dias decorridos desde o início do ano, por:

$$T(t) = 14 + 12\,\text{sen}\left(\frac{2\pi(t-105)}{364}\right).$$

Segundo esse modelo matemático, a temperatura média máxima nesse lugar, ocorre, no mês de

A julho.
B setembro.
C junho.
D dezembro.
E março.

48. (ACAFE 2014) Com o objetivo de auxiliar os maricultores a aumentar a produção de ostras e mexilhões, um engenheiro de aquicultura fez um estudo sobre a temperatura da água na região do sul da ilha, em Florianópolis.

Para isso, efetuou medições durante três dias consecutivos, em intervalos de 1 hora. As medições iniciaram às 5 horas da manhã do primeiro dia $(t=0)$ e os dados foram representados pela função periódica $T(t) = 24 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$, em que t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da medição e $T(t)$, a temperatura (em $^{\circ}$C) no instante t.

O período da função, o valor da temperatura máxima e o horário em que ocorreu essa temperatura no primeiro dia de observação valem, respectivamente:

A 6 h, $25{,}5\ ^{\circ}$C e 10 h.
B 12 h, $27\ ^{\circ}$C e 10 h.
C 12 h, $27\ ^{\circ}$C e 15 h.
D 6 h, $25{,}5\ ^{\circ}$C e 15 h.

49. (UNIOESTE 2013) Uma loja do ramo de som vende instrumentos musicais e renova todo mês seu estoque de violas em 60 unidades.

A função que aproxima o estoque de violas da loja ao longo do mês é $f(x) = 30\left(\cos\left(\frac{\pi x}{30}\right) + 1\right)$, sendo que x é o dia do mês (considerando o mês comercial de 30 dias) e $f(x)$ é o estoque ao final do dia x.

Nos termos apresentados, é correto afirmar que

A ao final do mês, metade do estoque ainda não foi vendido.
B a loja vende metade do seu estoque até o dia 10 de cada mês.
C no dia 15 de cada mês, metade do estoque do mês foi vendido.
D ao fim do mês, a loja ainda não vendeu todo o estoque de violas.
E o estoque em um determinado dia do mês é exatamente metade do estoque do dia anterior.

50. (UFSM 2013) Em muitas cidades, os poluentes emitidos em excesso pelos veículos causam graves problemas a toda população. Durante o inverno, a poluição demora mais para se dissipar na atmosfera, favorecendo o surgimento de doenças respiratórias.

Suponha que a função

$$N(x) = 180 - 54\cos\left(\frac{\pi}{6}(x-1)\right)$$

represente o número de pessoas com doenças respiratórias registrado num Centro de Saúde, com $x = 1$ correspondendo ao mês de janeiro, $x = 2$, ao mês de fevereiro e assim por diante.

A soma do número de pessoas com doenças respiratórias registrado nos meses de janeiro, março, maio e julho é igual a

Ⓐ 693.
Ⓑ 720.
Ⓒ 747.
Ⓓ 774.
Ⓔ 936.

51. (INSPER 2013) Num restaurante localizado numa cidade do Nordeste brasileiro são servidos diversos tipos de sobremesas, dentre os quais sorvetes. O dono do restaurante registrou numa tabela as temperaturas médias mensais na cidade para o horário do jantar e a média diária de bolas de sorvete servidas como sobremesa no período noturno.

mês	**jan**	**fev**	**mar**	**abr**	**mai**	**jun**	**jul**	**ago**	**set**	**out**	**nov**	**dez**
temperatura média mensal (graus Celsius)	29	30	28	27	25	24	23	24	24	28	30	29
bolas de sorvete	980	1000	960	940	900	880	860	880	880	960	1000	980

O dono do restaurante percebeu que a temperatura média mensal afeta não apenas a venda de sorvetes, mas o movimento de seu restaurante como um todo.

Ele contratou os serviços de uma consultoria especializada em metereologia, que lhe forneceu uma série de fórmulas para prever as temperaturas, dentre elas uma expressão do tipo $T(x) = A + f(Bx + C)$, em que A, B e C são coeficientes que devem ser atualizados no início de cada ano. Abaixo dessa fórmula, havia uma observação, informando que a função f deveria modelar as subidas e descidas periódicas da temperatura ao longo do ano.

Das funções a seguir, a única que poderia representar f de modo a conferir-lhe essa propriedade é

Ⓐ sen (x).
Ⓑ log (x).
Ⓒ x^2.
Ⓓ $\sqrt{x}$
Ⓔ 2^x.

52. (UERN 2012) Um determinado inseto no período de reprodução emite sons cuja intensidade sonora oscila entre o valor mínimo de 20 decibéis até o máximo de 40 decibéis, sendo t a variável tempo em segundos.

Entre as funções a seguir, aquela que melhor representa a variação da intensidade sonora com o tempo I(t) é

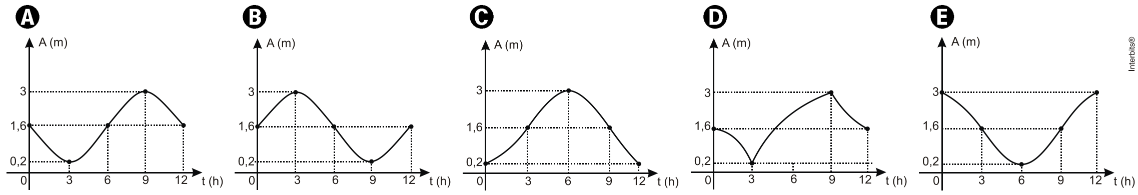
Ⓐ $50 - 10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.
Ⓑ $30 + 10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.
Ⓒ $40 + 20\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.
Ⓓ $60 - 20\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$.

53. (UFPB 2012) Um especialista, ao estudar a influência da variação da altura das marés na vida de várias espécies em certo manguezal, concluiu que a altura *A* das marés, dada em metros, em um espaço de tempo não muito grande, poderia ser modelada de acordo com a função:

$$A(t) = 1{,}6 - 1{,}4\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Nessa função, a variável *t* representa o tempo decorrido, em horas, a partir da meia-noite de certo dia.

Nesse contexto, conclui-se que a função *A*, no intervalo [0,12], está representada pelo gráfico:



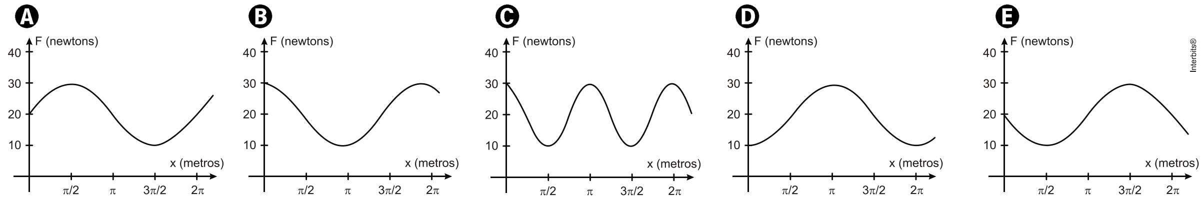
54. (UCS 2012) Suponha que o deslocamento de uma partícula sobre uma corda vibrante seja dado pela equação $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\text{sen}(10\pi t)$, em que t é o tempo, em segundos, após iniciado o movimento, e s, medido em centímetros, indica a posição.

Meio segundo após iniciado o movimento da corda, qual é, em cm, o afastamento da partícula da posição de repouso?

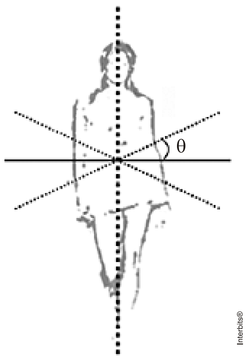
Ⓐ 0
Ⓑ 0,125
Ⓒ 0,25
Ⓓ 10
Ⓔ 10,25

55. (UCS 2012) Para colocar um objeto em movimento e deslocá-lo sobre uma trajetória retilínea por x metros, é necessário aplicar uma força de $20+10\,\text{sen}(x)$ newtons sobre ele.

Em qual dos gráficos abaixo, no intervalo $[0,3]$, está representada a relação entre a força aplicada e a distância, quando o objeto é deslocado até 3 metros?



56. (UEPA 2012) Os desfiles de moda parecem impor implicitamente tanto o "vestir-se bem" quanto o "ser bela" definindo desse modo padrões de perfeição. Nesses desfiles de moda, a rotação pélvica do andar feminino é exagerada quando comparada ao marchar masculino, em passos de igual amplitude. Esse movimento oscilatório do andar feminino pode ser avaliado a partir da variação do ângulo θ conforme ilustrado na figura abaixo, ao caminhar uniformemente no decorrer do tempo (t).



(Fonte: http://www.google.com.br/search?hl=PT
Acesso em 9 de setembro de 2011 – Texto adaptado)

Um modelo matemático que pode representar esse movimento oscilatório do andar feminino é dado por: $\theta(t)=\frac{\pi}{10}\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$.

Nestas condições, o valor de $\theta\left(\frac{3}{2}\right)$ é:

A) $\frac{\pi}{8}$

B) $\frac{\pi}{10}$

C) $\frac{\pi}{12}$

D) $\frac{\pi}{18}$

E) $\frac{\pi}{20}$

57. (FGVRJ 2012) A previsão mensal da venda de sorvetes para 2012, em uma sorveteria, é dada por $P = 6000 + 50x + 2000\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, em que *P* é o número de unidades vendidas no mês *x*; *x* = 0 representa janeiro de 2012, *x* = 1 representa fevereiro de 2012, *x* = 2 representa março de 2012 e assim por diante.

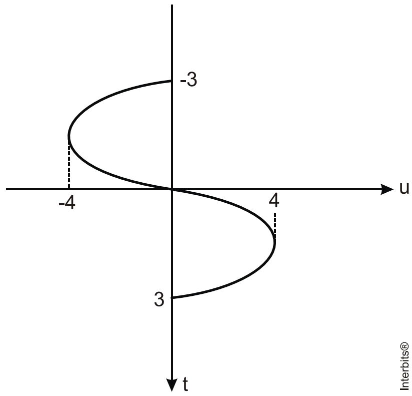
Se essas previsões se verificarem, em julho haverá uma queda na quantidade vendida, em relação a março, de aproximadamente:

Ⓐ 39,5%
Ⓑ 38,5%
Ⓒ 37,5%
Ⓓ 36,5%
Ⓔ 35,5%

58. (UFSM 2012) O início da década de oitenta foi marcado por um estilo que ficou conhecido como *new wave*. Um grande sucesso dessa época foi a música *Safety Dance* do grupo canadense *Men Without Hats*. No videoclipe da música, ambientado num cenário medieval, um casal dança ao som da música e, no refrão "*Oh Well the safety dance, ah yes the safety dance*", forma com os braços a letra S, inicial de *Safety*. Essa representação ficou sendo a marca registrada do sucesso alcançado. Alguns programas e séries da TV atual apresentaram a sua versão para o *Safety Dance*. Nas figuras, estão representadas a versão original, a versão da série animada *Uma família da pesada* e a versão da série *Glee*.

Fonte: http://www.youtube.com

Considere que o programa de computador que gerou as imagens da série *Uma família da pesada* tenha utilizado o gráfico de uma senoide $u(t) = A\,\text{sen}(\omega t)$ para o posicionamento dos braços do personagem como mostra a figura a seguir.



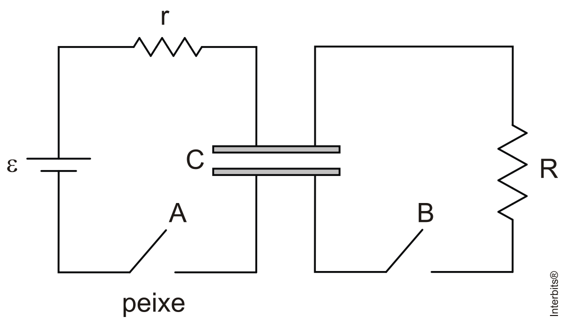
Afirma-se, então:

I. A amplitude é A = 4.
II. O período da função u(t) é 3.
III. A frequência angular é $\omega = \pi$.

Está(ão) correta(s)

Ⓐ apenas I.
Ⓑ apenas II.
Ⓒ apenas I e III.
Ⓓ apenas II e III.
Ⓔ I, II e III.

59. (UNB 2012)



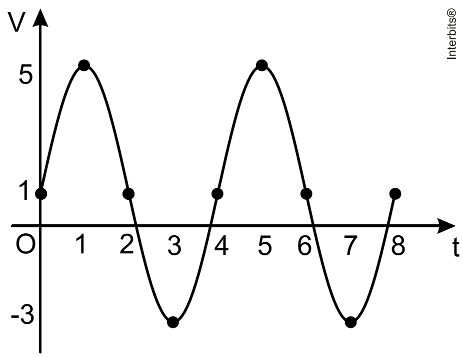
O circuito elétrico ilustrado acima permite modelar a descarga elétrica produzida por um peixe elétrico. Esse circuito é formado por uma *fem* ε, um capacitor de capacitância *C* e uma resistência interna *r*. A parte externa é representada pelo capacitor ligado a um resistor de resistência *R*, o qual representa um objeto que eventualmente sofre uma descarga do peixe elétrico. Quando a chave *A* é fechada, o capacitor carrega-se, se estiver descarregado. Nesse caso, a carga *q* armazenada no capacitor em função do tempo é dada por

$$q(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{rC}}\right).$$

O capacitor, quando está completamente carregado, com a chave *A* aberta e a chave *B* fechada, descarrega-se. Nesse caso, a carga *q* armazenada no capacitor, em função do tempo, é expressa por

$$q(t) = C\varepsilon e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Considere que a *fem* do circuito em questão seja dada pela função *V* = *V*(*t*) = $\alpha \operatorname{sen} \beta t + \gamma,\ 0 \le t \le 8,$ cujo gráfico é ilustrado abaixo .



Nesse caso, o valor de $\alpha \times \beta \times \gamma$ é igual a

A π/2.
B π.
C 3π/2.
D 2π.

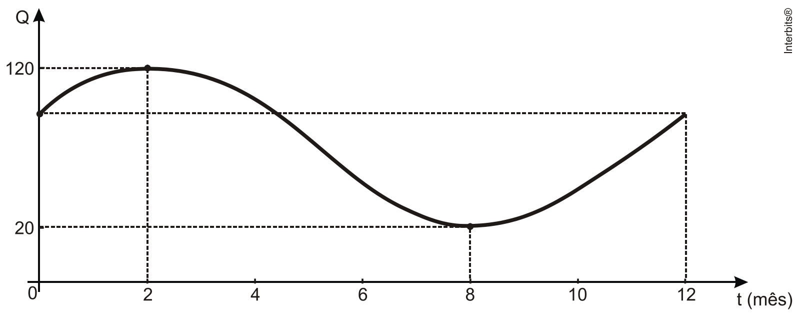
60. (PUCRS 2012) *Arquimedes, candidato a um dos cursos da Faculdade de Engenharia, visitou a PUCRS para colher informações. Uma das constatações que fez foi a de que existe grande proximidade entre Engenharia e Matemática.*

Os fenômenos gerados por movimentos oscilatórios são estudados nos cursos da Faculdade de Engenharia. Sob certas condições, a função $y = 10\cos(4t)$ descreve o movimento de uma mola, onde **y** (medido em cm) representa o deslocamento da massa a partir da posição de equilíbrio no instante **t** (em segundos).

Assim, o período e a amplitude desse movimento valem, respectivamente,

A) $\frac{\pi}{2}$ s — 10 cm
B) 2π s — 20 cm
C) $\frac{\pi}{4}$ s — 10 cm
D) $\frac{\pi}{4}$ s — 20 cm
E) $\frac{\pi}{2}$ s — 20 cm

61. (UFSM 2011)

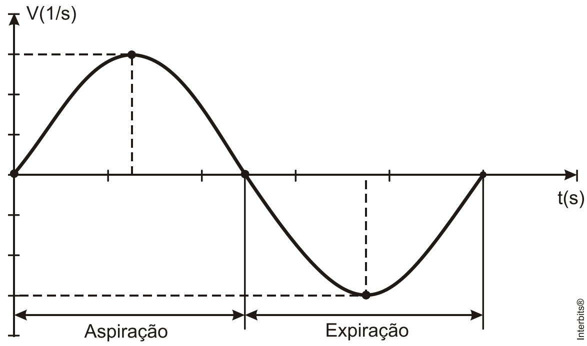


O gráfico mostra a quantidade de animais que uma certa área de pastagem pode sustentar ao longo de 12 meses. Propõe-se a função Q (t) = a sen (b + ct) + d para descrever essa situação.

De acordo com os dados, Q (0) é igual a

A) 100.
B) 97.
C) 95.
D) 92.
E) 90.

62. (UNESP 2010) Em situação normal, observa-se que os sucessivos períodos de aspiração e expiração de ar dos pulmões em um indivíduo são iguais em tempo, bem como na quantidade de ar inalada e expelida. A velocidade de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo está representada pela curva do gráfico, considerando apenas um ciclo do processo.



Sabendo-se que, em uma pessoa em estado de repouso, um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos e que a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 1/s, a expressão da função cujo gráfico mais se aproxima da curva representada na figura é:

A) $V(t) = \frac{2\pi}{5}\text{sen}\left(\frac{3}{5}t\right).$

B) $V(t) = \frac{3}{5}\text{sen}\left(\frac{5}{2\pi}t\right).$

C) $V(t) = 0{,}6\cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right).$

D) $V(t) = 0{,}6\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right).$

E) $V(t) = \frac{5}{2\pi}\cos(0{,}6t).$

63. (PUCPR 2010) Um terremoto de magnitude 8 graus da escala Richter atingiu, em setembro de 2009, a região de Samoa. O terremoto causou ondas de até 3 metros. A maré alta neste local ocorreu à meia-noite. Suponha que o nível de água na maré alta era de 3 metros; mais tarde, na maré baixa, era de 3 cm.

Supondo que a próxima maré alta seja exatamente ao meio-dia e que a altura da água é dada por uma curva seno ou cosseno, qual das alternativas a seguir corresponde à fórmula para o nível da água na região em função do tempo?

A) $1{,}515 + 1{,}485.\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

B) $1{,}515 + 1{,}485.\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

C) $1{,}485.\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

D) $1{,}485.\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

E) $1{,}485 + 1{,}515.\cos(\pi t)$

64. (UFSM 2008) Em determinada cidade, a concentração diária, em gramas, de partículas de fósforo na atmosfera é medida pela função $C(t) = 3 + 2\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$, em que t é a quantidade de horas para fazer essa medição.

O tempo mínimo necessário para fazer uma medição que registrou 4 gramas de fósforo é de

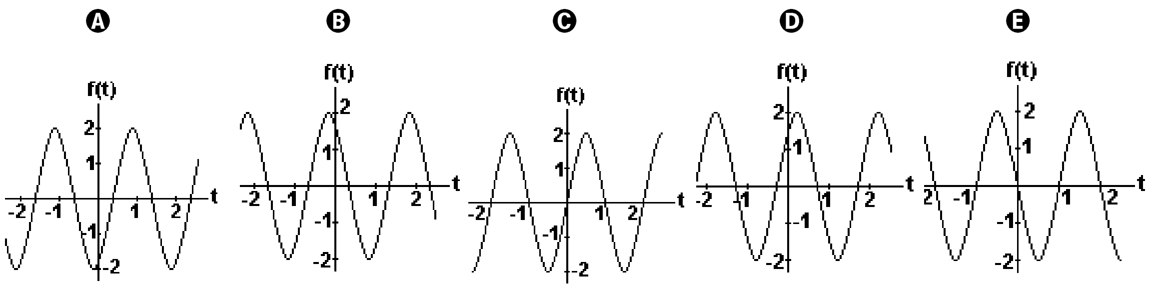
Ⓐ 1/2 hora.
Ⓑ 1 hora.
Ⓒ 2 horas.
Ⓓ 3 horas.
Ⓔ 4 horas.

65. (UFF 2007) Nas comunicações, um sinal é transmitido por meio de ondas senoidais, denominadas ondas portadoras.

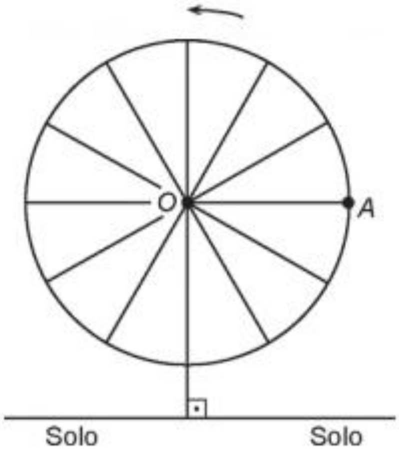
Considere a forma da onda portadora modelada pela função trigonométrica

$$f(t) = 2\ \text{sen}\left[3t - \left(\frac{\pi}{3}\right)\right],\ t \in IR$$

Pode-se afirmar que o gráfico que melhor representa f(t) é:



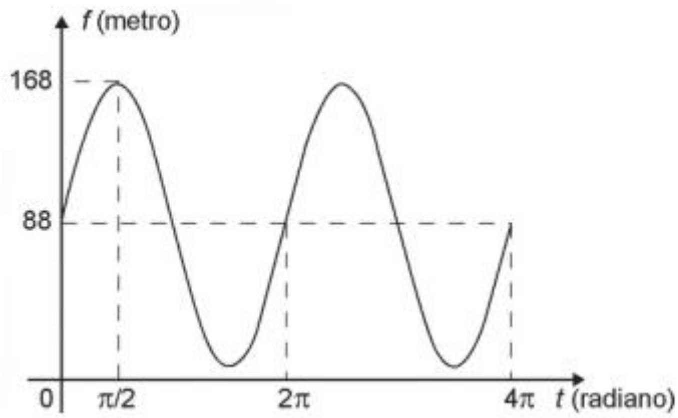
66. (ENEM 2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto Arepresenta uma de suas cadeiras:



Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t.

Após duas voltas completas, f em o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por

- **A** f(t) = 80sen(t) + 88
- **B** f(t) = 80cos(t) + 88
- **C** f(t) = 88 cos(t) + 168
- **D** f(t) = 168sen(t) + 88 cos(t)
- **E** f(t) = 88 sen(t)+ 168cos(t)

67. (ENEM 2014) Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a \,.\, \text{sen}[b(x + c)]$, em que os parâmetros a, b, c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda.

O(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s) é(são)

Ⓐ a.
Ⓑ b.
Ⓒ c.
Ⓓ a e b.
Ⓔ b e c.

68. (ENEM 2015) Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite ($0 \le h < 24$) e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C, a mínima 18°C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

Ⓐ A = 18 e B = 8
Ⓑ A = 22 e B = -4
Ⓒ A = 22 e B = 4
Ⓓ A = 26 e B = -8
Ⓔ A = 26 e B = 8

69. (ENEM 2017) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo P(t) = A + Bcos(kt) em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

Ⓐ $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$
Ⓑ $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$
Ⓒ $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$
Ⓓ $P(t) = 99 + 21\cos(t)$
Ⓔ $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

70. (ENEM 2015) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x-\pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

Ⓐ janeiro.
Ⓑ abril.
Ⓒ junho.
Ⓓ julho.
Ⓔ outubro.

71. (ENEM 2010) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

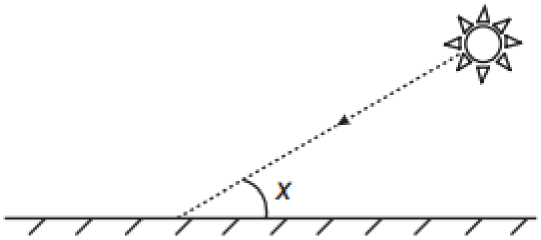
$$r(t) = \frac{5865}{1+0{,}15.\cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

Ⓐ 12 765 km.
Ⓑ 12 000 km.
Ⓒ 11 730 km.
Ⓓ 10 965 km.
Ⓔ 5 865 km.

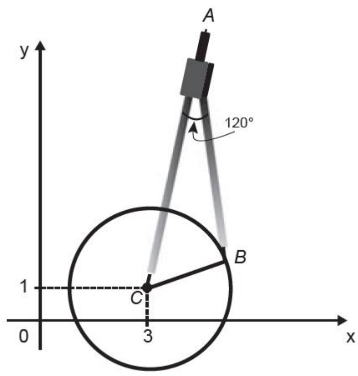
72. Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo X com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por I(x) = k . sen(x), sendo k uma constante, e supondo-se que X está entre 0° e 90°.



Quando x = 30°, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

Ⓐ 33%
Ⓑ 50%
Ⓒ 57%
Ⓓ 70%
Ⓔ 86%

73. (ENEM 2017) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto C. A ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura ao lado.



Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será

Ⓐ I.
Ⓑ II.
Ⓒ III.
Ⓓ IV.
Ⓔ V.

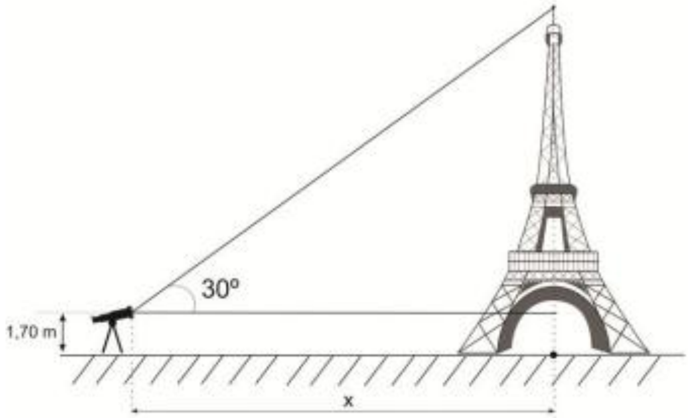
LISTA EXTRA

74. (UFT 2020) A **Torre Eiffel** é uma torre treliça de ferro do século XIX localizada no *Champ de Mars*, em Paris e que se tornou um ícone mundial da França. A torre, que é o edifício mais alto da cidade, tem 324 metros de altura e é o monumento pago mais visitado do mundo, com milhões de pessoas frequentando-o anualmente.

Uma visitante observa o topo da Torre Eiffel sob um ângulo de 30° com a horizontal, utilizando uma luneta com tripé. Sabe-se que a altura do equipamento, no momento da visualização, conforme a figura a seguir, é de 1,70m.

Assinale a alternativa **CORRETA** que indica a distância x, em metros, que a luneta está do centro da base da Torre Eiffel:

$$\left(Obs.: sen 30^\circ = \frac{1}{2}\; e\; cos\, 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



Ⓐ 325,7
Ⓑ 324
Ⓒ $322{,}3\sqrt{3}$
Ⓓ $324\sqrt{3}$

75. (IFSS 2019) Um jovem estudante do Instituto Federal vê um edifício sob um ângulo de 60˚. Caminhando mais 30 metros na direção oposta ao edifício, passa a observá-lo sob um ângulo de 45˚.

Sabendo que o prédio foi construído num terreno plano, determine a altura do edifício, em metros.

Ⓐ $\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

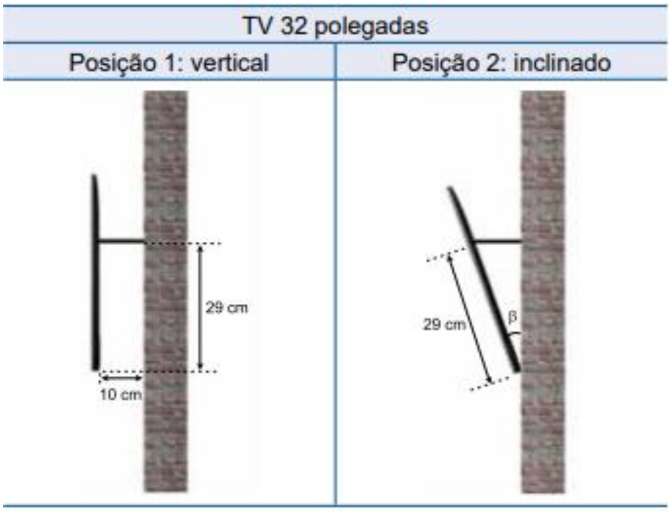
Ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}$

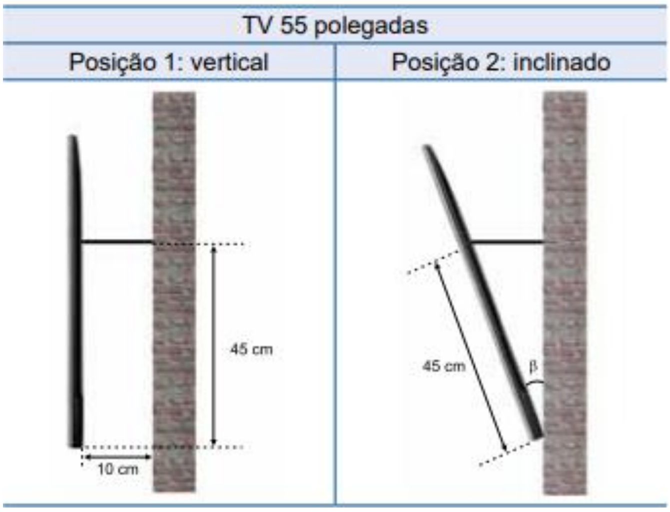
Ⓒ $\frac{10}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Ⓓ $\frac{30\sqrt{30}}{\sqrt{2}+1}$

Ⓔ $\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

76. (FAC. ALBERT EINSTEIN 2019) Uma empresa desenvolveu um suporte para fixação de televisores (TVs) em paredes. O suporte pode ser utilizado em TVs de 32 até 55 polegadas e permite que o aparelho fique na vertical ou inclinado, conforme a ilustração, em que β refere-se ao ângulo máximo de inclinação.





Considere os seguintes valores aproximados para seno, cosseno e tangente:

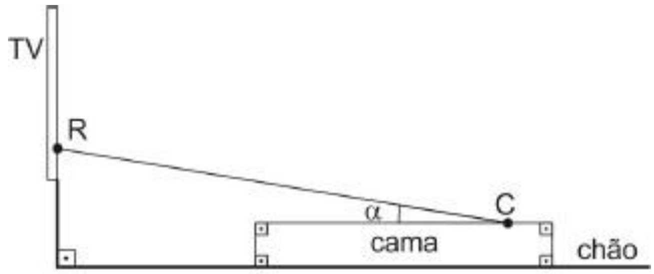
β	sen β	cos β	tg β
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,230
14°	0,242	0,970	0,250
15°	0,259	0,966	0,268

β	sen β	cos β	tg β
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384

A diferença entre o ângulo máximo de inclinação da TV de 32 polegadas e da TV de 55 polegadas é um valor entre

A) 1° e 3°.
B) 9° e 11°.
C) 7° e 9°.
D) 3° e 5°.
E) 5° e 7°.

77. (PUC CAMPINAS 2018) Paulo está deitado na cama e assistindo à TV. Na figura, C representa um ponto sobre a cama a partir do qual o controle remoto da TV foi acionado na direção do receptor de sinal indicado por R. A medida do ângulo entre a linha que representa o sinal transmitido e a cama é igual a α.



Dados:

α	11,3°	11,5°	12,1°	12,4°	78,5°
sen α	0,196	0,199	0,210	0,215	0,980
cos α	0,981	0,980	0,978	0,977	0,199
tg α	0,200	0,203	0,214	0,220	4,915

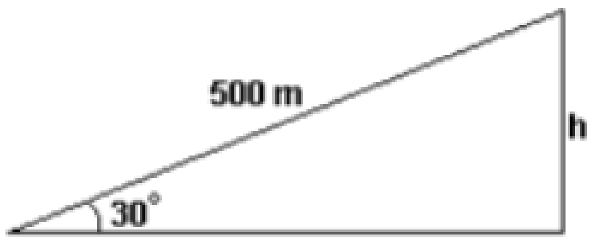
Sabe-se, ainda, que:

– R está a 1,2 m do chão;
– a altura da cama em relação ao chão é de 40 cm;
– C está a 4 metros de distância da parede em que a TV está fixada;
– a espessura da TV é desprezível.

Nas condições descritas e consultando a tabela, α é igual a

Ⓐ 78,5°
Ⓑ 11,5°
Ⓒ 12,1°
Ⓓ 12,4°
Ⓔ 11,3°

78. (FAG 2017) Um avião levanta voo sob um ângulo de 30°.

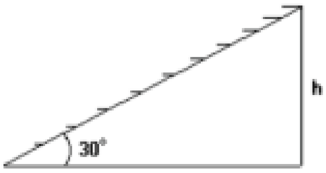


Então, depois que tiver percorrido 500 m, conforme indicado na figura, sua altura h em relação ao solo, em metros, será igual a:

Considere sen 30° = 0,50 ou cos 30° = 0,87.

Ⓐ 250
Ⓑ 300
Ⓒ 400
Ⓓ 435
Ⓔ 440

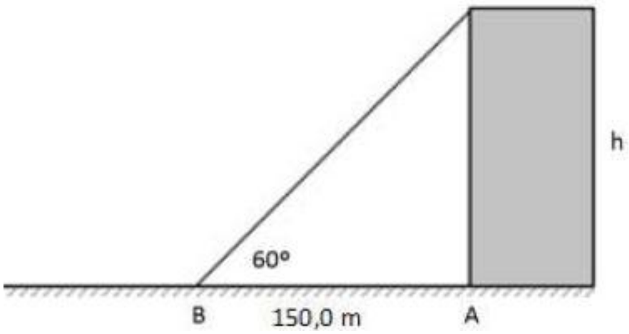
79. (IFRR 2017) A escada rolante que liga os dois andares do Pátio Roraima Shopping mede 16 metros de comprimento.



Se ela possui uma inclinação de 30°, a altura h entre os andares do shopping, em metros, é:

Ⓐ 8m
Ⓑ 10m
Ⓒ 12m
Ⓓ 14m
Ⓔ 15m

80. (UNCISAL 2017) De um ponto do chão situado a 150 m de distância de um edifício, vê-se o topo do prédio sob um ângulo de 60°, como mostra a figura, desenhada sem escala.



Se for adotado $\sqrt{3} = 1,7$, o ponto do chão a partir do qual se vê o topo sob um ângulo de 45° ficará a uma distância do edifício igual a

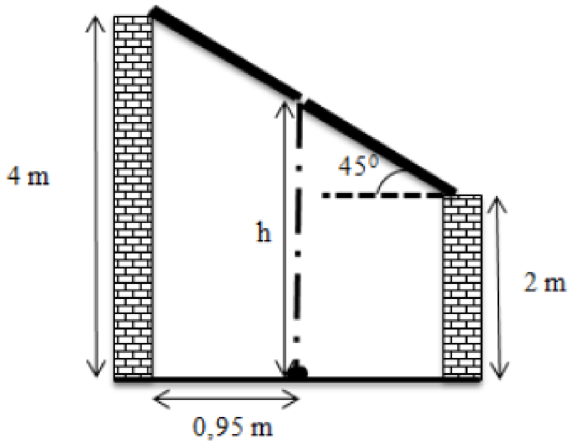
Ⓐ 75,0 m.
Ⓑ 105,0 m.
Ⓒ 127,5 m.
Ⓓ 255,0 m.
Ⓔ 355,0 m.

81. (FIPMOC 2017) Para calcular a altura de um prédio, um topógrafo instalou um teodolito a 1,8 metro do chão, num ponto plano do terreno, e avistou o topo do prédio sob um ângulo de 45° com a horizontal. Do ponto onde estava, deslocou o aparelho mais 10 metros em direção ao prédio, de modo que o topo do edifício passou a ser visto sob um ângulo de 60° com a horizontal.

A altura aproximada do edifício, em metros, é:

Ⓐ 25
Ⓑ 14
Ⓒ 16
Ⓓ 20
Ⓔ 28

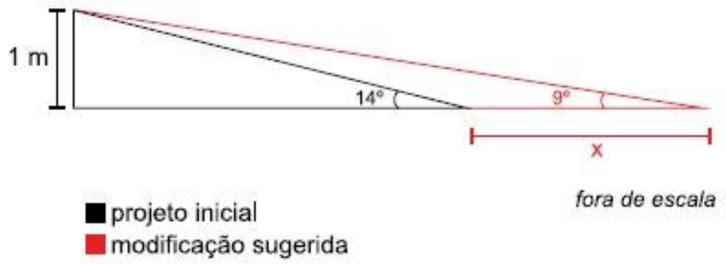
82. (UFN 2017) Uma telha, na entrada do restaurante, quebrou. Em dias chuvosos, uma goteira produz no chão, embaixo da telha quebrada, uma pequena poça d'água, a 0,95 m de uma das paredes da entrada do restaurante, conforme mostra a figura abaixo.



Desconsiderando a espessura do telhado, a altura (h), em metros, da telha quebrada ao chão é

Ⓐ 3,05.
Ⓑ 3,10.
Ⓒ 3,15.
Ⓓ 3,20.
Ⓔ 3,25.

83. (UNIFAE 2017) Um engenheiro revisava alguns projetos quando observou que, em um deles, havia uma rampa de garagem com inclinação de 14°, inviável para o projeto em questão. A correção foi feita de modo que a inclinação passou a ser de 9°, conforme ilustrado a seguir.



Considere a tabela:

	sen	cos	tg
9º	0,15	0,99	0,16
14º	0,24	0,97	0,25

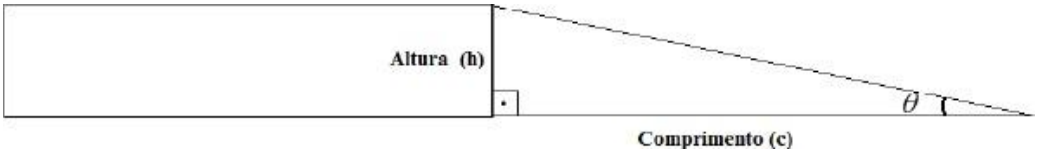
Utilizando os dados e a tabela, o acréscimo na extensão horizontal (x) da rampa, em metros, será igual a

Ⓐ 1,75.
Ⓑ 5,00.
Ⓒ 2,25.
Ⓓ 0,50.
Ⓔ 3,50.

84. (UFVJM 2017) Um estabelecimento comercial precisou fazer algumas adaptações às normas de acessibilidade de forma a tornar o ambiente acessível a alguns clientes que são portadores de necessidades especiais. Para projetar a rampa de acesso foi contratado um especialista que apresentou a seguinte fórmula para os cálculos

$$i = 100.\left(\frac{h}{c}\right)$$

Onde i é a inclinação (em porcentagem), h a altura do desnível e c o comprimento da projeção horizontal conforme a figura a seguir. Após algumas medidas constatou-se que a rampa ideal para o estabelecimento será construída de forma que $\theta = 30^0$.



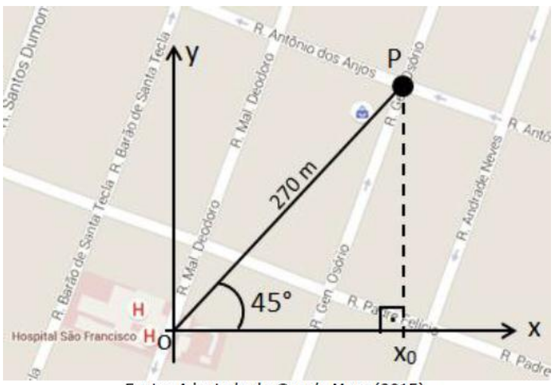
Usando $\sqrt{3} = 1{,}7$, podemos afirmar que a inclinação (i) será de aproximadamente:

A 17%.
B 27%.
C 58%.
D 100%.

85. (IFSUL 2016) Atualmente, o roubo e o furto de celulares têm se tornado banais no Brasil, ultrapassando a marca de um milhão de aparelhos por ano. Em contrapartida, a tecnologia está tão avançada que, mediante a instalação de um aplicativo e uma conta do Google sincronizada em seu celular, é possível localizá-lo.

Disponível em: <http://www.celularcomcamera.com.br/como-rastrear-um-celular-roubado-furtado/>

Suponha que uma pessoa teve seu celular roubado em frente ao Hospital São Francisco, na cidade de Pelotas-RS, e o aplicativo indica que o aparelho está localizado no cruzamento da rua General Osório com a rua Antônio dos Anjos, conforme ilustra a figura a seguir.



Fonte: Adaptado de *Google Maps* (2015).

Considerando que o sistema de coordenadas cartesianas indicado nesta figura tem origem em frente ao hospital, e está orientado positivamente para a direita e para cima, está correto afirmar que a abscissa x_0 do ponto P é, aproximadamente,

A 270 metros.
B 230 metros.
C 190 metros.
D 160 metros.

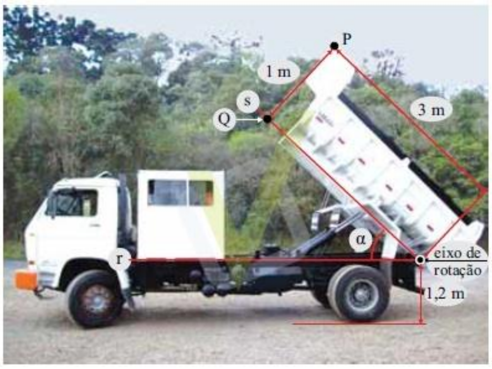
86. (PUCPR 2015) Um determinado professor de uma das disciplinas do curso de Engenharia Civil da PUC solicitou como trabalho prático que um grupo de alunos deveria efetuar a medição da altura da fachada da Biblioteca Central da PUC usando um teodolito. Para executar o trabalho e determinar a altura, eles colocaram um teodolito a 6 metros da base da fachada e mediram o ângulo, obtendo 30°, conforme mostra figura abaixo.

Se a luneta do teodolito está a 1,70m do solo, qual é, aproximadamente, a altura da fachada da Biblioteca Central da PUC?

Dados (sen 30° = 0,5, cos 30° = 0,87 e tg 30° = 0,58)

Ⓐ 5,18 m.
Ⓑ 4,70 m.
Ⓒ 5,22 m.
Ⓓ 5,11 m.
Ⓔ 5,15 m.

87. (UNESP 2013) A caçamba de um caminhão basculante tem 3 m de comprimento das direções de seu ponto mais frontal P até a de seu eixo de rotação e 1 m de altura entre os pontos P e Q. Quando na posição horizontal, isto é, quando os segmentos de retas r e s se coincidirem, a base do fundo da caçamba distará 1,2 m do solo. Ela pode girar, no máximo, α graus em torno de seu eixo de rotação, localizado em sua parte traseira inferior, conforme indicado na figura.

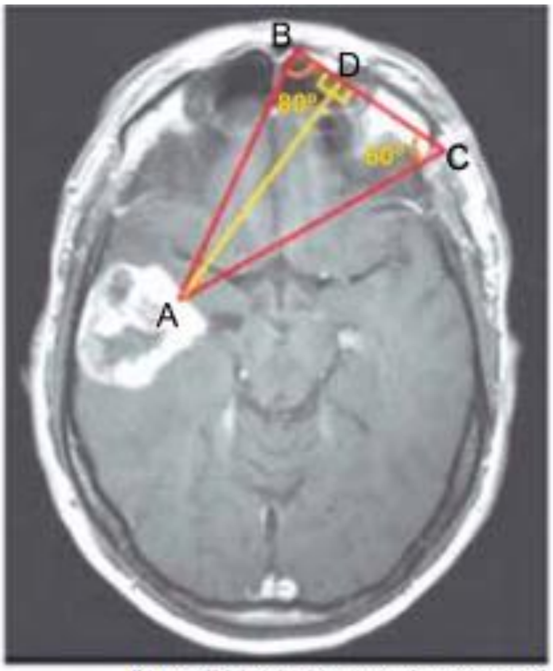


(www.autobrutus.com. Adaptado.)

Dado cos α = 0,8, a altura, em metros, atingida pelo ponto P, em relação ao solo, quando o ângulo de giro α for máximo, é

Ⓐ 4,8.
Ⓑ 5,0.
Ⓒ 3,8.
Ⓓ 4,4.
Ⓔ 4,0.

88. (FAC. ALBERT EINSTEIN 2020) A imagem, obtida por tomografia computadorizada, revela a presença de um tumor cerebral no ponto A. O método de triangulação sobre essa imagem indica que as medidas dos ângulos $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}B$ são, respectivamente, 80° e 60°.



(https://drbraindrop.wordpress.com)

Adotando-se $tg\,60^\circ = m$, $tg\,80^\circ = n$ e utilizando-se a medida de BC igual a ℓ, a distância do ponto A ao segmento de reta BC, indicada na figura por AD, será igual a

A $\dfrac{m+n}{\ell \cdot m \cdot n}$

B $\dfrac{\ell \cdot (m+n)}{m \cdot n}$

C $\dfrac{\ell + n + m}{m \cdot n}$

D $\dfrac{\ell \cdot n \cdot m}{m+n}$

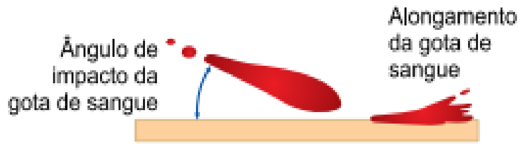
E $\dfrac{n \cdot m}{\ell \cdot (m+n)}$

89. (UNESP 2020) Uma das finalidades da Ciência Forense é auxiliar nas investigações relativas à justiça civil ou criminal. Observe uma ideia que pode ser empregada na análise de uma cena de crime.

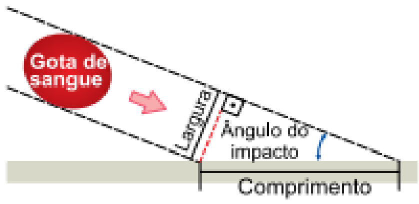
Uma gota de sangue que cai perfeitamente na vertical, formando um ângulo de 90° com a horizontal, deixa uma mancha redonda. À medida que o ângulo de impacto com a horizontal diminui, a mancha fica cada vez mais longa.

As ilustrações mostram o alongamento da gota de sangue e a relação trigonométrica envolvendo o ângulo de impacto e suas dimensões.

ALONGAMENTO DA GOTA DE SANGUE

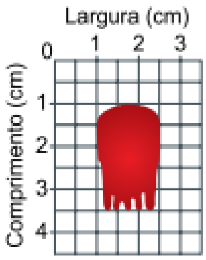


RELAÇÃO TRIGONOMÉTRICA



(Ana Paula Sebastiany *et al.* "A utilização da Ciência Forense e da Investigação Criminal como estratégia didática na compreensão de conceitos científicos". *Didáctica de la Química*, 2013. Adaptado.)

Considere a coleta de uma amostra de gota de sangue e a tabela trigonométrica apresentadas a seguir.



α	sen α	cos α	tg α
31°	0,51	0,85	0,60
37°	0,60	0,80	0,75
53°	0,80	0,60	1,32
59°	0,85	0,51	1,66
74°	0,96	0,28	3,50

De acordo com as informações, o ângulo de impacto da gota de sangue coletada na amostra foi de

Ⓐ 37°
Ⓑ 74°
Ⓒ 59°
Ⓓ 53°
Ⓔ 31°

90. (UNICENTRO 2014) Para escoar a água de uma mina, Pedro instalou uma calha de alumínio, conforme Figura 1, de largura fixa e comprimento d = 90 cm. Fazendo um corte transversal nessa calha, obtém-se a representação de um trapézio isósceles ABCD, como na Figura 2.

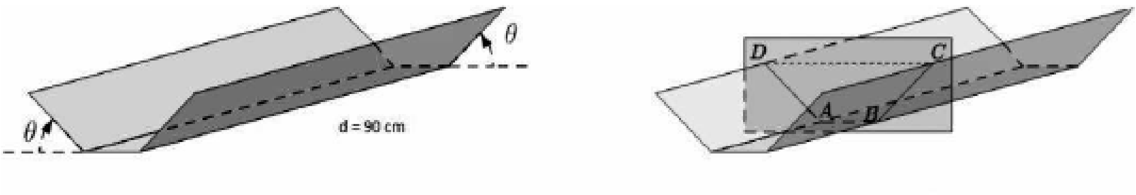
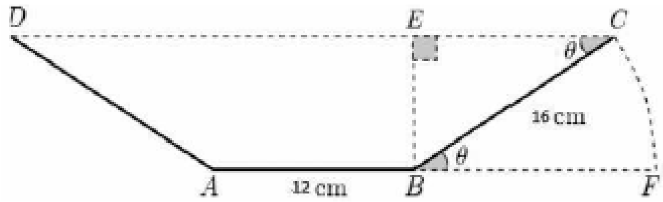


Figura 1 Figura 2

A altura da calha é igual à altura do trapézio e depende da amplitude θ do ângulo.

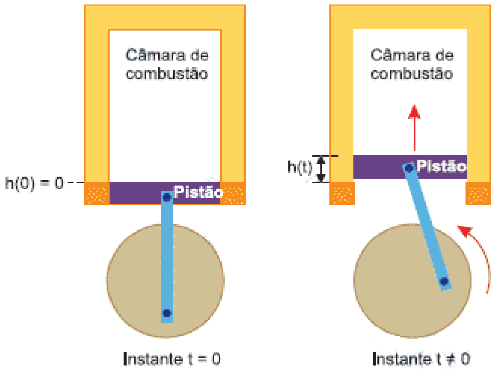


Considere que:
AB = 12 cm
BC= 16 cm
F é um ponto da semirreta AB tal que BF = BC
$F\hat{B}C$ = θ, com 0° < θ < 90°
BE é a altura do trapézio
$F\hat{B}C = E\hat{C}B$

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor de θ quando a altura do trapézio for 8 cm.

- **A** θ = 15°
- **B** θ = 30°
- **C** θ = 45°
- **D** θ = 60°
- **E** θ = 75°

91. (ENEM 2019) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



A função $h(t) = 4 + 4sen\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geq 0$ descreve como varia a altura *h*, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo *t*, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante t=0), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π.

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

Ⓐ 1.
Ⓑ 2.
Ⓒ 4.
Ⓓ 5.
Ⓔ 8.

92. (PUCPR 2019) Supondo que, por motivos de segurança, em um determinado porto, certos navios são autorizados a atracar (ou permanecer ancorados) somente durante os intervalos de tempo em que a profundidade no canal desse porto não é inferior a 13 metros e que devido ao comportamento das marés essa profundidade **P**, em metros, varia em função do tempo **t**, em horas, de acordo com a função

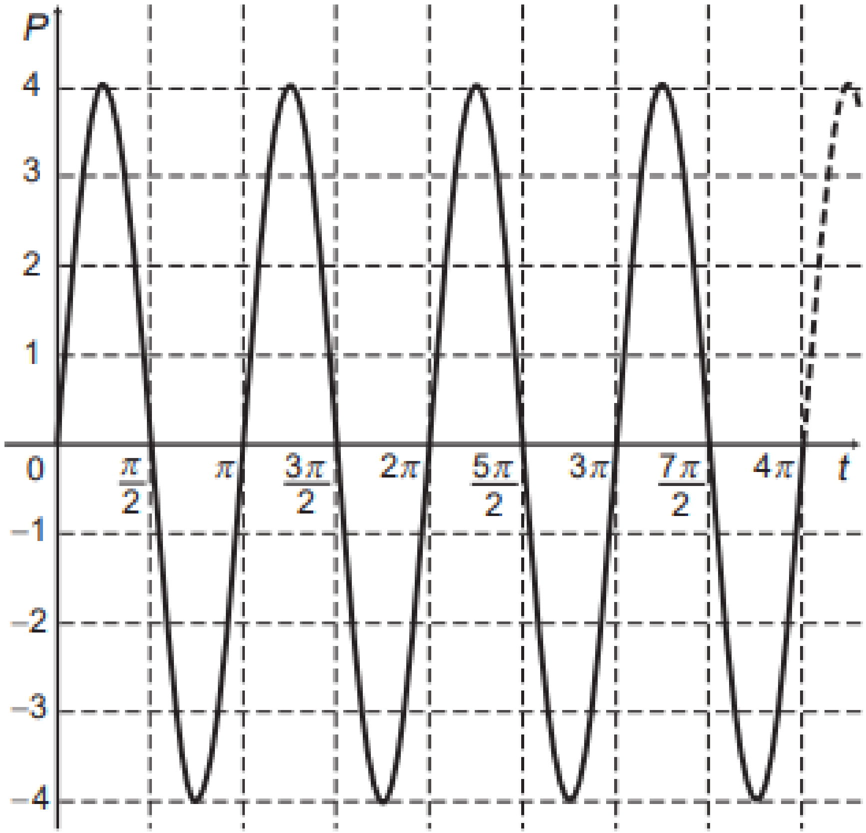
$$P(t) = 10{,}5 + 5 \cdot sen\left(t \cdot \frac{\pi}{12}\right),$$

durante quanto tempo, aproximadamente, uma dessas embarcações poderá ficar ancorada no referido porto se a mesma atracar às 4 horas?

Ⓐ 2 horas
Ⓑ 4 horas
Ⓒ 6 horas
Ⓓ 8 horas
Ⓔ 10 horas

93. (ENEM PPL 2019) Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo $\pm Asen(\omega t+\theta)$, que apresentam parâmetros com significados físicos importantes, tais como a frequência $\omega = \frac{2\pi}{T}$, em que T é o período; A é a amplitude ou deslocamento máximo; θ é o ângulo de fase $0 \le \theta \le \frac{2\pi}{T}$, que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento.

O gráfico representa um movimento periódico, $P = P(t)$, em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante t, conforme ilustra a figura.



A expressão algébrica que representa a posição $P(t)$, da cabeça do pistão, em função do tempo t é

A) $P(t) = 4sen(2t)$

B) $P(t) = -4sen(2t)$

C) $P(t) = -4sen(4t)$

D) $P(t) = 4sen\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

E) $P(t) = 4sen\left(4t+\frac{\pi}{4}\right)$

94. (UNIT 2019) O volume V, em litros, de ar nos pulmões de uma pessoa é dado, em função do tempo t, em segundos, por V(t) = 2,8 + 0,4 . cos t.

É correto afirmar que esse volume fica acima dos 3 litros durante uma fração do tempo igual a

Ⓐ 1/6
Ⓑ 1/4
Ⓒ 1/3
Ⓓ 1/2
Ⓔ 2/3

95. (UNITAU 2018) A Unidade Básica de Saúde (UBS) de um determinado bairro atende das 6h às 18h, de segunda à sexta-feira. Após estudos, verificou-se que, diariamente, o fluxo **f (t)** de pessoas que passam nessa UBS, a cada hora t, contada a partir do instante de sua abertura **(t = 0)**, pode ser modelada pela função:

$$f(t) = 36 + 14cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Desse modo, o número

Ⓐ de pessoas que comparecem à UBS diariamente no momento de sua abertura, é de 36 pessoas.
Ⓑ mínimo de pessoas que passam pela UBS diariamente é de 22 pessoas, e isso ocorre às 12h.
Ⓒ mínimo de pessoas que passam pela UBS diariamente é de 22 pessoas, e isso ocorre às 14h.
Ⓓ máximo de pessoas que passam pela UBS diariamente é de 50 pessoas, e isso ocorre às 8h
Ⓔ máximo de pessoas que passam pela UBS diariamente é de 50 pessoas, e isso ocorre às 10h.

96. (UNIOESTE 2018) Em uma área de proteção ambiental existe uma população de coelhos. Com o aumento natural da quantidade de coelhos, há muita oferta de alimento para os predadores. Os predadores com a oferta de alimento também aumentam seu número e abatem mais coelhos. O número de coelhos volta então a cair. Forma-se assim um ciclo de oscilação do número de coelhos nesta reserva. Considerando-se que a população *p(t)* de coelhos modelada por

$$p(t) = 1000 - 250sen\left(\frac{2\pi t}{360}\right)$$

sendo $t \geq 0$ a quantidade de dias decorridos, e o argumento da função seno é medido em radianos, pode-se afirmar que

Ⓐ a população de coelhos é sempre menor ou igual a 1000 indivíduos.
Ⓑ em quatro anos a população de coelhos estará extinta.
Ⓒ a população de coelhos dobrará em 3 anos.
Ⓓ a quantidade de coelhos só volta a ser de 1000 indivíduos depois de 360 dias.
Ⓔ a população de coelhos atinge seu máximo em 1250 indivíduos.

97. (UNINASSAU 2018) Suponha que a temperatura média diária na cidade do Recife durante o ano de 2017 pudesse ter sido calculada pela função

$$T(t) = 20 + 10 \cdot \cos\left[\frac{2\pi(t-200)}{300}\right]$$

Sendo T, em $^{\circ}C$ e t em dias decorridos desde 01/01/2017.

Adotando esse modelo matemático como verdadeiro, em que dia do ano a temperatura foi a maior possível?

Ⓐ 19/07/2017
Ⓑ 21/08/2017
Ⓒ 30/09/2017
Ⓓ 28/10/2017
Ⓔ 30/11/2017

98. (UNCISAL 2018) Várias doenças de relevância epidemiológica apresentam padrões temporais e periódicos relativos à transmissão de doenças na comunidade. A sazonalidade é o tipo mais comum de força periódica que influencia na dinâmica da população. Dentre as doenças sazonais, a dengue é bastante conhecida e o maior número de casos ocorre no período do ano que apresenta elevada temperatura e chuvas regulares. Um cientista apresentou um modelo matemático para o número de casos de dengue, para uma região específica do país, dado pela função

$$f(t) = 5930 + 4600\, cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

com $t \in N$, tal que $1 \leq t \leq 12$ corresponde, respectivamente, aos meses de janeiro a dezembro.

Considerando esse modelo, em qual mês ocorreu o maior número de casos?

Ⓐ Novembro.
Ⓑ Dezembro.
Ⓒ Janeiro.
Ⓓ Fevereiro.
Ⓔ Março.

99. (IFRN 2017) É comum que os índios realizem o tempo de plantio de acordo com as fases da lua. Supondo-se que as fases da lua podem ser modeladas, aproximadamente, pela função

$$f(d) = 0{,}5 + 0{,}5sen\left(\frac{\pi d}{14}\right)$$

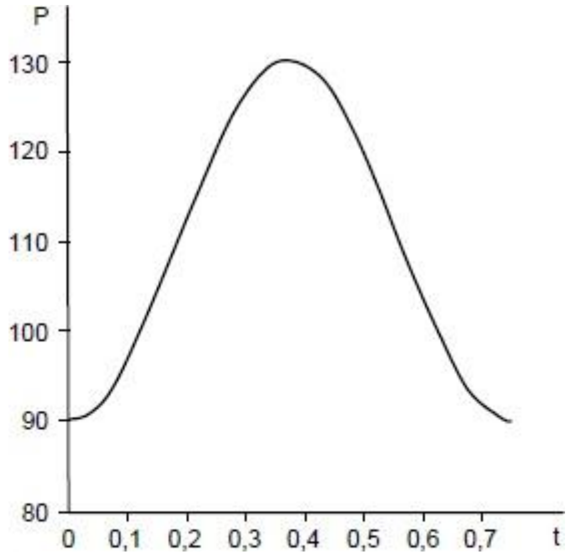
onde $\boldsymbol{f(d)}$ corresponde à fração da superfície da lua, visível e iluminada no $\boldsymbol{d}$-ésimo dia de uma observação. No sétimo dia, por exemplo, a lua está completamente visível e iluminada.

Nessas condições, a quantidade de dias necessários para que a lua volte a ter 100% da sua superfície visível e iluminada novamente é

Ⓐ 26.
Ⓑ 28.
Ⓒ 29.
Ⓓ 30.

100. (CESMAC 2017) A ilustração a seguir é a variação da pressão de um vaso sanguíneo de um indivíduo, correspondendo a um ciclo completo, que equivale a um batimento cardíaco, conforme descrito a seguir:

- Quando t = 0, a pressão assume um valor mínimo de 90 mmHg;
- Quando t = 3/8 de segundo, a pressão assume um valor máximo de 130 mmHg;
- Quando t = 3/4 de segundo, a pressão retorna ao valor mínimo e completa-se o ciclo.



Qual das funções a seguir modela a relação entre a variação de pressão sanguínea P, em mmHg, ao longo do tempo t, em segundos?

A $P(t) = 110 - 20 \cdot \text{sen}\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$

B $P(t) = 110 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$

C $P(t) = 130 - 90 \cdot \cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$

D $P(t) = 130 - 90 \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$

E $P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$

ANDERSON
MATEMÁTICA

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA	QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	C	51	A
02	E	52	B
03	D	53	A
04	B	54	A
05	B	55	A
06	D	56	B
07	C	57	A
08	A	58	A
09	E	59	D
10	C	60	A
11	C	61	C
12	B	62	D
13	B	63	A
14	C	64	B
15	C	65	A
16	B	66	A
17	A	67	B
18	B	68	B
19	B	69	A
20	A	70	D
21	C	71	B
22	A	72	B
23	A	73	D
24	C	74	C
25	B	75	E
26	C	76	C
27	B	77	E
28	B	78	A
29	B	79	A
30	B	80	D
31	D	81	A
32	A	82	A
33	A	83	C
34	B	84	C
35	B	85	C
36	D	86	A
37	B	87	C
38	E	88	D
39	B	89	A
40	A	90	B
41	E	91	D
42	B	92	C
43	B	93	A
44	C	94	C
45	A	95	E
46	B	96	E
47	A	97	A
48	C	98	E
49	C	99	B
50	B	100	B