Pontos Notáveis do Triângulo

Competência(s): 2

Habilidade(s): 6, 7, 8 e 9

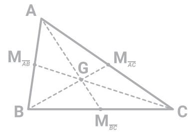
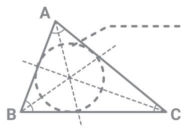
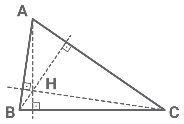
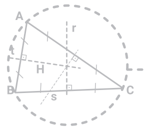
AULAS 7 e 8

Você deve saber!

- Cevianas
- Mediana
- Bissetriz interna
- Altura
- Mediatriz

Mapeando o saber

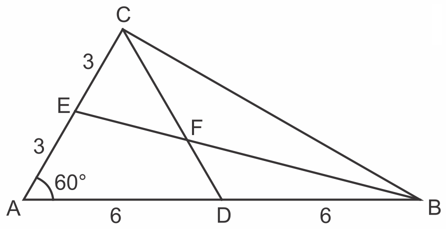
PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

SEGMENTO DE RETA CARACTERÍSTICO	PROPRIEDADES	CONSTRUÇÃO	
MEDIANA	ENCONTRO DAS MEDIANAS GERA O BARICENTRO		
BISSETRIZ	ENCONTRO DAS BISSETRIZES GERA O INCENTRO		O CENTRO DA CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA AO TRIÂNGULO ABC COINCIDE COM SEU INCENTRO
ALTURA	ENCONTRO DAS ALTURAS GERA O ORTOCENTRO		
MEDIATRIZ	ENCONTRO DAS MEDIATRIZES GERA O CIRCUNCENTRO		O CENTRO DA CIRCUNFERÊNCIA **CIRCUNSCRITA** AO TRIÂNGULO **ABC** COINCIDE COM SEU **CIRCUNCENTRO**

ANOTAÇÕES

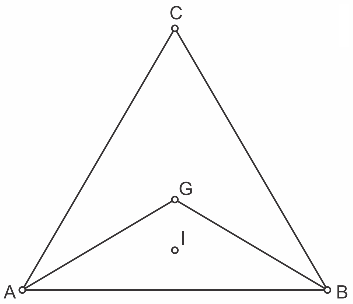
Exercícios de sala

1. **(EEAR)** Seja ABC um triângulo tal que $\hat{A} = 60°$, conforme a figura. Assim, tem-se que FD = ______.



a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

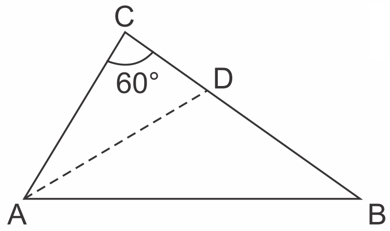
2. **(G1 - COL. NAVAL)** Observe a figura a seguir.



Na figura temos um triângulo equilátero ABC de baricentro G e o triângulo ABG cujo incentro é I. É correto afirmar que o suplemento do ângulo GAI em radianos é igual a:

a) $\frac{7\pi}{9}$
b) $\frac{5\pi}{6}$
c) $\frac{8\pi}{9}$
d) $\frac{9\pi}{10}$
e) $\frac{11\pi}{12}$

3. **(UNICAMP)** No triângulo ABC exibido na figura a seguir, AD é a bissetriz do ângulo interno em A, e $\overline{AD} = \overline{DB}$.



O ângulo interno em A é igual a

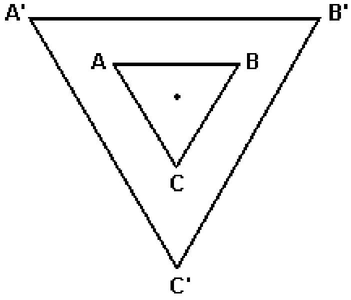
a) 60°.
b) 70°.
c) 80°.
d) 90°.

4. **(UNESP)** Um aluno precisa localizar o centro de uma moeda circular e, para tanto, dispõe apenas de um lápis, de uma folha de papel, de uma régua não graduada, de um compasso e da moeda.

Nessas condições, o número mínimo de pontos distintos necessários de serem marcados na circunferência descrita pela moeda para localizar seu centro é

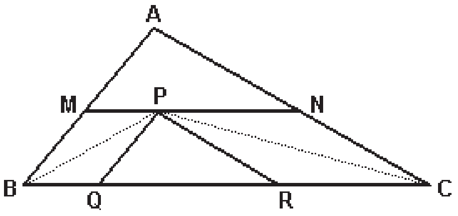
a) 3.
b) 2.
c) 4.
d) 1.
e) 5.

5. **(UFC)** Na figura a seguir, temos dois triângulos equiláteros ABC e A'B'C' que possuem o mesmo baricentro, tais que AB||A'B', AC||A'C' e BC||B'C'. Se a medida dos lados de ABC é igual a $3\sqrt{3}$cm e a distância entre os lados paralelos mede 2 cm, então a medida das alturas de A'B'C' é igual a:



a) 11,5 cm
b) 10,5 cm
c) 9,5 cm
d) 8,5 cm
e) 7,5 cm

6. **(UFPI)** No triângulo ABC (figura abaixo), os lados AB, AC e BC medem respectivamente 5 cm, 7 cm e 9 cm. Se P é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos B e C e PQ//MB, PR//NC e MN//BC, a razão entre os perímetros dos triângulos AMN e PQR é:



a) $\frac{10}{9}$

b) $\frac{9}{8}$

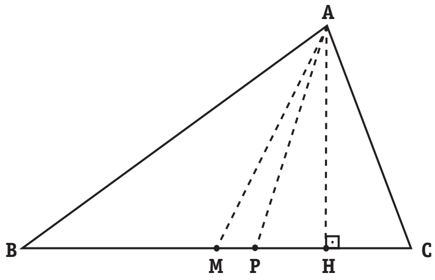
c) $\frac{7}{6}$

d) $\frac{4}{3}$

e) $\frac{7}{5}$

Estudo individualizado (E.I.)

1. No triângulo ABC abaixo, temos BM = CM, $B\hat{A}P = P\hat{A}C$ e AH perpendicular a BC e os pontos M, P e H não são coincidentes. Podemos afirmar que:

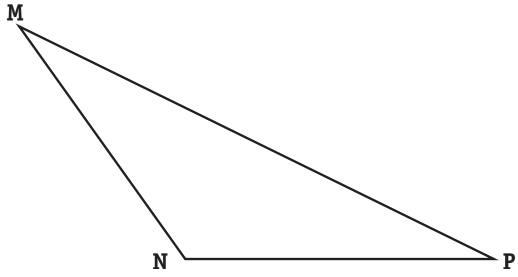


I. AM é uma mediana e AH é uma altura
II. AP é uma mediatriz
III. AP é uma bissetriz
IV. AH é uma altura e AM é uma mediatriz

a) II e IV são verdadeiras.
b) I e III são verdadeiras.
c) I e II são verdadeiras.
d) III e IV são verdadeiras.

2. Um ponto O equidista dos vértices de um triângulo ABC. Podemos afirmar que ponto O é:
a) baricentro do triângulo ABC.
b) incentro do triângulo ABC.
c) circuncentro do triângulo ABC.
d) ortocentro do triângulo ABC.

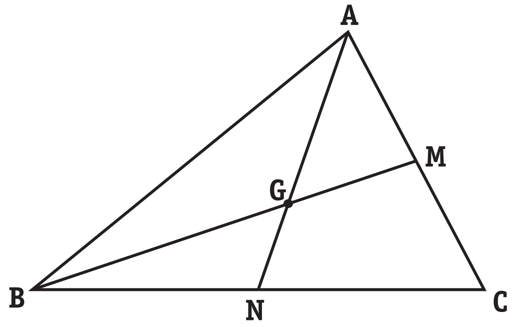
3. No triângulo obtusângulo MNP da figura, podemos afirmar que:



a) o baricentro se encontra na região externa do triângulo MNP.
b) o ortocentro se encontra na região externa do triângulo MNP.
c) o incentro se encontra na região externa do triângulo MNP.
d) o circuncentro se encontra na região interna do triângulo MNP.

4. Em relação a um triângulo qualquer ABC, quais pontos notáveis estão posicionados necessariamente na região interna do triângulo?
a) Baricentro e ortocentro.
b) Incentro e circuncentro.
c) Baricentro e circuncentro.
d) Incentro e ortocentro.
e) Baricentro e incentro.

5. **(FGV)** Na figura, AN e BM são medianas do triângulo ABC. Se BM é igual a 12 cm, a medida do segmento GM é igual a:



a) 10.
b) 9.
c) 8.
d) 6.
e) 4.

6. **(Unitau)** O segmento da perpendicular traçada de um vértice de um triângulo à reta suporte do lado oposto é denominado:

a) mediana.
b) mediatriz.
c) bissetriz.
d) altura.
e) base.

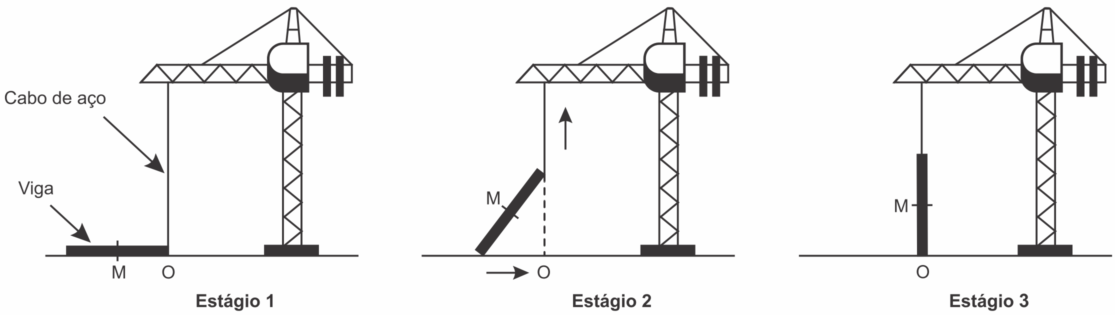
7. Deseja-se instalar uma fábrica num lugar que seja equidistante dos municípios A, B e C. Admita que A, B e C são pontos não colineares de uma região plana e que o triângulo ABC é escaleno. Nessas condições, o ponto onde a fábrica deverá ser instalada é o:

a) centro da circunferência que passa por A, B e C.
b) baricentro do triângulo ABC.
c) ponto médio do segmento BC.
d) ponto médio do segmento AB.
e) ponto médio do segmento AC.

8. Os pontos A, B e C, não colineares, representam as posições de três casas construídas numa área plana de um condomínio. Um posto policial estará localizado num ponto P situado à mesma distância das três casas. Em Geometria, o ponto P é conhecido pelo nome de:

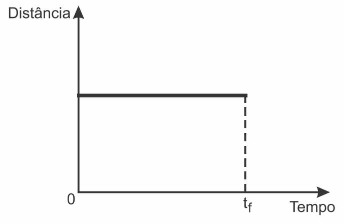
a) baricentro.
b) ortocentro.
c) circuncentro.
d) incentro.
e) ex-incentro.

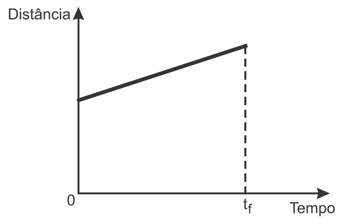
9. **(Enem)** Os guindastes são fundamentais em canteiros de obras, no manejo de materiais pesados como vigas de aço. A figura ilustra uma sequência de estágios em que um guindaste iça uma viga de aço que se encontra inicial mente no solo.

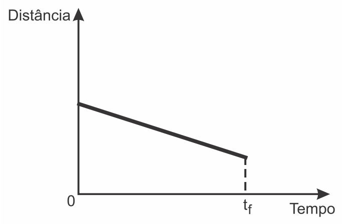


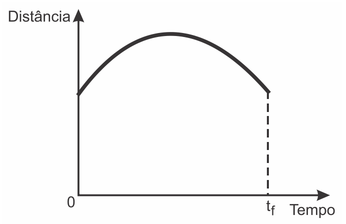
Na figura, o ponto O representa a projeção ortogonal do cabo de aço sobre o plano do chão e este se mantém na vertical durante todo o movimento de içamento da viga, que se inicia no tempo t = 0 (estágio 1) e finaliza no tempo t_f (estágio 3). Uma das extremidades da viga é içada verticalmente a partir do ponto O, enquanto que a outra extremidade desliza sobre o solo em direção ao ponto O. Considere que o cabo de aço utilizado pelo guindaste para içar a viga fique sempre na posição vertical. Na figura, o ponto M representa o ponto médio do segmento que representa a viga.

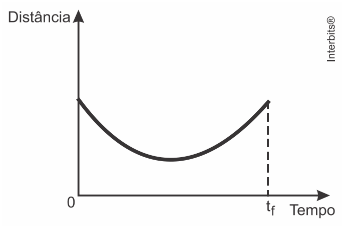
O gráfico que descreve a distância do ponto M ao ponto O, em função do tempo, entre t = 0 e t_f, é

a)


b)


c)


d)


e)


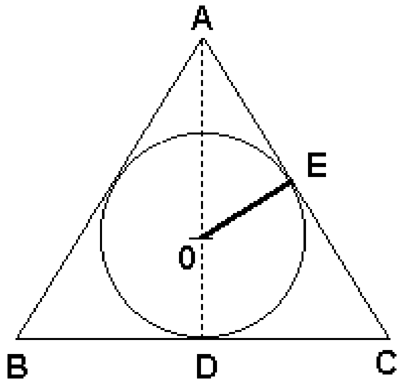
10. (UDESC) Analise as sentenças, e assinale (V) para verdadeira e (F) para falsa.

( ) Se uma circunferência X está inscrita em um triângulo qualquer, então a interseção das bissetrizes desse triângulo determina o centro de X.
( ) Seja PQ uma corda de uma circunferência Y. A corda que passa pelo ponto médio de PQ e é perpendicular à PQ é um diâmetro de Y.
( ) Se EFG é um triângulo qualquer inscrito em uma circunferência Z, então a interseção das medianas desse triângulo determina o centro de Z.

Assinale a alternativa correta, de cima para baixo.

a) F – F – F
b) V – V – V
c) V – V – F
d) V – F – F
e) F – V – F

11. (PUCMG) Na figura, o triângulo ABC é equilátero e está circunscrito ao círculo de centro 0 e raio 2 cm. AD é altura do triângulo. Sendo E ponto de tangência, a medida de AE, em centímetros, é:



a) $2\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{5}$
c) 3
d) 5
e) $\sqrt{26}$

12. (G1 - COL. NAVAL) Analise as afirmativas a seguir.

I. Sejam a, b e c os lados de um triângulo, com c $c > b \geq a$. Pode-se afirmar que $c^2 = a^2 + b^2$ se, e somente se, o triângulo for retângulo.
II. Se um triângulo é retângulo, então as bissetrizes internas dos ângulos agudos formam entre si um ângulo de 45° ou 135°.
III. O centro de um círculo circunscrito a um triângulo retângulo está sobre um dos catetos.
IV. O baricentro de um triângulo retângulo é equidistante dos lados do triângulo.

Assinale a opção correta.

a) Somente I e II são verdadeiras.
b) Somente II e III são verdadeiras.
c) Somente I e IV são verdadeiras.
d) Somente I, II e IV são verdadeiras.
e) As afirmativas I, II, III e IV são verdadeiras.

13. (UECE) No triângulo OYZ, o ângulo interno em O é igual a 90 graus, o ponto H no lado YZ é o pé da altura traçada do vértice O e M é o ponto médio do lado YZ.
Se $\hat{Y} - 2\hat{Z} = 10$ graus (diferença entre a medida do ângulo interno em Y e duas vezes a medida do ângulo interno em Z igual a 10 graus), então, é correto afirmar que a medida do ângulo $H\hat{O}M$ é igual a

a) $\frac{170}{3}$ graus.

b) $\frac{140}{3}$ graus.

c) $\frac{110}{3}$ graus.

d) $\frac{100}{3}$ graus.

14. (EFOMM) Seja ABC um triângulo inscrito em uma circunferência de centro O. Sejam O' e E o incentro do triângulo ABC e o ponto médio do arco BC que não contém o ponto A, respectivamente. Assinale a opção que apresenta a relação entre os segmentos EB, EO' e EC.

a) EB = EO' = EC
b) EB < EO' = EC
c) EB > EO' > EC
d) EB = EO' > EC
e) EB < EO' < EC

15. (G1 - COL. NAVAL) Em um triângulo acutângulo não equilátero, os três pontos notáveis (ortocentro, circuncentro e baricentro) estão alinhados. Dado que a distância entre o ortocentro e o circuncentro é '**k**', pode-se concluir que a distância entre o circuncentro e o baricentro será

a) $\frac{5k}{2}$

b) $\frac{4k}{3}$

c) $\frac{4k}{5}$

d) $\frac{k}{2}$

e) $\frac{k}{3}$

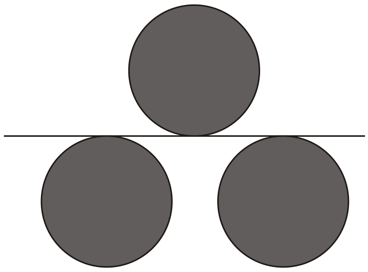
16. (PUCRJ) Seja ABC um triângulo equilátero de lado 1cm em que O é o ponto de encontro das alturas. Quando mede o segmento AO?

17. (UFPE) Seja r o raio, em cm, da circunferência inscrita em um triângulo retângulo com catetos medindo 6cm e 8cm. Quanto vale 24r?

18. Um triângulo retângulo ABC, retângulo em A, possui hipotenusa medindo 10 cm e o ângulo formado no vértice B medindo 20º.

a) Qual a medida da mediana relativa ao lado BC?
b) Qual a medida do ângulo agudo formado por essa mediana e pela bissetriz do ângulo reto?

19. (UFG) Gerard Stenley Hawkins, matemático e físico, nos anos 1980, envolveu-se com o estudo dos misteriosos círculos que apareceram em plantações na Inglaterra. Ele verificou que certos círculos seguiam o padrão indicado na figura a seguir, isto é, três círculos congruentes, com centros nos vértices de um triângulo equilátero, tinham uma reta tangente comum.



Nestas condições, e considerando-se uma circunferência maior que passe pelos centros dos três círculos congruentes, calcule a razão entre o raio da circunferência maior e o raio dos círculos menores.

20. (ITA) Em um triângulo de vértices A, B e C, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C, dividem o ângulo $B\hat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se ℓ é a medida do lado oposto ao vértice C, calcule:

a) A medida da mediana em função de ℓ.
b) Os ângulos $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.

Gabarito

1. B	**2.** C	**3.** B	**4.** E	**5.** E
6. A	**7.** A	**8.** C	**9.** A	**10.** C
11. D	**12.** A	**13.** C	**14.** A	**15.** E

16.

$AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$cm

17.

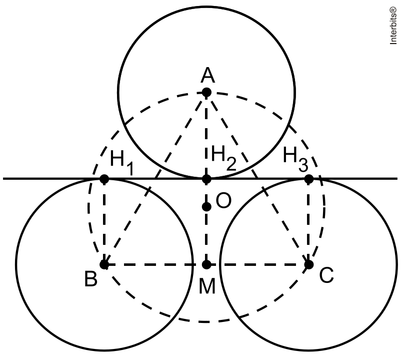
48

18.

a) 5 cm
b) 25°

19.

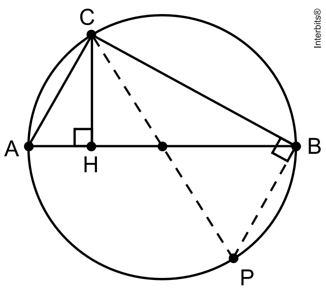
Na figura abaixo, H_1, H_2 e H_3 são os pontos em que os círculos de centros A, B e C tangenciam a reta.



Seja O o centro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.
É fácil ver que $\overline{BH_1} + \overline{AH_2} = 2 \cdot \overline{BH_1} = \overline{AM}$, com M sendo o ponto médio do lado BC. Logo, pela propriedade da mediana, obtemos $\overline{OA} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AM} = \frac{4}{3} \cdot \overline{BH_1}$ ou seja, o raio do círculo maior é igual a $\frac{4}{3}$ do raio dos círculos menores.

20.

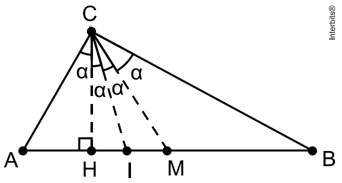
Considere a figura.



Seja P o ponto diametralmente oposto ao ponto C e H o pé da perpendicular baixada de C sobre AB. É fácil ver que $A\hat{C}B \equiv B\hat{P}C$ e $A\hat{H}C \equiv C\hat{B}P$ (pois CP é diâmetro). Logo, $A\hat{C}H \equiv B\hat{C}P$ e, portanto, o diâmetro CP contém a mediana do triângulo ABC relativa ao vértice C e o circuncentro O do triângulo ABC. Além disso, como O é a interseção da mediana relativa ao vértice C e da mediatriz de AB, segue que M = O, com M sendo o ponto médio do lado AB. Por conseguinte, o triângulo ABC é retângulo em C.

a) Como o triângulo ABC é retângulo em C, temos $\overline{CM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\ell}{2}$.

b) Sendo I o pé da bissetriz por C, considere a figura.



Sejam $A\hat{C}H \equiv H\hat{C}I \equiv I\hat{C}M \equiv M\hat{C}B = \alpha$. Logo, $A\hat{C}B = 4\alpha \Leftrightarrow 90° = 4\alpha \Leftrightarrow \alpha = 22°30'$. Portanto,

$$B\hat{A}C = 90° - A\hat{C}H$$
$$= 90° - 22°30'$$
$$= 67°30'$$

e

$$A\hat{B}C = 90° - B\hat{A}C$$
$$= 90° - 67°30'$$
$$= 22°30'$$