Estratégia
Militares

Impulso e Quantidade de Movimento

Centro de massa e equação para massas variáveis

Prof. João Maldonado

Aula 14

IME 2020

SUMÁRIO

Introdução

Nesta aula vamos trabalhar os conceitos de impulso, quantidade de movimento e centro de massa. Este tema costuma ser cobrado junto com energia mecânica e o vestibular do IME adora mesclar os assuntos em uma mesma questão.

É muito importante você guardar todos os conceitos e fazer muito exercícios para pôr em prática tudo aquilo que você aprendeu desse assunto.

Como esse assunto é muito cobrado, existem muitas questões de elevado nível nos nossos vestibulares de interesse.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@prof.maldonado

1. Quantidade de movimento

Seja uma partícula P, de massa m, com velocidade vetorial instantânea $\vec{v}$. Define-se quantidade de movimento da partícula P a **grandeza vetorial** $\vec{Q}$ como:

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$$

Representativamente, temos:

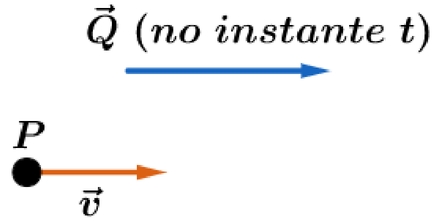


Figura 1: Quantidade de movimento de uma partícula no instante t.

Além de quantidade de movimento, é comum chamarmos essa grandeza de ***momento linear*** ou ainda ***momentum***.

Observações:

- A quantidade de movimento $\vec{Q}$ e a velocidade vetorial $\vec{v}$ possuem a mesma direção, conforme mostrando na figura 1.
- Além disso, como massa é uma grandeza escalar positiva, então a quantidade de movimento $\vec{Q}$ e a velocidade $\vec{v}$ possuem o mesmo sentido, vide figura 2.

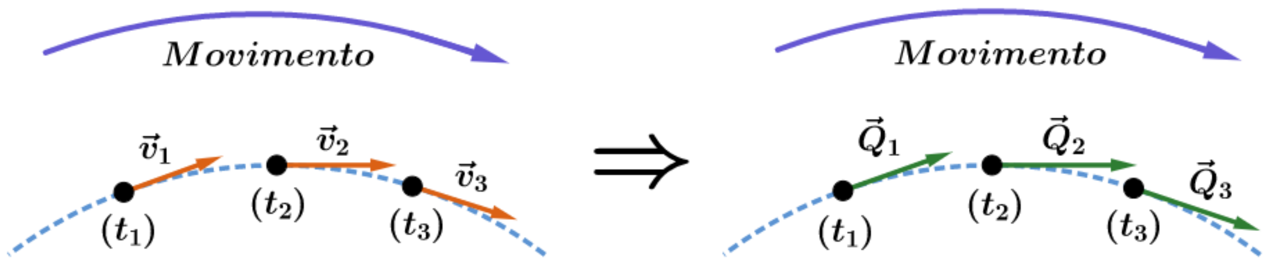


Figura 2: A quantidade de movimento tem mesma direção e sentido que a velocidade da partícula.

Pela definição de quantidade de movimento, temos:

$$|\vec{Q}| = m \cdot |\vec{v}|$$

Portanto, a unidade de quantidade de movimento é:

$$u(Q) = u(m) \cdot u(v)$$

No Sistema Internacional de Unidades (SI):

$$\boxed{u(Q) = kg \cdot m/s}$$

1)

Um ponto material de massa $4{,}0\ kg$ move-se em uma trajetória retilínea, realizando um MRUV com função horária do espaço $s = 2{,}0 + 10{,}0 \cdot t - 6{,}0 \cdot t^2$ (SI). Calcule:

a) o módulo da quantidade de movimento em $t_1 = 0{,}5\ s$;

b) o módulo da quantidade de movimento em $t_2 = 1{,}0\ s$;

c) o módulo da variação da quantidade de movimento no intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Comentários:

a) Inicialmente, devemos determinar a função horária da velocidade v. Para isso, basta simplesmente derivar s em relação ao tempo:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = \frac{d}{dt}(2{,}0 + 10{,}0 \cdot t - 6{,}0 \cdot t^2)$$

$$\Rightarrow v = 0 + 10{,}0 - 12 \cdot t \ \Rightarrow \boxed{v(t) = 10{,}0 - 12 \cdot t}$$

Para $t_1 = 0{,}5\ s$, temos:

$$v_1(0{,}5) = 10{,}0 - 12 \cdot (0{,}5) \Rightarrow v_1(0{,}5) = 4{,}0\ m/s$$

Logo, o módulo da quantidade de movimento é de:

$$|\vec{Q}_1| = m \cdot |\vec{v}_1| \Rightarrow |\vec{Q}_1| = 4{,}0 \cdot 4{,}0 \Rightarrow \boxed{|\vec{Q}_1| = 16{,}0\ kg \cdot m/s}$$

b) Para $t_2 = 1{,}0\ s$, temos:

$$v_2(1{,}0) = 10{,}0 - 12 \cdot (1{,}0) \Rightarrow v_2(1{,}0) = -2{,}0\ m/s$$

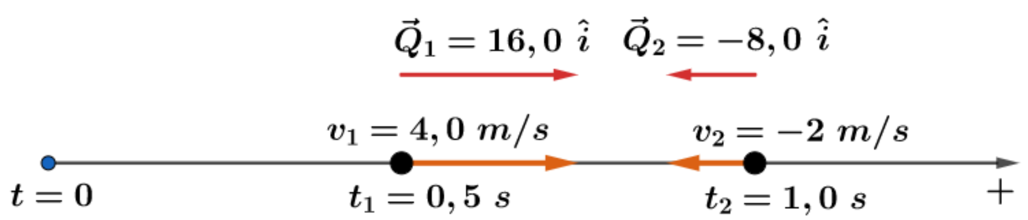
Logo, o módulo da quantidade de movimento é de:

$$|\vec{Q}_2| = m \cdot |\vec{v}_2| \Rightarrow |\vec{Q}_2| = 4{,}0 \cdot 2{,}0 \Rightarrow \boxed{|\vec{Q}_2| = 8{,}0\ kg \cdot m/s}$$

c) A variação da quantidade de movimento ($\Delta\vec{Q}$), no intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ é dado por:

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1$$

Note que se trata de uma grandeza vetorial, portanto, ao efetuarmos essa conta devemos levar em consideração direção e sentido. Podemos representar os dois instantes do ponto material de acordo com o esquema:



Portanto:

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 \Rightarrow \Delta\vec{Q} = -8{,}0\,\hat{\imath} - 16{,}0\,\hat{\imath} \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{Q} = -24{,}0\,\hat{\imath}\ (kg \cdot m/s)}$$

2)

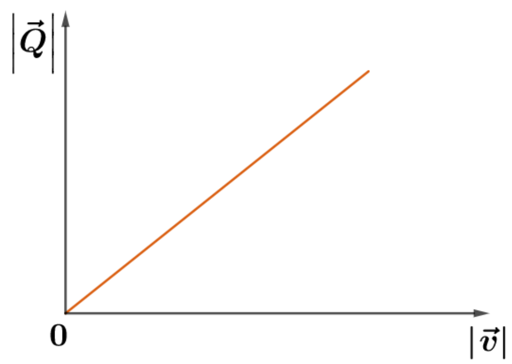
Um ponto material realiza um MUV a partir do repouso em uma trajetória qualquer:

a) Plote o gráfico do módulo da quantidade de movimento em função do módulo da velocidade.

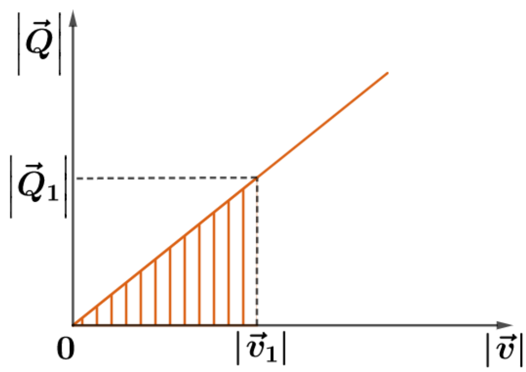
b) Qual é o significado físico da área medida sob o gráfico plotado.

Comentários:

a) Como vimos, a quantidade de movimento é dada por $\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$ e seu módulo é $|\vec{Q}| = m \cdot |\vec{v}|$. Dessa forma, vemos que o módulo da quantidade de movimento é diretamente proporcional ao da velocidade, ou seja, $|\vec{Q}|$ varia linearmente com $|\vec{v}|$. Graficamente:



b) A área hachurada (triangular) é dada por:



$$Área = \frac{base \cdot altura}{2} \Rightarrow Área = \frac{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{Q}_1|}{2}$$

Como $|\vec{Q}_1| = m \cdot |\vec{v}_1|$, então:

$$Área = \frac{|\vec{v}_1| \cdot m \cdot |\vec{v}_1|}{2} \Rightarrow \boxed{Área = \frac{1}{2} m \cdot |\vec{v}_1|^2 = E_c}$$

Com esse resultado podemos afirmar que área medida sob o gráfico é numericamente igual à energia cinética do corpo.

3)

Um corpo de massa $m = 2{,}0\ kg$ desloca-se em um MCU com velocidade de módulo $2{,}0\ m/s$.

Calcule o módulo da variação da quantidade de movimento nos seguintes intervalos de tempo:

a) Um quarto de período.

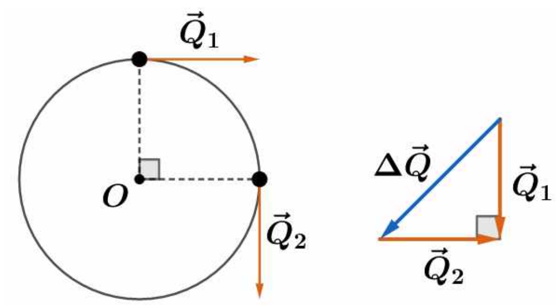
b) Meio período.

Comentários:

Como o módulo da velocidade no MCU não varia, então o módulo da quantidade de movimento também não se altera. Logo:

$$|\vec{v}| = 2{,}0\ m/s \Rightarrow |\vec{Q}| = 2{,}0 \cdot 2{,}0 \Rightarrow \boxed{|\vec{Q}| = 4{,}0\ kg \cdot m/s}$$

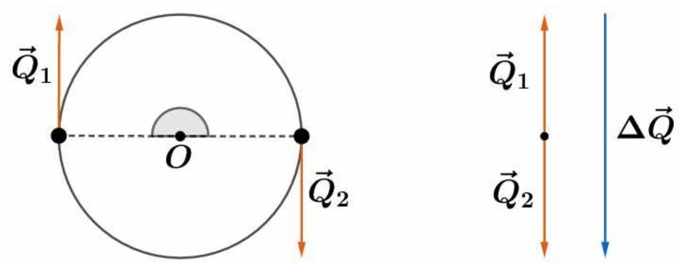
a) Vamos tomar o corpo em duas posições quaisquer tais que o intervalo de tempo entre elas corresponda a um quarto do período. Então, sem perdas de generalidades, temos:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$|\Delta\vec{Q}|^2 = |\vec{Q}_1|^2 + |\vec{Q}_2|^2 \Rightarrow |\Delta\vec{Q}|^2 = (4{,}0)^2 + (4{,}0)^2 \Rightarrow \boxed{|\Delta\vec{Q}| = 4\sqrt{2}\ kg \cdot m/s}$$

b) Analogamente ao item a, vamos tomar duas posições quaisquer tais que o intervalo de tempo entre elas corresponda a um meio período. Então, sem perdas de generalidades, temos:



Assim:

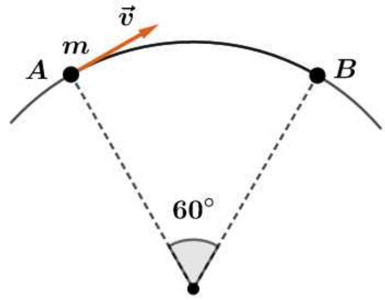
$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 \Rightarrow |\Delta\vec{Q}| = |\vec{Q}_2| + |\vec{Q}_1| \Rightarrow |\Delta\vec{Q}| = 4{,}0 + 4{,}0 \Rightarrow \boxed{|\Delta\vec{Q}| = 8{,}0\ kg \cdot m/s}$$

4)

Um corpo de massa $m = 1{,}0\ kg$ move-se em MCU, percorrendo um arco de circunferência de raio $R = 2{,}0\ m$, exclusivamente sob a ação de uma força de módulo igual à 2,0 N. Calcule:

a) O módulo da velocidade do corpo; e

b) O módulo da variação da quantidade de movimento entre as posições A e B.

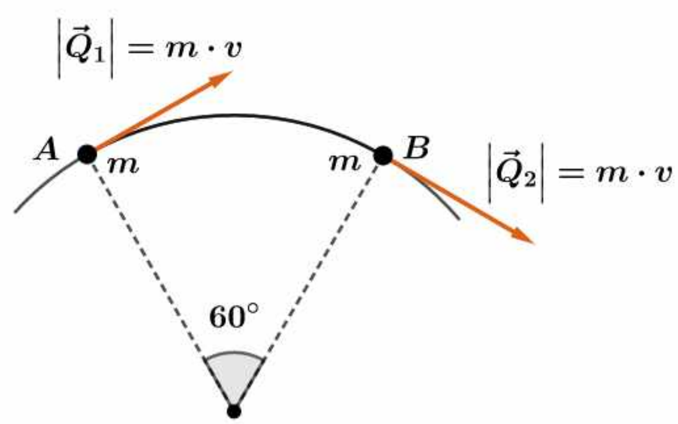


Comentários:

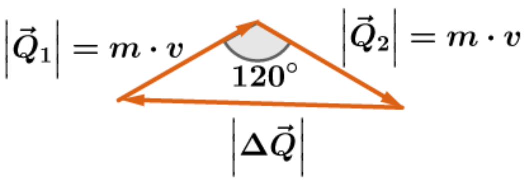
a) Se a única força que atua no corpo, que realiza um MCU, então essa força será a resultante centrípeta. Logo:

$$F_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{R} \Rightarrow 2{,}0 = \frac{1{,}0 \cdot v^2}{2{,}0} \Rightarrow \boxed{v = 2{,}0\ m/s}$$

b) Para os pontos A e B, temos os seguintes valores dos módulos:



Portanto, temos a seguinte composição dos vetores:



$$|\vec{Q}_1| = |\vec{Q}_2| = m \cdot v = 1{,}0 \cdot 2{,}0 = 2{,}0\ kg \cdot m/s$$

Então, pela lei dos cossenos, vem:

$$|\Delta\vec{Q}|^2 = |\vec{Q}_1|^2 + |\vec{Q}_2|^2 - 2|\vec{Q}_1| \cdot |\vec{Q}_2| \cdot \cos 120°$$

$$|\Delta\vec{Q}|^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{|\Delta\vec{Q}| = \sqrt{10}\ kg \cdot m/s}$$

1.1. Impulso

Vamos tomar um ponto material de massa m em movimento retilíneo uniformemente variado sob a ação de uma força resultante $\vec{F}$ (aqui constante), conforme figura abaixo.

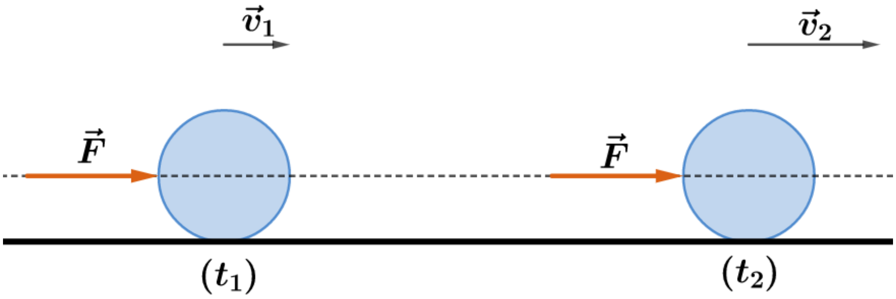


Figura 3: Força constante F agindo sobre um ponto material que realiza um MRUV.

Pela segunda lei de Newton, sabemos que $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Contudo, vimos na cinemática vetorial que $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$, então:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \vec{v}_2 - m \cdot \vec{v}_1} \; (eq. 1.1)$$

Note que o segundo termo da equação 1.1 representa as quantidades de movimento do corpo nos instantes t_1 e t_2:

$$\vec{Q}_1 = m \cdot \vec{v}_1 \text{ e } \vec{Q}_2 = m \cdot \vec{v}_2$$

Por outro lado, o primeiro termo da equação 1.1 temos o produto $\vec{F} \cdot \Delta t$ que é denominado ***impulso*** da força $\vec{F}$ e representa-se por $\vec{I}$. Em outras palavras:

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t}$$

Observe que pela forma como foi definido, o impulso é uma ***grandeza vetorial*** e tem a direção e o sentido da força $\vec{F}$, já que a variação de tempo é sempre positiva. No SI, a unidade de impulso é o $\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}$.

Quando retornamos à equação 1.1, podemos escrever o impulso em função das quantidades de movimento $\vec{Q}_1$ e $\vec{Q}_2$:

$$\vec{I} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 \; (eq. 1.2)$$

A equação 1.2 descreve o ***teorema do impulso***, que pode ser enunciado como:

O impulso da resultante das forças que atuam sobre uma partícula é igual à variação de sua quantidade de movimento, ou seja:

$$\vec{I}_{\vec{F}_R} = \Delta \vec{Q} \Rightarrow \vec{I}_{\vec{F}_R} = \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial}$$

Consequentemente, pelo teorema do impulso vemos que as unidades de impulso e de quantidade de movimento são equivalentes:

$$1\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{s} = 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}$$

Vamos ir um pouco mais a fundo agora na segunda lei de Newton. Quando ele propôs o Princípio Fundamental da Dinâmica, ele o apresentou da seguinte forma:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}}$$

Dizemos que a derivada da quantidade de movimento de um corpo, em relação ao tempo, é igual à força resulta que nele atua.

Podemos notar que:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \Leftrightarrow \vec{F} = \frac{d(m\cdot\vec{v})}{dt}$$

Como a massa m é constante (em quase todos os exercícios), ela pode sair da derivada:

$$\vec{F} = m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{F} = m\cdot\vec{a}$$

Com isso, podemos generalizar a segunda lei de Newton para um sistema de n partículas, em que $\vec{F}$ é a resultante de todas as forças externas ao sistema e m é a soma das massas. Sendo $\vec{Q}$ a quantidade de movimento do sistema, então:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n \text{ (forças externas)}$$

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n}\vec{Q}_i = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \cdots + \vec{Q}_n$$

1.2. Cálculo do Impulso para força resultante variável

Quando introduzimos o conceito de impulso, apresentamos para uma força resultante constante. Entretanto, em diversas situações na natureza, a força que age em uma partícula não é constante. Nesse caso, você deve utilizar a definição utilizando Cálculo:

$$\boxed{\vec{I}_{\vec{F}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}$$

Podemos ver que o teorema do impulso é válido para qualquer força resultante, pois:

$$\vec{I}_{\vec{F}_{res}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{res} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{Q}}{dt} dt = \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial} \Rightarrow \boxed{\vec{I}_{\vec{F}_{res}} = \Delta\vec{Q}}$$

Para um sistema de partículas, o impulso resultante causados pelas forças externas que atuam sobre ele é igual à variação da quantidade de movimento total do sistema. Em outras palavras:

$$\vec{I}_{ext\ res} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ext\ res} dt = \Delta\vec{Q}_{sis}$$

Entretanto, nossos vestibulares não são focados em usar Cálculo. Por isso, utilizar métodos gráficos é uma excelente saída para este caso. Pela definição de impulso de uma força, podemos dizer que a área sob a curva é numericamente igual ao impulso em um gráfico de $|\vec{F}| \times t$:

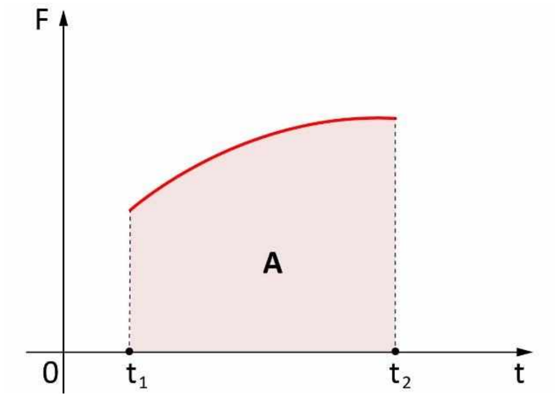
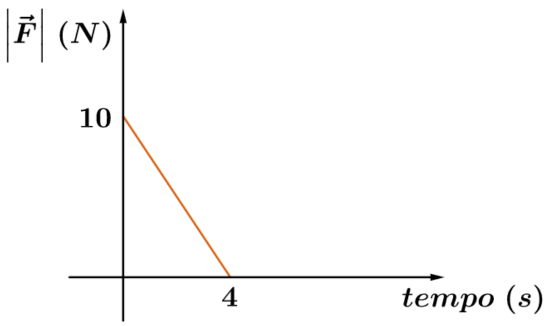


Figura 4: Gráfico da força pelo tempo. A área sob a curva é numericamente igual ao módulo do impulso da força.

$$\boldsymbol{A \overset{N}{=} \left|\vec{I}\right|}$$

Por exemplo: um homem empurra um carrinho com uma força $\vec{F}$ de direção constante e sentido igual ao de sua velocidade de vetorial $\vec{v}$. A intensidade de $\vec{F}$ obedece ao seguinte gráfico:



Assim, o impulso de força que o homem exerce sobre o carrinho durante os 4 segundos tem mesma direção e sentido que a velocidade $\vec{v}$. O módulo deste impulso é dado ela área do triangulo:

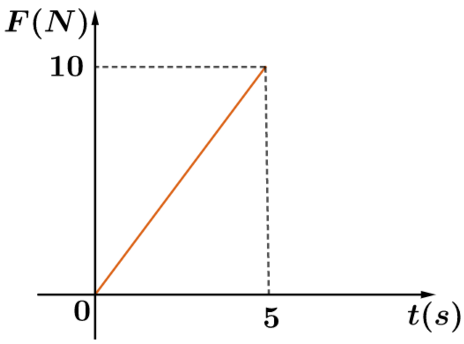
$$A = \frac{base \cdot altura}{2} \Rightarrow A = \frac{4 \cdot 10}{2} \Rightarrow A = 20\, u.a.$$

Portanto:

$$\boxed{|\vec{I}| = 20 \text{ N} \cdot \text{s}}$$

5)

Um carrinho de compras de massa igual a 2,0 kg e tamanho desprezível, sob a ação da força $\vec{F}$ horizontal. A intensidade de $\vec{F}$ varia conforme o gráfico abaixo, com sua direção e sentido permanecendo constantes. Se o carrinho parte do repouso em $t_0 = 0$, então:

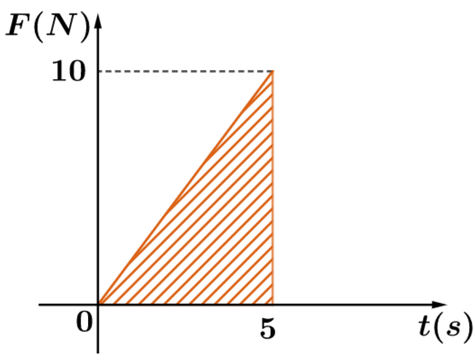


a) A intensidade do impulso de $\vec{F}$ durante os cinco primeiros segundos; e

b) O módulo da velocidade do carrinho em $t = 5{,}0$ s.

Comentários:

a) Como vimos em teoria, o impulso da força $\vec{F}$ é numericamente igual à área do triangulo destacada:



Portanto:

$$I = \frac{5 \cdot 10}{2} \Rightarrow \boxed{I = 25\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{s}}$$

b) Dado que $\vec{F}$ é a única força que atua no carrinho na direção horizontal, logo ela é a resultante. Então, aplicando o teorema do impulso, temos:

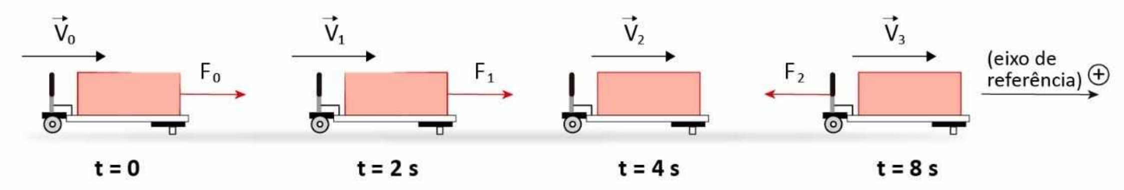
$$\vec{I}_{\vec{F}_{res}} = \Delta\vec{Q} \Rightarrow I_{F_{res,x}} = \Delta Q_x \Rightarrow 25 = m \cdot v_f - m \cdot v_i$$

Como o carrinho parte do repouso, isto é, $v_i = 0$, então:

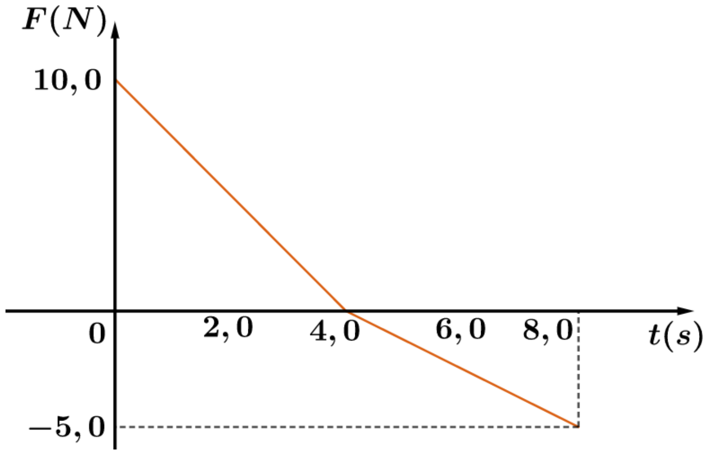
$$25 = 5 \cdot v_f \Rightarrow \boxed{v_f = 5{,}0\ m/s}$$

6)

Considere uma força $\vec{F}$ atuando sobre um carrinho, conforme mostra a figura abaixo:



De $t = 0$ até $t = 4{,}0$ s, o sentido da força foi o mesmo da velocidade vetorial $\vec{v}$ e, a partir deste instante, a força foi invertida de sentido, conforme mostra o gráfico abaixo:



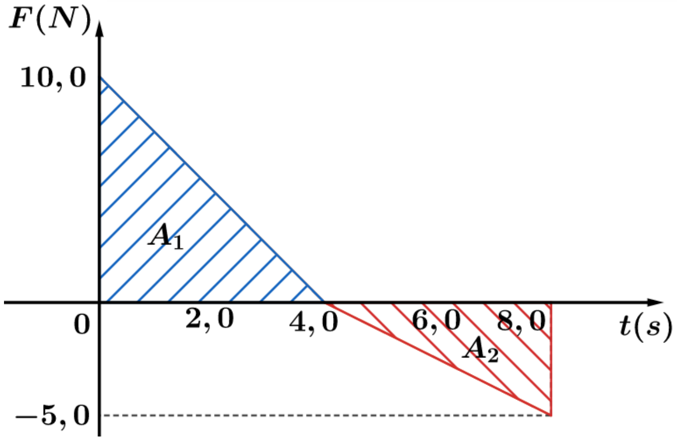
a) Calcule o módulo do impulso de $\vec{F}$ entre 0 e 8,0 segundos.

b) Dado que $|\vec{v}_0| = 2{,}0\ m/s$ e a massa $m = 2{,}0\ kg$, calcule o sentido e o módulo da velocidade $\vec{v}_1$ no instante $t = 4{,}0\ s$.

c) determine a intensidade e o sentido da velocidade final $\vec{v}_f$ em $t = 8{,}0\ s$.

Comentários:

a) Como visto em teoria, em um gráfico $força \times tempo$ a área abaixo da curva é numericamente igual ao impulso. Assim, temos duas regiões:



Entre 0 e 4,0 segundos, o impulso tem valor algébrico positivo, pois $\vec{F}$ tem sentido conforme a orientação adotada. Logo:

$$I_1 \overset{N}{=} A_1 \Rightarrow I_1 = \frac{4{,}0 \cdot 10}{2} \Rightarrow \boxed{I_1 = 20{,}0\ N \cdot s}$$

Entre 4,0 e 8,0 segundos, o impulso tem valor algébrico negativo, já que $\vec{F}$ tem sentido conforme a orientação adotada. Portanto:

$$I_2 \overset{N}{=} A_2 \Rightarrow I_2 = \frac{(8{,}0 - 4{,}0) \cdot 5}{2} \Rightarrow \boxed{I_1 = -10{,}0\ N \cdot s}$$

Dessa forma, o impulso total é dado pela soma algébrica:

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I = 20{,}0 - 10{,}0 \Rightarrow \boxed{I = 10{,}0\ N \cdot s}$$

Importante! Note que fizemos a soma algébrica dos impulsos somente porque a força $\vec{F}$ não mudou sua direção.

b) A velocidade $\vec{v}_1$ pode ser determinada pelo teorema do impulso:

$$\vec{I}_1 = \Delta\vec{Q}_1 \Rightarrow I_1 = m \cdot v_1 - m \cdot v_0 \Rightarrow 20{,}0 = 2{,}0 \cdot v_1 - 2 \cdot 2{,}0 \Rightarrow \boxed{v_1 = 8{,}0\ m/s}$$

O sentido de $\vec{v}_2$ é o mesmo que o eixo de referência.

c) A velocidade $\vec{v}_f$ pode ser determinada pelo teorema do impulso:

$$\vec{I} = \Delta\vec{Q} \Rightarrow I = m \cdot v_f - m \cdot v_0 \Rightarrow 10{,}0 = 2{,}0 \cdot v_f - 2 \cdot 2{,}0 \Rightarrow \boxed{v_f = 3{,}0\ m/s}$$

O sentido de $\vec{v}_f$ é o mesmo que o eixo de referência.

Note que poderíamos ter utilizado I_2 para determinar v_2:

$$I_2 = Q_2 - Q_1 \Rightarrow -10{,}0 = 2 \cdot v_f - 2 \cdot 8{,}0 \Rightarrow \boxed{v_f = 3{,}0\ m/s}$$

7)

Considere um ponto material de massa $m = 1{,}0\ kg$, lançado obliquamente ao espaço em um local onde $g = 10\ m/s^2$. No ponto mais alto da trajetória, sua energia cinética é de $32\ J$. Se o tempo total de voo foi de 8 segundos, determine:

a) a intensidade da quantidade de movimento na direção horizontal (Q_x) nos instantes $t_1 = 2{,}0\ s$ e $t_2 = 6{,}0\ s$;

b) a intensidade do impulso da força peso entre t_1 e t_2;

c) o módulo das componentes $\vec{v}_{y_1}(t_1)$ e $\vec{v}_{y_2}(t_2)$.

É desprezível a resistência do ar.

Comentários:

a) No ponto mais alto da trajetória, teremos apenas a componente horizontal da velocidade, logo:

$$v = v_x \Rightarrow E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_x^2 \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{m \cdot E_C}{2}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 32}{2}} \Rightarrow \boxed{v_x = 4{,}0\ m/s}$$

Como a velocidade na direção horizontal se mantém constante (em módulo, direção e sentido), então em qualquer instante da trajetória Q_x tem o mesmo valor:

$$Q_x = m \cdot v_x \Rightarrow Q_x = 1{,}0 \cdot 4{,}0 \Rightarrow \boxed{Q_x = 4{,}0\ kg \cdot m/s}$$

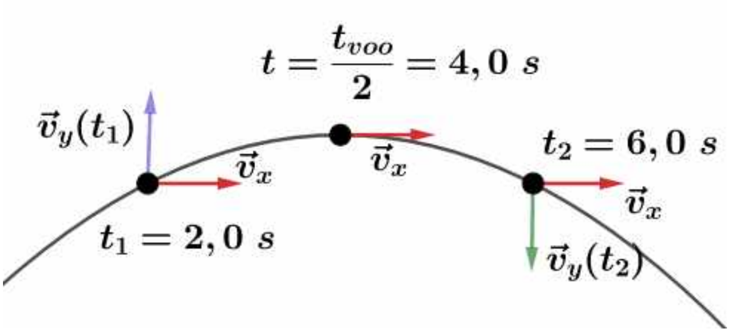
b) Considerando o peso uma força constante na vertical em toda trajetória, podemos dizer que:

$$\vec{I}_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot \Delta t$$

Na direção vertical, temos:

$$I_{\vec{P}} = P \cdot \Delta t \Rightarrow I_{\vec{P}} = m \cdot g \cdot \Delta t \Rightarrow I_{\vec{P}} = 1{,}0 \cdot 10{,}0 \cdot (6{,}0 - 4{,}0) \Rightarrow \boxed{I_{\vec{P}} = 20{,}0\ N \cdot s}$$

c) Para os instantes considerados, temos a seguinte configuração:



Pelo teorema do impulso, temos:

$$\vec{I} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 \Rightarrow \vec{I} = m \cdot (\vec{v}_{y_2} - \vec{v}_{y_1})$$

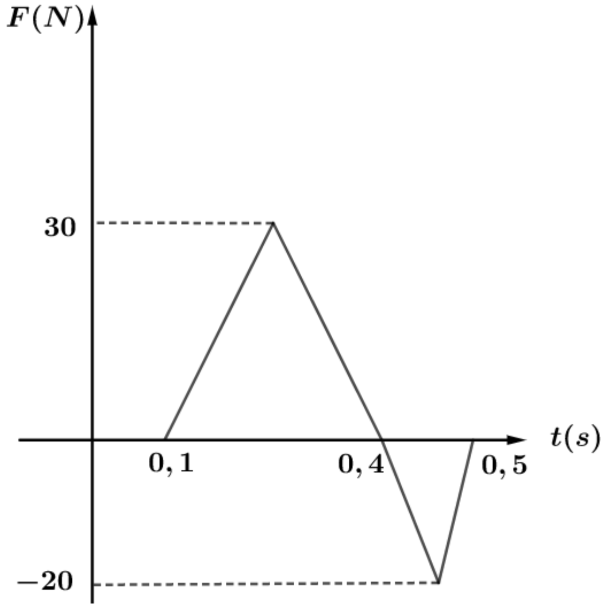
Da cinemática do lançamento oblíquo, sabemos que $|\vec{v}_{y_2}| = |\vec{v}_{y_1}|$, já que ele atingiu o topo da trajetória em $t = 4{,}0\ s$. Portanto:

$$\vec{I} = m \cdot (\vec{v}_{y_2} - \vec{v}_{y_1}) \Rightarrow I = 2 \cdot m \cdot |\vec{v}_{y_1}| \Rightarrow |\vec{v}_{y_1}| = \frac{I}{2 \cdot m} \Rightarrow |\vec{v}_{y_1}| = \frac{20{,}0}{2 \cdot 1{,}0}$$

$$\therefore \boxed{|\vec{v}_{y_1}| = |\vec{v}_{y_2}| = 10{,}0\ m/s}$$

8) (ITA-SP)

Um corpo de massa igual a $2{,}0\ kg$ acha-se em movimento retilíneo. Num certo trecho de sua trajetória faz-se agir sobre ele uma força que tem a mesma direção do movimento e que varia com o tempo, conforme a figura abaixo. Neste trecho e nestas condições, pode-se afirmar que a variação da velocidade escalar "Δv" do corpo será dada por:



a) $\Delta v = 2{,}5\ m/s$

b) $\Delta v = 5{,}0\ m/s$

c) $\Delta v = 8{,}0\ m/s$

d) $\Delta v = 2{,}0\ m/s$

e) $\Delta v = 4{,}0\ m/s$

Comentários:

Considerando que a força F que atua no corpo seja a resultante na direção do movimento, então podemos aplicar o teorema do impulso:

$$\vec{I}_{\vec{F}_{res}} = \Delta\vec{Q} \Rightarrow \vec{I}_{\vec{F}_{res}} = m \cdot \left(\vec{v}_f - \vec{v}_i\right) \Rightarrow \vec{I}_{\vec{F}_{res}} = m \cdot \Delta\vec{v}$$

Admitindo que a força não mudou de direção, então:

$$I_F = m \cdot \Delta v$$

Pelo gráfico, podemos determinar o impulso da força F:

$$I_F \overset{N}{=} Área \Rightarrow I_F = A_1 + A_2 (\text{soma algébrica})$$

$$\Rightarrow I_F = \frac{30 \cdot (0{,}4 - 0{,}1)}{2} - \frac{10 \cdot (0{,}5 - 0{,}4)}{2} \Rightarrow I_F = 4{,}0\ \mathrm{N \cdot s}$$

Portanto:

$$\Delta v = \frac{I_F}{m} \Rightarrow \Delta v = \frac{4{,}0}{2{,}0} \Rightarrow \boxed{\Delta v = 2{,}0\ m/s}$$

1.3. Força média

O conceito de força média é bem simples e pode ser bem útil. Define-se força média em um $\Delta t = t - 0$ como a força constante capaz de imprimir ao corpo o mesmo impulso que a força real, durante o Δt mencionado.

Considerando uma força de módulo variável e direção constante, podemos plotar o seu gráfico em função do tempo. Como visto anteriormente, a área sombreada será numericamente igual ao módulo do impulso da força em $\Delta t = t - 0$.

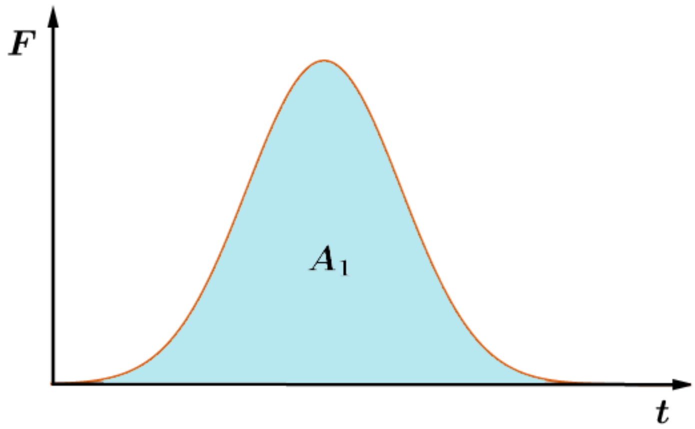


Figura 5: Gráfico da intensidade da força variando com o tempo. A área sombreada é numericamente igual ao módulo do impulso.

Dessa forma, a força média $\vec{F}_m$ é constante e deve produzir o mesmo impulso que $\vec{F}$. Com isso, a área retangular hachurada ($\acute{A}rea \overset{N}{=} F_m \cdot \Delta t$) corresponde ao módulo desse impulso.

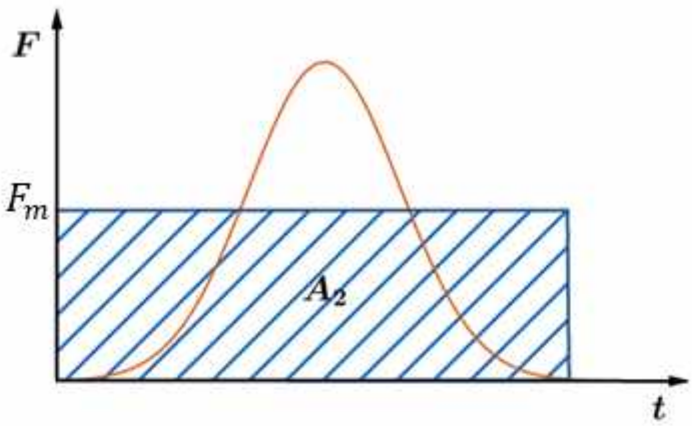
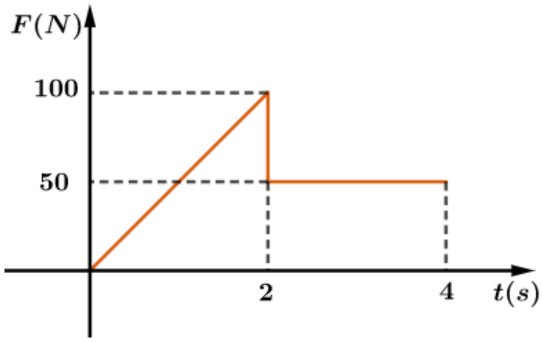


Figura 6: A força média produz o mesmo impulso.

9) (FUVEST – SP)

Um corpo de massa $m = 10\ kg$. inicialmente à velocidade escalar $v_0 = 5{,}0\ m/s$. é solicitado por uma força $\vec{F}$ que atua na direção e sentido do movimento, e varia com o tempo da forma vista no gráfico.



a) Determine o módulo de uma força constante capaz de produzir no móvel a mesma variação de velocidade que $\vec{F}$ proporcionou. desde que atue na direção e sentido do movimento, durante $4{,}0\ s$.

b) Determine a velocidade escalar ao fim dos $4{,}0\ s$.

Comentários:

a) Note que a FUVEST está cobrando o conceito de força média, pois pelo teorema do impulso sabemos que $\vec{I}_{\vec{F}_{res}} = \Delta\vec{Q}$, então para produzir a mesma variação de velocidade, o módulo da força constante deve ter o mesmo impulso que a força variável. Dessa forma, incialmente iremos calcular o impulso de F, utilizando a área sob a curva, de acordo com o gráfico da questão:

$$Área = Área_{0\to2} + Área_{2\to4} \Rightarrow Área = \frac{1}{2}(2\cdot100) + 50\cdot(4-2) \Rightarrow Área = 200\ u.a.$$

Portanto:

$$I_F = 200\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$$

Pela definição de força média, temos:

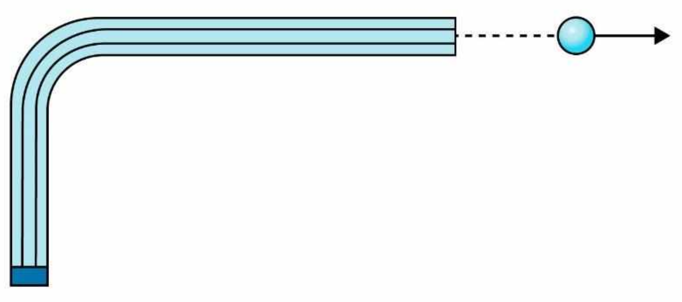
$$I_F = I_{F_m} \Rightarrow 200 = F_m\cdot(4-0) \Rightarrow \boxed{F_m = 50\ \mathrm{N}}$$

b) Utilizando o teorema do impulso, admitindo que F é a força resultante, então:

$$I_F = \Delta Q \Rightarrow 200 = 10\cdot\left(v_f - 5\right) \Rightarrow \boxed{v_f = 25\ m/s}$$

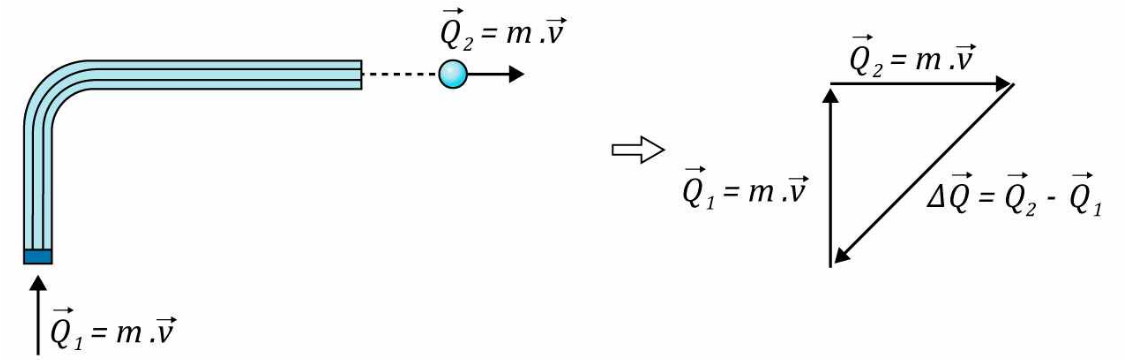
10) (FAAP – SP)

Uma partícula de massa $2{,}0\ kg$, movendo-se no interior de uma canaleta com velocidade escalar constante de $10\sqrt{2}\ m/s$, gasta $5{,}0\ s$ para passar pelo cotovelo indicado na figura. Qual é a força resultante média que atua na partícula ao passar pelo cotovelo?



Comentários:

Inicialmente, devemos calcular a variação da quantidade de movimento da partícula ao passar pelo cotovelo. Note que o cotovelo está alterando a direção do vetor quantidade de movimento. Então, temos a seguinte configuração.



Como a velocidade é constante ao longo de todo trajeto, o módulo da variação da quantidade de movimento permanece o mesmo:

$$|\vec{Q}| = m \cdot |\vec{v}| \Rightarrow |\vec{Q}| = 2{,}0 \cdot 10\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{|\vec{Q}| = 20\sqrt{2}\, kg \cdot m/s}$$

Logo, $|\Delta\vec{Q}|$ é dado pelo teorema de Pitágoras:

$$|\Delta\vec{Q}|^2 = |\vec{Q}_1|^2 + |\vec{Q}_2|^2 \Rightarrow \boxed{|\Delta\vec{Q}| = 40\, kg \cdot m/s}$$

Aplicando o teorema do impulso, temos que:

$$I_F = \Delta Q \Rightarrow I_F = 40\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{s}$$

Utilizando o conceito de força média, vem:

$$I_{F_m} = I_F \Rightarrow F_m \cdot \Delta t = I_F \Rightarrow F_m \cdot 5 = 40 \Rightarrow \boxed{F_m = 8{,}0\ \mathrm{N}}$$

1.4. Quantidade de movimento de um sistema de partículas

Seja um sistema formado por n partículas $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, com massas $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Se tomarmos um certo instante t, as suas velocidades vetoriais são $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, conforme figura logo abaixo.

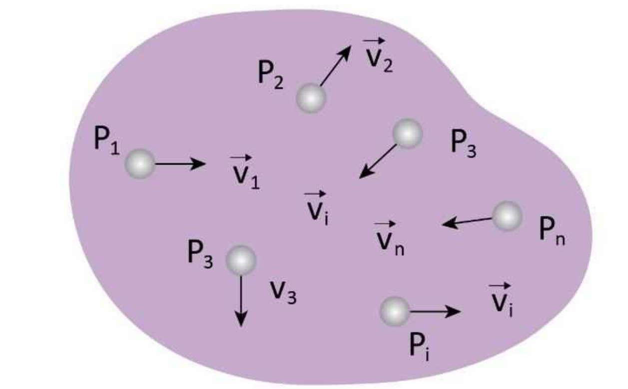


Figura 7: Sistema de n partículas $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Para cada partícula, podemos escrever a quantidade de movimento da seguinte maneira:

$$\vec{Q}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$$

Assim, a quantidade de movimento do sistema é a soma vetorial das quantidades de movimento de cada partícula. Matematicamente, temos:

$$\boxed{\vec{Q}_{sis} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + m_n} \cdot \vec{v}_n \text{ ou } \boxed{\vec{Q}_{sis} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{v}_i}$$

Análogo para uma partícula, o impulso resultante sobre um sistema de partículas, ocasionado por forças externas que atuam sobre o sistema, é igual à variação da quantidade de movimento total do sistema:

$$\vec{I}_{ext\,res} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ext\,res} dt \Rightarrow \boxed{\vec{I}_{ext\,res} = \Delta \vec{Q}_{sis}}$$

1.5. Sistema Isolado

Em um sistema de partículas, as forças que agem podem ser divididas em duas categorias: internas e externas.

Denotamos por ***forças internas*** aquelas que são trocadas entre os elementos do sistema. Dessa forma, tais forças respeitam o Princípio da Ação e Reação, ou seja, a cada força interna $\vec{F_i}$ associa-se uma outra $-\vec{F_i}$. Note que a soma dos impulsos por causa dessas forças é nula.

Por outro lado, chamamos de ***forças externas*** aquelas que são trocadas pelos elementos do sistema com outros corpos fora dele, denominados agentes externos.

Um sistema de partículas é dito isolado de forças externas (ou apenas isolado) quando ocorrer uma das situações:

1) Não atua nenhuma força externa sobre nenhuma de suas partículas; e
2) A resultante das forças externas que atuam no sistema é nula.

Caso as forças internas tiverem módulos desprezíveis em relação às forças internas, podemos dizer que o sistema é isolado também.

Em suma, dizemos que:

Um sistema é dito isolado quando a resultante das forças externas é nula.

1.6. Conservação da quantidade de movimento para um sistema isolado

Vamos tomar um sistema formado por n partículas $P_1, P_2, \dots, P_n$, isolado de forças externas. Como visto no tópico anterior, o impulso total associado às forças internas é nulo. Além disso, o sistema é isolado, ou seja, a resultante das forças externas sobre o sistema é nula. Portanto, o impulso resultante das forças externas também é nulo.

Pelo teorema do impulso ao sistema podemos escrever que:

$$\vec{I}_{ext\,res} = \Delta\vec{Q}_{sis}$$

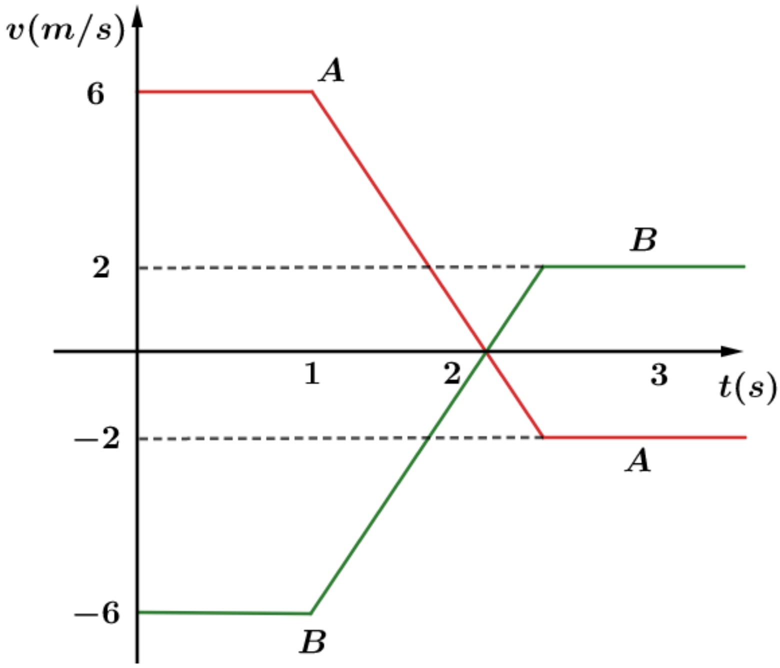
Como $\vec{I}_{ext\,res} = \vec{0}$, então:

$$\Delta\vec{Q}_{sis} = \vec{0} \Rightarrow \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{final} - \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{inicial} = \vec{0}$$

$$\boxed{\left(\vec{Q}_{sis}\right)_{final} = \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{inicial}}$$

11)

Considere duas partículas, A e B, que se movem em uma mesma trajetória orientada e suas velocidades escalares variam com o tempo, como nos mostra o gráfico abaixo. Suas massas são idênticas e valem m.



a) Determine a intensidade da quantidade de movimento do sistema $(A + B)$ no instante $t_1 = 1{,}0\ s$;

b) Determine a intensidade da quantidade de movimento do sistema $(A + B)$ no instante $t_2 = 3{,}0\ s$;

c) Determine a intensidade do impulso resultante entre os instantes t_1 e t_2.

Comentários:

a) Aplicando a definição de quantidade de movimento de um sistema, temos que:

$$\vec{Q}_{sis} = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B \Rightarrow \vec{Q}_{sis} = m \cdot \vec{v}_A + m \cdot \vec{v}_B$$

Pelo gráfico, vemos que a velocidade de B em $t_1 = 1{,}0\ s$ tem sentido contrário ao eixo adotado como referência $(x+)$. Então:

$$\vec{Q}_{sis} = m \cdot v_A\ \hat{x} + m \cdot v_B\ (-\hat{x}) \Rightarrow \vec{Q}_{sis} = m \cdot 6\ \hat{x} - m \cdot 6\ \hat{x} \Rightarrow \vec{Q}_{sis} = \vec{0} \Rightarrow \left|\vec{Q}_{sis}\right| = 0$$

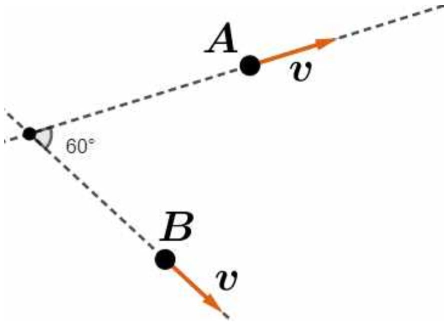
b) Semelhante ao item a, temos para $t_2 = 3{,}0\ s$:

$$\vec{Q}_{sis} = m \cdot v_A\,(-\hat{x}) + m \cdot v_B\,\hat{x} \Rightarrow \vec{Q}_{sis} = -m \cdot 2\,\hat{x} + m \cdot 2\,\hat{x} \Rightarrow \vec{Q}_{sis} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{Q}_{sis}| = 0$$

c) Como a variação da quantidade de movimento é nula entre t_1 e t_2, então o impulso resultante entre t_1 e t_2 será nulo.

12)

Calcule o módulo da quantidade de movimento do sistema $A + B$, sabendo que as partículas têm massa iguais à m.

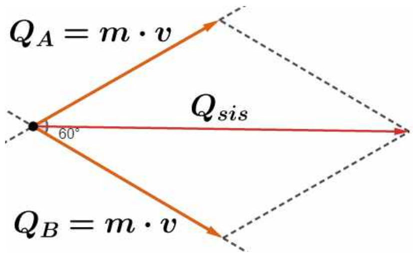


Comentários:

O módulo da quantidade de movimento de cada partícula é dado por:

$$\begin{cases} |\vec{Q}_A| = m_A \cdot |\vec{v}_A| \\ |\vec{Q}_B| = m_B \cdot |\vec{v}_B| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{Q}_A| = m \cdot v \\ |\vec{Q}_B| = m \cdot v \end{cases} \Rightarrow |\vec{Q}_A| = |\vec{Q}_B| = m \cdot v$$

Dado que $\vec{Q}_{sis} = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B$, conhecermos o módulo da quantidade de movimento do sistema devemos ter que:

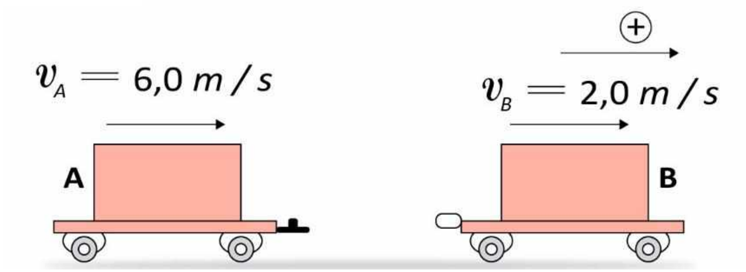


$$Q_{sis} = \sqrt{Q_A^2 + Q_B^2 + 2 \cdot Q_A \cdot Q_B \cdot \cos(60°)} \Rightarrow Q_{sis} = \sqrt{Q_A^2 + Q_A^2 + 2 \cdot Q_A \cdot Q_A \cdot \frac{1}{2}}$$

$$Q_{sis} = Q_A\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{Q_{sis} = \sqrt{3} \cdot m \cdot v}$$

13)

Dois carrinhos viajam sobre os trilhos de uma ferrovia com velocidades constantes iguais a $v_A = 6{,}0\ m/s$ e $v_B = 2{,}0\ m/s$, respectivamente, conforme a figura.



Em um dado momento, o carrinho A alcança o B e nele fica engatado. Determine a velocidade final do conjunto $(A + B)$. Dados: $m_A = 4,0\ kg$ e $m_B = 6,0\ kg$.

Comentários:

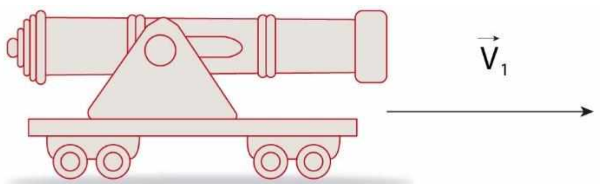
Note que quando A alcança B e nele se engata, existem forças internas ao conjunto, mas não existem forças externas atuando na horizontal. Há forças externas apenas na vertical (força peso e normais do solo). Dessa forma, na direção horizontal o sistema está isolado de forças externas. Portanto, podemos conservar a quantidade de movimento na direção horizontal, respeitando o eixo adotado:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial} \Rightarrow (m_A + m_B) \cdot \vec{v}_f = m_A \cdot v_A\ \hat{x} + m_B \cdot v_B\ \hat{x}$$

$$10 \cdot \vec{v}_f = (4,0 \cdot 6,0 + 6,0 \cdot 2,0)\ \hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_f = 3,6\ m/s}$$

14)

Um canhão de guerra está rigidamente preso a um pequeno carrinho que se move com velocidade constante $v_i = 5,0\ m/s$ sobre trilhos retos e horizontais, como mostra a figura abaixo.



Em determinado instante, o canhão dispara uma bala de massa $m = 2,0\ kg$, que sai com velocidade de $300,0\ m/s$ em relação ao solo. A massa do canhão mais a carreta é igual a $100,0\ kg$. Calcule o módulo da velocidade do canhão após o tiro e o sentido do canhão.

Comentários:

Note que novamente o sistema é isolado horizontalmente. Portanto, pela conservação da quantidade de movimento, adotando o eixo de orientação para a direita, temos:

$$\vec{Q}_{sis,final} = \vec{Q}_{sis,inicial} \Rightarrow m_{bala} \cdot v_{bala}\ \hat{x} + M \cdot \vec{v}_C = (M + m_{bala}) \cdot v_i\ \hat{x}$$

$$2,0 \cdot 300,0\ \hat{x} + 100 \cdot \vec{v}_C = (100,0 + 2,0) \cdot 5,0\ \hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_C = -0,9\ \hat{x}\ (m/s)}$$

Note que o sinal de menos indica que após o tiro o canhão move-se em sentido contrário ao eixo.

15) (FUVEST – SP)

Um recipiente de metal, com X kg de massa, desliza inicialmente vazio sobre uma superfície horizontal, com velocidade $1{,}0\ m/s$. Começa a chover verticalmente e, após certo tempo, a chuva para. Depois da chuva, o recipiente contém $1{,}0\ kg$ de água e se move com velocidade $2/3\ m/s$. Desprezando o atrito, pergunta-se: quanto vale X?

Comentários:

Sem perda de generalidade, vamos dizer que o carrinho está se locomovendo para a direita, sentido de orientação do sistema. Dessa forma, a quantidade de movimento do carrinho vazio vale:

$$\vec{Q}_{inicial} = m \cdot v_i \hat{x} \Rightarrow \vec{Q}_{inicial} = X \cdot 1{,}0\ \hat{x}$$

Se considerarmos que a chuva caia verticalmente, então ela não produzirá impulso externo na direção horizontal no sistema. Logo:

$$\vec{I}_{horizontal} = \vec{0} \Rightarrow \Delta\vec{Q}_{horizontal} = \vec{0}$$

Portanto, a quantidade de movimento na direção horizontal se conserva:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial} \Rightarrow (1{,}0 + X) \cdot \frac{2}{3}\ \hat{x} = X \cdot 1{,}0\ \hat{x} \Rightarrow (1{,}0 + X) \cdot \frac{2}{3} = X \cdot 1{,}0$$

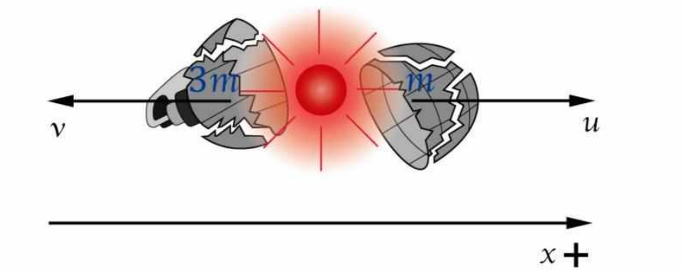
$$\boxed{X = 2{,}0\ kg}$$

16)

Uma granada é lançada obliquamente, a partir do solo, e no topo da trajetória explode em dois pedaços: um de massa m e outro de massa $3m$. Dado que a velocidade da granada no topo é v_{topo}, calcule a velocidade do menor pedaço, sabendo que o fragmento maior tem velocidade v no sentido contrário ao outro. Despreze a resistência do ar.

Comentários:

Note que o sistema é isolado horizontalmente quando a granada está no topo de sua trajetória. Verticalmente ainda existe a força peso atuando na granada, portanto a granada não está livre de forças externas nesta direção. Portanto, podemos conservar a quantidade de movimento na horizontal. Lembrando da cinemática que no topo da trajetória do lançamento oblíquo temos apenas a velocidade na direção horizontal, livre de forças atuando na granada em x, então:



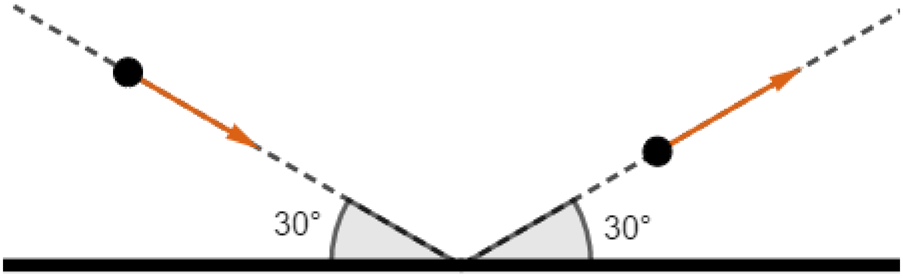
Pela conservação da quantidade de movimento na direção horizontal, temos:

$$\vec{Q}_{sis,final} = \vec{Q}_{sis,inicial} \Rightarrow 3m \cdot v\,(-\hat{x}) + m \cdot u\,\hat{x} = 4m \cdot v_{topo}\,\hat{x}$$

$$\boxed{u = 4v_{topo} + 3v}$$

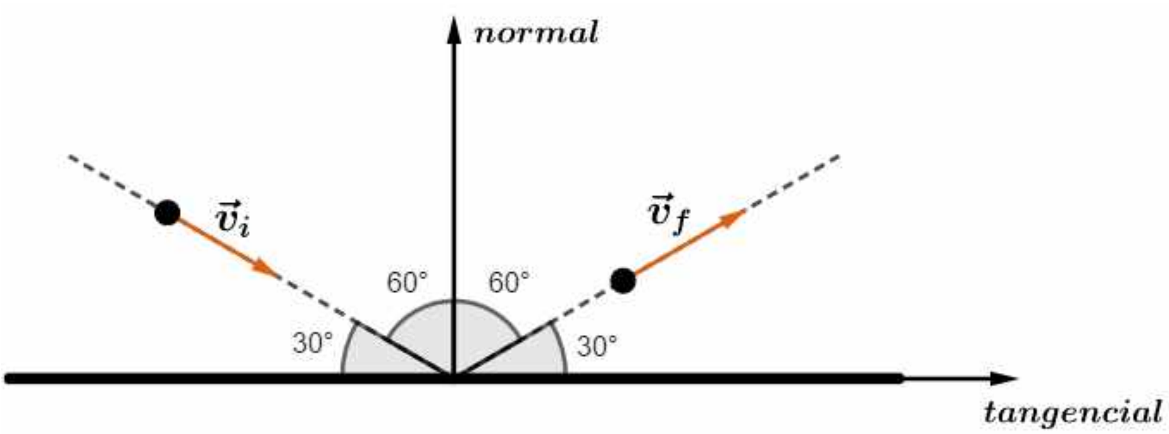
17)

Uma bolinha de tênis de $0{,}1\ kg$ de massa, com velocidade de módulo $20{,}0\ m/s$. atinge uma superfície lisa horizontal formando com ela um ângulo de 30°. Ela ricocheteia com velocidade do mesmo módulo e mesmo ângulo. Determine o módulo e a direção da variação da sua quantidade de movimento.



Comentários:

Vamos adotar o par de eixos normal e tangencial conforme a figura abaixo:



Durante a colisão haverá apenas forças na direção normal e a força peso atuando sobre ela, ambas na direção normal. Portanto, haverá apenas variação da quantidade de movimento na direção normal.

Note que na direção tangencial não há força externa atuando, logo, não irá variar a quantidade de movimento nesta direção. Podemos evidenciar este fato através da matemática:

$$\vec{Q}_{t,i} = m \cdot v_i \cdot \cos 30°\ \hat{t} \text{ e } \vec{Q}_{t,f} = m \cdot v_f \cdot \cos 30°\ \hat{t}$$

Como $v_i = v_f$, então $\vec{Q}_{t,i} = \vec{Q}_{t,f}$.

Por outro lado, na direção normal, temos:

$$\vec{Q}_{n,i} = m \cdot v_i \cdot \operatorname{sen} 30°\ (-\hat{n}) \text{ e } \vec{Q}_{n,f} = m \cdot v_f \cdot \operatorname{sen} 30°\ \hat{n}$$

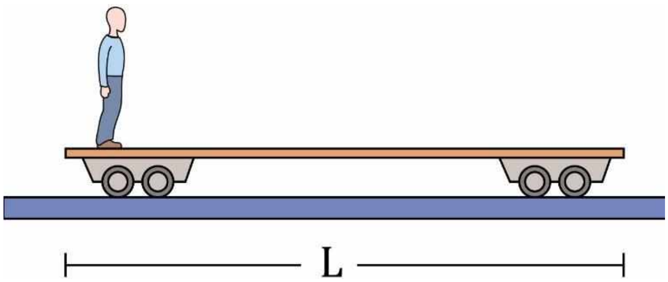
Portanto, a variação da quantidade de movimento é de:

$$\Delta\vec{Q}_n = \vec{Q}_{n,f} - \vec{Q}_{n,i} = m \cdot v_f \cdot \text{sen}\, 30° \ \hat{n} - m \cdot v_i \cdot \text{sen}\, 30° \ (-\hat{n}) = 2\, m \cdot v_f \cdot \frac{1}{2} \ \hat{n}$$

$$\Delta\vec{Q}_n = m \cdot v_f \ \hat{n} \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{Q}_n = 2{,}0 \ kg \cdot m/s}$$

18) (UF-GO)

Um homem de massa m encontra-se na extremidade de um vagão-prancha em repouso. O vagão tem massa $9\ m$ e comprimento L. O homem caminha até a extremidade oposta do vagão e para.



Desprezando-se o atrito entre o vagão e os trilhos, o deslocamento do homem em relação ao solo é:

a) $L/10$

b) L

c) $L/3$

d) $9L/10$

e) $L/9$

Comentários:

Inicialmente, o sistema encontra-se parado. Portanto, a quantidade de movimento total do sistema é nula:

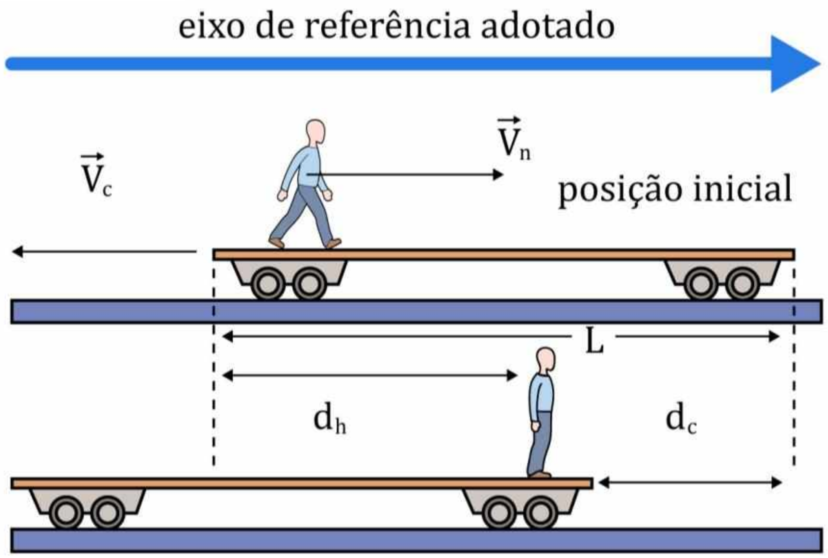
$$\vec{Q}_i = \vec{Q}_{h,i} + \vec{Q}_{C,i} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Enquanto o homem se movimenta, não há forças externas na direção horizontal do sistema formado pelo homem e pelo carrinho. Há forças externas apenas na direção vertical como por exemplo a força peso e a força normal do solo sobre o carrinho.

Com isso, podemos conservar a quantidade de movimento na direção horizontal, isto é:

$$\left(\vec{Q}_f\right)_x = \left(\vec{Q}_{h,f}\right)_x + \left(\vec{Q}_{C,f}\right)_x = \vec{0} \Rightarrow \left(\vec{Q}_{h,f}\right)_x = -\left(\vec{Q}_{C,f}\right)_x$$

Esquematicamente, temos:



Dessa forma, à medida que o homem se desloca para a direita, o carrinho se move para a esquerda. Trabalhando com os módulos das quantidades de movimento, temos:

$$\left|\left(\vec{Q}_{h,f}\right)_x\right| = \left|\left(\vec{Q}_{C,f}\right)_x\right| \Rightarrow m \cdot v_h = 9m \cdot v_C \Rightarrow v_h = 9v_C \Rightarrow \frac{d_h}{\Delta t} = 9 \cdot \frac{d_C}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{d_h = 9d_C}(eq.1)$$

Pela figura, temos que:

$$L = d_h + d_C \Rightarrow \boxed{d_C = L - d_h}\ (eq.2)$$

Substituindo 2 em 1, vem:

$$d_h = 9(L - d_h) \Rightarrow \boxed{d_h = \frac{9}{10}L}$$

Alternativa correta D.

19) (FUVEST – SP)

Um objeto de $4{,}0\ kg$, deslocando-se sobre uma superfície horizontal com atrito constante, passa por um ponto onde possui $50\ J$ de energia cinética, e para dez metros adiante. Adote $g = 10\ m/s^2$

a) Qual o coeficiente de atrito entre o ponto e a superfície?

b) Qual o valor do módulo do impulso aplicado sobre o corpo para detê-lo?

Comentários:

a) Vamos tomar dois instantes que são cruciais para o problema: ponto onde energia cinética é de 50 joules e o momento em que ele para. Pelo teorema do trabalho e energia, tomando como referencial para a energia potencial o solo, temos que:

$$w_{fnc} = \Delta E_{mec} \Rightarrow -\mu \cdot N \cdot d = \left(0 - E_{C,inicial}\right) \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \cdot d = E_{C,inicial}$$

$$\Rightarrow \mu \cdot 4{,}0 \cdot 10 \cdot 10 = 50$$

$$\boxed{\mu = 0{,}125}$$

b) Aplicando o teorema do impulso, temos:

$$\vec{I}_F = \Delta\vec{Q} = \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial} \Rightarrow |\vec{I}_F| = |\vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial}|$$

$$|\vec{I}_F| = |\vec{0} - m \cdot v\,\hat{x}| \Rightarrow |\vec{I}_F| = |m \cdot v\,\hat{x}| \Rightarrow |\vec{I}_F| = m \cdot v\ \ |\hat{x}| = m \cdot v$$

Portanto, basta conhecermos a velocidade quando ele possui energia cinética de 50 joules. Logo:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 50 = \frac{1}{2}4v^2 \Rightarrow \boxed{v = 5\ m/s}$$

Assim, o impulso da força para detê-lo é de:

$$|\vec{I}_F| = 4{,}0 \cdot 5 \Rightarrow \boxed{|\vec{I}_F| = 20\ N \cdot s}$$

20) (ITA-SP)

Um avião a jato se encontra na cabeceira da pista com a sua turbina ligada e com os freios acionados, que o impedem de se movimentar. Quando o piloto aciona a máxima potência, o ar é expelido a uma razão de 100 kg por segundo, a uma velocidade de 600 m/s em relação ao avião. Nessas condições:

a) a força transmitida pelo ar expelido ao avião é nula, pois um corpo não pode exercer força sobre si mesmo.

b) as rodas do avião devem suportar uma força horizontal igual a $60\ \text{kN}$.

c) se a massa do avião é de $7{,}0 \cdot 10^3\ kg$, o coeficiente de atrito mínimo entre as rodas e o piso deve ser de $0{,}20$.

d) não é possível calcular a força sobre o avião com os dados fornecidos.

e) nenhuma das afirmativas acima é verdadeira.

Comentários:

Quando o piloto aciona a máxima potência, o ar começa a ser expelido em um sentido e o avião tenderia a ir para o sentido contrário, de acordo com o princípio da conservação da quantidade de movimento. Para que ele continue parado, deve existir uma força horizontal tal que o impulso gerado por essa força seja o mesmo que o impulso gerado pela propulsão do motor. Portanto, pelo teorema do impulso teremos:

$$\vec{I}_F = \Delta\vec{Q} \Rightarrow \vec{I}_F = \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial}$$

A variação na quantidade de movimento é devido ao ar sendo expelido na potência máxima. Então, a força média que as rodas devem suportar é tal que:

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \Rightarrow F = \frac{m}{\Delta t} \cdot \Delta v \Rightarrow F = 100\frac{kg}{s} \cdot 600\frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{F = 60\ \text{kN}}$$

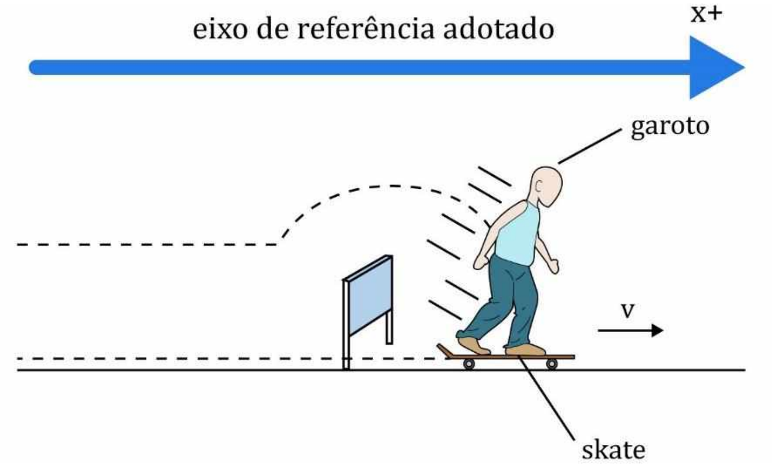
Note que a alternativa a) está errada, pois a força transmitida pelo ar ao avião está no avião e, por ação e reação, o avião empurra os gases para fora. Na letra c), se a massa é de $7 \cdot 10^3\ kg$, admitindo que a força horizontal corresponda a força de atrito estático, o coeficiente de atrito mínimo para garantir o avião parado seria tal que:

$$F = F_{at} \Rightarrow 60 \cdot 10^3 = \mu \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot 10 \Rightarrow \mu \approx 0{,}86$$

As demais alternativas não podem ser verdadeiras, já que a letra b) está correta.

21) (FUVEST – SP)

Um menino de 40 kg está sobre um skate que se move com velocidade constante de $3{,}0\ m/s$ numa trajetória retilínea e horizontal. Defronte de um obstáculo ele salta e após $1{,}0\ s$ cai sobre o skate, que durante lodo o tempo mantém a velocidade de $3{,}0\ m/s$.



Desprezando-se as eventuais forças de atrito, pede-se:

a) a altura que o menino atingiu no seu salto, tomando como referência a base do skate.

b) a quantidade de movimento do menino no ponto mais alto de sua trajetória.

Comentários:

a) Inicialmente, devemos compreender o que está acontecendo fisicamente no problema. O conjunto $skate + garoto$ está se locomovendo com velocidade de $3{,}0\ m/s$ na horizontal, ausente de forças externas nesta direção. Na direção vertical, existem forças externas como a força peso e a força normal do solo no skate. Para saltar, o garoto deve fazer força no skate na direção normal, note que essa força é interna ao nosso conjunto $skate + garoto$. Essa força faz ele se deslocar na direção vertical e somado a velocidade que ele já tem junto ao skate, o garoto consegue pular o obstáculo. Diante dessas informações, para determinar a altura máxima atingida pelo menino, basta utilizar o princípio da independência dos corpos de Galileu, pois o movimento vertical não depende do movimento horizontal. Assim, se ele gasta 1,0 s para subir e descer novamente na vertical, então:

$$t_{subida} = t_{descida} = \frac{1}{2} t_{voo} = 0{,}5\ s$$

O tempo de queda por ser calculado pela expressão:

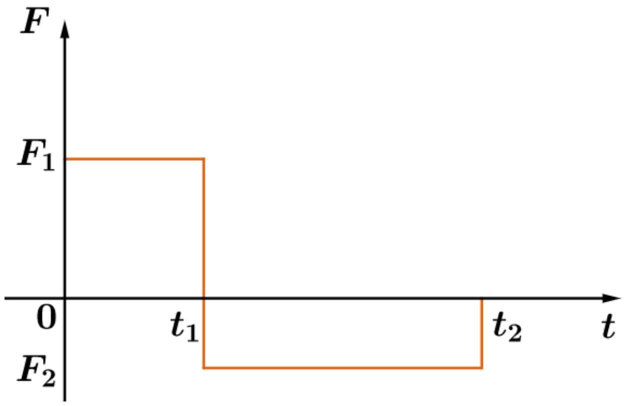
$$t_{descida} = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} \Rightarrow H = \frac{g \cdot t_{descida}^2}{2} \Rightarrow H = \frac{10 \cdot 0{,}5^2}{2} \Rightarrow \boxed{H = 1{,}25\ m}$$

b) No ponto mais alto da trajetória, o menino possui apenas velocidade na horizontal. Como o skate não variou a sua velocidade, ou seja, nenhuma força externa atuou nesta direção, a velocidade do menino não variou na direção horizontal. Portanto:

$$\vec{Q}_x = m \cdot v_x \, \hat{x} \Rightarrow \vec{Q}_x = 40 \cdot 3{,}0 \, \hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{Q}_x = 120 \, \hat{x} \, (kg \cdot m/s)}$$

22) (ITA – SP)

A figura mostra o gráfico da força resultante agindo numa partícula de massa m, inicialmente em repouso. No instante t_2 a velocidade da partícula, v_2, será:



a) $v_2 = [(F_1 + F_2)t_1 - F_2 t_2]/m$

b) $v_2 = [(F_1 - F_2)t_1 - F_2 t_2]/m$

c) $v_2 = [(F_1 - F_2)t_1 + F_2 t_2]/m$

d) $v_2 = [F_1 t_1 - F_2 t_2]/m$

e) $v_2 = [(t_2 - t_1)(F_1 - F_2)]/2m$

Comentários:

Pelo teorema do impulso, temos:

$$\vec{I}_F = \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial} \Rightarrow \vec{I}_F = \vec{Q}_{final}$$

Considerando que a força resultante não alterou sua direção, então podemos trabalhar a equação acima em módulo:

$$|\vec{I}_F| = |\vec{Q}_{final}|$$

Lembrando que a área é numericamente ao impulso da força em um gráfico $F \times t$, então:

$$Área = A_1 + A_2 \Rightarrow Área = F_1 \cdot t_1 + \left(-F_2 \cdot (t_2 - t_1)\right) \Rightarrow Área = (F_1 + F_2) \cdot t_1 - F_2 t_2$$

Portanto:

$$(F_1 + F_2) \cdot t_1 - F_2 t_2 = m \cdot v_2 \Rightarrow \boxed{v_2 = [(F_1 + F_2) \cdot t_1 - F_2 t_2]/m}$$

Alternativa correta A.

23)

Uma granada em repouso sobre uma superfície horizontal explode, partindo-se em três fragmentos. Dois deles, que possuem a mesma massa, deslocam-se em direções perpendiculares entre si, com velocidades de módulos iguais a v. O terceiro fragmento tem massa igual ao triplo da dos outros dois. Determine o módulo e a direção de sua velocidade do pedaço com maior massa.

Comentários:

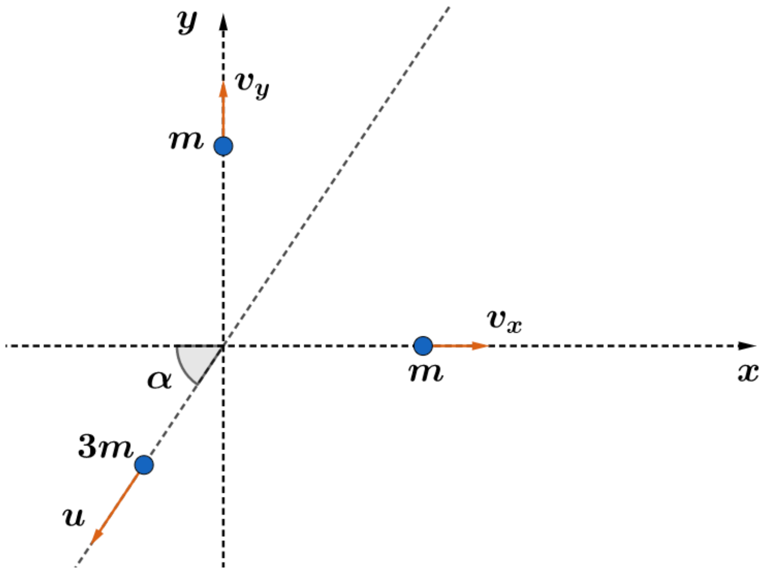
Note que inicialmente, a granada está em repouso, logo, sua quantidade de movimento é nula:

$$\vec{Q}_{inicial} = \vec{0}$$

Como não existem forças externas na direção horizontal, então $\vec{I}_{horizontal} = \vec{0}$. Tal fato implica conservação da quantidade de movimento nessa direção:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial} = \vec{0}$$

Vamos adotar o par de eixos x e y como referencial, com origem dos eixos onde a granada estava inicialmente:



Note que as massas m possuem direções perpendiculares, então, para que conserve o vetor quantidade de movimento, o fragmento de massa $3m$ deve ter a direção mostrada na figura logo acima.

Dessa forma, temos:

Direção x:

$$\vec{Q}_f = \vec{0} \Rightarrow m \cdot v_x - 3m \cdot u \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{v_x = 3u \cdot \cos\alpha} \ (eq.1)$$

Direção y:

$$\vec{Q}_f = \vec{0} \Rightarrow m \cdot v_y - 3m \cdot u \cdot sen\,\alpha \Rightarrow \boxed{v_y = 3u \cdot sen\,\alpha} \ (eq.2)$$

Pelo enunciado, $v_x = v_y = v$, então:

$$v_x = v_y \Rightarrow 3u \cdot \cos\alpha = 3u \cdot sen\,\alpha \Rightarrow tg\,\alpha = 1$$

Por construção, se $tg\ \alpha = 1$, então $\alpha = 45°$.

Voltando a equação 1, podemos determinar a velocidade do terceiro fragmento:

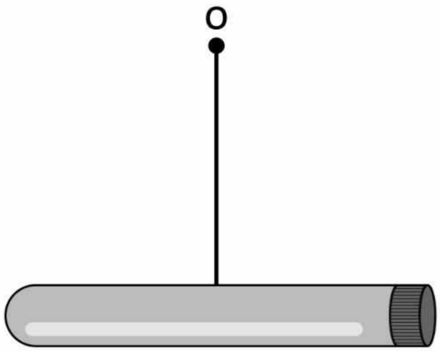
$$v = 3u \cdot \cos 45° \Rightarrow \boxed{u = \frac{v\sqrt{2}}{3}}$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{u} = -\frac{v\sqrt{2}}{3}\hat{x} - \frac{v\sqrt{2}}{3}\hat{y}}$$

24) (MACKENZIE – SP)

Um pequeno tubo de ensaio está suspenso por um fio ideal, de comprimento $0,50\ m$. que tem uma extremidade presa ao pino O. O tubo de $100\ g$ está cheio de gás e está fechado por uma rolha de $50\ g$. Aquecendo o tubo, a rolha salta com velocidade de módulo v. A menor velocidade v da rolha que faz com que o tubo descreva uma volta completa em torno de O é:



Despreze a massa do gás.

a) 2,0 m/s

b) 4,0 m/s

c) 5,0 m/s

d) 8,0 m/s

e) 10,0 m/s

Comentários:

A menor velocidade que o tubo deve ter para dar uma volta completa é aquela que é capaz de fazer o tubo chegar no ponto mais alta com tração no fio quase nula. Dessa forma temos:

$$P + T = R_{cp}$$

Como $T \cong 0$, então:

$$P = R_{Cp} \Rightarrow m_{tubo} \cdot g = \frac{m_{tubo} \cdot v_{topo}^2}{R}$$

Em que $R = L$, L comprimento do fio. Então:

$$v_{topo}^2 = g \cdot L$$

Para sabermos a velocidade do tubo no momento que a rolha sai, no ponto mais baixo da trajetória dele, podemos utilizar a conservação da energia mecânica:

$$E_{M_{topo}} = E_{M_{+baixo}} \Rightarrow m_{tubo} \cdot g \cdot 2 \cdot L + \frac{1}{2} m_{tubo} \cdot v_{topo}^2 = \frac{1}{2} m_{tubo} \cdot v_{+baixo}^2$$

$$g \cdot 2 \cdot L + \frac{1}{2} \cdot g \cdot L = \frac{1}{2} \cdot v_{+baixo}^2 \Rightarrow v_{+baixo} = \sqrt{5 \cdot g \cdot L}$$

Inicialmente, o sistema está livre de forças externas na direção horizontal, portanto, não há impulso das forças externas nesta direção e, com isso, a quantidade de movimento é conservada nessa direção. Tomando como eixo de referência o sentido que a rolha sai, então:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial} \text{ e } \vec{Q}_{inicial} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_{final} = \vec{0} \Rightarrow m_{rolha} \cdot v - m_{tubo} \cdot v_{+baixo} = 0$$

$$\boxed{v = \frac{m_{tubo}}{m_{rolha}} \cdot v_{+baixo}}$$

Substituindo valores temos que:

$$v = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-3}} \cdot \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 0{,}5} \Rightarrow \boxed{v = 10{,}0\ m/s}$$

Alternativa correta E.

2. Colisões

Uma colisão (ou um choque) entre dois corpos ocorre quando eles se aproximam e durante um ***curto intervalo de tempo*** interagem fortemente, de tal forma que as forças de interação entre eles são consideradas desprezíveis.

Como exemplos podemos mencionar a batida de um taco na bola de beisebol, o choque entre duas bolas de bilhar, o chute numa bola de futebol, o saque de um jogador de vôlei. Nesses casos, dizemos que as colisões ocorreram entre corpos macroscópicos, havendo contato entre os corpos durante a colisão.

Por outro lado, quando se trata de corpos microscópicos como partículas ou cargas, não é necessário haver contato entre os corpos. Como por exemplo, um próton A que se move com grande rapidez $\vec{v}_A$, bem distante de outro próton B inicialmente em repouso. Lembrando da eletrostática, sabemos que o módulo da força de repulsão é diretamente proporcional ao inverso do quadrado da distância entre as cargas:

$$F \propto \frac{1}{d^2}$$

Figura 8: Próton se aproximando de outro próton parado.

Dessa forma, a medida em que a distância vai diminuindo, a força de repulsão se torna muito intensa, de tal forma que quando A está bem próximo de B, para um intervalo de tempo bem pequeno, há uma intensa repulsão entre eles, acarretando o desvio da trajetória de A e o deslocamento de B de sua posição inicial, como mostra a figura abaixo.

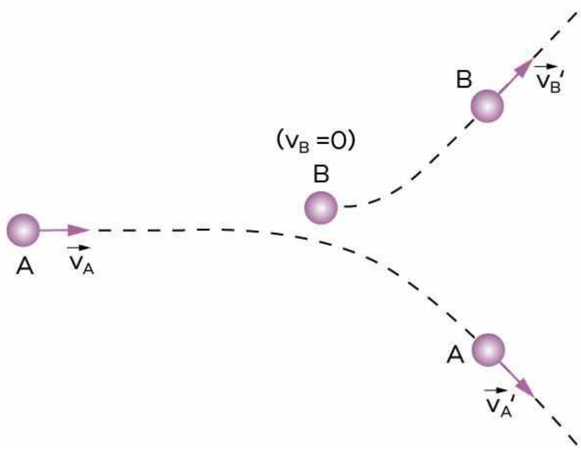
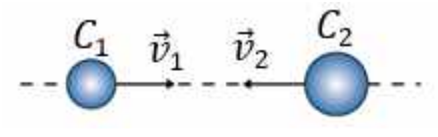
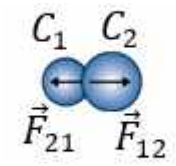
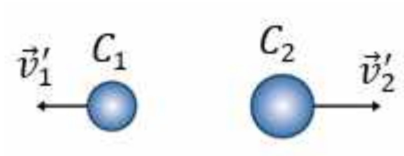


Figura 9: Devido à repulsão eletrostática, o próton, que estava em repouso, entra em movimento segundo a direção indicada, caracterizando uma colisão sem a necessidade de haver contato entre os corpos.

Na verdade, também não ocorre contato entre corpos macroscópicos se colidindo. De fato, quando os corpos estão bem próximos, a força de repulsão de origem elétrica se torna muito intensa. Entretanto, para nossos olhos limitados, tudo se passa como se ocorresse o contato.

Essas forças que atuam durante uma colisão são muito mais intensas que as outras forças externas que atuam no sistema e, além disso, o intervalo de tempo em que elas ocorrem são da ordem de milésimos de segundos e, portanto, as chamamos de ***forças impulsivas***.

Vamos tomar a colisão entre dois corpos macroscópicos, de tal forma que eles não se quebrem e não mudam de natureza durante o impacto. Vamos supor que após o choque, os corpos se separam. Podemos ilustrar o que ocorre durante a colisão pelo seguinte esquema:

Antes da colisão	***Durante a colisão***	***Depois da colisão***
		
Os corpos C_1 e C_2 estão se aproximando.	Durante o choque, os corpos exercem forças opostos $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$, que obedecem à 3ª lei de Newton: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ e $\lvert\vec{F}_{12}\rvert = \lvert\vec{F}_{21}\rvert$	Corpos se afastando após o choque.

Durante o pequeno intervalo de tempo em que acontece a colisão, o corpo C_1 exerce no corpo C_2 uma força variável $\vec{F}_{1,2}$ e, simultaneamente, o corpo C_2 exerce em C_1 uma força $\vec{F}_{2,1}$. Pela terceira lei de Newton, $\vec{F}_{1,2}$ e $\vec{F}_{2,1}$ formam um par ação e reação, tendo em cada instante os mesmos módulos, as mesmas direções e sentidos opostos:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \text{ e } |\vec{F}_{1,2}| = |\vec{F}_{2,1}| = F$$

Na verdade, é muito difícil obter o gráfico da força impulsiva $F(t)$. Tais forças são muito intensas e ocorrem em intervalos de tempo muito curtos, por isso, sabemos que o gráfico $F \times t$ é algo semelhante a figura abaixo:

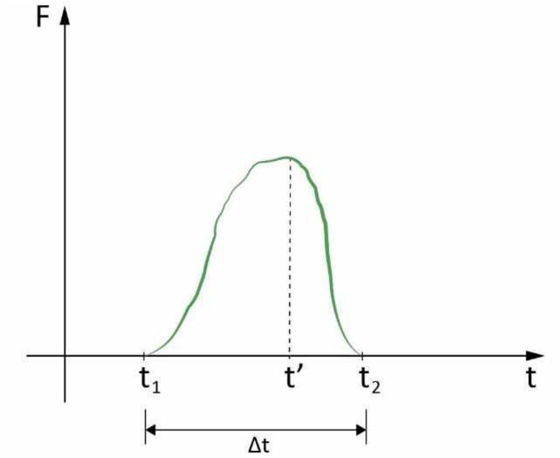


Figura 10: Gráfico da força impulsiva em função do tempo. De t_1 a t' constitui a fase de deformação e de t' a t_2 a fase de restituição.

No decorrer do choque podemos identificar duas etapas: a deformação e a restituição. A fase de deformação começa no instante em que começam o contato (t_1) e encerra no instante em que a velocidade relativa entre os corpos é nula (t_2). A partir de t_2, inicia-se a etapa de restituição, que finaliza em t_3, momento em que os corpos se separam.

Na colisão, podemos dizer que cada corpo é semelhante a uma mola que comprime (fase de deformação) e depois se distende (fase de restituição), sendo capaz (ou não) voltar à sua forma inicial. No geral, após o choque as partículas ficam deformadas, ainda que seja pequena.

Se os corpos ficam unidos após a colisão, então não há fase de restituição e o gráfico da força impulsiva é semelhante a ilustração abaixo:

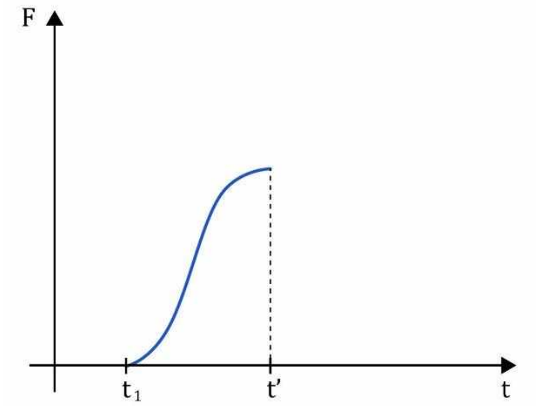


Figura 11: Gráfico da força impulsiva em função do tempo apenas para a fase de deformação, característica de colisões inelásticas, isto é, corpos grudam após o choque.

De um modo geral, não estamos interessados em conhecer a forma exata do gráfico da força impulsiva pelo tempo. Quando estudamos colisões, não nos interessa saber detalhadamente o que ocorreu durante o impacto. Geralmente, desejamos saber o estado do sistema imediatamente após a colisão, dado que já possuímos as informações do sistema antes do choque.

2.1. A aplicação de quantidade de movimento do sistema em colisões

Vamos tomar um sistema constituído por dois corpos que se colidem. Como já mencionamos, a colisão acontece em um intervalo de tempo muito curto e, nesse intervalo de tempo, as forças impulsivas são muito mais intensas do que as forças externas.

Com isso, podemos desprezar a variação da quantidade de movimento produzida pelas forças externas, ou seja, a quantidade de movimento do sistema permanece inalterado.

Dessa forma, as forças internas que atuam no decorrer do impacto servem apenas para fazer uma transferência interna de quantidade de movimento entre os corpos. Assim, essas transferências internas não modificam a soma das quantidades de movimento do sistema.

Dessa forma, podemos dizer que:

Mesmo que o **sistema não esteja isolado das forças externas** em uma colisão, podemos admitir que a quantidade de movimento do sistema ($\vec{Q}_{sis}$) não se altera durante o intervalo de tempo muito pequeno ($\Delta t \cong 0$). Em outras palavras:

$$\left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ depois} = \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ antes}$$

Para um sistema isolado, podemos dizer que a quantidade de movimento permanece inalterada antes, durante e depois de uma colisão interna:

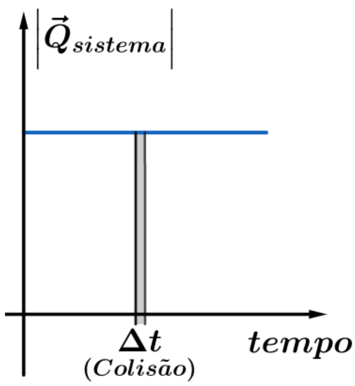


Figura 12: Módulo da quantidade de movimento de um sistema isolado em função do tempo.

Por outro lado, a quantidade de movimento em um sistema não isolado varia com o tempo. Entretanto, uma colisão interna não altera esse comportamento. Sem perda de generalidade, para um sistema no qual aumenta a quantidade de movimento, caso ocorra uma colisão temos o seguinte gráfico:

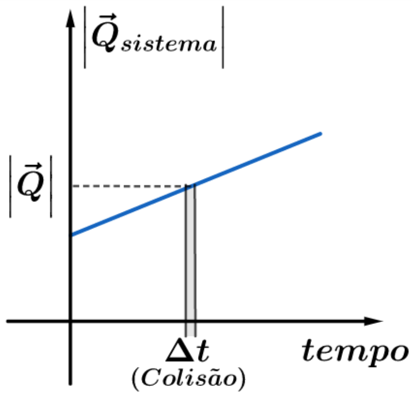


Figura 13: Módulo da quantidade de movimento de um sistema não isolado que cresce com o tempo.

Um exemplo clássico de um sistema não isolado que aumenta o módulo da quantidade de movimento com o tempo consiste na queda de duas bolinhas que se chocam em algum ponto da queda. Note que a força peso é externa as duas bolinhas mas na colisão interna não é alterada a quantidade de movimento do sistema, nem a velocidade do seu centro de massa ($\vec{Q}_{sis} = m_{total} \cdot \vec{v}_{cm}$), que obedece à lei de formação da figura 6.

Outro exemplo clássico de um sistema que a quantidade de movimento vai decrescendo com o tempo é o deslocamento de dois blocos em uma superfície áspera.

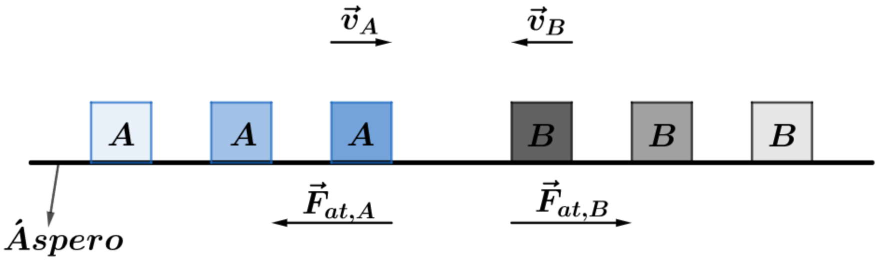


Figura 14: Dois corpos se aproximando, em uma superfície com atrito.

Devido à ação da força de atrito externo, quantidade de movimento do sistema vai diminuindo gradativamente, como ilustra a figura abaixo.

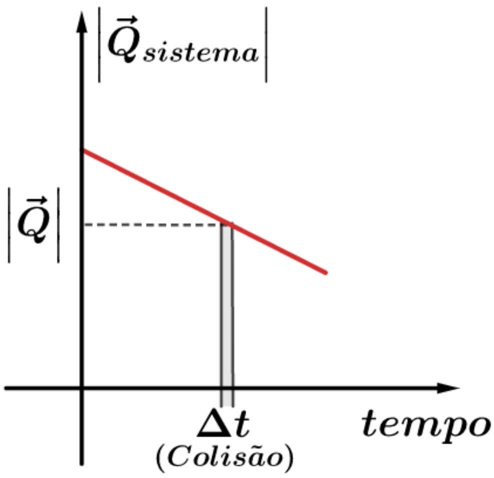


Figura 15: Módulo da quantidade de movimento de um sistema não isolado que decresce com o tempo.

Na colisão entre os dois blocos, não há perturbação no comportamento da quantidade de movimento decrescente desse sistema, já que o intervalo de tempo do choque é muito pequeno e, assim, continua válida a equação $\left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ depois} = \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ antes}$.

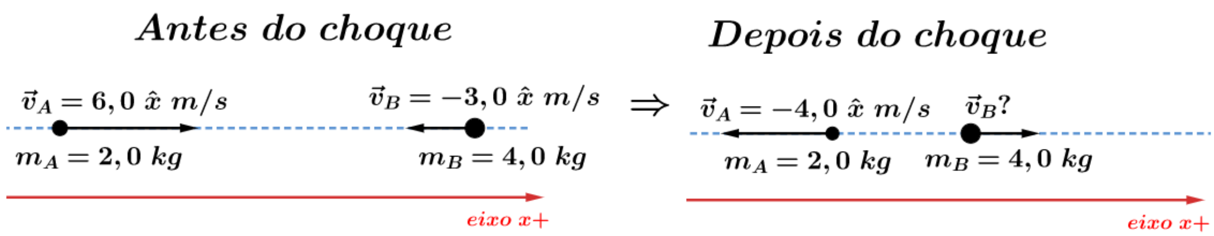
25)

Dois corpos de massas $m_A = 2{,}0\ kg$ e $m_B = 4{,}0\ kg$, movem-se sobre uma reta, alinhados os sentidos e os módulos das velocidades, conforme figura abaixo.

Após a colisão unidimensional dos corpos, a partícula A move-se para a esquerda com velocidade de $4,0\ m/s$. Calcule o módulo e o sentido da velocidade do corpo B.

Comentários:

Inicialmente, devemos adotar um eixo para orientarmos a direção e o sentido das velocidades e das quantidades de movimento. Dessa forma, podemos representar nosso problema da seguinte forma:



Pela conservação da quantidade de movimento na colisão, temos:

$$\left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ depois} = \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ antes} \Rightarrow m_A \cdot \vec{v}'_A + m_B \cdot \vec{v}'_B = m_A \cdot \vec{v}_A + m_B \cdot \vec{v}_B$$

$$2{,}0 \cdot (-4{,}0\ \hat{x}) + 4{,}0 \cdot \vec{v}'_B = 2{,}0 \cdot (6{,}0\ \hat{x}) + 4{,}0 \cdot (-3{,}0\ \hat{x})$$

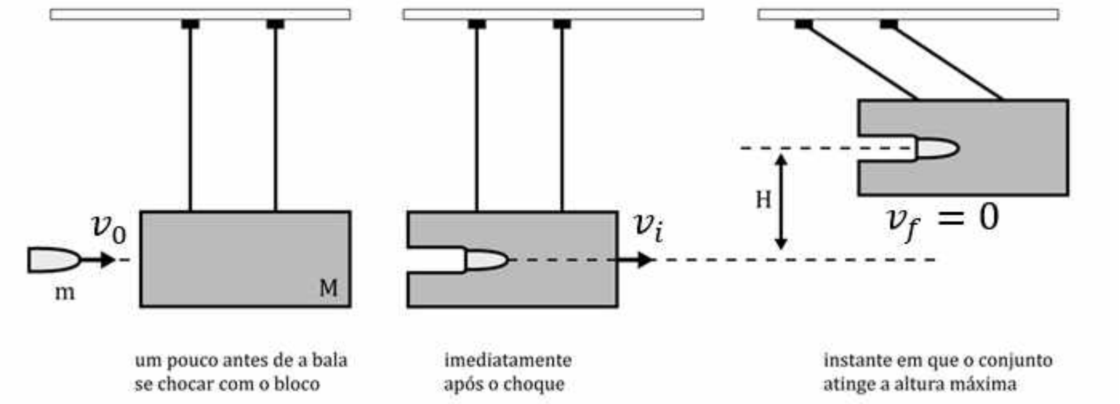
$$4{,}0 \cdot \vec{v}'_B = 2{,}0 \cdot (6{,}0\ \hat{x}) + 4{,}0 \cdot (-3{,}0\ \hat{x}) - 2{,}0 \cdot (-4{,}0\ \hat{x})$$

$$4{,}0 \cdot \vec{v}'_B = 8{,}0\ \hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{v}'_B = 2{,}0\ \hat{x}\ (m/s)}$$

Portanto, o corpo B move-se no sentido do eixo adotado com módulo igual à $2{,}0\ m/s$.

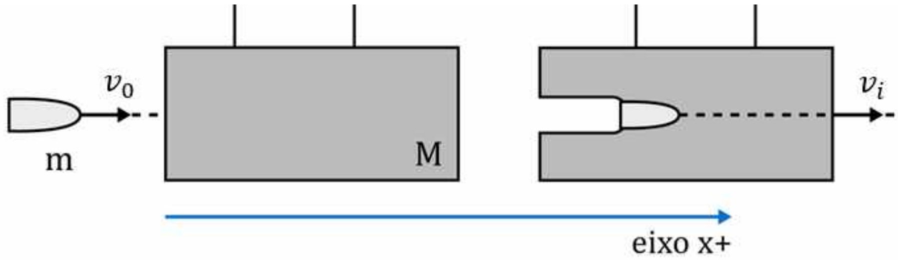
26) (Pêndulo balístico)

Um pêndulo balístico é um dispositivo muito utilizado para medir a intensidade da velocidade de uma munição de revolver. O sistema é composto de um grande bloco de madeira de massa M pendurado por fios a uma superfície horizontal. Os fios são inextensíveis, flexíveis e tem massa desprezível. Assim, um projétil de massa m e velocidade v_0 é disparado horizontalmente contra o bloco e nele fica incrustada. Em seguida, o conjunto $(projétil + bloco)$ atinge a altura máxima H em relação à posição de repouso inicial. Calcule a velocidade v_0 neste problema.



Comentários:

Considerando que o intervalo de tempo do choque é muito pequeno, então logo após a colisão o conjunto $projétil + bloco$ ainda não começou a subir. Dessa forma, podemos trabalhar a conservação da quantidade de movimento como sendo unidimensional.



$$\left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ depois} = \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ antes} \Rightarrow (m + M) \cdot v_i\, \hat{x} = m \cdot v_0\, \hat{x} \Rightarrow \boxed{v_i = \frac{m}{m + M} \cdot v_0}$$

Conhecido o módulo da velocidade do conjunto logo após a colisão, podemos aplicar a conservação da energia mecânica entre o início da subida e o ponto mais alto que o conjunto alcança:

$$(E_{mec})_{final} = (E_{mec})_{inicial} \Rightarrow (m + M) \cdot g \cdot H = \frac{1}{2}(m + M) \cdot v_i^2$$

$$\Rightarrow v_i = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \Rightarrow \frac{m}{m + M} \cdot v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \Rightarrow \boxed{v_0 = \left(\frac{m + M}{m}\right) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}}$$

PEGADINHA

2.2. Energia cinética em colisões

De um modo geral, em uma colisão de dois corpos macroscópicos uma parte da energia cinética total é perdida. Certa quantidade de energia é perdida no trabalho de deformação dos corpos. Além disso, uma fração de energia cinética é transformada em outras energias como a térmica e vibratória, a qual produz o som que ouvimos no momento da colisão.

Em alguns casos, a perda de energia cinética é tão pequena que podemos admitir que a energia cinética se conserva no choque. Neste caso, dizemos que os choques são ***elásticos***. Um bom exemplo de choques totalmente elásticos são alguns choques entre partículas subatômicas.

Em relação à conservação ou não da energia cinética, as colisões são classificadas em:

- ***Choques elásticos***: a energia cinética do sistema se conserva e os corpos se separam após o choque.

$$\left(\sum E_{cin}\right)_{antes} = \left(\sum E_{cin}\right)_{depois}$$

- ***Choques parcialmente elásticos***: há separação dos corpos após o choque, mas a energia cinética total logo após o choque é menor que a energia cinética total logo antes do impacto.

$$\left(\sum E_{cin}\right)_{antes} > \left(\sum E_{cin}\right)_{depois}$$

- ***Choques inelásticos***: os corpos grudam na colisão e a energia total após o choque é menor que antes do choque.

Curiosidade!

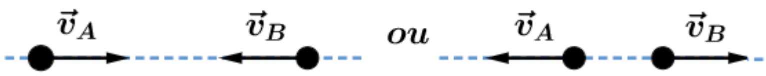
Existem ainda os choques superelásticos, que podem ter energia cinética total após o choque maior que a de antes da colisão. Isso ocorre se, no decorrer do choque, alguma energia potencial é liberada, transformando-se em energia cinética. Tal fato ocorre em colisões que envolve núcleos atômicos. Neste curso não trabalharemos com os choques superelásticos.

2.3. Velocidade relativa

Antes de continuar nossos estudos dos choques, vamos relembrar alguns conceitos da Cinemática os conceitos de ***velocidade relativa***, para duas partículas que se deslocam em uma mesma reta.

Para isso, vamos dividir em alguns possíveis casos para o deslocamento relativo das partículas:

- *Partículas em sentidos opostos*:



Nesse caso, o módulo da velocidade relativa de aproximação ou de aproximação ($\vec{v}_r$) entre os corpos é dado pela soma dos módulos das velocidades:

$$\boxed{|\vec{v}_r| = |\vec{v}_A| + |\vec{v}_B|}$$

- Partículas no mesmo sentido:

Nesse caso, o módulo da velocidade relativa ($\vec{v}_r$) é dado pela diferença dos módulos das velocidades dos corpos. Assim, temos duas possibilidades:

1. Se $|\vec{v}_A| > |\vec{v}_B|$, então $|\vec{v}_r| = |\vec{v}_A| - |\vec{v}_B|$.
2. Se $|\vec{v}_B| > |\vec{v}_A|$, então $|\vec{v}_r| = |\vec{v}_B| - |\vec{v}_A|$.

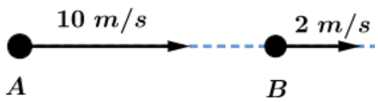
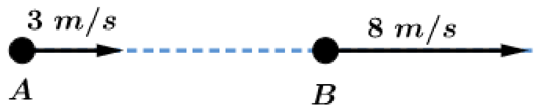
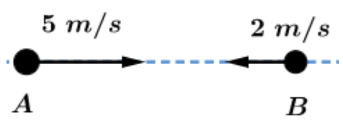
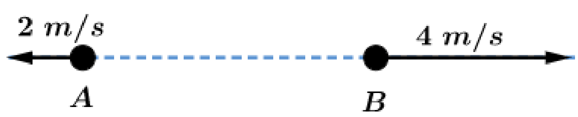
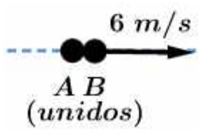
2.4. Coeficiente de restituição

Quando vamos resolver um problema de colisão, a conservação da quantidade de movimento não é suficiente para a resolução, já que temos mais incógnitas do que equações. Por isso, são necessárias mais informações.

Em choques unidimensionais de dois corpos macroscópicos A e B, experimentalmente, Isaac Newton verificou uma interessante relação entre as velocidades dos corpos. Tal relação depende apenas da natureza dos materiais. Chamamos essa relação de coeficiente de restituição e representamos pela letra e. Matematicamente, ele é calculado da seguinte forma:

$$e = \frac{|\text{velocidade relativa entre } A \text{ e } B \text{ logo após o choque}|}{|\text{velocidade relativa entre } A \text{ e } B \text{ logo antes do choque}|}$$

Note que pela definição, o coeficiente de restituição é adimensional. Alguns exemplos de cálculo do coeficiente de restituição.

Logo **antes** do choque	Logo **depois** do choque	Coeficiente de restituição (e)
		$e = \frac{8-3}{10-2} = \frac{5}{8} = 0{,}625$
		$e = \frac{2+4}{5+2} = \frac{6}{7} = 0{,}86$
		$e = \frac{6-6}{5-4} = \frac{0}{1} = 0$

Para cada tipo de choque, o coeficiente de restituição pode ter os seguintes valores:

1. ***Choque inelástico***: como os corpos ficam grudados após o choque inelástico, então a velocidade relativa após o choque é nula. Portanto:

$$e = 0$$

2. ***Choque elástico:*** o módulo da velocidade relativa após o choque é igual ao módulo da velocidade relativa antes do choque. Em outras palavras:

$$e = 1$$

Sem perda de generalidade, vamos demonstrar esse resultado para o caso de um choque unidimensional elástico como mostra a figura abaixo.

Pela conservação da quantidade de movimento, temos:

$$\left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ depois} = \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ antes}$$

$$m_A \cdot v'_A + m_B \cdot v'_B = m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B$$

$$m_A \cdot (v_A - v'_A) = m_B \cdot (v'_B - v_B)\ (eq. 1)$$

Dado que o choque é elástico, então a energia cinética do sistema se conserva:

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A {v'}_A^2 + \frac{1}{2} m_B {v'}^2$$

$$m_A\left(v_A^2 - {v'_A}^2\right) = m_B\left({v'_B}^2 - v_B^2\right)\ (eq. 2)$$

Dividindo as equações 1 e 2, temos:

$$\frac{m_A\left(v_A^2 - {v'_A}^2\right)}{m_A \cdot (v_A - v'_A)} = \frac{m_B\left({v'_B}^2 - v_B^2\right)}{m_B \cdot (v'_B - v_B)} \Rightarrow \frac{(v_A + v'_A) \cdot (v_A - v'_A)}{(v_A - v'_A)} = \frac{(v'_B + v_B)(v'_B - v_B)}{(v'_B - v_B)}$$

$$v'_A + v_A = v'_B + v_B \Rightarrow v'_A - v'_B = v_B - v_A\ (eq. 3)$$

Da definição de coeficiente de restituição, temos que:

$$e = \frac{|v'_A - v'_B|}{|v_A - v_B|}$$

Então, pela equação 3 vemos que:

$$e = \frac{|v'_A - v'_B|}{|v_A - v_B|} = \frac{|v_B - v_A|}{|v_A - v_B|} = \frac{|v_A - v_B|}{|v_A - v_B|} = 1$$

3. ***Choques parcialmente elásticos***: a energia cinética total logo após a colisão é menor que a energia cinética total logo antes da colisão. Por isso, a velocidade relativa imediatamente após o impacto é menor que a velocidade relativa logo antes do choque (trabalhando em módulo) e, portanto:

$$\boxed{0 < e < 1}$$

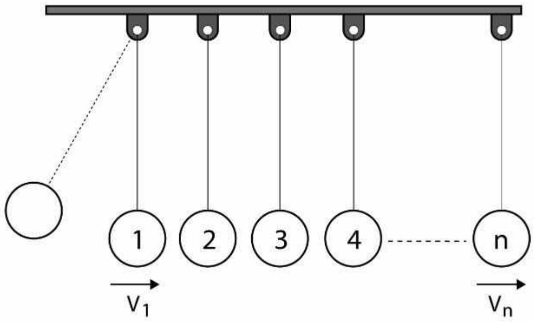
Observações:

1. Na verdade, o coeficiente de restituição (e) não depende apenas do material. Ele depende das velocidades e das formas dos corpos.
2. Mais à frente vamos estudar choques oblíquos e mostraremos como calcular o coeficiente de restituição para estes casos.
3. Para choques superelásticos $e > 1$.

ATENÇÃO
DECORE!

27)

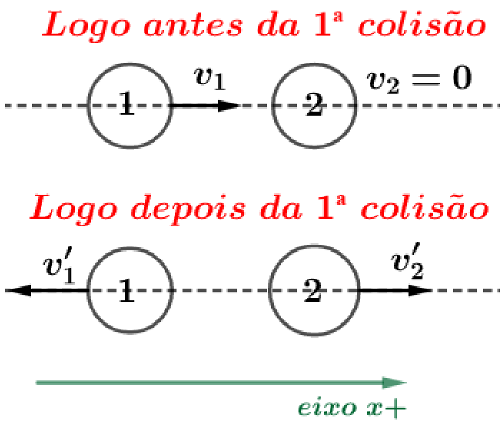
Considere n esferas de mesma massa m suspensas por fios de comprimentos iguais, com as esferas bem próximas umas das outras, quase se tocando, como ilustra a figura abaixo.



A esfera 1 é levemente erguida e solta, de tal forma que acerta a esfera 2 com velocidade $\vec{v}_1$. Após sucessivos choques, determine o módulo da velocidade da n-ésima esfera logo após o choque com a antecessora, pela primeira vez. Adote que o coeficiente de restituição entre os choques é igual à e.

Comentários:

Note que as pequenas esferas não se tocam. Primeiramente, vamos analisar a colisão entre a primeira e a segunda esfera e notar que existe uma lei de recorrência para as velocidades. Para as duas primeiras esferas, temos:



Pela definição de coeficiente de restituição, temos que:

$$e = \frac{|v_{relativa\ logo\ após}|}{|v_{relativa\ logo\ antes}|} = \frac{v_1' + v_2'}{v_1} \Rightarrow \boxed{v_1' = e \cdot v_1 - v_2'}\ (eq.1)$$

Fazendo a conservação da quantidade de movimento, temos:

$$(\vec{Q}_{sis})_{logo\ depois} = (\vec{Q}_{sis})_{logo\ antes} \Rightarrow m \cdot (-v_1') + m \cdot v_2' = m \cdot v_1 \Rightarrow \boxed{v_2' = v_1 + v_1'}(eq.2)$$

Substituindo a equação 1 em 2, vem:

$$v_2' = v_1 + e \cdot v_1 - v_2' \Rightarrow \boxed{v_2' = \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot v_1}\ (eq. 3)$$

Com esse resultado vemos que após o choque entre 1 e 2, esta última sai com velocidade v'_2 calculada acima. Agora, para o choque entre 2 e 3 vamos repetir os mesmos cálculos já feitos para 1 e 2. Por isso, podemos dizer sem riscos que:

$$v_3' = \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot v'_2$$

Mas, $v_2' = \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot v_1$. Portanto:

$$v_3' = \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot v_1 \Rightarrow \boxed{v_3' = \left(\frac{1+e}{2}\right)^2 \cdot v_1} \text{ ou } \boxed{v_3' = \left(\frac{1+e}{2}\right)^{3-1} \cdot v_1}$$

Para a quarta esfera, temos:

$$v_4' = \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot v'_3 = \left(\frac{1+e}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+e}{2}\right)^{3-1} \cdot v_1 \Rightarrow \boxed{v_4' = \left(\frac{1+e}{2}\right)^{4-1} \cdot v_1}$$

Não é difícil de perceber que após $n - 1$ colisões, a n-ésima esfera terá velocidade v_n expressa por:

$$\boxed{v_n = \left(\frac{1+e}{2}\right)^{n-1} \cdot v_1}$$

2.5. Aplicação de progressões geométricas em colisões

Considere uma bola caindo verticalmente do repouso e realiza sucessivas colisões com o solo, subindo e descendo como mostra a figura abaixo.

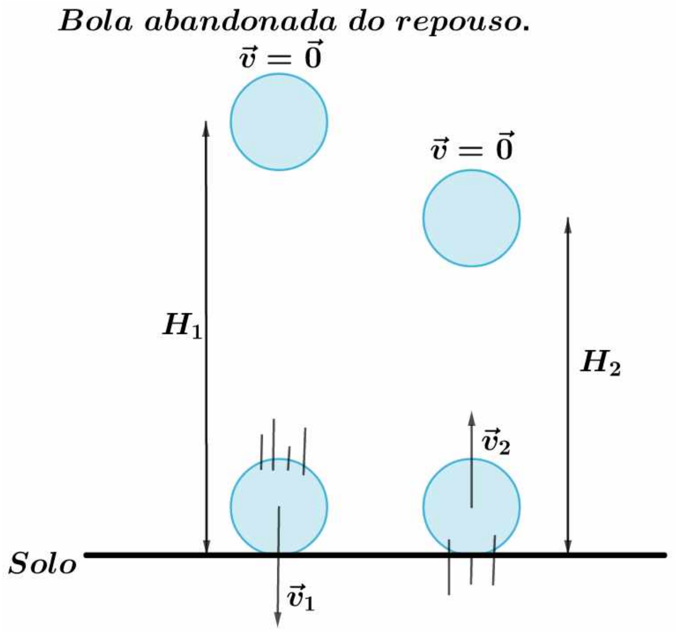


Figura 16: Esquema representativo de uma bola caindo de uma altura H_1 verticalmente. Apenas por questões didáticas, colocamos a bola, após o primeiro, retornando para cima um pouco mais a direita, mas tenha em mente que todo o movimento ocorre em uma única reta vertical.

Abandonada da altura H_1, a bola colide com o solo e sobe até a altura H_2, de onde cai novamente, efetuando o segundo choque com o solo e elevando-se até a altura H_3 e assim por diante.

Vamos determinar uma relação entre duas alturas consecutivas (H_{n-1} e H_n) e o coeficiente de restituição e.

No primeiro choque, a bola chega ao solo com velocidade v_1 dada por:

$$(E_{mec})_{final} = (E_{mec})_{inicial} \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = m \cdot g \cdot H_1 \Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H_1}}$$

Após o primeiro choque, utilizando a conservação da energia mecânica podemos relacionar v_2 com H_2:

$$(E_{mec})_{final} = (E_{mec})_{inicial} \Rightarrow m \cdot g \cdot H_2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 \Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H_2}}$$

Da definição de coeficiente de restituição, temos:

$$e = \frac{|v_{relativa\ logo\ após}|}{|v_{relativa\ logo\ antes}|} = \frac{v_2 - 0}{v_1 - 0} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \boxed{v_2 = e \cdot v_1}$$

Para as alturas, vem:

$$v_2 = e \cdot v_1 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot g \cdot H_2} = e \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_1} \Rightarrow \boxed{H_2 = H_1 \cdot e^2}$$

Ou seja, a relação entre duas alturas consecutivas é dada por:

$$\boxed{H_n = H_{n-1} \cdot e^2}$$

Esse resultado nos permite dizer que as alturas sucessivas ($H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$) formam uma progressão geométrica de razão e^2.

Além das alturas, podemos relacionar o tempo de queda da bola para cada altura correspondente. Para isso, basta calcular o tempo de queda para duas alturas sucessivas e dividir os tempos encontrados:

$$\begin{cases} t_n = \sqrt{\dfrac{2 \cdot H_n}{g}} \\ t_{n-1} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot H_{n-1}}{g}} \end{cases} \Rightarrow \frac{t_n}{t_{n-1}} = \sqrt{\frac{H_n}{H_{n-1}}}$$

Como $H_n = H_{n-1} \cdot e^2$, então:

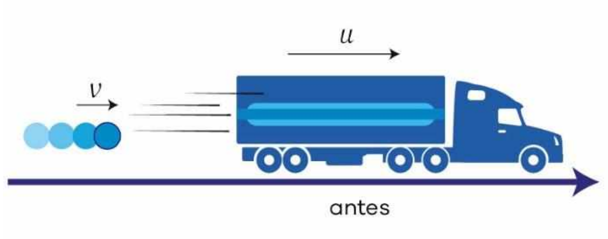
$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \sqrt{\frac{H_n}{H_{n-1}}} = \sqrt{e^2} \Rightarrow \boxed{t_n = t_{n-1} \cdot e}$$

Esse resultado nos mostra que os tempos de quedas sucessivos $t_1, t_2, \dots, t_n$ formam uma progressão geométrica de razão e.

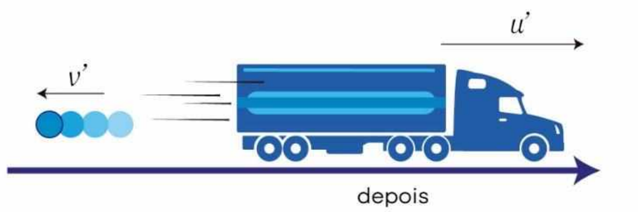
2.6. Caso especial: colisão unidimensional com $M \gg m$

Já imaginou uma colisão entre dois corpos com massas M e m, sendo $M \gg m$, por exemplo, uma bolinha de pingue-pongue se chocando com um caminhão. Para isso, vamos dividir em dois choques possíveis:

1. ***Bolinha e caminhão se movendo em um mesmo sentido***: vamos considerar a velocidade da bolinha (v) maior que a velocidade do caminhão (u). Dessa forma, temos a seguinte configuração:



Após a colisão da bolinha com o caminhão, temos a seguinte configuração:



Pela conservação da quantidade de movimento podemos escrever que:

$$\left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ depois} = \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ antes}$$

$$\Rightarrow \boxed{m \cdot (-v') + M \cdot u' = m \cdot v + M \cdot u} (eq.\ 2.6.1)$$

Considerando que o choque é perfeitamente elástico ($e = 1$), temos:

$$e = \frac{|v_{relativa\ logo\ após}|}{|v_{relativa\ logo\ antes}|} = \frac{v' + u'}{v - u} = 1 \Rightarrow \boxed{u' = v - v' - u}\ (eq.\ 2.6.2)$$

Substituindo 2.6.2 em 2.6.1, vem:

$$m \cdot (-v') + M \cdot (v - v' - u) = m \cdot v + M \cdot u$$

$$v' = \left(\frac{M - m}{M + m}\right) \cdot v - \left(\frac{2M}{M + m}\right) \cdot u$$

Dado que $M \gg m$, por exemplo, a massa de um caminhão é da ordem de $10^4\ kg$ e a massa da bolinha é da ordem de $10^{-3}\ kg$, dessa forma, podemos dizer que $M \pm m \cong M$. Portanto:

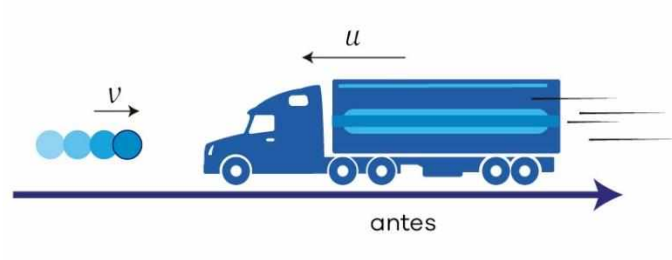
$$v' \cong v - 2 \cdot u$$

Com esse resultado, vemos que a velocidade do caminhão é praticamente a mesma:

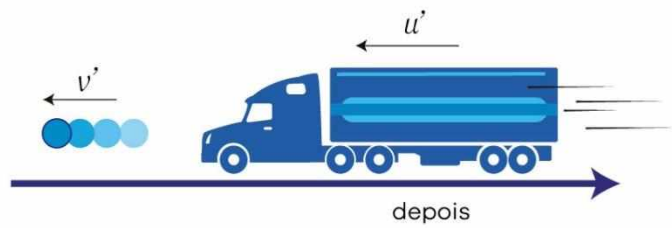
$$u' = v - v' - u \cong v - (v - 2 \cdot u) - u \Rightarrow \boxed{u' \cong u}$$

Portanto, nesse tipo especial de colisão o corpo com massa muito maior que o outro não tem a sua velocidade alterada após o impacto.

2. ***Bolinha e caminhão se movendo em sentido opostos***: neste caso, temos a seguinte configuração:



Após a colisão da bolinha com o caminhão, temos a seguinte configuração:



Pela conservação da quantidade de movimento podemos escrever que:

$$\left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ depois} = \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{logo\ antes}$$

$$\Rightarrow \boxed{m \cdot (-v') + M \cdot (-u') = m \cdot v + M \cdot (-u)} (eq.\ 2.6.3)$$

Considerando que o choque é perfeitamente elástico ($e = 1$), temos:

$$e = \frac{|v_{relativa\ logo\ após}|}{|v_{relativa\ logo\ antes}|} = \frac{v' - u'}{v + u} = 1 \Rightarrow \boxed{u' = v' - v - u}\ (eq.\ 2.6.4)$$

Substituindo a equação 2.6.4 em 2.6.3, temos:

$$-m \cdot v' - M \cdot (v' - v - u) = m \cdot v - M \cdot u$$
$$\Rightarrow v' = \left(\frac{M - m}{M + m}\right) \cdot v + \left(\frac{2M}{M + m}\right) \cdot u$$

Novamente, como $M \gg m$, então podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\boxed{v' \cong v + 2u}$$

Com esse resultado, vemos novamente que a velocidade do caminho é praticamente a mesma:

$$u' = v' - v - u \cong v + 2u - v - u \Rightarrow \boxed{u' \cong u}$$

28) (UECE – 2007)

Por transportar uma carga extremamente pesada, um certo caminhão trafega a uma velocidade de 10 m/s. Um rapaz à beira da estrada brinca com uma bola de tênis. Quando o caminhão passa, ele resolve jogar a bola na traseira do mesmo. Sabendo-se que a bola atinge a traseira do caminhão perpendicularmente, com velocidade de 20m/s, em reação ao solo, qual a velocidade horizontal final da bola após o choque? Considere um choque perfeitamente elástico.

A) 10 m/s

B) 20 m/s

C) 30 m/s

D) Zero

Comentários:

Inicialmente, devemos perceber que a massa do caminhão é muito maior que a massa da bola e que antes da colisão eles se deslocam no mesmo sentido. Como acabamos de ver em teoria, a velocidade do caminhão permanece praticamente inalterada. Portanto, pelo coeficiente de restituição, temos:

$$e = \frac{|v_{relativa\ logo\ após}|}{|v_{relativa\ logo\ antes}|} = \frac{v' + 10}{20 - 10} = 1 \Rightarrow v' + 10 = 10 \Rightarrow \boxed{v' = 0}$$

Gabarito D.

2.7. Colisões bidimensionais

Vamos estudar as colisões bidimensionais. Por razões didáticas, trabalharemos os casos em ordem de dificuldade.

2.7.1. Colisão com um anteparo fixo

Considere uma pequena esfera de massa m que colide com uma superfície plana perfeitamente lisa, conforme a figura abaixo:

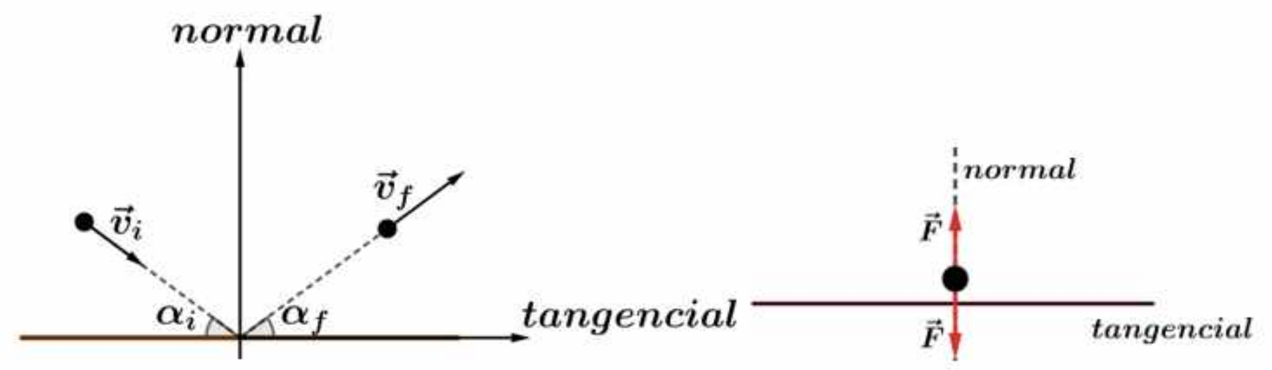


Figura 17: Desenho esquemático de um choque bidimensional em um anteparo fixo.

Quando a bola toca a superfície, ele troca um par de forças impulsivas $\vec{F}$ que atuam na direção normal e, por isso, há uma variação da quantidade de movimento nesta direção. Como não existem forças impulsivas e nem forças externas atuando na direção tangencial, haverá conservação da quantidade de movimento na direção tangencial.

Fazendo a conservação da quantidade de movimento na direção tangencial, temos:

$$\left(Q_{depois}\right)_{tangencial} = \left(Q_{antes}\right)_{tangencial} \Rightarrow m \cdot v_f \cdot \cos\alpha_f = m \cdot v_i \cdot \cos\alpha_i$$

$$\boxed{v_f \cdot \cos\alpha_f = v_i \cdot \cos\alpha_i} \quad (eq. 2.7.1)$$

Em colisões bidimensionais, o coeficiente de restituição e deve relacionar as velocidades relativas entre o corpo e o anteparo apenas na direção normal. Então, o coeficiente de restituição é expresso por:

$$e = \frac{\left|v_{relativa\ logo\ após}\right|_{normal}}{\left|v_{relativa\ logo\ antes}\right|_{normal}} = \frac{v_{f\,normal}}{v_{i\,normal}} \Rightarrow \boxed{e = \frac{v_f \cdot sen\,\alpha_f}{v_i \cdot sen\,\alpha_i}} \quad (eq. 2.7.2)$$

Substituindo v_f da equação 2.7.1 em 2.7.2, vem:

$$e = \frac{\dfrac{v_i \cdot \cos\alpha_f}{\cos\alpha_f} \cdot sen\,\alpha_f}{v_i \cdot sen\,\alpha_i} \Rightarrow e = \frac{sen\,\alpha_f}{\cos\alpha_f} \cdot \frac{\cos\alpha_i}{sen\,\alpha_i}$$

$$\therefore \boxed{tg\,\alpha_f = e \cdot tg\,\alpha_i}$$

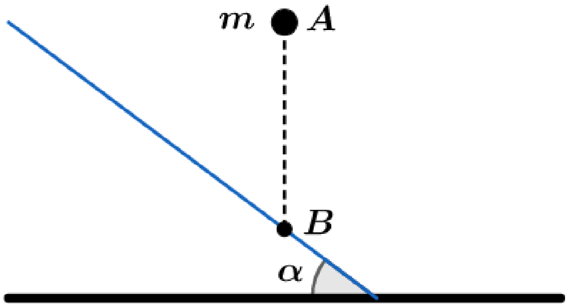
Observe que para o caso da colisão elástica, $e = 1$, implica $\alpha_f = \alpha_i$, ou seja, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Baseado nessa ideia e adotando o modelo corpuscular da luz, Newton provava que a reflexão da luz é meramente uma colisão elástica entre as partículas e a superfície refletora.

Em qualquer superfície plana, independente da direção, sempre consideraremos uma direção tangente e uma direção normal a ela e aplicaremos dois princípios fundamentais:

1) ***Na direção normal***: aplica-se a definição de coeficiente de restituição, calculando as velocidades relativas apenas com as projeções das velocidades na direção normal.
2) ***Na direção tangencial***: aplica-se a conservação da quantidade de movimento, já que não existem forças impulsivas nessa direção.

29) (EPUSP – SP)

Abandona-se uma pequena esfera de massa $m = 0{,}200\ kg$ no ponto A. Após cair $4{,}0\ m$ ela atinge um ponto B de um plano inclinado de um ângulo α em relação ao horizonte. O choque é perfeitamente elástico. Adote para a aceleração da gravidade o valor numérico $g = 10\ m/s^2$.



a) Calcule o impulso da força peso até o instante do choque.

b) No choque há conservação de energia? E da quantidade de movimento? Justifique.

C) Qual o valor do ângulo o para que a esfera inicie seu movimento, após o choque, na direção horizontal?

d) Calcule a menor velocidade adquirida pela esfera, após o choque, quando $\alpha = 30°$.

e) Ainda para $\alpha = 30°$, calcule a máxima cota atingida pela esfera, após o choque.

Comentários:

a) Durante a queda do corpo, a força peso é a única força que atua no corpo, logo, ela é a resultante na direção vertical. Dessa forma, podemos utilizar o teorema do impulso para determinar o impulso da força peso (força resultante), conhecendo a variação da quantidade de movimento. Então:

$$\vec{I}_{\vec{F}_R} = \Delta\vec{Q} \Rightarrow I_P = \Delta Q_{vertical} \Rightarrow I_P = m \cdot v - m \cdot v_A \Rightarrow I_P = m \cdot v$$

Para determinar a velocidade em B (v) antes do choque, podemos utilizar a conservação da energia mecânica:

$$(E_{mec})_B = (E_{mec})_A \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 4}$$

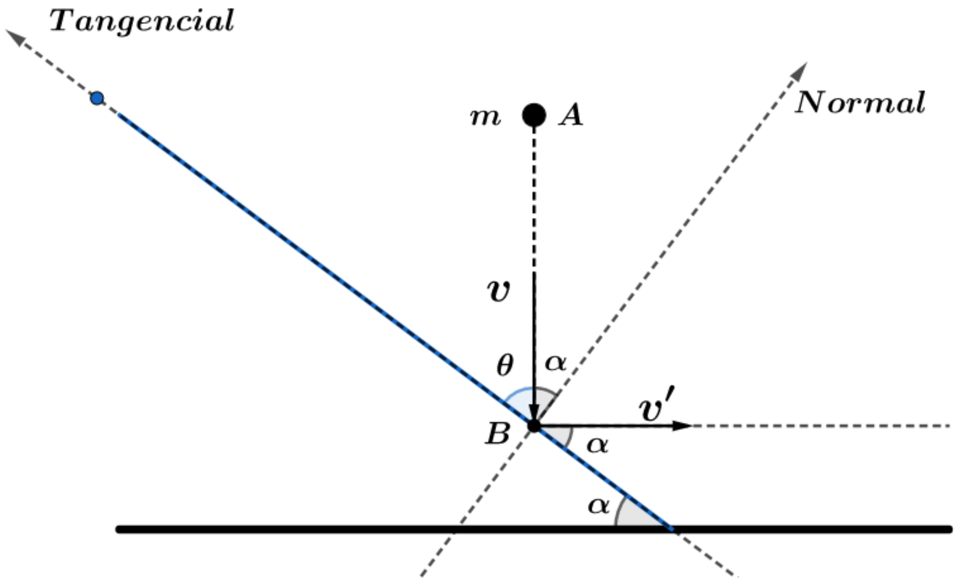
$$\boxed{v = 4\sqrt{5}\, m/s}$$

Portanto:

$$I_P = 0{,}200 \cdot 4\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{I_P = \frac{4\sqrt{5}}{5}\ \mathrm{N \cdot s}}$$

b) O choque é elástico ($e = 1$), portanto, há conservação da energia cinética do sistema. Por outro lado, a quantidade de movimento varia em direção, mas como existe conservação da energia cinética, então o módulo da velocidade não se altera. Portanto, a quantidade de movimento muda pois altera a direção da esfera.

c) Considerando que a bolinha vai sair na direção horizontal, temos a seguinte configuração:



Como visto nesta seção, temos que:

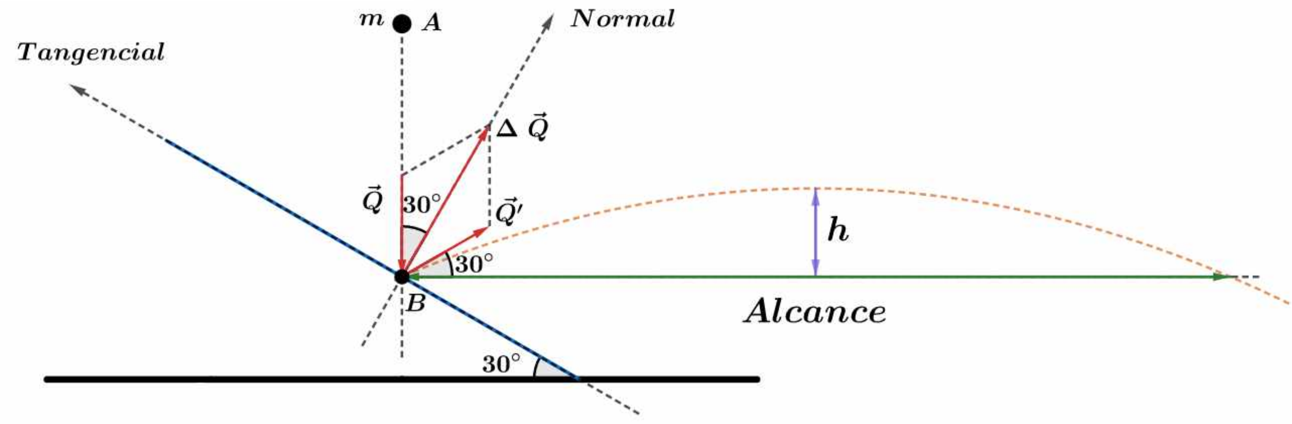
$$tg\ \alpha = e \cdot tg\ \theta \Rightarrow tg\ \alpha = 1 \cdot tg\ \theta \Rightarrow \boxed{tg\ \alpha = tg\ \theta}$$

Pela construção, vemos que $\alpha + \theta = 90°$, então:

$\boxed{\alpha = \theta = 45\ °}$

d) Como o choque é perfeitamente elástico, o módulo da velocidade não muda. Portanto $v_{min} = 4\sqrt{5}\ m/s$.

e) Para $\alpha = 30°$, temos a seguinte configuração:



No estudo do lançamento oblíquo, vimos que o alcance é dado por:

$$A = \frac{v_0^2 sen\ 2\theta}{g} \Rightarrow A = \frac{\left(4\sqrt{5}\right)^2 \cdot sen(2 \cdot 30°)}{10} \Rightarrow A = \frac{16 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{10} \Rightarrow \boxed{A = 4\sqrt{3}\ m}$$

2.7.2. Colisão elástica com um anteparo fixo vertical – espelhamento da trajetória

Considere uma bola de tênis sendo arremessada contra uma parede vertical, conforme a figura abaixo:

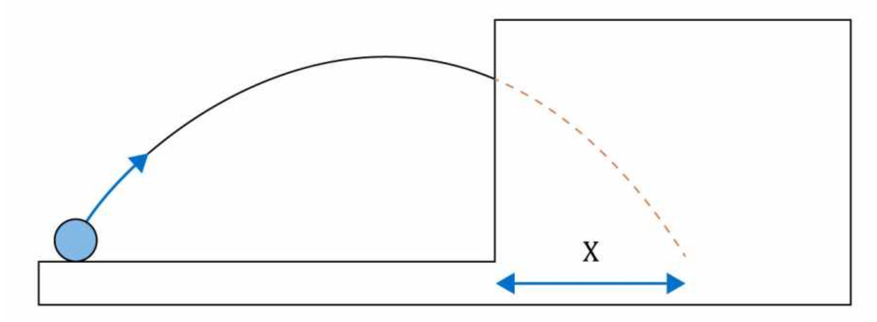


Figura 18: Colisão elástica de uma pequena esfera com um anteparo fixo vertical. A linha tracejada representa a trajetória da bolinha caso não existisse a parede.

Vimos na aula 02 que a bolinha realizaria uma trajetória parabólica caso não existisse uma parede no caminho dela, desprezando a resistência do ar.

Como vimos na seção anterior, quando o corpo realiza uma colisão perfeitamente elástica com um anteparo fixo, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão ($\alpha_i = \alpha_f$). Dado que $e = 1$ e $\alpha_i = \alpha_f$, então $v_i = v_f$ (em módulo). Vetorialmente, a velocidade na direção tangencial conserva sua direção e sentido, ao passo que na direção normal conserva apenas a direção, mas inverte o sentido.

Assim, temos a seguinte configuração dos vetores que representam a velocidade do corpo antes e depois do choque perfeitamente elástico.

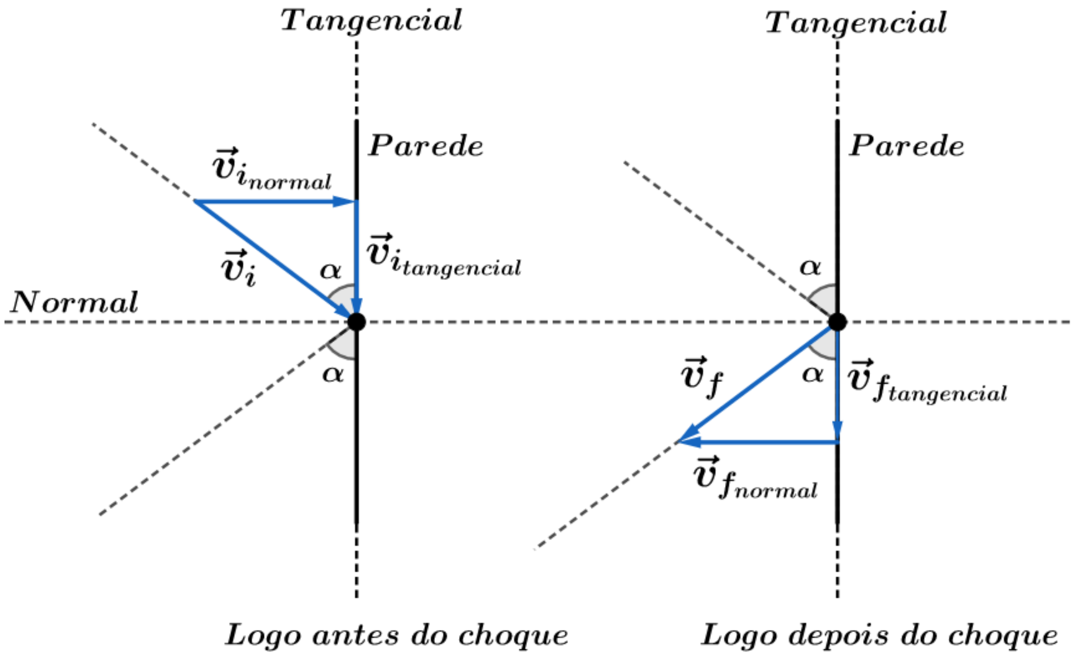


Figura 19: Choque perfeitamente elástico de partícula em anteparo fixo vertical.

Dessa forma, devido à simetria das velocidades, para determinar a trajetória do corpo, basta rebater o trecho fictício em relação à parede vertical, como na figura abaixo:

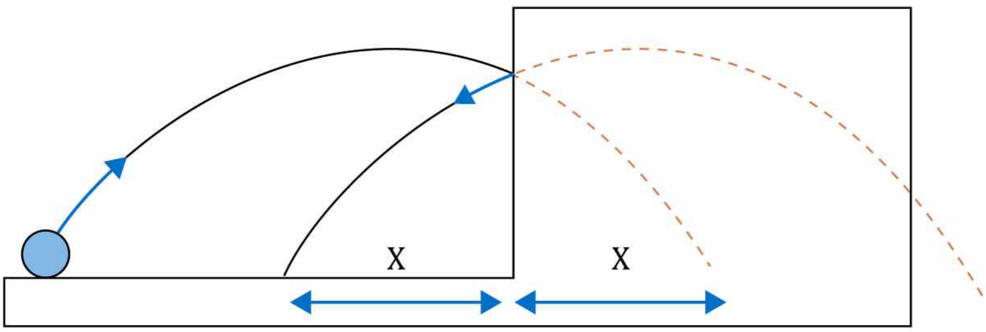


Figura 20: Rebatimento das trajetórias da bolinha, onde as linhas tracejadas representam as trajetórias caso não existisse parede vertical. Note que a parede funciona como um espelho das trajetórias.

Com isso, a trajetória final da bolinha será semelhante à figura a seguir:

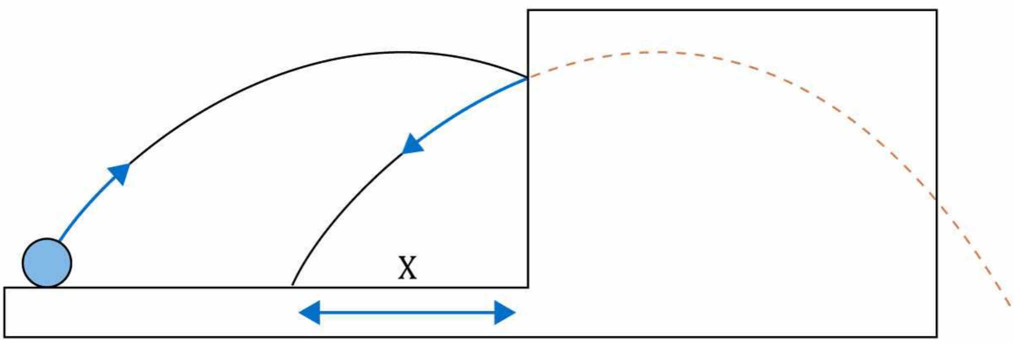
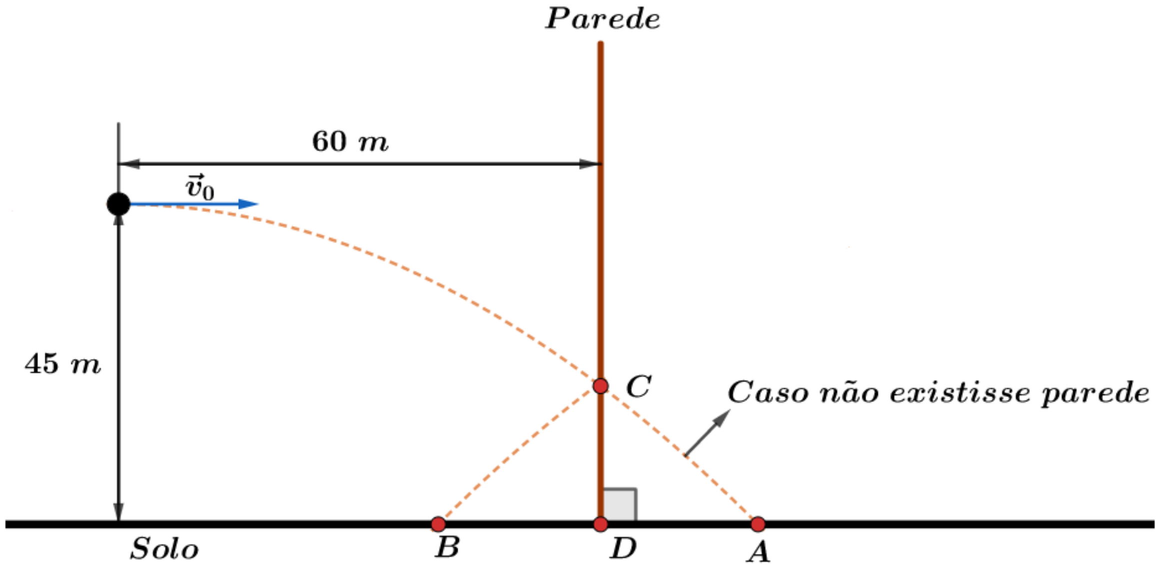


Figura 21: Trajetória final da bolinha.

Essa ideia ainda não apareceu nas provas do ITA e do IME especificamente, mas pode vir a aparecer.

30)

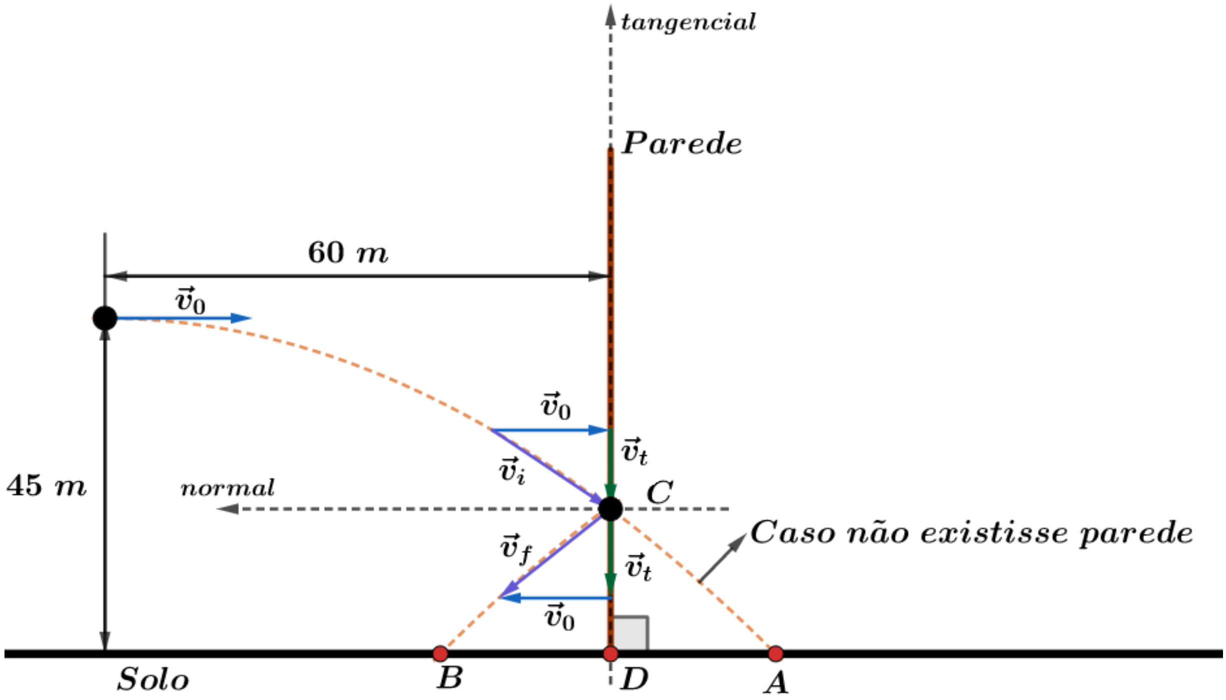
Um pequeno objeto é lançado horizontalmente, com velocidade $\vec{v}_0$ e módulo $v_0 = 30\ m/s$, em um local onde a aceleração da gravidade é de $10\ m/s^2$, como mostra a figura.



Se não existisse a parede vertical, o objeto atingiria o solo em A. Entretanto, ao colidir com a parede no ponto C, o objeto atinge o solo no ponto B. Considerando o choque perfeitamente elástico e desprezando a resistência do ar, determine os tamanhos $\overline{DA}$ e $\overline{CD}$.

Comentários:

Devido ao fato de o choque ser elástico, sabemos que as velocidades serão rebatidas e que $\overline{DA} = \overline{BD}$. O tempo de queda caso não houvesse a parede é dado por:



$$t_{queda} = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} \Rightarrow t_{queda} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{10}} \Rightarrow \boxed{t_{queda} = 3\ s}$$

Assim, a distância que ele percorreria na horizontal é de:

$$\Delta x = v_0 \cdot \Delta t_{queda} \Rightarrow \Delta x = 30 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{\Delta x = 90\ m}$$

Como a parede está a 60 metros do lançamento horizontal do corpo, então $\overline{DA} = 30\ m$.

Para determinar a altura $\overline{CD}$, basta saber o tempo que o objeto leva para chegar em C e utilizar a equação de lançamento oblíquo na vertical. O tempo que o objeto leva para chegar em C pode ser determinado pelo deslocamento em x:

$$\Delta s_x = v_0 \cdot t \Rightarrow t = \frac{60}{30} \Rightarrow \boxed{t = 2\ s}$$

A equação horária do espaço na direção vertical é dada por:

$$y = y_0 + v_{0_y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Portanto:

$$y = 45 - 5 \cdot 2^2 \Rightarrow y = 25\ m \Rightarrow \overline{CD} = 25\ m$$

2.7.3. Colisão com uma parede móvel

Para ficar mais claro esse problema vamos resolver um exercício.

Considere uma cunha de massa M apoiada sobre rodas em uma superfície horizontal perfeitamente lisa. Uma bola de tênis de massa m é solta de uma altura H e colide com a cunha como mostra a figura abaixo:

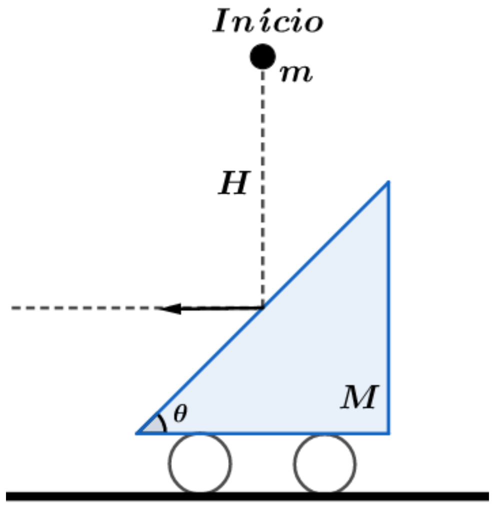


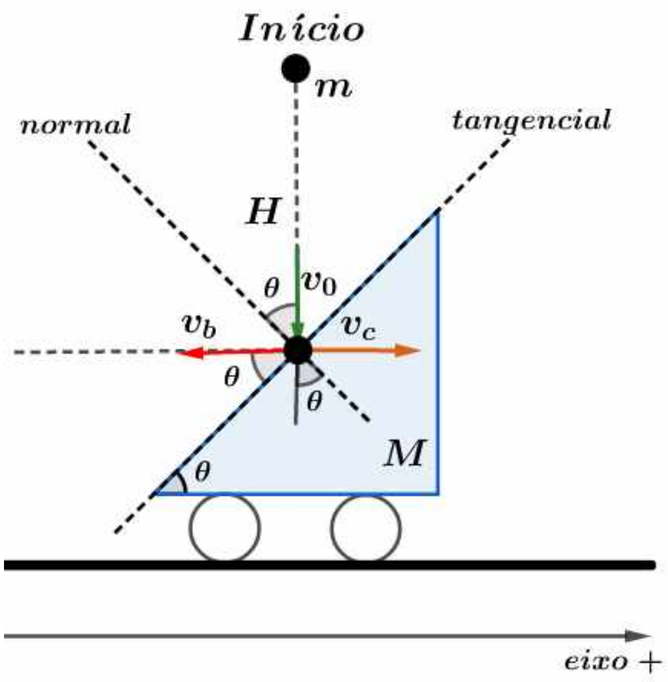
Figura 22: A cunha de massa M tem liberdade para se mover ao longo do eixo horizontal.

Se após a colisão a bola sai na direção horizontal, qual será o coeficiente de restituição e a velocidade da cunha para alguém que está em repouso no solo?

Inicialmente, devemos conhecer a velocidade da bola logo antes de colidir com a parede da cunha. Para isso, vamos utilizar o conceito de energia mecânica, tomando como referencial para a energia potencial gravitacional nível onde a bola toca a cunha:

$$(E_{mec})_{antes\ choque} = (E_{mec})_{início} \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot H \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}}\ (eq. 2.7.3)$$

Vamos tomar todas as velocidades em relação à Terra. Além disso, vamos denominar a o módulo da velocidade da bola após o choque por v_b e a velocidade da cunha por v_c. Na colisão, as forças impulsivas têm direção normal e, assim, há conservação da quantidade de movimento na direção tangencial. Esquematicamente, temos:



Pela conservação da quantidade de movimento na direção tangencial durante o choque, temos:

$$m \cdot v_0 \cdot sen\ \theta = m \cdot v_b \cdot \cos\theta \Rightarrow \boxed{v_0 \cdot sen\ \theta = v_b \cdot \cos\theta}\ \ (eq. 2.7.4)$$

Além disso, o sistema constituído pela bola e pela cunha não possui forças externas atuando na direção horizontal. Por isso, a quantidade de movimento se conserva nessa direção:

$$(Q_{horizontal})_{final} = (Q_{horizontal})_{inicial} \Rightarrow M \cdot v_c + m \cdot (-v_b) = 0 + 0 \Rightarrow \boxed{M \cdot v_c = m \cdot v_b}\ (2.7.5)$$

De acordo com a definição de coeficiente de restituição, temos:

$$e = \frac{|v_{relativa\ logo\ após}|_{normal}}{|v_{relativa\ logo\ antes}|_{normal}} = \frac{v_b \cdot sen\ \theta + v_C \cdot sen\ \theta}{v_0 \cdot \cos\theta} \Rightarrow e = \frac{v_b \cdot sen\ \theta + v_C \cdot sen\ \theta}{v_0 \cdot \cos\theta}$$

Substituindo v_0 da equação 2.7.4 e v_c da equação 2.7.5 na expressão de e, temos:

$$e = \frac{v_b \cdot sen\ \theta + \frac{m \cdot v_b}{M} \cdot sen\ \theta}{\frac{v_b \cdot \cos\theta}{sen\ \theta} \cdot \cos\theta} \Rightarrow e = \frac{sen^2\ \theta}{\cos^2\theta} + \frac{m}{M} \cdot \frac{sen^2\ \theta}{\cos^2\theta}$$

$$\therefore \boxed{e = tg^2\theta \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

Dividindo a equação 2.7.5 por 2.7.4, temos:

$$\frac{M \cdot v_c}{v_0 \cdot sen\ \theta} = \frac{m \cdot v_b}{v_b \cdot \cos\theta} \Rightarrow v_c = \frac{m}{M} \cdot tg\theta \cdot v_0 \Rightarrow \boxed{v_c = \frac{m}{M} \cdot tg\theta \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}}$$

Caso seja conhecido o coeficiente de restituição e não o ângulo da cunha, temos que:

$$v_c = \frac{m}{M} \cdot tg\theta \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \Rightarrow v_c = \frac{m}{M} \cdot \sqrt{\frac{e}{1 + \frac{m}{M}}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

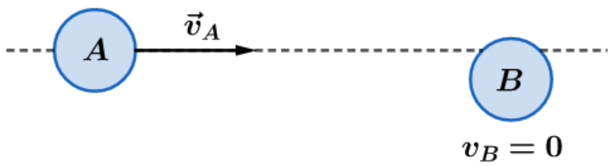
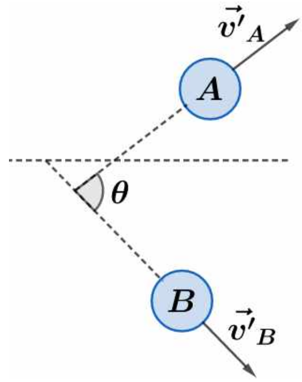
$$\therefore \boxed{v_c = \frac{m}{M} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H \cdot e}{1 + \frac{m}{M}}}}$$

2.7.4. Choque oblíquo e elástico ($e = 1$) entre partículas de mesma massa, com uma delas inicialmente em repouso.

Esse tipo de colisão é muito empregado nas experiências de física nuclear. Por exemplo, a colisão elástica entre um próton e outro próton inicialmente parado.

Vamos demonstrar que após o choque as partículas se movem em direções perpendiculares.

Para isso, vamos representar as situações das partículas logo antes e logo depois da colisão.

Imediatamente antes do choque	Imediatamente depois do choque
	

Provaremos que $\theta = 90°$. Para isso, vamos calcular a quantidade de movimento de cada partícula de forma vetorial:

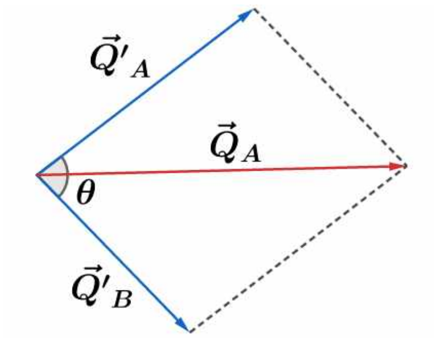
$$\text{Antes}\begin{cases}\vec{Q}_A = m \cdot \vec{v}_A \\ \vec{Q}_B = \vec{0}\end{cases} \text{e Depois}\begin{cases}\vec{Q}'_A = m \cdot \vec{v}'_A \\ \vec{Q}'_B = m \cdot \vec{v}'_B\end{cases}$$

Pela conservação da quantidade de movimento vetorial do sistema, vem:

$$(\vec{Q}_{sis})_{logo\ depois} = (\vec{Q}_{sis})_{logo\ antes} \Rightarrow \vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \vec{Q}'_A + \vec{Q}'_B \Rightarrow \vec{Q}_A + \vec{0} = \vec{Q}'_A + \vec{Q}'_B$$

$$\boxed{\vec{Q}_A = \vec{Q}'_A + \vec{Q}'_B}$$

Podemos representar esses vetores da seguinte forma:



Devido ao fato de o choque ser perfeitamente elástico, sabemos que há conservação da energia cinética do sistema. Portanto:

$$\frac{1}{2}m \cdot v_A^2 + \frac{1}{2}m \cdot v_B^2 = \frac{1}{2}m \cdot {v'_A}^2 + \frac{1}{2}m \cdot {v'_B}^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m \cdot v_A^2 = \frac{1}{2}m \cdot {v'_A}^2 + \frac{1}{2}m \cdot {v'_B}^2$$

Como $m_A = m_B = m$, vamos multiplicar a equação acima por $2m$. Então:

$$\frac{1}{2}m \cdot v_A^2 = \frac{1}{2}m \cdot {v'_A}^2 + \frac{1}{2}m \cdot {v'_B}^2 (\times 2m) \Rightarrow m^2 \cdot v_A^2 = m^2 \cdot {v'_A}^2 + m^2 \cdot {v'_B}^2$$

$$(m \cdot v_A)^2 = (m \cdot v'_A)^2 + (m \cdot v'_B)^2 \Rightarrow \boxed{|\vec{Q}_A|^2 = |\vec{Q}'_A|^2 + |\vec{Q}'_B|^2}$$

Com esse resultado, a soma vetorial $\vec{Q}_A = \vec{Q}'_A + \vec{Q}'_B$, possui a soma dos módulos dada por $|\vec{Q}_A|^2 = |\vec{Q}'_A|^2 + |\vec{Q}'_B|^2$, portanto:

$$\boxed{\theta = 90\,°}$$

2.7.5. Choque central oblíquo entre duas partículas

Considere duas partículas A e B que se aproximam com velocidades v_A e v_B, como ilustra a figura abaixo:

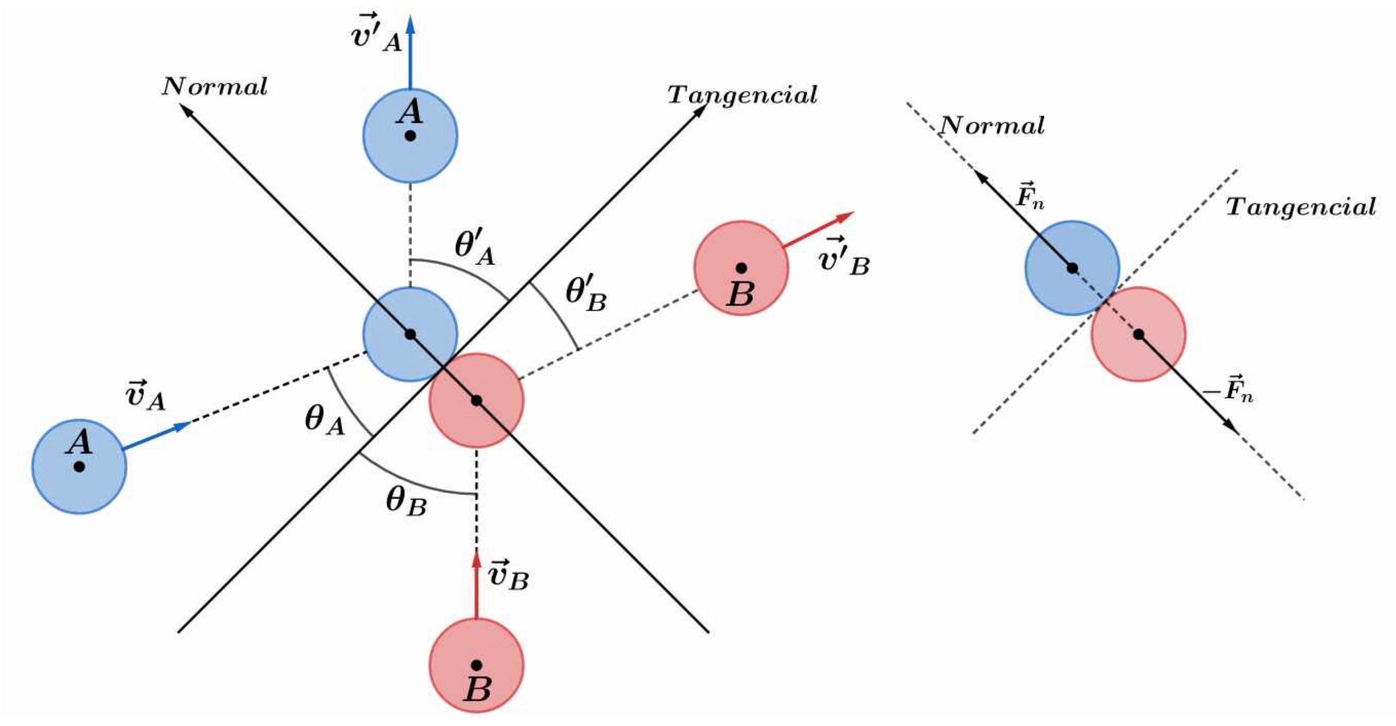


Figura 23: Colisão central oblíqua entre duas partículas.

Nesse tipo de choque, o eixo normal passa pelos centros das partículas. Além disso, o eixo tangencial é perpendicular ao eixo normal, tangenciando as partículas no ponto de contato entre elas, conforme a figura 12.

Na direção tangencial, não forças impulsivas atuando durante a colisão e, assim, a velocidade de cada partícula nessa direção permanece inalterada:

$$\boxed{\begin{cases} v_A \cdot \cos\theta_A = v'_A \cdot \cos\theta'_A \\ v_B \cdot \cos\theta_B = v'_B \cdot \cos\theta'_B \end{cases}}$$

Impondo a conservação da quantidade de movimento na direção normal, temos:

$$\boxed{m_A \cdot (v'_A \cdot sen\ \theta'_A) + m_B \cdot (-v'_B \cdot sen\ \theta'_B) = m_A \cdot (-v_A \cdot sen\ \theta_A) + m_B \cdot (v_B \cdot sen\ \theta_B)}$$

Por fim, podemos relacionar as velocidades na direção normal utilizando o coeficiente de restituição:

$$e = \frac{|v_{relativa\ logo\ após}|_{normal}}{|v_{relativa\ logo\ antes}|_{normal}} \Rightarrow \boxed{e = \frac{v'_A \cdot \cos\theta'_A + v'_B \cdot \cos\theta'_B}{v_A \cdot \cos\theta_A + v_B \cdot \cos\theta_B}}$$

Assim, conhecendo as informações necessárias fornecidas pelo enunciado da questão, podemos determinar qualquer resultado por intermédio das equações aqui desenvolvidas. Nosso objetivo aqui não é você decorar os resultados prontos, mas entender como chegamos neles. É muito importante a compreensão de todo o processo que nos levou a esses resultados.

3. Centro de massa

Neste capítulo, introduziremos o conceito de centro de massa, um assunto de extrema importância para o vestibular do ITA e do IME. Nossos vestibulares adoram esse tema e cobram questões dos mais variados estilos, questões que aparentemente parecem ser de outro assunto, mas são rapidamente resolvidas pelo conceito de centro de massa.

Um sistema mecânico é formado por um conjunto de partículas ou ainda um único corpo extenso.

Veremos neste capítulo que o movimento de um sistema mecânico pode ser estudado analisando apenas um único ponto: o seu centro de massa.

3.1. Propriedades do centro de massa em um sistema de 2 partículas

Por motivos didáticos, inicialmente estudaremos o sistema simples constituído por duas partículas de massas m_1 e m_2. Podemos representar esse sistema da seguinte forma:

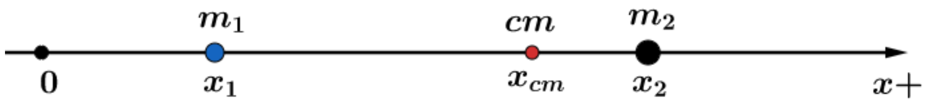


Figura 24: Centro de massa (cm) para um sistema de duas partículas.

3.1.1. Localização do centro de massa

Para um sistema de apenas duas partículas, basta um eixo orientado ligando as duas partículas, como na figura 13.

Por definição, dizemos que o centro de massa desse sistema (cm) é aquele cuja abscissa $\vec{x}_{cm}$ é expressa por:

$$\boxed{\vec{x}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{x}_1 + m_2 \cdot \vec{x}_2}{m_1 + m_2}}$$

Assim, vimos que o centro de massa para um sistema de partículas é a média aritmética ponderada, tendo como pesos as massas dos corpos. Logo, o centro de massa estará mais próximo daquela partícula que possui maior massa.

3.1.2. Velocidade do centro de massa

Para o nosso sistema de duas partículas, que é unidimensional, podemos representar pelas velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

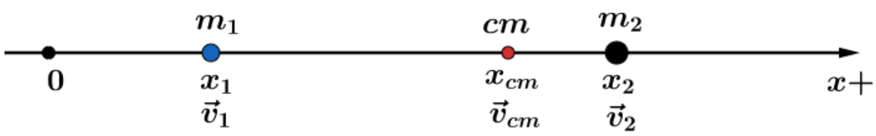


Figura 25: Representação das velocidades no sistema de partículas.

A posição do centro de massa é dada por:

$$\vec{x}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{x}_1 + m_2 \cdot \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

Como $m_1 + m_2 = M$ é a massa total do sistema, podemos reescrever a posição do centro de massa:

$$\vec{x}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{x}_1 + m_2 \cdot \vec{x}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{x}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{x}_1 + m_2 \cdot \vec{x}_2}{M} \Rightarrow \boxed{M \cdot \vec{x}_{cm} = m_1 \cdot \vec{x}_1 + m_2 \cdot \vec{x}_2}\,(eq.1)$$

Derivando a equação (1) em relação ao tempo, teremos a velocidade do centro de massa em relação às velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$:

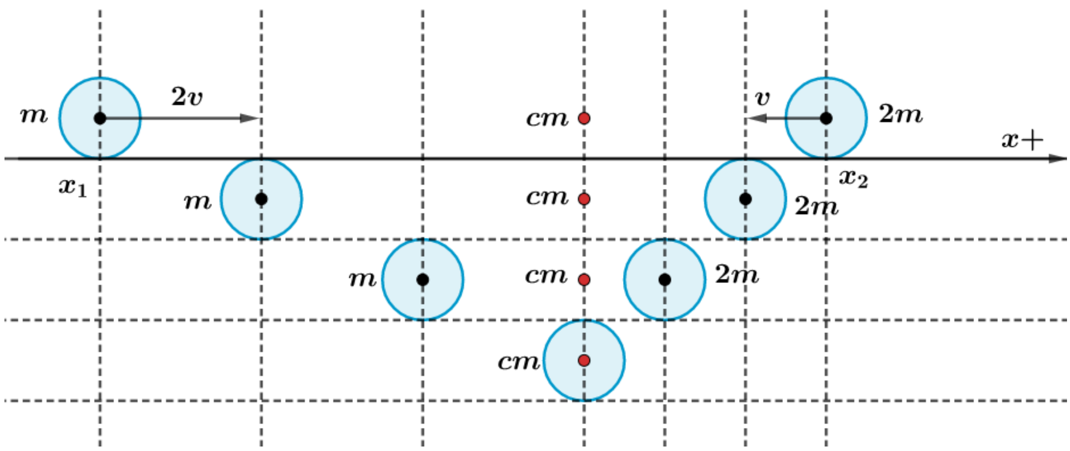
$$M \cdot \frac{d\vec{x}_{cm}}{dt} = m_1 \cdot \frac{d\vec{x}_1}{dt} + m_2 \cdot \frac{d\vec{x}_2}{dt} \Rightarrow \boxed{M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}\,(eq.2)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{M}$$

$$\therefore \boxed{\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}}$$

Note que a velocidade do centro de massa é dada pela média aritmética ponderada das velocidades das partículas, tendo como peso as respectivas massas.

Exemplo 1: considere duas partículas se movendo com velocidades v e $2v$, como mostra a figura logo abaixo:



Observe que a posição do centro de massa é dada por:

$$\vec{x}_{cm}=\frac{m_1\cdot\vec{x}_1+m_2\cdot\vec{x}_2}{m_1+m_2}\Rightarrow\vec{x}_{cm}=\frac{m\cdot\vec{x}_1+2m\vec{x}_2}{m+2m}\Rightarrow\vec{x}_{cm}=\frac{1}{3}\vec{x}_1+\frac{2}{3}\vec{x}_2$$

Mas a velocidade do centro de massa é nula:

$$\vec{v}_{cm}=\frac{m\cdot 2v\cdot\hat{x}+2m\cdot v\cdot(-\hat{x})}{m+2m}=\frac{0}{3m}\cdot\hat{x}\Rightarrow\boxed{\vec{v}_{cm}=\vec{0}}$$

Esse resultado mostra que o centro de massa fica parado, quando os dois corpos se aproximam.

Exemplo 2: um corpo de massa $3m$ viaja com velocidade $2v$ para a direita e outro corpo de massa m viaja com velocidade $2v$ para a esquerda. Portanto a velocidade do centro de massa é de:

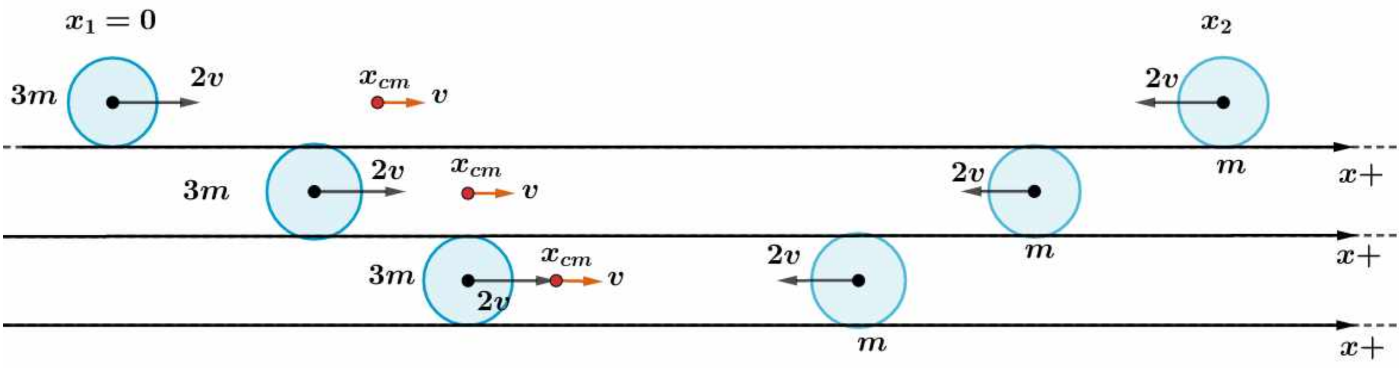
$$\vec{v}_{cm}=\frac{m_1\cdot\vec{v}_1+m_2\cdot\vec{v}_2}{m_1+m_2}\Rightarrow\vec{v}_{cm}=\frac{3m\cdot 2v\cdot\hat{x}+m\cdot 2v\cdot(-\hat{x})}{3m+m}\Rightarrow\vec{v}_{cm}=\frac{4m\cdot v\cdot\hat{x}}{4m}$$

$$\therefore\boxed{\vec{v}_{cm}=v\cdot\hat{x}}$$

A posição do centro de massa, tomando a origem do eixo x a massa $3m$, é de:

$$\vec{x}_{cm}=\frac{m_1\cdot\vec{x}_1+m_2\cdot\vec{x}_2}{m_1+m_2}\Rightarrow\vec{x}_{cm}=\frac{3m\cdot 0\cdot\hat{x}+m\cdot x_2\cdot\hat{x}}{3m+m}\Rightarrow\vec{x}_{cm}=\frac{x_2}{4}\,\hat{x}$$

Assim, temos a seguinte configuração das velocidades para esse sistema:



3.1.3. Aceleração do centro de massa

Em um sistema unidimensional, formado por duas partículas, a aceleração do centro de massa pode ser obtida derivando a velocidade do centro de massa em relação ao tempo, a partir da equação (2). Isto é:

$$M\cdot\vec{v}_{cm}=m_1\cdot\vec{v}_1+m_2\cdot\vec{v}_2$$

$$M\cdot\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}=m_1\cdot\frac{d\vec{v}_1}{dt}+m_2\cdot\frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

$$\boxed{M\cdot\vec{a}_{cm}=m_1\cdot\vec{a}_1+m_2\cdot\vec{a}_2}\ (eq.3)$$

$$\boxed{\vec{a}_{cm}=\frac{m_1\cdot\vec{a}_1+m_2\cdot\vec{a}_2}{M}}$$

Novamente, observe que a aceleração do centro de massa é dada pela média aritmética ponderada das acelerações das partículas, tendo como peso as respectivas massas.

3.1.4. Quantidade de movimento do centro de massa

Analisando a equação, podemos dizer que:

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = \vec{Q}_{sis}$$

$$\boxed{\vec{Q}_{sis} = M \cdot \vec{v}_{cm}}$$

Esse resultado mostra que para calcular a quantidade de movimento do sistema, basta supor que toda sua massa esteja concentrada no centro de massa.

3.1.5. Forças externas e forças internas ao sistema

Analisando a equação (3), vemos que os termos $m_1 \cdot \vec{a}_1$ e $m_2 \cdot \vec{a}_2$ representam as resultantes das forças sobre cada partícula. Dessa forma, temos:

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2$$

$$\boxed{M \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{res}}$$

Como vimos anteriormente no capítulo 1 dessa aula, quando estudamos sistema isolado, em um sistema podem agir dois tipos de forças: internas ou externas.

Denotamos por ***forças internas*** aquelas que são trocadas entre os elementos do sistema. Dessa forma, tais forças respeitam o Princípio da Ação e Reação, ou seja, a cada força interna $\vec{F}_i$ associa-se uma outra $-\vec{F}_i$. Note que a soma dos impulsos por causa dessas forças é nula.

Por outro lado, chamamos de ***forças externas*** aquelas que são trocadas pelos elementos do sistema com outros corpos fora dele, denominados agentes externos.

Como as forças externas são exercidas sobre cada partícula independentemente das interações internas entre as partículas, podemos concluir que a força resultante que age no sistema é a resultante das forças externas. Matematicamente:

$$\boxed{M \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{res}\ (externas)}$$

Diante disso, concluímos que:

1) A aceleração do centro de massa não depende das forças internas ao sistema. Depende apenas da resultante das forças externas.

2) O centro de massa se move como se fosse um ponto material de massa igual à massa total do sistema ($M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$) e conforme a ação da resultante das forças externas que atuam no sistema.
3) Para determinar a aceleração do centro de massa do sistema, consideramos que toda massa está concentrada em um único ponto (o centro de massa) e nesse ponto colocamos a resultante das forças externas que atuam no sistema.

3.2. Propriedades do centro de massa em um sistema de n partículas

Didaticamente, primeiro estudamos os conceitos de centro de massa para um sistema unidimensional, composto de duas partículas. Entretanto, todos os resultados obtidos são facilmente expandidos para um sistema com n partículas em três dimensões, como o da figura abaixo:

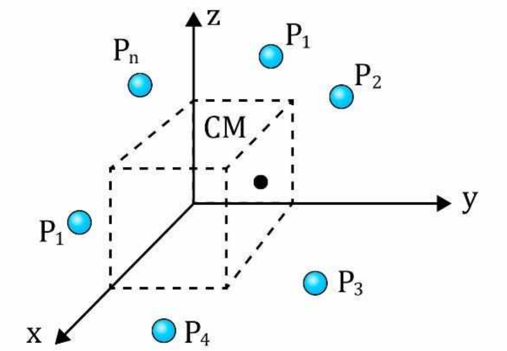


Figura 26: Sistema com n partículas distribuídas no espaço.

Para o nosso sistema com n partículas, a massa total é dada por:

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_n$$

Dessa forma, as coordenadas do centro de massa são dadas por:

$$\boxed{x_{cm} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \cdots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}} \text{ ou } \boxed{x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_n}}$$

Para as outras coordenadas, podemos fazer de forma análoga:

$$\boxed{y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_n}} \text{ e } \boxed{z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_n}}$$

Podemos ainda escrever o centro de massa a partir do vetor posição de cada partícula:

$$\boxed{\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}}$$

3.2.1. Localização do centro de massa para figuras simétricas

1) Para um sistema formado por partículas de massas iguais e distribuídas nos **vértices** de uma figura **geométrica regular**, o centro de massa estará localizado no centro geométrico da figura. Por exemplo, em um triângulo equilátero, o centro de massa estará no seu baricentro (geométrico).

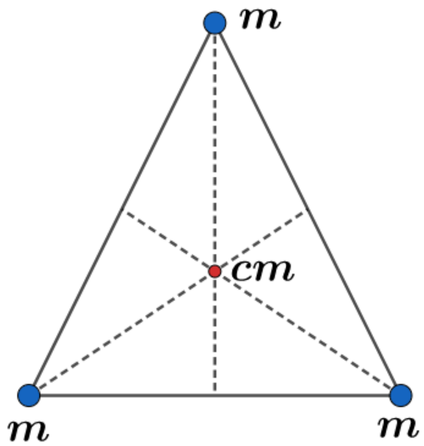


Figura 27: Se as massas iguais estão dispostas em um triângulo equilátero, o centro de massa está em seu centro geométrico.

2) Em um sistema de n partículas de massas iguais que possua um ponto de simetria, o centro de massa coincide com esse ponto. Um exemplo claro dessa propriedade ocorre em um sistema composto de 4 partículas nos vértices de um retângulo. O centro de massa está no centro geométrico do retângulo.

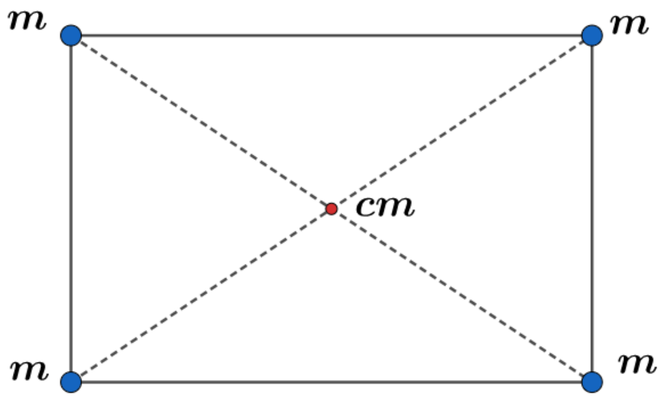


Figura 28: Se as massas iguais estão dispostas nos vértices de um retângulo, o centro de massa está em seu centro geométrico.

3) Se um corpo homogêneo admite um ponto de simetria, então o seu centro de massa coincidirá com o seu centro geométrico. Por exemplo, o centro de massa de uma esfera está no centro geométrico da esfera.

Figura 29: Em uma esfera homogênea, o centro de massa está no centro da esfera.

4) Para uma chapa homogênea de forma retangular, o centro de massa da chapa estará no centro geométrico dessa chapa.

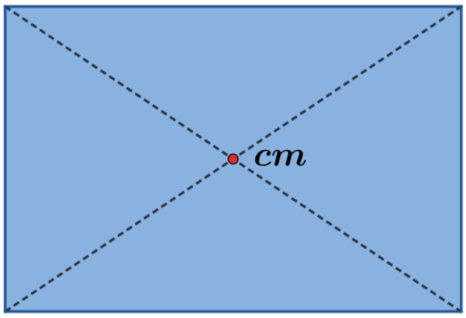
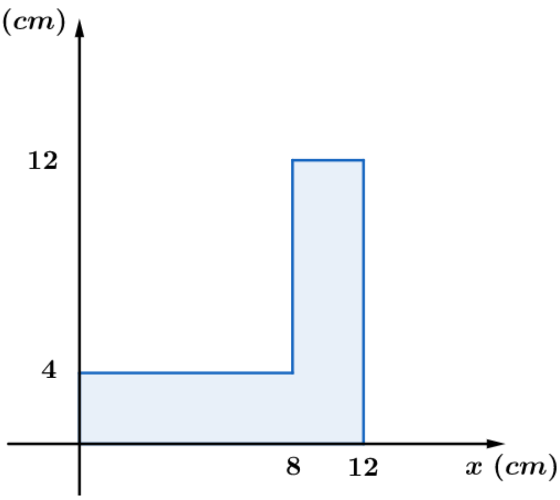


Figura 30: Em uma chapa homogênea, o centro de massa está no centro geométrico dessa chapa.

ATENÇÃO
DECORE!

31)

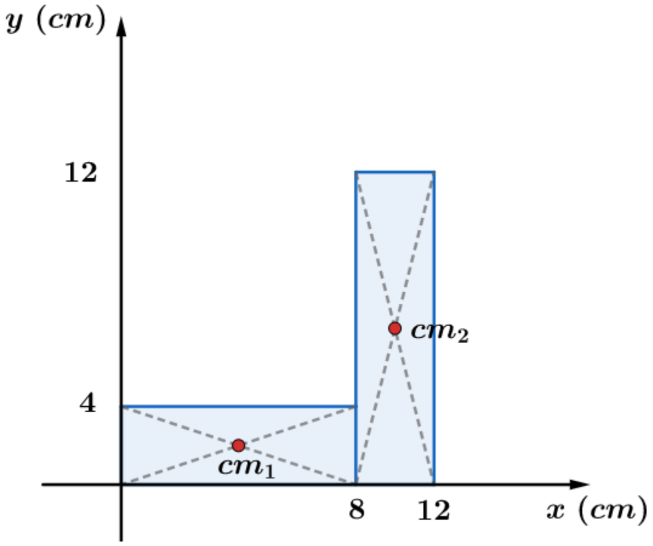
Considere uma chapa homogênea de espessura uniforme, conforme a figura abaixo:



Determine as coordenadas do centro de massa da chapa.

Comentários:

Uma boa forma de atacar esse problema é dividir a chapa em duas partes:



Os centros de massa cm_1 e cm_2 de cada parte são dados por:

$$\begin{cases} cm_1 \rightarrow x_{cm_1} = 4\ cm; y_{cm_1} = 2\ cm \\ cm_2 \rightarrow x_{cm_2} = 10\ cm; y_{cm_2} = 6\ cm \end{cases}$$

As áreas de cada parte valem:

$$\begin{cases} S_1 = 8 \cdot 4 = 32\ cm^2 \\ S_2 = (12 - 8) \cdot 12 = 48\ cm^2 \end{cases}$$

No enunciado da questão, foi mencionado que a chapa era homogênea e de espessura uniforme, ou seja, sua densidade superficial μ é constante:

$$\mu = \frac{m_1}{S_1} = \frac{m_2}{S_2}$$

Portanto, a posição do centro de massa é dada por:

$$x_{cm} = \frac{m_1 \cdot x_{cm_1} + m_2 \cdot x_{cm_2}}{m_1 + m_2} \Rightarrow x_{cm} = \frac{\mu \cdot S_1 \cdot x_{cm_1} + \mu \cdot S_2 \cdot x_{cm_2}}{\mu \cdot S_1 + \mu \cdot S_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{cm} = \frac{S_1 \cdot x_{cm_1} + S_2 \cdot x_{cm_2}}{S_1 + S_2}}$$

Analogamente, para as y_{cm}, temos:

$$\boxed{y_{cm} = \frac{S_1 \cdot y_{cm_1} + S_2 \cdot y_{cm_2}}{S_1 + S_2}}$$

Substituindo valores, temos:

$$\begin{cases} x_{cm} = \frac{S_1 \cdot x_{cm_1} + S_2 \cdot x_{cm_2}}{S_1 + S_2} \\ y_{cm} = \frac{S_1 \cdot y_{cm_1} + S_2 \cdot y_{cm_2}}{S_1 + S_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{cm} = \frac{32 \cdot 4 + 48 \cdot 10}{32 + 48} \\ y_{cm} = \frac{32 \cdot 2 + 48 \cdot 6}{32 + 48} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{cm} = 7{,}6\ cm \\ y_{cm} = 4{,}4\ cm \end{cases}$$

3.2.2. Velocidade do centro de massa do sistema

Vimos para um sistema unidimensional com duas partículas que a velocidade vetorial do centro de massa é dada por:

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$$

Para um sistema de n partículas, temos:

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{v}_n \; (eq. 4)$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{v}_n}{M}$$

$$\boxed{\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{v}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}}$$

Como trabalhamos com a velocidade na forma vetorial, podemos ver que esse resultado é aplicado para qualquer sistema bi ou tridimensional.

3.2.3. Quantidade de movimento do centro de massa do sistema

A partir da equação (4) da velocidade do centro de massa é dada por:

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{v}_n$$

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \cdots + \vec{Q}_n = \vec{Q}_{sis}$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{Q}_{sis} = M \cdot \vec{v}_{cm}}$$

3.2.4. Aceleração do centro de massa do sistema

Para o caso de n partículas, a equação da aceleração do centro de massa pode ser escrita como:

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{a}_n$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{a}_{cm} = \frac{m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{a}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}}$$

3.2.5. Resultante das forças externas

Como vimos a aceleração do centro de massa do sistema de n partículas é dada por:

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{a}_n$$

Cada termo $m_i \cdot \vec{a}_i$ do segundo membro da equação representa a força resultante na respectiva partícula, isto é:

$$m \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i$$

Portanto:

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \cdot \vec{a}_1 + m_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + m_n \cdot \vec{v}_n \Rightarrow M \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

Como já vimos, as forças internas ao sistema surgem aos pares, segundo a terceira lei de Newton entre cada par de partículas. Dessa forma, ao somar vetorialmente as forças internas elas se anulam duas a duas.

Portanto, ao somar vetorialmente as forças externas ao sistema, temos que:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_{res}\,(externas)$$

$$\boxed{\vec{F}_{res}(externas) = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm}}$$

Com esse resultado, podemos ver que o centro de massa de um sistema de n partículas move-se como se fosse um único ponto material de massa $M_{total} = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$, por efeito da ação da resultante das forças externas $\vec{F}_{res}\,(externas)$, de acordo com a segunda lei de Newton.

3.2.6. Trajetória do centro de massa

Aplicando o resultado que acabamos de ver ($\vec{F}_{res}(externas) = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm}$) é possível determinar a trajetória do centro de massa de um sistema de n partículas. Embora as partículas do sistema tenham trajetórias complicadas, o seu centro de massa se comporta como se fosse uma única partícula que está sujeita a uma resultante das forças externas ao sistema.

Um exemplo clássico é a detonação de uma granada. Vamos supor que uma granada é lançada horizontalmente, em um local onde $\vec{g}$ é uniforme e a resistência do ar é desprezível. Caso não houvesse a detonação, a trajetória da granada seria uma parábola para um observado na Terra.

Mas, vamos supor que a granada explode em dois fragmentos idênticos (claramente, uma granada explode em diversos fragmentos e em todas as direções).

De um modo geral, determinar a trajetória de cada fragmento é muito difícil. Entretanto, o centro de massa do sistema continuará a descrever uma trajetória parabólica. Isso ocorre porque a única força externa que atua na granada é a força peso na direção vertical. Então, podemos dizer que:

$$\vec{F}_{res}(externas) = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm} \Rightarrow \vec{P} = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm} \Rightarrow M_{total} \cdot \vec{g} = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm}$$

$$\therefore \boxed{\vec{a}_{cm} = \vec{g}}$$

Como podemos ver, a aceleração do centro de massa é a própria aceleração da gravidade. Por isso, devemos ter a seguinte trajetória para a granada, fragmentos e centro de massa:

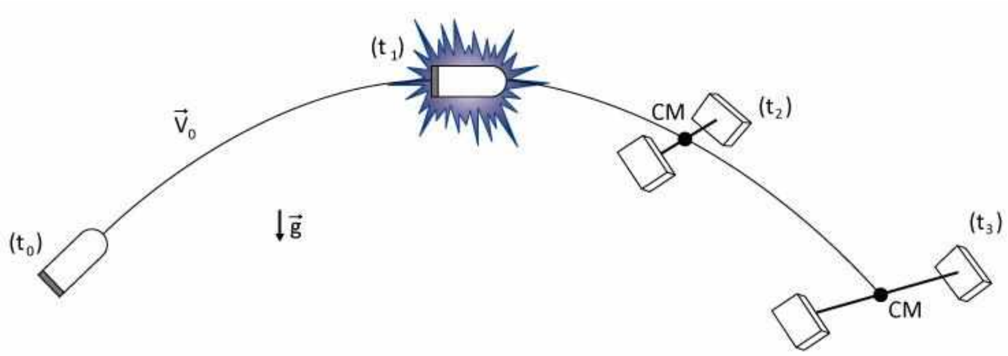


Figura 31: Trajetória do centro de massa de uma granada após a explosão.

Note que na explosão da granada surgem forças internas ao sistema que não podem alterar a trajetória do centro de massa.

3.3. Sistema isolado de forças externas

Se ao somar vetorialmente as forças externas e a resultante destas forças for nula, então dizemos que o sistema está isolado de forças externas. Em consequência disso, teremos que:

1) A aceleração do centro de massa é nula e a sua velocidade vetorial se mantém constante, pois:

$$\vec{F}_{res}(externas) = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm} \Rightarrow \vec{0} = M_{total} \cdot \vec{a}_{cm} \Rightarrow \vec{a}_{cm} = \vec{0}$$

Como $\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \vec{0}$, temos que:

$$\boxed{\vec{v}_{cm} \text{ é constante}}$$

2) O centro de massa poderá estar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Este resultado vem diretamente da primeira consequência.
3) A quantidade de movimento do sistema se mantém constante, pois pelo teorema do impulso, temos que:

$$\vec{I}_{F_{res}}(externas) = \Delta\vec{Q}_{sis}$$

Como $\vec{F}_{res}(externas) = \vec{0}$, então $\vec{I}_{F_{res}}(externas) = \vec{0}$. Com isso, temos que:

$$\boxed{\left(\vec{Q}_{sis}\right)_{antes} = \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{depois}}$$

Além disso, podemos ver a consequência 1 da seguinte forma:

$$\left(\vec{Q}_{sis}\right)_{antes} = \left(\vec{Q}_{sis}\right)_{depois} \Rightarrow M_{total} \cdot (\vec{v}_{cm})_{antes} = M_{total} \cdot (\vec{v}_{cm})_{depois}$$

$$\boxed{(\vec{v}_{cm})_{antes} = (\vec{v}_{cm})_{depois}}$$

Ou seja, a velocidade do centro de massa permanece constante.

Diante disso, podemos enunciar o seguinte teorema da conservação da quantidade de movimento:

Se o sistema estiver isolado, a quantidade de movimento total dele não varia com o tempo.

Por exemplo, considere duas esferas estão se aproximando com velocidades constantes, em uma superfície horizontal perfeitamente lisa, como mostra a figura abaixo:

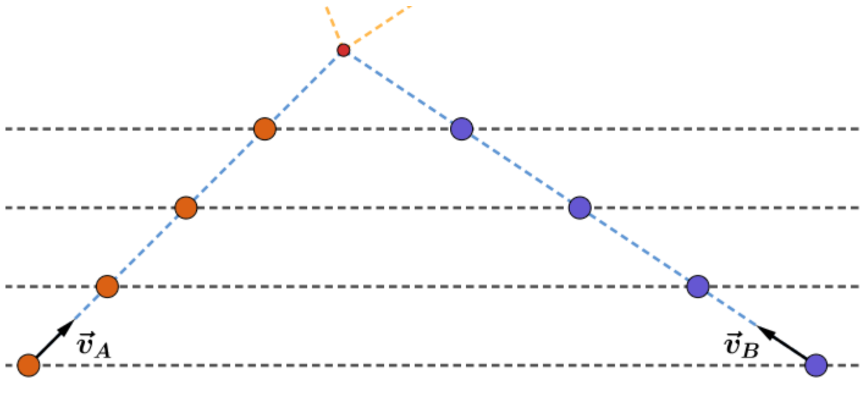


Figura 32: Dois corpos se aproximando e se chocando.

Devido ao fato de não existirem forças externas na direção horizontal, já que não há atrito (superfície perfeitamente lisa), o impulso da resultante das forças externas é nulo nessa direção. Dessa forma, podemos afirmar que a velocidade do centro de massa é constante, pois o sistema é isolado. Com isso, a velocidade do centro de massa não se altera. Uma possível configuração para as velocidades após a colisão é dada pela figura logo abaixo:

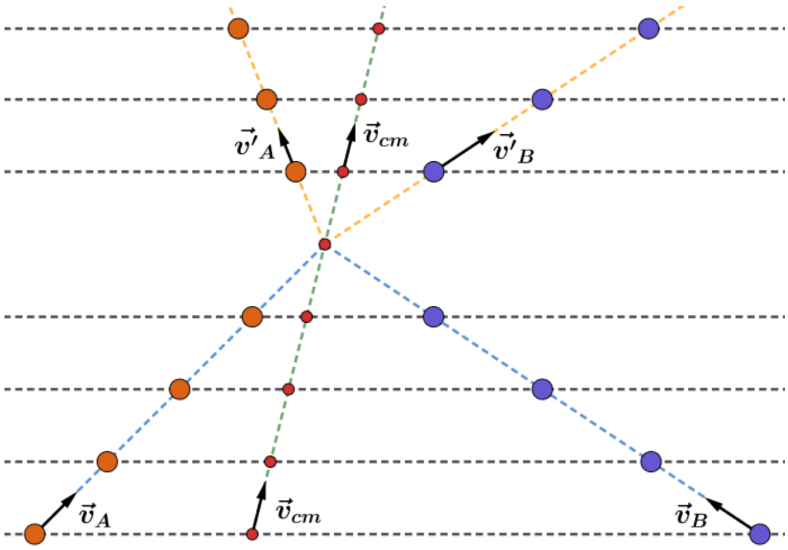
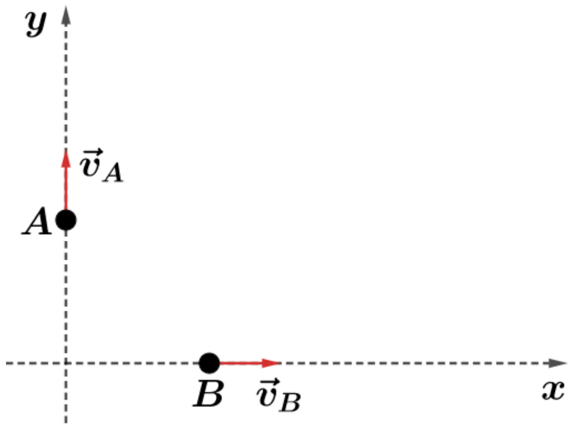


Figura 33: Trajetória do centro de massa antes e depois da colisão. Note que após o choque, a trajetória do centro de massa não se altera.

Note que na direção vertical, existe a força peso e a força de contato da superfície com as esferas. Assim, o sistema não é isolado na direção vertical, mas todo movimento ocorre na direção horizontal.

32)

Dois corpos A e B, de massas iguais a 2,0 kg e 3,0 kg, respectivamente, possuem velocidades de mesmo módulo, 2,0 m/s e direções perpendiculares. Qual a velocidade do centro de massa?



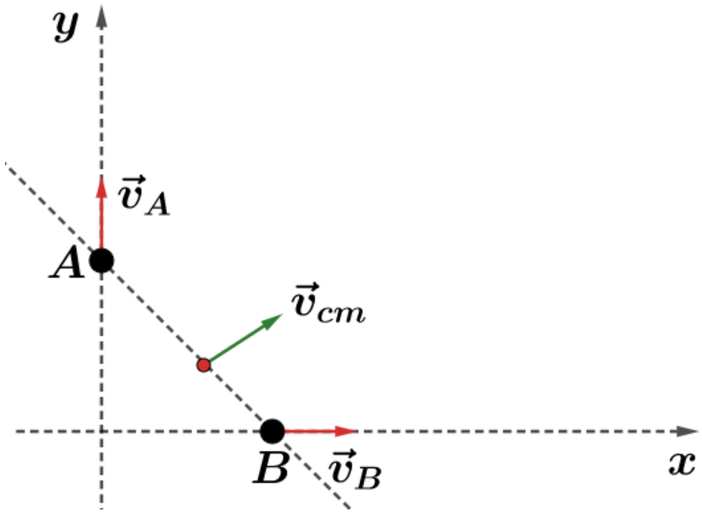
Comentários:

De acordo com o enunciado, temos que:

$$\vec{v}_{x,cm} = \frac{m_A \cdot \vec{v}_{x,A} + m_B \cdot \vec{v}_{x,B}}{m_A + m_B} \Rightarrow \vec{v}_{x,cm} = \frac{2{,}0 \cdot 0\,\hat{x} + 3{,}0 \cdot 2{,}0\,\hat{x}}{2{,}0 + 3{,}0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{x,cm} = 1{,}2\,\hat{x}\ \ (m/s)}$$

$$\vec{v}_{y,cm} = \frac{m_A \cdot \vec{v}_{y,A} + m_B \cdot \vec{v}_{y,B}}{m_A + m_B} \Rightarrow \vec{v}_{y,cm} = \frac{2{,}0 \cdot 2{,}0\,\hat{y} + 3{,}0 \cdot 0\,\hat{y}}{2{,}0 + 3{,}0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{y,cm} = 0{,}8\,\hat{y}\ \ (m/s)}$$

$$\vec{v}_{cm} = \vec{v}_{x,cm} + \vec{v}_{y,cm} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{cm} = 1{,}2\,\hat{x} + 0{,}8\,\hat{y}\ \ (m/s)}$$



A questão poderia trabalhar com quantidade de movimento, o que seria obtido fazendo o produto das massas com as respectivas velocidades.

33)

Um carioca e um mineiro estão sentados cada um em carrinho de rolimã e cada conjunto (homem e carrinho) possui massas iguais a $80\ kg$ e $120\ kg$, respectivamente. No início, ambos estão parados e a distância entre eles é de 1,0 m. Tracionando a corda que liga os dois amigos, eles se aproximam mutuamente. Desprezando quaisquer forças dissipativas.

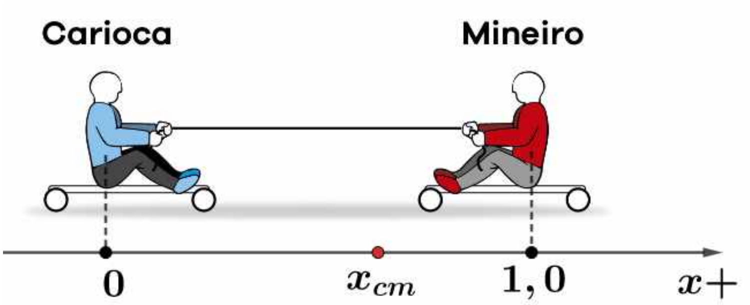
a) Descreva o que acontecerá com o centro de massa do sistema (carioca, mineiro, carrinhos e corda).

b) Quanto cada um deles irá percorrer até se encontrarem?

Comentários:

a) O sistema (carioca, mineiro, carrinhos e corda) não está isolado de forças externas, pois há forças externas na direção vertical. Entretanto, na direção horizontal, não existem forças externas atuando. A força que cada operador faz na corda é interna ao sistema considerado. Portanto, a quantidade de movimento do centro de massa permanecerá constante. Como inicialmente os amigos estão em repouso, então o centro de massa está parado no início e assim permanecerá.

b) Como o centro de massa permanece parado durante todo o movimento deles, então o encontro ocorrerá no centro de massa. Colocando a origem do eixo x no carioca, temos a seguinte posição do centro de massa:

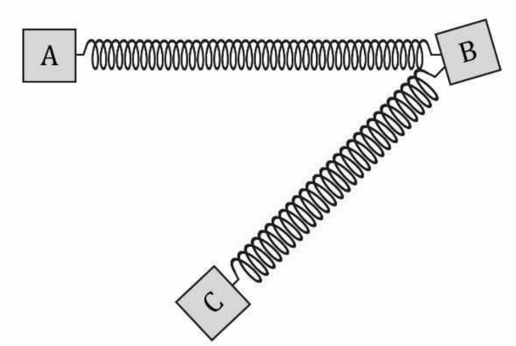


$$x_{cm} = \frac{80 \cdot 0 + 120 \cdot 1}{80 + 120} \Rightarrow \boxed{x_{cm} = 0{,}6\, m}$$

Portanto, o carioca andará 0,6 metros e o mineiro 0,4 metros.

34)

Considere três corpos A, B e C, com massas respectivamente iguais a $8{,}0\, kg$, $12{,}0\, kg$ e $8{,}0\, kg$, inicialmente apoiados sobre uma mesa horizontal perfeitamente lisa. Liga-se AB e BC por molas de massas desprezíveis. Em um certo momento, os corpos são abandonados e experimentam as forças iguais à $20\, N$ e $30\, N$ nas molas AB e BC, respectivamente. No momento em que os corpos são soltos, calcule os módulos das acelerações dos centros de massa dos seguintes sistemas:

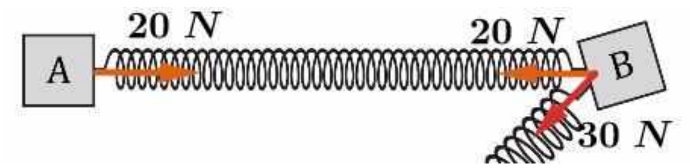


a) $A + B$.

b) $A + B + C$.

Comentários:

a) Para o sistema $A + B$, as forças na mola que liga AB são internas, apenas a força de 15 N no corpo B, devido a outra mola (BC) é externa ao sistema considerado:



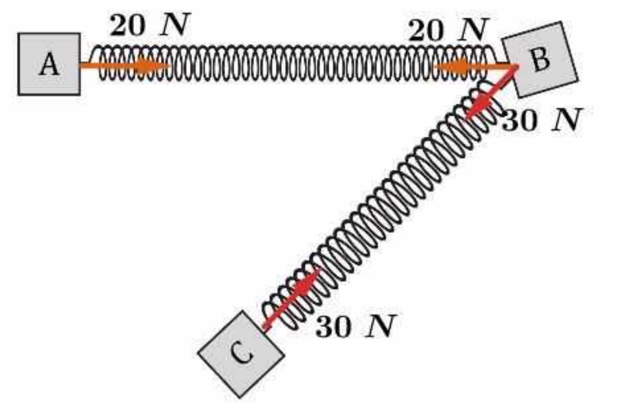
Pelo teorema do centro de massa, temos:

$$(m_A + m_B) \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext}$$

Em módulos, temos:

$$(m_A + m_B) \cdot a_{cm} = F_{ext} \Rightarrow (8{,}0 + 12{,}0) \cdot a_{cm} = 30 \Rightarrow \boxed{a_{cm} = 1{,}5\ m/s^2}$$

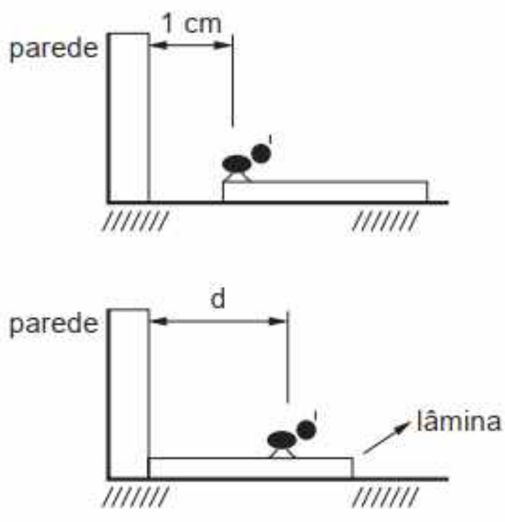
b) Para o sistema constituído pelos três corpos, todas as forças serão internas e não há forças externas atuando no sistema. Portanto, a resultante das forças externas é nula. Logo, a aceleração do centro de massa desse sistema deve ser nula.



$$(m_A + m_B + m_C) \cdot \vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{cm} = \vec{0}} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = 0}$$

35) (ITA – 2000)

Uma lâmina de material muito leve de massa m está em repouso sobre uma superfície sem atrito. A extremidade esquerda da lâmina está a 1 cm de uma parede. Uma formiga considerada como um ponto, de massa está 5 inicialmente em repouso sobre essa extremidade, como mostra a figura. A seguir, a formiga caminha para frente muito lentamente, sobre a lâmina. A que distância d da parede estará a formiga no momento em que a lâmina tocar a parede?



a) 2 cm.

b) 3 cm.

c) 4cm.

d) 5 cm.

e) 6 cm.

Comentários:

Novamente, o sistema formiga-lâmina não é isolado, pois existem forças externas (peso e normal do solo) atuando no sistema. Mas, na direção horizontal, não há atrito e nenhuma outra força externa ao sistema. Portanto, na direção horizontal, a quantidade de movimento do centro de massa do sistema se conserva. Como inicialmente o sistema está em repouso, então o centro de massa do sistema permanecerá parado.

Portanto:

$$(x_{cm})_{antes} = (x_{cm})_{depois}$$

Se adotarmos a parede como a origem do nosso eixo x, temos:

$$\frac{m_{formiga} \cdot x_{c1} + m_{lâmina} \cdot x_{c2}}{m_{formiga} + m_{lâmina}} = \frac{m_{formiga} \cdot x'_{c1} + m_{lâmina} \cdot x'_{c2}}{m_{formiga} + m_{lâmina}}$$

Considerando que a lâmina tem comprimento L (não foi mencionado no enunciado, mas não será necessário para resolver a questão), substituindo os valores, temos:

$$\frac{\frac{m}{5} \cdot 1 + m \cdot \left(\frac{L}{2} + 1\right)}{\frac{m}{5} + m} = \frac{\frac{m}{5} \cdot d + m \cdot \frac{L}{2}}{\frac{m}{5} + m}$$

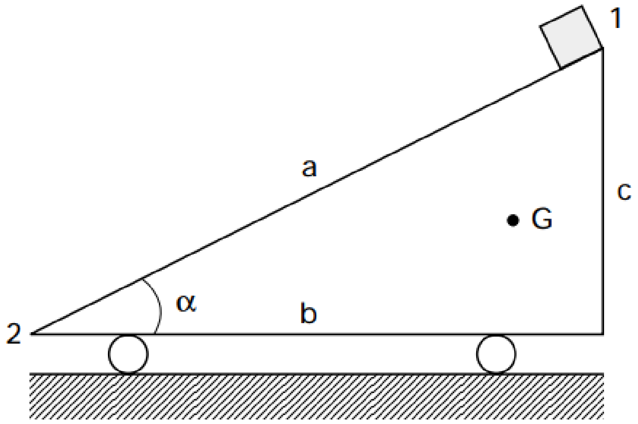
$$\frac{1}{5} + \frac{L}{2} + 1 = \frac{d}{5} + \frac{L}{2} \Rightarrow \boxed{d = 6\ cm}$$

O ITA adora questões em que o aluno tem que se ligar no fato do sistema estar isolado e que a posição do centro de massa não muda ou se move com velocidade constante. Guarde isso no seu coração.

36) (ITA – 2002)

Uma rampa rolante pesa $120N$ e se encontra inicialmente em repouso, como mostra a figura. Um bloco que pesa $80\ N$, também em repouso, é abandonado no ponto 1, deslizando a seguir sobre a rampa. O centro de massa G da rampa tem coordenadas: $x_G = 2b/3$ e $y_G = c/3$. São dados ainda: $a = 15{,}0\ m$ e $sen\ \alpha = 0{,}6$.

Desprezando os possíveis atritos e as dimensões do bloco, pode-se afirmar que a distância percorrida pela rampa no solo, até o instante em que o bloco atinge o ponto 2, é



A) 16.0 m

B) 30.0 m

C) 4.8 m

D) 24.0 m

E) 9.6 m

Comentários:

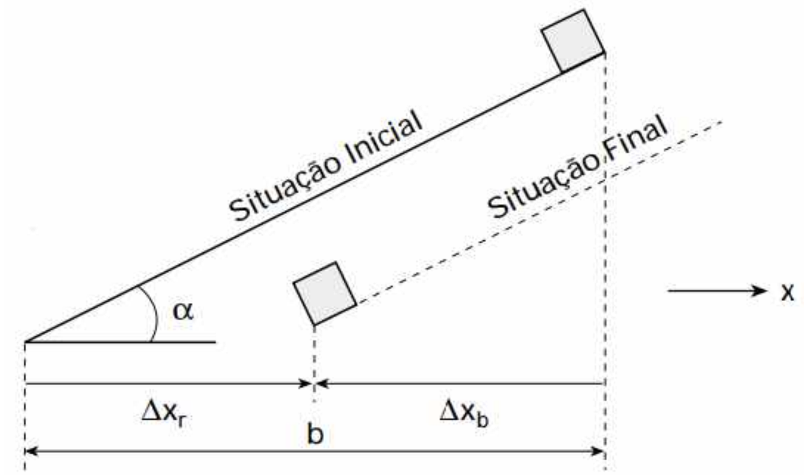
Novamente, só existem forças externas na vertical, sendo nulas as forças externas na horizontal agindo no sistema formado por bloco (m_b) e pela rampa rolante (m_r).

Portanto, o sistema é isolado na direção horizontal e o deslocamento do centro de massa nessa direção é nulo, pois inicialmente o sistema está em repouso.

Assim, o deslocamento do centro de massa é nulo:

$$\Delta x_{cm} = \frac{m_b \cdot \Delta x_b + m_r \cdot \Delta x_r}{m_b + m_r} = 0 \Rightarrow \Delta x_b = -\frac{m_r}{m_b} \cdot \Delta x_r$$

Quando o bloco estiver saindo pelo ponto 2, a diferença algébrica entre o deslocamento da rampa e o do bloco é igual ao lado b, como na figura ao lado:



Portanto:

$$\Delta x_r - \Delta x_b = b = a \cdot \cos\alpha$$

Logo:

$$\Delta x_r - \Delta x_b = a \cdot \cos\alpha \Rightarrow \Delta x_r - \left(-\frac{m_r}{m_b} \cdot \Delta x_r\right) = a \cdot \cos\alpha \Rightarrow \boxed{\Delta x_r = \frac{a \cdot \cos\alpha}{1 + \frac{m_r}{m_b}}}$$

Substituindo valores, lembrando que se o $sen\,\alpha = 0{,}6$, então $\cos\alpha = 0{,}8$ para o $0 < \alpha < 90°$, temos:

$$\Delta x_r = \frac{15 \cdot 0{,}8}{1 + \frac{120/g}{80/g}} \Rightarrow \boxed{\Delta x_r = 4{,}8\,m}$$

NÃO CONFUNDA!

3.3.1 Baricentro ou centro de gravidade

Chamamos de centro de gravidade (CG) ou baricentro (G) o ponto no qual aplicamos a resultante das forças de gravidade que agem em cada partícula do sistema, como mostra a figura abaixo:

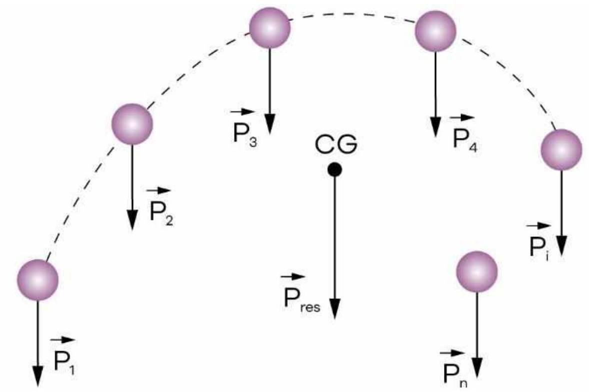


Figura 34: Localização do baricentro de um sistema, onde o campo gravitacional é não uniforme.

Quando um sistema está imerso em um campo gravitacional uniforme, o seu centro de massa (CM) coincidirá com o seu centro de gravidade (CG).

A determinação do centro de gravidade de um corpo, homogêneo ou não, é feita de forma experimental: coloca-se o corpo suspenso por dois pontos diferentes em duas situações distintas. Primeiramente, suspendemos o corpo por um ponto A e traçamos uma reta vertical AX. Repetimos o processo por um outro ponto B. Podemos aplicar esse método para um cabide:

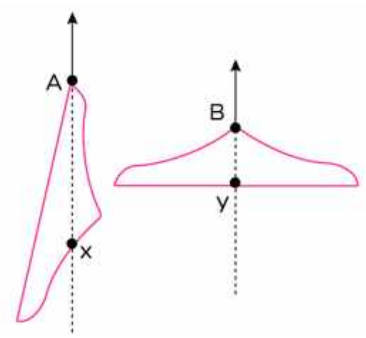


Figura 35: Processo para determinação do baricentro de um corpo não homogêneo.

O centro de gravidade CG é a intersecção das retas AX e BY:

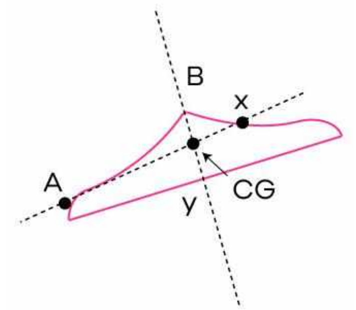


Figura 36: Posição do centro de gravidade de um cabide.

Em suma, podemos dizer que o centro de gravidade de um corpo sólido é aquele pelo qual podemos suspender um corpo de tal forma que ele permaneça em equilíbrio indiferente.

3.4. Massa continuamente variável e propulsão de foguetes

Até aqui, você viu que é muito importante para a resolução de um problema físico definir qual é o seu sistema em questão. Um exemplo clássico de sistema que possui massa variável é o foguete.

Neste caso, definimos o sistema como o foguete mais todo o combustível que ainda não foi queimado. Note que o sistema está diminuindo a sua massa, à medida que o combustível é queimado e o gás é lançado para trás.

Para isto, precisamos desenvolver uma versão da segunda lei de Newton para sistema com massa continuamente variável.

Considera um fluxo contínuo de matéria movendo-se com velocidade $\vec{u}$ e chocando-se com um objeto de massa M que se move com velocidade $\vec{v}$, como mostra a figura abaixo:

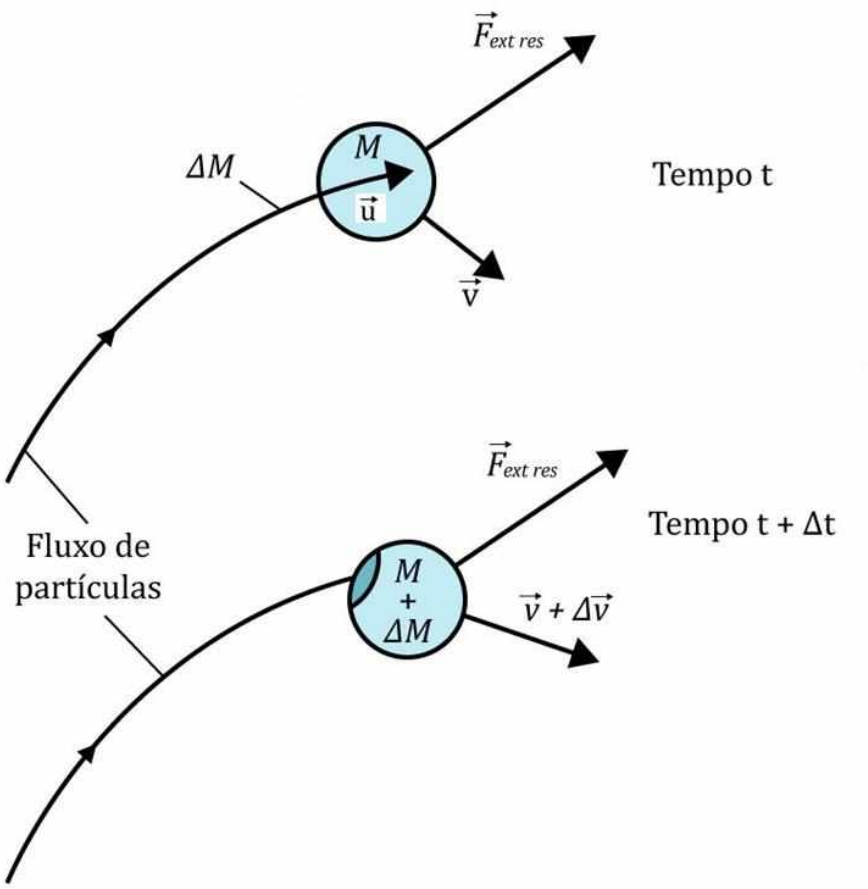


Figura 37: Partículas de um fluxo contínuo, com velocidade $\vec{u}$, sofrem colisões perfeitamente inelásticas com um corpo de massa M que possui velocidade $\vec{v}$. Nesse sistema, existe uma força externa resultante $\vec{F}_{ext\,res}$ atuando sobre o corpo. A figura ilustra dois momentos do sistema: t e $t + \Delta t$.

Quando estas partículas se chocam, elas se fixam ao objeto e aumentam a sua massa de ΔM durante o intervalo de tempo Δt. Note que durante o tempo Δt, a velocidade $\vec{v}$ é acrescida de $\Delta\vec{v}$. Aplicando o teorema do impulso e quantidade de movimento a este sistema, temos:

$$\vec{F}_{ext\,res} \cdot \Delta t = \Delta\vec{Q} = \vec{Q}_f - \vec{Q}_i = [(M + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v})] - [M \cdot \vec{v} + \Delta M \cdot \vec{u}]$$

Rearranjando a equação, vem:

$$\vec{F}_{ext\,res} \cdot \Delta t = M \cdot \Delta\vec{v} + \Delta M(\vec{v} - \vec{u}) + \Delta M \cdot \Delta\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{F}_{ext\,res} = M \cdot \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta M}{\Delta t}(\vec{v} - \vec{u}) + \frac{\Delta M}{\Delta t} \cdot \Delta\vec{v}}$$

Se fizermos o limite $\Delta t \to 0$, que é o mesmo que fazer $\Delta M \to 0$ ou $\Delta\vec{v} \to 0$, temos:

$$\vec{F}_{ext\,res} = M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dM}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) + \frac{dM}{dt} \cdot (0)$$

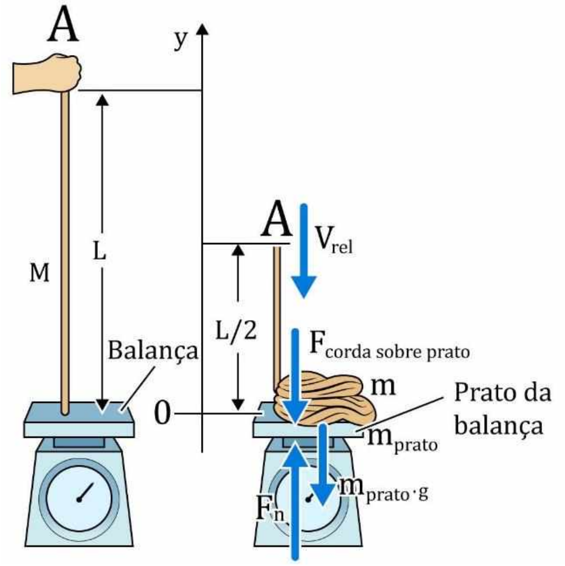
Portanto:

$$\boxed{\vec{F}_{ext\,res} + \frac{dM}{dt} \cdot \vec{v}_{rel} = M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Em que $\vec{v}_{rel} = \vec{u} - \vec{v}$ é a velocidade, em relação ao objeto, do material lançado contra ele. Note que a equação que desenvolvemos é igual à segunda lei de Newton para um sistema de partículas com massa constante, exceto pelo termo $\frac{dM}{dt} \cdot \vec{v}_{rel}$. Caso a massa não há variação da massa, temos rigorosamente a segunda lei como já conhecíamos.

37) Corda caindo

Uma corda uniforme de massa M e comprimento L está suspensa por uma das extremidades e a outra extremidade apenas tocando a superfície do prato de uma balança. Em um dado instante, a corda é solta e começa a cair. Qual a força que a corda exerce sobre o prato da balança, quando a extremidade mais A atinge metade da altura inicial.



Comentários:

No sistema constituído pelo prato da balança e pela parte da corda que já está no prato, existem duas forças externas sobre este sistema: a força da gravidade e a força normal exercida pela balança sobre o prato. Vamos aplicar a segunda lei de Newton para nosso sistema:

$$F_{ext\,res\,y} + \frac{dm}{dt} \cdot v_{rel\,y} = m \cdot \frac{dv_y}{dt}$$

Quando a corda chega ao prato, ela para. Portanto, a velocidade do sistema permanece zero e, assim, $\frac{dv_y}{dt} = 0$. Então:

$$F_n - mg + \frac{dm}{dt} \cdot v_{rel\,y} = 0$$

Como a corda é uniforme, sua densidade linear de massa é constante. Logo:

$$\mu = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L}$$

Se $\frac{dm}{dl} = \frac{M}{L}$, então podemos escrever $\frac{dm}{dt}$ da seguinte forma:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{M}{L} \cdot \frac{dl}{dt}$$

Assim, a rapidez de impacto do segmento é de dl/dt. Como nosso eixo está orientado para cima e a corda está caindo, então $v_{rel\,y} = -dl/dt$. Portanto:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{M}{L} \cdot v_{rel\,y}$$

Substituindo na equação da força normal, temos:

$$F_n = m \cdot g + \frac{M}{L} \cdot v_{rel\,y}^2$$

Cada ponto da corda cai com a aceleração de queda livre $\vec{g}$. Aplicando a equação de Torricelli para um pedaço qualquer de corda, temos que:

$$v_{rel\,y}^2 = v_{rel\,y_0}^2 + 2 \cdot a_y \cdot \Delta y \Rightarrow v_{rel\,y}^2 = 2 \cdot a_y \cdot \Delta y$$

Na condição desejada, isto é, $\Delta y = -L/2$, temos:

$$v_{rel\,y}^2 = 2 \cdot (-g) \cdot \left(-\frac{L}{2}\right) = gL$$

Quando metade da corda estiver sobre a prato, a massa do sistema prato mais corda será dada por:

$$m = m_{prato} + m_{corda} = m_{prato} + \frac{M}{2}$$

Portanto:

$$F_n = m \cdot g + \frac{M}{L} \cdot v_{rel\,y}^2 = \left(m_{prato} + \frac{M}{2}\right) \cdot g + \frac{M}{L} \cdot (g \cdot L)$$

$$F_n = m_{prato} \cdot g + \frac{3}{2} \cdot M \cdot g$$

A força normal da balança sobre o prato é composta da força peso do prato e da força exercida pela corda sobre o prato:

$$F_n = m_{prato} \cdot g + F_{corda\ sobre\ o\ prato}$$

$$F_{corda\ sobre\ o\ prato} = F_n - m_{prato} \cdot g$$

$$\boxed{F_{corda\ sobre\ o\ prato} = \frac{3}{2} \cdot M \cdot g}$$

HORA DE PRATICAR!

4. Lista de questões

1. (IME – 2020 – 1ª Fase)

Duas partículas com cargas elétricas q_1 e q_2 movem-se no plano xy e suas posições em função do tempo t são dadas pelos pares ordenados $p_1(t) = [x_1(t), y_1(t)]$e $p_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$, respectivamente.

Dados:

- constante de Coulomb: $k = 9{,}0 \text{ x } 10^9$;
- cargas elétricas: $q_1 = 2{,}0 \text{ x } 10^{-6}$ e $q_2 = 2{,}5 \text{ x } 10^{-6}$; e
- posições das partículas: $p_1(t) = \left(\frac{5}{\sqrt{t}}, \frac{1}{\sqrt{t}} - 1\right), p_2(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{4}{\sqrt{t}} - 1\right)$

Considerando todas as grandezas dadas no Sistema Internacional de Unidades, o módulo da componente y do impulso da força que uma partícula exerce sobre a outra no intervalo de tempo de 1,0 a 6,0 é:

a) $13{,}5 \text{ x } 10^{-3}$

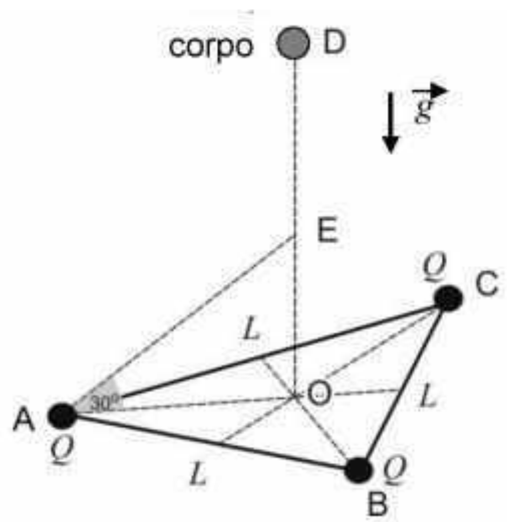
b) $18{,}9 \text{ x } 10^{-3}$

c) $25{,}2 \text{ x } 10^{-3}$

d) $31{,}5 \text{ x } 10^{-3}$

e) $37{,}8 \text{ x } 10^{-3}$

2. (IME – 2020 – 1ª Fase)



A figura apresenta três esferas de cargas positivas Q fixas nos vértices de um triângulo equilátero ABC de centro O e localizado no plano horizontal. Um corpo de massa m, posicionado no ponto D em t = 0, tem a ele grudadas milhares de micropartículas de cargas positivas e massas desprezíveis. O corpo sofre uma queda vertical até o ponto O. No intervalo $0 \leq t < 5/3\ s$, diversas micropartículas vão se soltando gradativamente do corpo, de modo que sua velocidade permanece constante. O restante das micropartículas desprende-se totalmente em t = 5/3 s, exatamente no ponto E, no qual o ângulo entre os segmentos AO e AE é de 30^0. O corpo continua em movimento até atingir o plano ABC no ponto O em t = 8/3 s.

Determine:

a) a velocidade do corpo no intervalo $0 \leq t < 5/3\ s$

b) a altura inicial do corpo (comprimento DO) em t = 0;

c) a carga do corpo imediatamente antes do instante t = 5/3 s, quando o restante das micropartículas se desprendeu;

d) a carga inicial do corpo em t = 0.

Observação:

- considere a massa do corpo constante;
- despreze as dimensões do corpo;
- ao se desprenderem, as cargas das micropartículas não influenciam no movimento do corpo.

Dados:

- massa do corpo: m = 2,7 kg;
- cargas fixas nos vértices do triângulo: $Q = 10^{-4}\ C$;
- aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$;
- constante dielétrica do meio: $k = 9 \text{ x } 10^9\ Nm^2/C^2$;
- comprimentos dos lados do triângulo: L = 24 m.

3. (IME – 2004)

Um tanque de guerra de massa M se desloca com velocidade constante v_0. Um atirador dispara um foguete frontalmente contra o veículo quando a distância entre eles é D. O foguete de massa m e velocidade constante v_f colide com o tanque, alojando-se em seu interior. Neste instante o motorista freia com uma aceleração de módulo a. Determine:

1. o tempo t transcorrido entre o instante em que o motorista pisa no freio e o instante em que o veículo para;

2. a distância a que, ao parar, o veículo estará do local de onde o foguete foi disparado.

4. (IME – 2005)

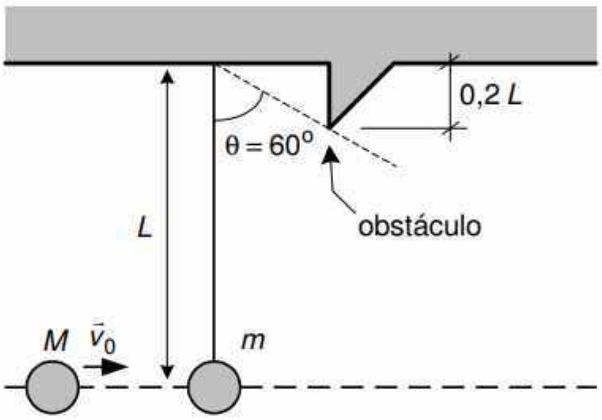
Um canhão de massa $M = 200\ kg$ em repouso sobre um plano horizontal sem atrito e carregado com um projétil de massa $m = 1\ kg$, permanecendo ambos neste estado até o projétil ser disparado na direção horizontal. Sabe-se que este canhão pode ser considerado tuna maquina térmica com 20% o de rendimento, porcentagem essa utilizada no movimento do projétil, e que o calor fornecido a esta máquina térmica é igual a $100.000\ J$. Suponha que a velocidade do projétil após o disparo é constante no interior do canhão e que o atrito e a resistência do ar podem ser desprezados. Determine a velocidade de recuo do canhão após o disparo.

5. (IME – 2007)

Um pêndulo com comprimento $L = 1\ m$, inicialmente em repouso, sustenta uma partícula com massa $m = 1\ kg$. Uma segunda partícula com massa $M = 1\ kg$ movimenta-se na direção horizontal com velocidade constante v_0 até realizar um choque perfeitamente inelástico com a primeira. Em função do choque, o pêndulo entra em movimento e atinge um obstáculo, conforme ilustrado na figura. Observa-se que a maior altura alcançada pela partícula sustentada pelo pêndulo é a mesma do ponto inferior do obstáculo. O tio pendular possui massa desprezível e permanece sempre esticado. Considerando a aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$ e a resistência do ar desprezível, determine:

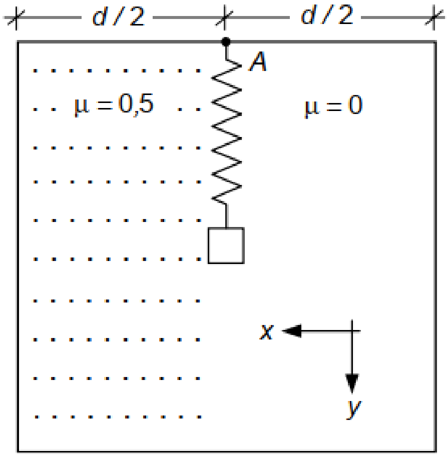
a. a velocidade v_0 da partícula com massa M antes do choque;

b. a força que o fio exerce sobre a partícula de massa m imediatamente após o fio bater no obstáculo.



6. (IME – 2008)

A figura abaixo ilustra um pequeno bloco e uma mola sobre uma mesa retangular de largura d, vista de cima. A mesa é constituída por dois materiais diferentes, um sem atrito e o outro com coeficiente de atrito cinético μ igual a 0,5. A mola tem uma de suas extremidades fixada no ponto A e a outra no bloco. A mola está inicialmente comprimida de 4 cm, sendo liberada para que o bloco oscile na região sem atrito na direção y. Depois de várias oscilações, ao passar pela posição na qual tem máxima velocidade, o bloco é atingido por uma bolinha que se move com velocidade de 2 m/s na direção x e se aloja nele. O sistema é imediatamente liberado da mola e se desloca na parte áspera da mesa. Determine:



mesa vista de cima

a) o vetor quantidade de movimento do sistema $bloco + bolinha$ no instante em que ele é liberado da mola;

b) a menor largura e o menor comprimento da mesa para que o sistema pare antes de cair.

Dados:

comprimento da mola $= \ 25\ cm$;

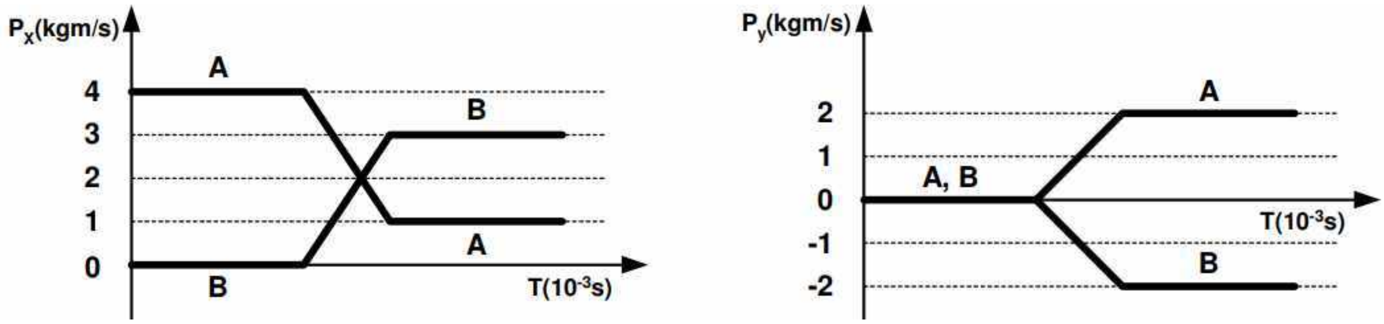
constante elástica da mola $= \ 10\ N/cm$;

massa da bolinha $= \ 0{,}2\ kg$;

massa do bloco $= \ 0{,}4\ kg$;

aceleração da gravidade $= 10\ m/s^2$.

7. (IME – 2009)



Duas partículas A e B de massas $m_A = 0{,}1\ kg$ e $m_B = 0{,}2\ kg$ sofrem colisão não frontal. As componentes x e y do vetor quantidade de movimento em função do tempo são apresentadas nos gráficos acima.

Considere as seguintes afirmativas:

I. A energia cinética total é conservada.

II. A quantidade de movimento total é conservada.

III. O impulso correspondente à partícula B é $2i + 4j$.

IV. O impulso correspondente à partícula A é $-3i + 2j$.

As afirmativas corretas são apenas:

a) I e II

b) I e III

c) II e III

d) II e IV

e) III e IV

8. (IME – 2009)

Dois corpos A e B encontram-se sobre um plano horizontal sem atrito. Um observador inercial O está na origem do eixo x. Os corpos A e B sofrem colisão frontal perfeitamente elástica, sendo que, inicialmente, o corpo A tem velocidade $v_A = 2\,m/s$ (na direção x com sentido positivo) e o coipo B está parado na posição $x = 2\,m$. Considere um outro observador inercial O' que no instante da colisão tem a sua posição coincidente com a do observador O. Se a velocidade relativa de O' em relação a O é $v_{0'} = 2\,m/s$ (na direção x com sentido positivo), determine em relação a O

a) as velocidades dos corpos A e B após a colisào;

b) a posição do corpo A dois segundos após a colisào.

Dados:

• massa de A $=\ 100\ g$;

• massa de B $=\ 200\ g$.

9. (IME – 2010)

Um soldado em pé sobre um lago congelado (sem atrito) atira horizontalmente com uma bazuca. A massa total do soldado e da bazuca é 100 kg e a massa do projétil é 1 kg. Considerando que a bazuca seja uma máquina térmica com rendimento de 5% e que o calor fornecido a ela no instante do disparo é 100 kJ, a velocidade de recuo do soldado é, em m/s,

a) 0,1

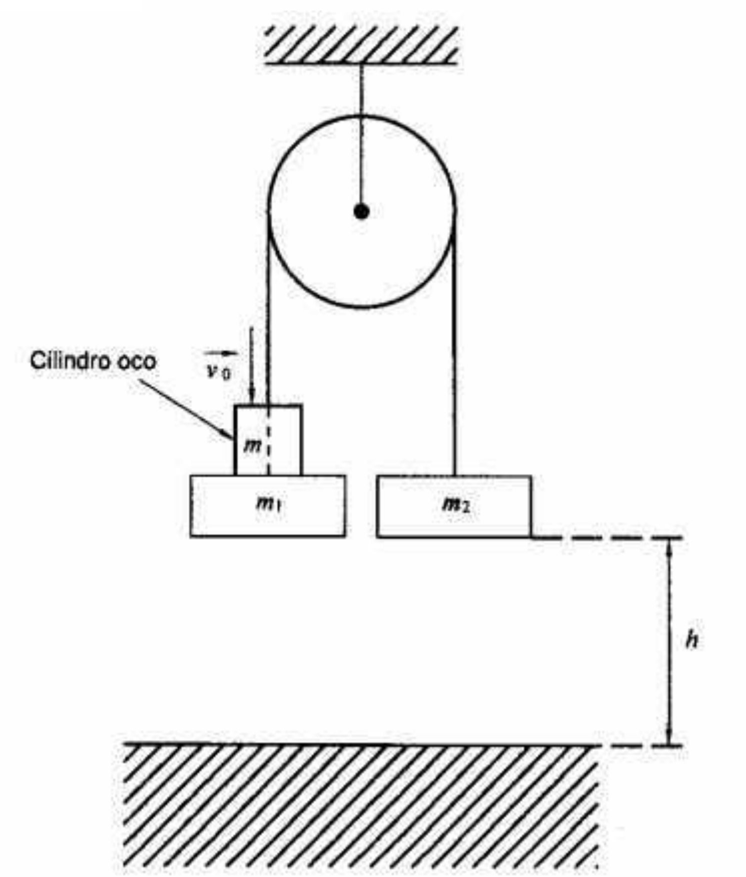
b) 0,5

c) 1,0

d) 10.0

e) 100,0

10. (IME – 2011)



A figura acima apresenta duas massas $m_1 = 5\ kg$ e $m_2 = 20\ kg$ presas por um fio que passa por uma roldana. As massas são abandonadas a partir do repouso, ambas a uma altura h do solo, no exato instante em que um cilindro oco de massa $m = 5\ kg$ atinge m_1 com velocidade $v = 36\ m/s$, ficando ambas coladas. Determine a altura h, em metros, para que m_1 chegue ao solo com velocidade nula.

Dado:

• Aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$

Observação:

• A roldana e o fio são ideais.

a) 5,4

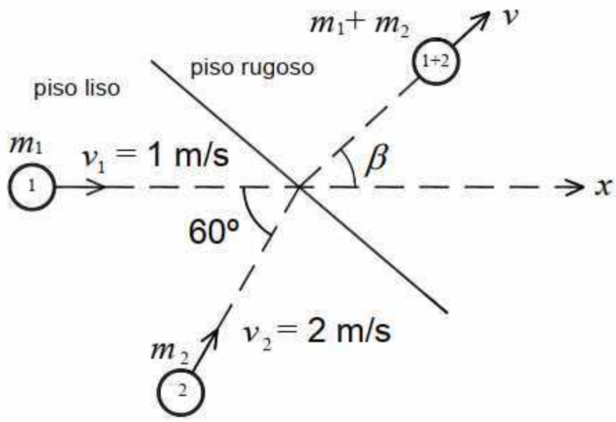
b) 2,7

c) 3,6

d) 10,8

e) 1,8

11. (IME – 2012)



Duas bolas, 1 e 2. movem-se em um piso perfeitamente liso. A bola 1, de massa $m_1 = 2\ kg$, move-se no sentido da esquerda para direita com velocidade $v_1 = 1\ m/s$. A bola 2. de massa $m_2 = 1\ kg$, move-se com ângulo de $60°$ com o eixo x, com velocidade $v_2 = 2\ m/s$. Sabe-se que o coeficiente de atrito cinético entre as bolas e o piso rugoso é $0{,}10\ sec^2\ \beta$ e a aceleração gravitacional é $10\ m/s^2$. Ao colidirem, permanecem unidas após o choque e movimentam-se em um outro piso rugoso, conforme mostra a figura. A distância percorrida, em metros, pelo conjunto bola 1 e bola 2 até parar é igual a

a) 0,2

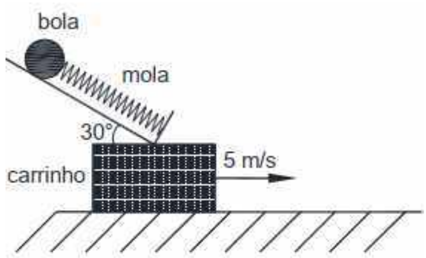
b) 0,5

c) 0,7

d) 0,9

e) 1,2

12. (IME – 2012)



A figura apresenta um carrinho que se desloca a uma velocidade constante de $5\ m/s$ para a direita em relação a um observador que está no solo. Sobre o carrinho encontra-se um conjunto formado por um plano inclinado de $30°$, uma mola comprimida inicialmente de $10\ cm$ e uma pequena bola apoiada em sua extremidade. A bola é liberada e se desprende do conjunto na posição em que a mola deixa de ser comprimida. Considerando que a mola permaneça não comprimida após a liberação da bola, devido a um dispositivo mecânico, determine:

a) o vetor momento linear da bola em relação ao solo no momento em que se desprende do conjunto;

b) a distância entre a bola e a extremidade da mola quando a bola atinge a altura máxima.

Dados:

• Constante elástica da mola: $k = 100\ N \cdot m^{-1}$

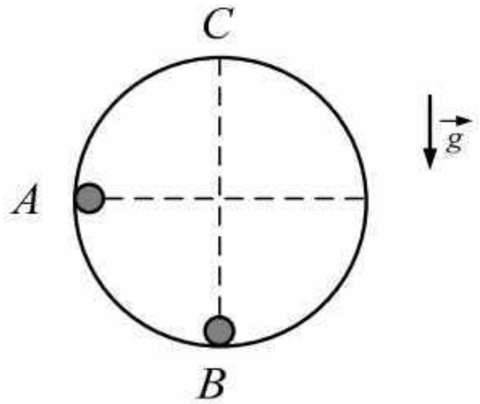
• Massa da bola: $m = 200\ g$

• Aceleração da gravidade: $g = 10\ m \cdot s^{-2}$

Observação:

A massa do carrinho é muito maior que a massa da bola.

13. (IME – 2015)



Um corpo puntiforme de massa m_A parte de ponto A, percorrendo a rampa circular representada na figura acima, sem atrito, colide com outro corpo puntiforme de massa m_B, que se encontrava inicialmente em repouso no ponto B. Sabendo que este choque é perfeitamente inelástico e que o corpo resultante deste choque atinge o ponto C , ponto mais alto da rampa, com a menor velocidade possível mantendo o contato com a rampa, a velocidade inicial do corpo no ponto A, em m/s, é

Dados:

- raio da rampa circular: $2m$;
- aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$;
- massa a/m: $1\ kg$; e
- massa m_A: $1\ kg$.

a) 10

b) 20

c) $4\sqrt{15}$

d) $10\sqrt{5}$

e) $8\sqrt{5}$

14. (IME – 2016)

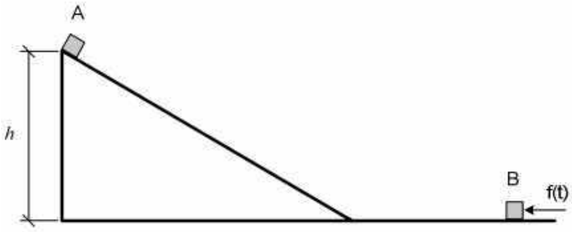


Figura 1

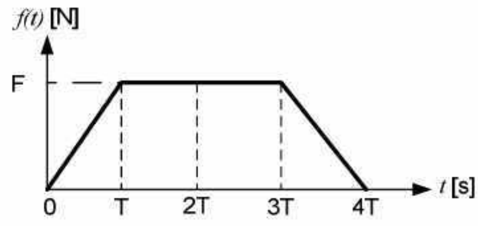


Figura 2

Na Figura 1, o corpo A, constituído de gelo. possui massa m e é solto em uma rampa a uma altura h. Enquanto desliza pela rampa, ele derrete e alcança o plano horizontal com metade da energia mecânica e metade da massa iniciais. Após atingir o plano horizontal, o corpo A se choca, no instante $4T$, com o corpo B, de massa m, que foi retirado do repouso através da aplicação da força $f(t)$, cujo gráfico é exibido na Figura 2.

Para que os corpos parem no momento do choque, F deve ser dado por

Dado:

- aceleração da gravidade: g.

Observações:

- o choque entre os corpos é perfeitamente inelástico:
- o corpo não perde massa ao longo de seu movimento no plano horizontal.

a) $\frac{m\sqrt{2gh}}{8T}$

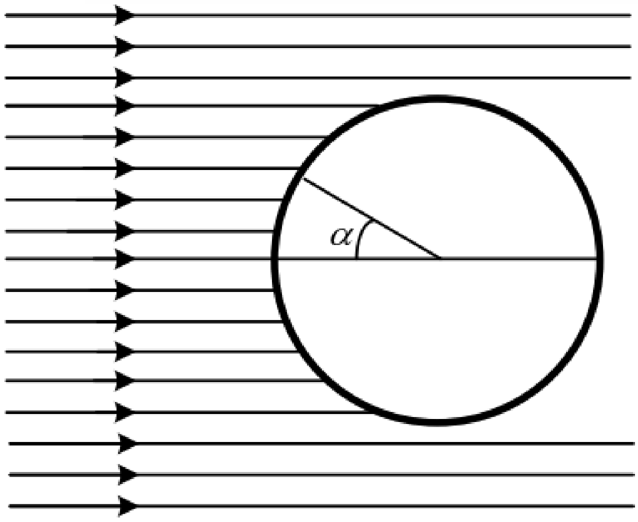
b) $\frac{m\sqrt{2gh}}{6T}$

c) $\frac{m\sqrt{2gh}}{4T}$

d) $\frac{m\sqrt{2gh}}{3T}$

e) $\frac{m\sqrt{2gh}}{2T}$

15. (IME – 2017)



Considere um feixe homogêneo de pequenos projéteis deslocando-se na mesma direção e na mesma velocidade constante até atingir a superfície de uma esfera que está sempre em repouso.

A esfera pode ter um ou dois tipos de superfícies: uma superfície totalmente refletora (colisão perfeitamente elástica entre a esfera e o projétil) e/ou uma superfície totalmente absorvedora (colisão perfeitamente inelástica entre a esfera e o projétil).

Em uma das superfícies (refletora ou absorvedora), o ângulo a da figura pertence ao intervalo [0,β], enquanto na outra superfície (absorvedora ou refletora) a pertence ao intervalo $(\beta, T/2]$.

Para que a força aplicada pelos projéteis sobre a esfera seja máxima, o(s) tipo(s) de superfície(s) é(são):

a) refletora em $[0, \pi/3]$ e absorvedora em $(\pi/3, \pi/2]$.

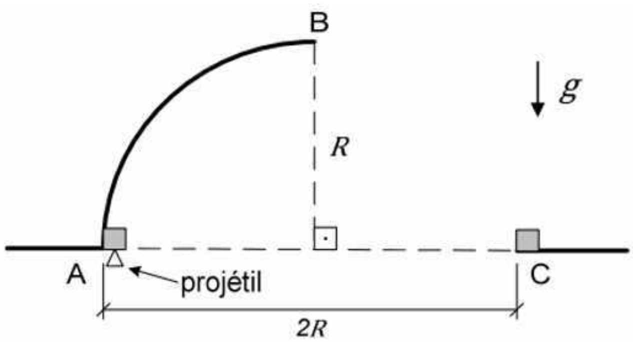
b) refletora em $[0, \pi/4]$ e absorvedora em $(\pi/4, \pi/2]$.

c) absorvedora em $[0, \pi/6]$ e refletora em $(\pi/6, \pi/2]$.

d) absorvedora em $[0, \pi/4]$ e refletora em $(\pi/4, \pi/2]$.

e) absorvedora em $[0, \pi/2]$.

16. (IME – 2019)



Conforme a figura acima, um corpo, cuja velocidade é nula no ponto A da superfície circular de raio R, é atingido por um projétil, que se move verticalmente para cima, e fica alojado no corpo. Ambos passam a deslizar sem atrito na superfície circular, perdendo o contato com a superfície no ponto B. A seguir, passam a descrever uma trajetória no ar até atingirem o ponto C, indicado na figura. Diante do exposto, a velocidade do projétil é:

Dados:

- Massa do projétil: m;
- Massa do corpo: $9m$; e
- Aceleração da gravidade: g.

a) $10\sqrt{\frac{5Rg}{2}}$

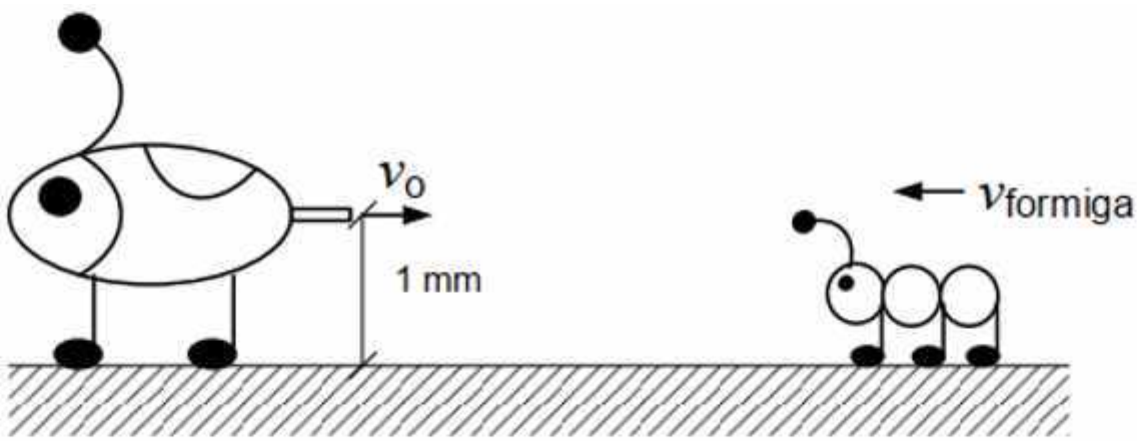
b) $10\sqrt{\frac{3Rg}{2}}$

c) $10\sqrt{\frac{5Rg}{3}}$

d) $10\sqrt{\frac{3Rg}{5}}$

e) $10\sqrt{\frac{2Rg}{3}}$

17. (IME – 2019)



Alguns animais têm mecanismos de defesa muito curiosos. Os besouros-bombardeiros, por exemplo, são insetos que disparam jatos de uma substância superquente pelos seus traseiros quando se sentem ameaçados. Seus corpos são equipados com duas glândulas nas extremidades de seus abdomens e essas estruturas contêm diferentes substâncias químicas. Quando os insetos são provocados, essas substâncias são combinadas em uma câmera de reação e são produzidas explosões na forma de um intenso jato – aquecido de 20 °C para 100 °C pelo calor da reação – para afugentar suas presas. A pressão elevada permite que o composto seja lançado para fora com velocidade de 240 cm/s. uma formiga se aproxima do besouro, pela retaguarda deste e em linha reta, a uma velocidade média de $0{,}20\ cm/s$ e o besouro permanece parado com seu traseiro a uma distância de $1mm$ do chão. Quando pressente o inimigo, o besouro lança o jato em direção à formiga.

Determine:

a) O calor latente da reação das substâncias, em $\mathrm{J/kg}$;

b) O rendimento da máquina térmica, representa pelo besouro;

c) A distância mínima, em cm, entre os insetos, para que o jato do besouro atinja a formiga; e

d) A velocidade, em cm/s, que a formiga adquire ao ser atingida pelo jato do besouro (assumindo que todo líquido fique impregnado na formiga)

Dados:

Calores específicos das substâncias e do líquido borrifado: $c = 4{,}19 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\cdot K}}$;

- Massa da formiga: $m_{formiga} = 6{,}0\ mg$;
- Massa do besouro: $m_{besouro} = 290\ mg$;
- Massa do jato: $m_{jato} = 0{,}30\ mg$:
- Velocidade média da formiga: $v_{formiga} = 0{,}20\ cm/s$; e
- Aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$.

18. (ITA – 2020 – 1ª Fase)

Uma pequena esfera com peso de módulo P é arremessada verticalmente para cima com velocidade de módulo V_0 a partir do solo. Durante todo o percurso, atua sobre a esfera uma força de resistência do ar de módulo F constante. A distância total percorrida pela esfera após muitas reflexões elásticas com o solo é dada aproximadamente por

a) $\frac{v_0^2(P-F)}{2gF}$.

b) $\frac{v_0^2(P+F)}{2gF}$.

c) $\frac{2v_0^2P}{gF}$.

d) $\frac{v_0^2P}{2gF}$.

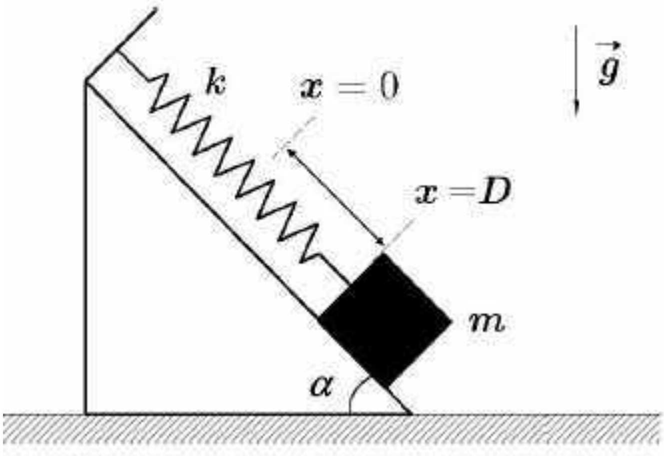
e) $\frac{v_0^2P}{gF}$.

19. (ITA – 2020 – 2ª Fase)

Uma mola de constante elástica k é presa a um bloco de massa m sobre um plano inclinado de um ângulo α em relação à horizontal, onde interage entre superfícies um atrito de coeficiente μ. Com o bloco deslocado forçadamente para baixo, a mola é distendida até um comprimento $x = D$ da sua posição $x = 0$, quando livre em seu comprimento natural. A partir do repouso, o bloco é então liberado e se inicia um movimento oscilatório. Pedem-se:

1. As possíveis posições finais x_f de parada do bloco após cessar o movimento oscilatório, em função das grandezas intervenientes.

2. gráfico da quantidade de movimento p do bloco em função da coordenada x, considerando o intervalo de tempo compreendido entre o início do movimento e o instante de sua primeira parada.



20. (ITA – 1990)

Um projétil de massa m e velocidade v atingo um objeto do massa M, inicialmente Imóvel. O projétil atravessa o corpo de massa M e sai dele com velocidade $v/2$. O corpo que foi atingido desliza por uma superfície som atrito, subindo uma rampa até a altura h. Nestas condiçóos podemos afirmar que a velocidade inicial do projétil ora de:

a) $v = \frac{2M}{m}\sqrt{2gh}$

b) $v = 2\sqrt{2\frac{M}{m}\,gh}$

c) $v = 2\sqrt{\frac{M}{m}\,gh}$

d) $v = \sqrt{8gh}$

e) $v = 2\sqrt{gh}$

21. (ITA – 1991)

Segundo um observador acoplado a um referencial inercial duas partículas de massa m_A e m_B possuem velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$, respectivamente. Qual a quantidade de movimento $\vec{p}_A$ que um observador preso ao centro de massa do sistema mede para a partícula A?

a) $\vec{p}_A = m_A \vec{v}_A$

b) $\vec{p}_A = m_A(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$

c) $\vec{p}_A = \left(\frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B}\right) \vec{v}_A$

d) $\vec{p}_A = \left(\frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B}\right) (\vec{v}_A - \vec{v}_B)$

e) Nenhuma das anteriores.

22. (ITA – 1991)

Um pêndulo simples de comprimento l e massa m é posto a oscilar. Cada vez que o pêndulo passa pela posição de equilíbrio atua sobre ele, durante um pequeno intervalo de tempo t, uma força F. Esta força é constantemente ajustada para, a cada passagem, ter mesma direção e sentido que a velocidade de m. Quantas oscilações completas são necessárias para que o pêndulo forme um ângulo reto com a direção vertical de equilíbrio?

a) $n = \frac{m\sqrt{gl}}{2Ft}$

b) $n = \frac{mgl\sqrt{2}}{2Ft}$

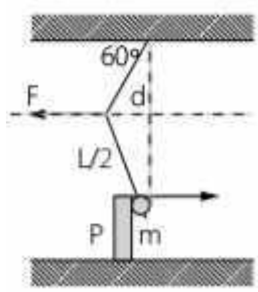
c) $n = \frac{m\sqrt{2gl}}{2Ft}$

d) $n = \frac{mgl}{Ft} + 1$

e) Nenhuma das anteriores.

23. (ITA – 1992)

Na figura abaixo, a massa esférica M pende de um fio de comprimento L, mas está solicitada para a esquerda por uma força F que mantém a massa apoiada contra uma parede vertical P sem atrito.



a) Calcule o trabalho W realizado pela força F para fazer subir lentamente ($v = 0$) a massa M em termos da variação da energia potencial de M, desde a posição em que o fio está na vertical até a situação indicada no desenho;

b) Verifique se é possível calcular esse trabalho como o produto de F, já calculada, pelo deslocamento d.

a) $0{,}29Mgl$ Não

b) $0{,}13Mgl$ Sim

c) $0{,}50Mgl$ Não

d) $0{,}13Mgl$ Não

e) $0{,}29Mgl$ Sim

24. (ITA – 1992)

Um objeto de massa M é deixado cair de uma altura h. Ao final do 1° segundo de queda o objeto é atingido horizontalmente por um projétil de massa m e velocidade v, que nele se aloja. Calcule o desvio x que o objeto sofre ao atingir o solo, em relação ao alvo pretendido.

a) $\sqrt{2h/g} \cdot (M+m) \cdot v$

b) $\sqrt{2h/g} \cdot \frac{m}{M+m} \cdot v$

c) $(\sqrt{2h/g} - 1) \cdot \frac{m}{M+m} \cdot v$

d) $(\sqrt{2h/g} - 1) \cdot \frac{M+m}{M} \cdot v$

e) $(1 - \sqrt{2h/g}) \cdot (M+m) \cdot v$

25. (ITA – 1995)

Todo caçador ao atirar com um rifle, mantém a arma firmemente apertada contra o ombro evitando assim o "coice" da mesma. Considere que a massa do atirador é $95{,}0\ kg$. A massa do rifle é $5{,}00\ kg$, e a massa do projétil é $15{,}0\ g$ o qual é disparada a uma velocidade de $3{,}00 \cdot 10^4\ cm/s$. Nestas condição, a velocidade de recuo do rifle (v_r) quando se segura muito frouxamente a arma e a velocidade de recuo do atirador (v_a) quando ele mantém a arma firmemente apoiada no ombro serão respectivamente:

a) $0{,}90\ m/s$; $4{,}7 \cdot 10^2\ m/s$

b) $90{,}0\ m/s$; $4{,}7\ m/s$

c) $90{,}0\ m/s$; $4{,}5\ m/s$

d) $0{,}90\ m/s$; $4{,}5 \cdot 10^{-2}\ m/s$

e) $0{,}10\ m/s$; $1{,}5 \cdot 10^{-2}\ m/s$

26. (ITA – 1996)

Um avião a jato se encontra na cabeceira da pista com a sua turbina ligada e com os freios acionados, que o impedem de se movimentar. Quando o piloto aciona a máxima potência, o ar é expelido a uma razão de $100\ kg$ por segundo, a uma velocidade de $600\ m/s$ em relação ao avião. Nessas condições:

a) a força transmitida pelo ar expelido ao avião é nula, pois um corpo não pode exercer força sobre si mesmo.

b) as rodas do avião devem suportar uma força horizontal igual a $60\ kN$.

c) se a massa do avião é de $7 \cdot 10^3\ kg$ o coeficiente de atrito mínimo entre as rodas e o piso deve ser de $0{,}2$.

d) não é possível calcular a força sobre o avião com os dados fornecidos.

e) nenhuma das afirmativas acima é verdadeira.

27. (ITA – 1998)

Uma bala de massa 10 g é atirada horizontalmente contra um bloco de madeira de 100 g que está fixo, penetrando nele 10 cm até parar. Depois, o bloco é suspenso de tal forma que se possa mover livremente e uma bala idêntica à primeira é atirada contra ele. Considerando a força de atrito entre a bala e a madeira em ambos os casos como sendo a mesma, conclui-se que a segunda bala penetra no bloco a uma profundidade de aproximadamente:

a) 8.0 cm.

b) 8.2 cm.

c) 8.8 cm.

d) 9.2 cm.

e) 9.6 cm.

28. (ITA – 1998)

Uma massa m em repouso drvide-se em duas partes, uma com massa $2m/3$ e outra com massa $m/3$. Após a divisão, a parte com massa $m/3$ move-se para a direita com uma velocidade de módulo v_1. Se a massa m estivesse se movendo para a esquerda com velocidade de módulo v antes da divisão, a velocidade da parte $m/3$ depois da divisão seria:

a) $(\frac{1}{3}v_1 - v)$ para a esquerda.

b) $(v_1 - v)$ para a esquerda.

c) $(v_1 - v)$ para a direita.

d) $(\frac{1}{3}v_1 - v)$ para a direita.

e) $(v_1 + v)$ para a direita.

29. (ITA – 2000)

Uma sonda espacial de $1000\ kg$, vista de um sistema de referência inercial, encontra-se em repouso no espaço. Num determinado instante, seu propulsor é ligado e, durante o intervalo de tempo de 5 segundos, os gases são ejetados a uma velocidade constante, em relação à sonda, de $5000\ m/s$. No final desse processo, com a sonda movendo-se a $20\ m/s$, a massa aproximada de gases ejetados é

a) $0{,}8\ kg$

b) $4\ kg$

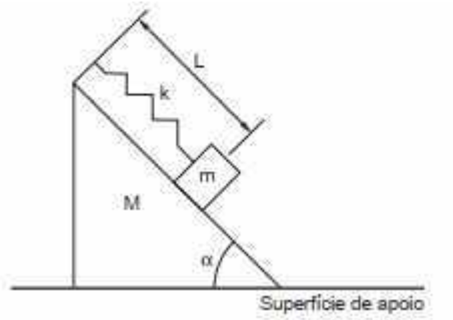
c) $5\ kg$

d) $20\ kg$

e) $25\ kg$

ESTA É DIFÍCIL!

30. (ITA – 2000)



Um corpo de massa $\boldsymbol{m}$ desliza sem atrito sobre a superfície plana (e inclinada de um ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ em relação à horizontal) de um bloco de massa $\boldsymbol{M}$ sob a ação da mola, mostrada na figura. Esta mola, de constante elástica $\boldsymbol{k}$ e comprimento natural $\boldsymbol{C}$, tem suas extremidades respectivamente fixadas ao corpo de massa $\boldsymbol{m}$ e ao bloco. Por sua vez, o bloco pode deslizar sem atrito sobre a superfície plana e horizontal em que se apóia. O corpo é puxado até uma posição em que a mola seja distendida elasticamente a um comprimento $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{L} > \boldsymbol{C})$, tal que, ao ser liberado, o corpo passa pela posição em que a força elástica é nula. Nessa posição o módulo da velocidade do bloco é

a) $$\sqrt{\frac{2m\left[\frac{1}{2}k(L-C)^2 - mg(L-C)sen(\alpha)\right]}{M^2[1+sen^2(\alpha)]}}$$

b) $$\sqrt{\frac{2m\left[\frac{1}{2}k(L-C)^2 - mg(L-C)sen(\alpha)\right]}{M^2[1+tg^2(\alpha)]}}$$

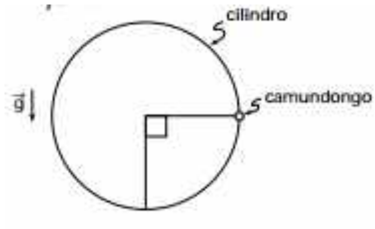
c) $$\sqrt{\frac{2m\left[\frac{1}{2}k(L-C)^2 - mg(L-C)sen(\alpha)\right]}{(m+M)[(m+M)tg^2\alpha + M]}}$$

d) $$\sqrt{\frac{2m\left[\frac{1}{2}k(L-C)^2\right]}{M^2[1+tg^2(\alpha)]}}$$

e) 0

31. (ITA – 2002)

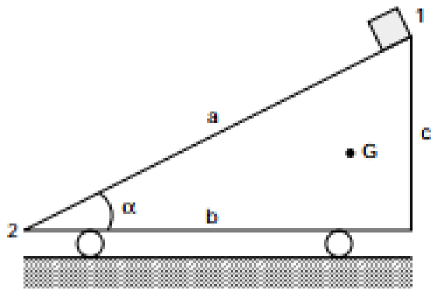
Um pequeno camundongo de massa M corre num plano vertical no interior de um cilindro de massa m e eixo horizontal Suponha-se que o ratinho alcance a posição indicada na figura imediatamente no início de sua corrida nela permanecendo devido ao movimento giratório de reação do cilindro, suposto ocorrer sem resistência de qualquer natureza. A energia despendida pelo ratinho durante um intervalo de tempo T para se manter na mesma posição enquanto corre é



a) $\boldsymbol{E = \frac{M^2}{2m} g^2 T^2}$
b) $\boldsymbol{E = M g^2 T^2}$
c) $\boldsymbol{E = \frac{m^2}{M} g^2 T^2}$
d) $\boldsymbol{E = m g^2 T^2}$
e) n.d.a.

32. (ITA – 2002)

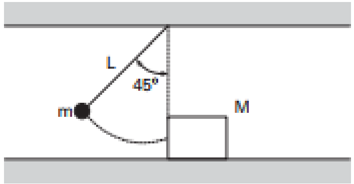
Uma tampa rolante pesa $120\ N$ e se encontra Inicialmente em tepousa conto mostra a figura. Um bloco que pesa $80\ N$ também em repousa e abandonado no ponto 1, deslizando a seguir sobre a rampa. O centro de massa G da rampa tem coordenadas: $x_G = 2b/3$ e $y_G = c/3$. São dados ainda: $a = 15{,}0\ m$ e $sen\ \alpha = 0{,}6$. Desprezando os possíveis atritos e as dimensões do bloco, pode-se afirmar que a distância percorrida pela rampa no sola até o instante em que o bloco atinge o ponto 2, é



a) 16,0 m
b) 30,0 m
c) 4,8 m
d) 24,0 m
e) 9,6 m

33. (ITA – 2003)

Quando solto na posição angular de 45° (mostrada na figura), um pêndulo simples de massa m e comprimento L colide com um bloco de massa M. Após a colisão, o bloco desliza sobre uma superfície rugosa, cujo coeficiente de atrito dinâmico é igual a 0,3. Considere que após a colisão, ao retornar, o pêndulo alcança uma posição angular máxima de 30°. Determine a distância percorrida pelo bloco em função de m, M e L.

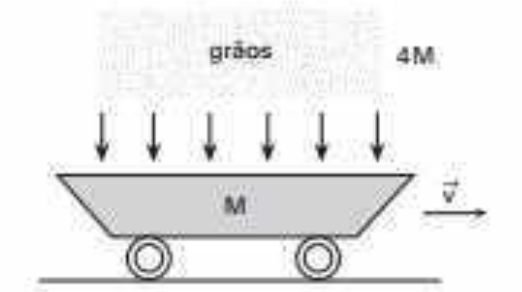


34. (ITA – 2004)

Atualmente, vários laboratórios. utilizando várias feixes de laser, são capazes de resfriar gases a temperaturas muito próximas do zero absoluto, obtendo moléculas e átomos ultrafrios. Considere três átomos ultrafrios de massa M, que se aproximam com velocidades desprezíveis. Da colisão tripla resultante, observada de um referencial situado no centro de massa do sistema, forma-se uma molécula diatômica com liberação de certa quantidade de energia B. Obtenha a velocidade final do átomo remanescente em função de B e M.

35. (ITA – 2005)

Um vagão-caçamba de massa M se desprende da locomotiva e corre sobre trilhos horizontais com velocidade constante $v = 72{,}0\ km/h$ (portanto, sem resistência de qualquer espécie ao movimento). Em dado instante, a caçamba é preenchida com uma carga de grãos de massa igual a $4M$, despejada verticalmente a partir do repouso de uma altura de $6{,}00m$ (veja figura).



Supondo que toda a energia liberada no processo seja integralmente convertida em calor para o aquecimento exclusivo dos grãos, então, a quantidade de calor por unidade de massa recebido pelos grãos é

a) $15\ J/kg$.

b) $80\ J/kg$.

c) $100\ J/kg$.

d) $463\ J/kg$.

e) $578\ J/kg$.

36. (ITA – 2005)

Dois corpos esféricos de massa M e $5M$ e raios R e $2R$, respectivamente, são liberados no espaço livre. Considerando que a única força interveniente seja a da atração gravitadonal mútua, e que seja de $12R$ a distância de separação inicial entre os centros dos corpos, então, o espaço percorrido pelo corpo menor até a colisão será de

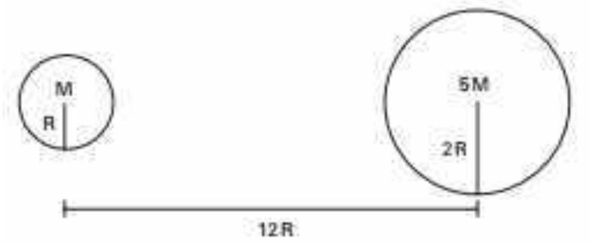
a) $1{,}5R$.

b) $2{,}5R$.

c) $4{,}5R$.

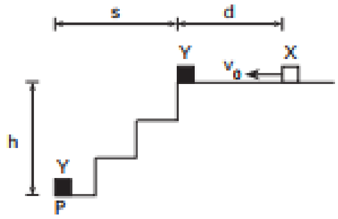
d) $7{,}5R$.

e) $10{,}0R$.



37. (ITA – 2006)

Animado com velocidade inicial v_0, o objeto X, de massa m, desliza sobre um piso horizontal ao longo de uma distância d, ao fim da qual colide com o objeto Y, de mesma massa, que se encontra inicialmente parado na beira de uma escada de altura h.



Com o choque, o objeto Y atinge o solo no ponto P. Chamando μ_k o coeficiente de atrito cinético entre o objeto X e o piso, g a aceleração da gravidade e desprezando a resistência do ar, assinale a expressão que dá a distância d.

a) $d = \frac{1}{2\mu_k g}\left(v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h}\right)$

b) $d = \frac{-1}{2\mu_k g}\left(v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h}\right)$

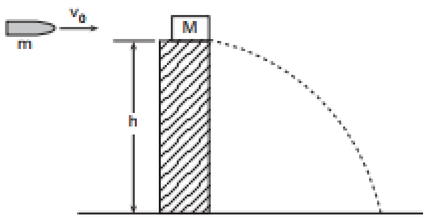
c) $d = \frac{-v_0}{2\mu_k g}\left(v_0 - s\sqrt{\frac{g}{2h}}\right)$

d) $d = \frac{1}{2\mu_k g}\left(2v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h}\right)$

e) $d = \frac{-v_0}{\mu_k g}\left(v_0 - s\sqrt{\frac{g}{2h}}\right)$

38. (ITA – 2007)

Uma bala de massa m e velocidade v_0 é disparada contra um bloco de massa M, que inicialmente se encontra em repouso na borda de um poste de altura h, conforme mostra a figura.



A bala aloja-se no bloco que, devido ao impacto, cai no solo. Sendo g a aceleração da gravidade, e não havendo atrito e nem resistência de qualquer outra natureza, o módulo da velocidade com que o conjunto atinge o solo vale

a) $\sqrt{\left(\frac{mv_0}{m+M}\right)^2 + 2gh}$

b) $\sqrt{v_0^2 + \frac{2ghm^2}{(m+M)^2}}$

c) $\sqrt{v_0^2 + \frac{2mgh}{M}}$

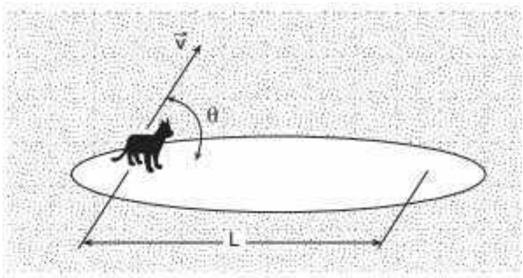
d) $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$

e) $\sqrt{\frac{mv_0^2}{m+M} + 2gh}$

ESTA É DIFÍCIL!

39. (ITA – 2008)

Na figura, um gato de massa m encontra-se parado próximo a uma das extremidades de uma prancha de massa M que flutua em repouso na superfície de um lago. A seguir, o gato salta e alcança uma nova posição na prancha, à distância L. Desprezando o atrito entre a água e a prancha, sendo θ o ângulo entre a velocidade inicial do gato e a horizontal, e g a aceleração da gravidade, indique qual deve ser a velocidade u de deslocamento da prancha logo após o salto.



a) $u = \sqrt{\frac{g \cdot L \cdot M}{\left(1+\frac{M}{m}\right) \cdot m \cdot sen(\theta) \cdot \cos(\theta)}}$

b) $u = \sqrt{\frac{g \cdot L \cdot M}{\left(1+\frac{M}{m}\right) \cdot 2m \cdot sen(2\theta)}}$

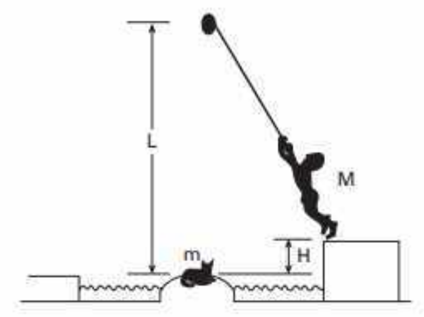
c) $u = \sqrt{\frac{g \cdot L \cdot M}{\left(1+\frac{M}{m}\right) \cdot 2m \cdot sen(\theta)}}$

d) $u = \sqrt{\frac{g \cdot L \cdot m}{\left(1+\frac{M}{m}\right) \cdot 2M \cdot tg(\theta)}}$

e) $u = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot L \cdot m}{\left(1+\frac{M}{m}\right) \cdot M \cdot tg(\theta)}}$

40. (ITA – 2008)

Numa brincadeira de aventura, o garoto (de massa M) lança-se por uma corda amarrada num galho de árvore num ponto de altura L acima do gatinho (de massa m) da figura, que pretende resgatar. Sendo g a aceleração da gravidade e H a altura da plataforma de onde se lança, indique o valor da tensão na corda, imediatamente após o garoto apanhar o gato para aterrisá-lo na outra margem do lago.



a) $M \cdot g \cdot \left(1 + \frac{2H}{L}\right)$

b) $(M + m) \cdot g \cdot \left(1 - \left(\frac{M+m}{M}\right)^2 \cdot \frac{2H}{L}\right)$

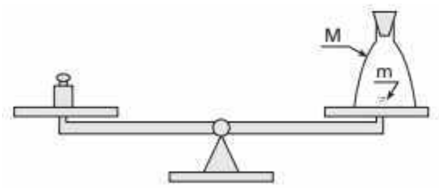
c) $M \cdot g \cdot \left(1 - \frac{2H}{L}\right)$

d) $(M + m) \cdot g \cdot \left(1 + \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \cdot \frac{2H}{L}\right)$

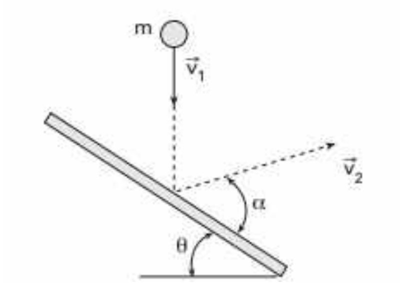
e) $(m + M) \cdot g \cdot \left(\left(\frac{M}{m+M}\right)^2 \cdot \frac{2H}{L} - 1\right)$

41. (ITA – 2008)

Num dos pratos de uma balança que se encontra em equilíbrio estático, uma mosca de massa m está em repouso no fundo de um frasco de massa M. Mostrar em que condições a mosca poderá voar dentro do frasco sem que o equilíbrio seja afetado.



42. (ITA – 2008)



A figura mostra uma bola de massa m que que cai com velocidade $\vec{v}_1$ sobre a superfície de um suporte rígido, inclinada de um ângulo θ em relação ao plano horizontal. Sendo e o coeficiente de restituição para esse impacto, calcule o módulo da velocidade $\vec{v}_2$ com que a bola é ricocheteada, em função de $\vec{v}_1$, θ e e. Calcule também o ângulo a.

43. (ITA – 2009)

Num filme de ficção, um foguete de massa m segue uma estação espacial, dela aproximando-se com aceleração relativa o. Para reduzir o impacto do acoplamento, na estação existe uma mola de comprimento L e constante k. Calcule a deformação máxima sofrida pela mola durante o acoplamento sabendo-se que o foguete alcançou a mesma velocidade da estação quanto dela se aproximou de uma certa distância $d > L$, por hipótese em sua mesma órbita.

44. (ITA – 2009)

Considere uma bola de basquete de $600\ g$ a $5\ m$ de altura e, logo acima dela, uma de tênis de $60\ g$. A seguir, num dado instante, ambas as bolas são deixadas cair. Supondo choques perfeitamente elásticos e ausência de eventuais resistências, e considerando $g = 10\ m/s^2$, assinale o valor que mais se aproxima da altura máxima alcançada pela bola de tênis em sua ascensão após o choque.

a) 5 m

b) 10 m

c) 15 m

d) 25 m

e) 35 m

45. (ITA – 2011)

Um objeto de massa m é projetado no ar a 45° do chão horizontal com uma velocidade v. No ápice de sua trajetória, este objeto é interceptado por um segundo objeto, de massa M e velocidade V, que havia sido projetado verticalmente do chão. Considerando que os dois objetos "se colam" e desprezando qualquer tipo de resistência aos movimentos, determine a distância d do ponto de queda dos objetos em relação ao ponto de lançamento do segundo objeto.

46. (ITA – 2012)

Apoiado sobre patins niuna superfície horizontal sem atrito, um atirador dispara um projétil de massa m com velocidade v contra um alvo a uma distância d. Antes do disparo, a massa total do atirador e seus equipamentos é M. Sendo v_s a velocidade do som no ar e desprezando a perda de energia em todo o processo, quanto tempo após o disparo o atirador ouviria o ruído do impacto do projétil no alvo?

a) $$\frac{d(v_s+v)(M-m)}{v\big(M\cdot v_s-m(v_s+v)\big)}$$

b) $$\frac{d(v_s+v)(M+m)}{v\big(M\cdot v_s+m(v_s+v)\big)}$$

c) $$\frac{d(v_s-v)(M+m)}{v\big(M\cdot v_s+m(v_s+v)\big)}$$

d) $$\frac{d(v_s+v)(M-m)}{v\big(M\cdot v_s-m(v_s-v)\big)}$$

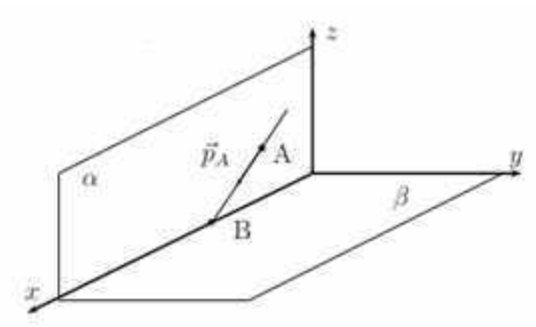
e) $$\frac{d(v_s-v)(M-m)}{v\big(M\cdot v_s+m(v_s+v)\big)}$$

47. (ITA – 2012)

100 cápsulas com água, cada uma de massa $m = 1{,}0\ g$, são disparadas à velocidade de $10{,}0\ m/s$ perpendicularmente a uma placa vertical com a qual colidem inelasticamente. Sendo as cápsulas enfileiradas com espaçamento de $1{,}0\ cm$, determine a força média exercida pelas mesmas sobre a placa.

48. (ITA – 2012)

Átomos neutros ultrafnos restritos a um plano são uma realidade experimental atual em armadilhas magneto-ópticas. Imagine que possa existir uma situação na qual átomos do tipo A e B estão restritos respectivamente aos planos α e β, perpendiculares entre si, sendo suas massas tais que $m_A = 2m_B$. Os átomos A e B colidem elasticamente entre si não saindo dos respectivos planos, sendo as quantidades de movimento iniciais $\vec{p}_A$ e $\vec{p}_B$,e as finais, $\vec{q}_A$ e $\vec{q}_B$. $\vec{p}_A$ forma um ângulo θ com o plano horizontal e $\vec{p}_B = \vec{0}$. Sabendo que houve transferência de momento entre A e B, qual é a razão das energias cinéticas de B e A após a colisão?



49. (ITA – 2013)

Uma rampa maciça de $120\ kg$ inicialmente em repouso, apoiada sobre um piso horizontal, tem sua declividade dada por $tg(\theta) = 3/4$. Um corpo de $80\ kg$ desliza nessa rampa a partir do repouso, nela percorrendo $15\,m$ até alcançar o piso. No final desse percurso, e desconsiderando qualquer tipo de atrito, a velocidade da rança em relação ao piso é de aproximadamente

a) 1 m/s.

b) 3 m/s.

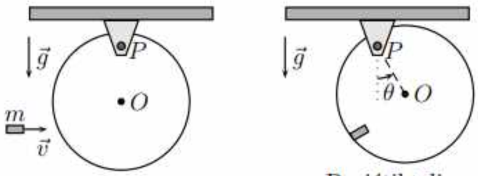
c) 5 m/s.

d) 2 m/s.

e) 4 m/s.

50. (ITA – 2014)

Um disco rígido de massa M e centro O pode oscilar sem atrito num plano vertical em torno de uma articulação P. O disco é atingido por um projétil de massa $m \ll M$ que se move horizontalmente com velocidade v no plano do disco. Após a colisão, o projétil se incrusta no disco e o conjunto gira em torno de P até o ângulo θ. Nestas condições, afirmam-se:



I. A quantidade de movimento do conjunto $projétil + disco$ se mantém a mesma imediatamente antes e imediatamente depois da colisão.

II. A energia cinética do conjunto $projétil + disco$ se mantem a mesma imediatamente antes e imediatamente depois da colisão.

III. A energia mecânica do conjunto $projétil + disco$ imediatamente após a colisão é igual à da posição de ângulo $\theta/2$.

É (são) verdadeira(s) apenas a(s) assertiva(s)

a) I.

b) I e II.

c) I e III.

d) II e III.

e) III.

51. (ITA – 2015)

Uma chapa metálica homogênea quadrada de $100\ cm^2$ de área, situada no plano xy de um sistema de referência, com um dos lados no eixo x, tem o vértice inferior esquerdo na origem. Dela, retira-se uma porção circular de $5{,}00\ cm$ de diâmetro com o centro posicionado em $x = 2{,}50\ cm$ e $y = 5{,}00\ cm$. Determine as coordenadas do centro de massa da chapa restante.

a) $(x_C, y_C) = (6{,}51, 5{,}00)\ cm$

b) $(x_C, y_C) = (5{,}61, 5{,}00)\ cm$

c) $(x_C, y_C) = (5{,}00, 5{,}61)\ cm$

d) $(x_C, y_C) = (5{,}00, 6{,}51)\ cm$

e) $(x_C, y_C) = (5{,}00,\ 5{,}00)\ cm$

52. (ITA – 2015)

Nêutrons podem atravessar uma fina camada de chumbo, mas têm sua energia cinética absorvida com alta eficiência na água ou em materiais com elevada concentração de hidrogênio. Explique este efeito considerando um nêutron de massa m e velocidade v_0 que efetua uma colisão elástica e central com um átomo qualquer de massa M inicialmente em repouso.

53. (ITA – 2016)

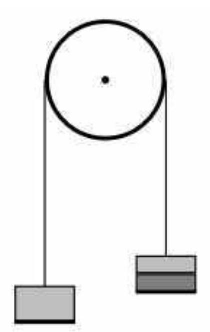
Dois garotos com patins de rodinhas idênticos encontram-se numa superfície horizontal com atrito e, graças a uma interação, conseguem obter a razão entre seus respectivos pesos valendo-se apenas de uma fita métrica. Como é resolvida essa questão e quais os conceitos físicos envolvidos?

54. (ITA – 2016)

Na ausência da gravidade e no vácuo, encontram-se três esferas condutoras alinhadas, A, B e C, de mesmo raio e de massas respectivamente iguais a m, m e $2m$. Inicialmente B e C encontram-se descarregadas e em repouso, e a esfera A, com carga elétrica Q, é lançaria contra a intermediária B com uma certa velocidade v. Supondo que todos movimentos ocorram ao longo de uma mesma reta, que as massas sejam grandes o suficiente para se desprezar as forças coulombianas e ainda que todas as colisões sejam elásticas, determine a carga elétrica de cada esfera após todas as colisões possíveis.

55. (ITA – 2017)

Mediante um fio inextensível e de peso desprezível, a polia da figura suporta à esquerda uma massa de 60 kg, e à direita, uma massa de 55 kg tendo em cima outra de 5 kg, de formato anelar, estando este conjunto a 1 m acima da massa da esquerda. Num dado instante, por um dispositivo interno, a massa de 5 kg é lançada para cima com velocidade $v = 10\ m/s$, após o que, cai e se choca inelasticamente com a de 55 kg. Determine a altura entre a posição do centro de massa de todo o sistema antes do lançamento e a deste centro logo após o choque.



56. (ITA – 2018)

Um tubo fino cie massa $1225\ g$ e raio $r = 10{,}0\ cm$ encontra-se inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito. A partir do ponto mais alto, um corpo de massa $71{,}0\ g$ com velocidade inicial zero desliza sem atrito pelo interior do tubo no sentido anti-horário, conforme a figura. Então, quando na posição mais baixa, o corpo terá uma velocidade relativa ao tubo, em cm/s, igual a

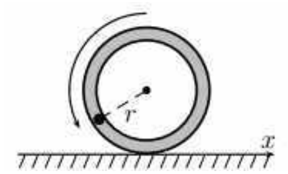
a) $-11{,}3$.

b) -206.

c) $11{,}3$.

d) 206.

e) 194.



57. (ITA – 2018)

Num plano horizontal liso, presas cada qual a uma corda de massa desprezível, as massas m_1 e m_2 giram em órbitas circulares de mesma frequência angular uniforme, respectivamente com raios r_1 e $r_2 = r_1/2$. Em certo instante essas massas colidem-se frontal e elasticamente e cada qual volta a perfazer jum movimento circular uniforme. Sendo iguais os módulos das velocidades de m_1 e m_2 após o choque, assinale a relação m_2/m_1.

a) 1

b) 3/2

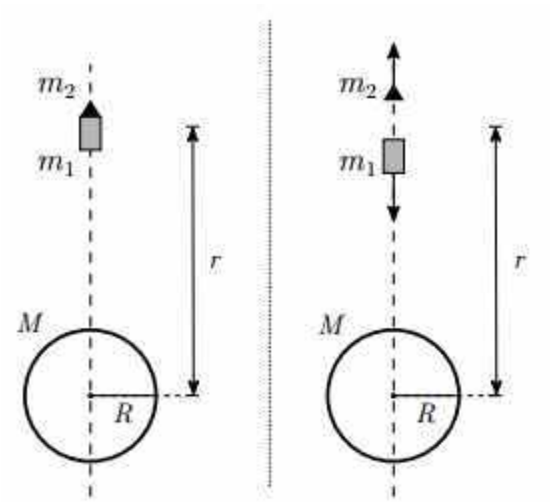
c) 4/3

d) 5/4

e) 7/5

58. (ITA – 2019)

Conforme a figura, um veículo espacial, composto de um motor-foguete de massa m_1 e carga útil de massa m_2, é lançado verticalmente de um planeta esférico e homogêneo de massa M e raio R. Após esgotar o combustível, o veículo permanece em voo vertical até atingir o repouso a uma distância r do centro do planeta. Nesse instante um explosivo é acionado, separando a carga útil do motor-foguete e impulsionando-a verticalmente com velocidade mínima para escapar do campo gravitacional do planeta. Desprezando forças dissipativas, a variação de massa associada à queima do combustível do foguete e efeitos de rotação do planeta, e sendo G a constante de gravitação universal, determine

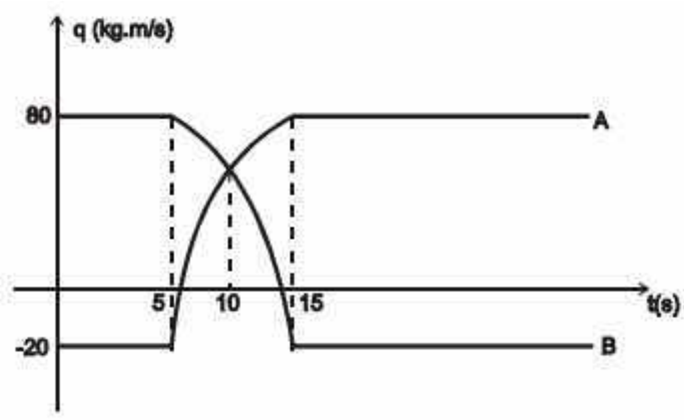


a) o trabalho realizado pelo motor-foguete durante o 1° estágio do seu movimento de subida; e

b) a energia mecânica adquirida pelo sistema devido à explosão.

59. (2ª fase OBF – 2005)

Os movimentos, em uma linha reta, de dois corpos A e B são descritos pelo gráfico a seguir, que relaciona as quantidades de movimento com o tempo. Qual a intensidade média da força de interação que o corpo A exerceu sobre o corpo B?



60. (3ª fase OBF – 2005)

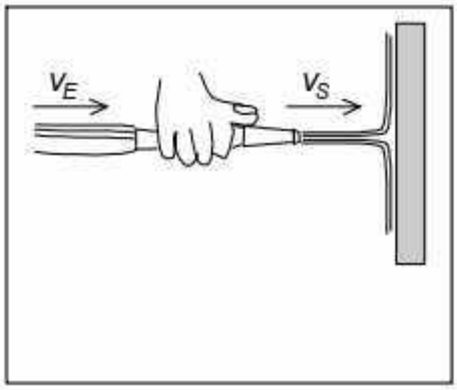
Uma bala, de massa $10\ g$, atinge e se encrava em um bloco de chumbo de massa igual a $990\ g$ que se encontra em repouso sobre uma superfície sem atrito. Após a penetração da bala no bloco, este se move com velocidade constante igual a $2\ m/s$. Qual era a velocidade da bala antes de penetrar no bloco?

61. (2ª fase OBF – 2006)

A figura mostra a mão de um jardineiro segurando o bico de uma "mangueira" de regar jardins e o jato de água da mesma batendo em uma parede e sendo espalhado perpendicularmente ao bico da mangueira. Supondo o escoamento igual a $1{,}0\ kg$ de água por segundo, a velocidade da água no interior da mangueira v_E igual a $0{,}25\ m/s$ e a velocidade da água ao sair pelo bico vs igual a $2{,}0\ m/s$, pede-se determinar:

a) o valor da força horizontal que o jardineiro exerce para equilibrar a força associada à mudança de velocidade da água no bico da "mangueira";

b) o valor da força de reação exercida pela parede contra o jato de água.



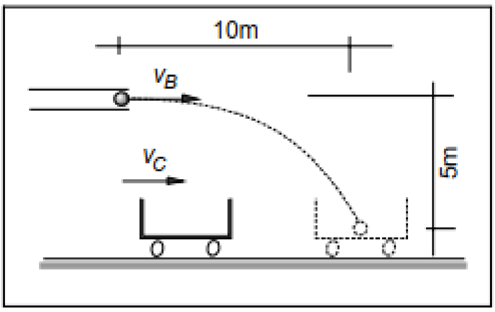
62. (2ª fase OBF – 2006)

Uma bola de chumbo de massa m_B igual a $5\ kg$ é lançada com uma velocidade v_B que faz com que ela caia e fique imobilizada dentro de um carrinho, conforme mostrado no desenho. O carrinho tem massa m_c igual a $10\ kg$ e se move com velocidade constante $v_c = 5\ m/s$.

De posse desses dados:

a) calcule o valor da velocidade v_B com que a bola colide com o carrinho;

b) calcule a velocidade v com que o carrinho se movimentará após ter recebido a bola de chumbo.



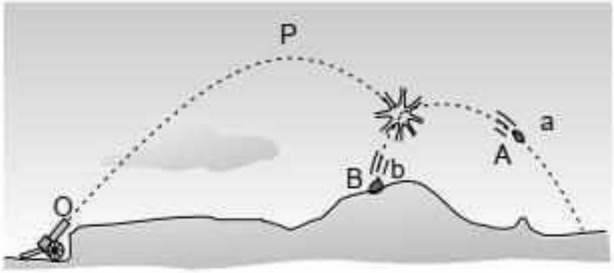
63. (3ª fase OBF – 2006)

O canhão mostrado dispara uma granada de massa $m = 6{,}00\ kg$ da posição $O(x_O; y_O)$ $(0\ m; 0\ m)$ que atinge seu ponto mais alto na posição $P(x_P; y_P)$ de coordenadas $(3000\ m; 1125\ m)$. Decorridos $20{,}0\ s$ após o disparo, a granada explode e seus fragmentos "a" e "b" de massas iguais a $m_a = 2{,}00\ kg$ e $m_b = 4{,}00\ kg$, respectivamente, caem segundo trajetórias coplanares à trajetória anterior à explosão. Despreze a resistência do ar e calcule:

a) o valor das coordenadas do ponto de explosão:

b) as coordenadas de posição $A(x_A; y_A)$ do fragmento "a" no instante em que o fragmento "b", 1,0 segundo após a explosão, toca o solo em um ponto $B(x_B; y_B)$, cuja posição é dada pelas coordenadas $(3000\ m; 300\ m)$;

c) o valor, em N, da força F da explosão, constante, de duração $1\ ms$ e que atuou no fragmento A. (deixar indicada a raiz quadrada)



64. (2ª fase OBF – 2007)

Um garoto de massa m está num pequeno barco, de massa M, que se encontra em repouso em um lago de águas paradas. Em um determinado momento ele anda com velocidade v de um extremo do barco ao outro. Desprezando os efeitos dissipativos.

a) Qual será a velocidade do barco em relação à margem?

b) Se o barco fosse transformado num navio, qual seria a velocidade do navio?

65. (3ª fase OBF – 2007)

Uma partícula de massa $m = 0{,}5\ kg$ tem velocidade inicial horizontal de $6\ m/s$. Ao receber um impulso de uma força F constante, modifica sua velocidade para $8\ m/s$, em direção ’ perpendicular à inidal, num intervalo de tempo $\Delta t = 0{,}1\ s$.

a) Qual a intensidade do impulso da força F?

b) Qual a intensidade da força F?

66. (3ª fase OBF – 2007)

Um projétil de massa $m = 0{,}1\ kg$ é lançado a um ângulo de $30°$ com a horizontal e com uma velocidade de $500\ m/s$. No ponto mais alto da trajetória ele explode em dois fragmentos iguais, A e B. Suponha que o fragmento B, imediatamente após a explosão, cai verticalmente a partir do repouso.

a) A que distância do ponto de lançamento cai o fragmento A, supondo-se o solo horizontal?

b) Calcule a diferença entre a energia mecânica do sistema, imediatamente após e imediatamente antes da explosão.

67. (3ª fase OBF – 2007)

Uma esfera de aço de massa $m_1 = 200\ g$, está presa à extremidade de uma corda de comprimento $l = 45\ cm$, e que tem fixa a outra extremidade. A esfera é abandonada sob a ação de seu peso quando a corda está na horizontal. No ponto mais baixo de sua trajetória a esfera colide elasticamente com um bloco de aço de massa $m_2 = 1{,}8\ kg$, inicialmente em repouso, sobre uma superfície horizontal, cujo coeficiente de atrito vale $\mu = 0{,}2$.

a) Qual a velocidade dos corpos imediatamente após a colisão?

b) Quanto o bloco se desloca sobre a superfície horizontal até atingir o repouso?

68. (3ª fase OBF – 2007)

Dois carrinhos A e B idênticos estão ligados rigidamente por uma barra e juntos (carrinho A + carrinho B + barra) têm a massa de $4\ kg$. Dois carrinhos C e D. de massas $M_C = 2\ kg$ e $M_D = 2kg$. Sâo colocados em repouso entre os carrinhos A e B. a iguais distâncias (Figura 1).

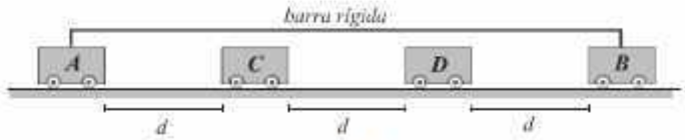


Fig. 1

Sabendo que a velocidade de A e B é de $3m/s$ para a direita, e considerando que o atrito entre as rodas dos carrinhos e o solo é desprezível, responda:

a) Se a colisão entre A e C for perfeitamente inelástica (C fica "grudado" em A) e, entre C e D for perfeitamente elástica, qual será a velocidade final do sistema sabendo que a colisão entre D e B também será perfeitamente inelástica (D fica “grudado” em B)?

b) Qual a velocidade final do sistema considerando a colisão entre A e C perfeitamente inelástica. e entre C e D também perfeitamente inelástica? Compare essa velocidade com aquela obtida no item (a). Explique o resultado.

69. (2ª fase OBF – 2008)

Um projétil é disparado por um canhão e. no ponto mais alto de sua trajetória, a uma distância horizontal de 100 m do canhão, explode, dividindo-se em dois pedaços iguais. Um dos fragmentos é lançado horizontalmente para trás com velocidade de mesmo módulo que possuía o projétil imediatamente antes de explodir. Considerando desprezível a resistência do ar. a que distância entre si cairão no solo os dois fragmentos?

70. (2ª fase OBF – 2008)

Duas partículas, uma de massa m e velocidade v, e outra de massa $2m$ e velocidade $v/2$, movem-se perpendicularmente sobre uma superfície horizontal lisa como mostra a figura 3. Num determinado instante atuam, sobre estas partículas, forças de igual módulo, direção e sentido. Quando estas forças deixam de atuar, a primeira partícula adquire um movimento perpendicular à sua direção inicial, sendo o módulo da velocidade, o mesmo. Qual o módulo da velocidade adquirida pela segunda partícula?

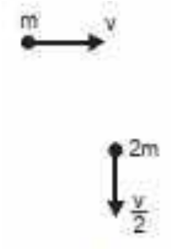


Fig. 3

71. (2ª fase OBF – 2008)

Na superfície de um lago de águas paradas encontra-se em movimento um tronco, de massa $400\ kg$ e comprimento $18\ m$, com uma velocidade constante igual a $4{,}0\ m/s$ em relação às margens do lago. Em um determinado instante, um homem de massa $80\ Kg$ começa a correr sobre ele, saindo de uma extremidade a outra, com uma velocidade igual a $3{,}0\ m/s$ em relação ao tronco e no mesmo sentido de seu movimento. Qual a distância percorrida pelo tronco sobre a água, do instante que o homem deixa uma de suas extremidades e alcança a outra extremidade? Considere desprezível a resistência produzida pela água ao movimento do tronco.

72. (3ª fase OBF – 2009)

A figura 2 representa a força que uma partícula sofre durante um pequeno intervalo de tempo. Calcule o impulso que a partícula sofreu.

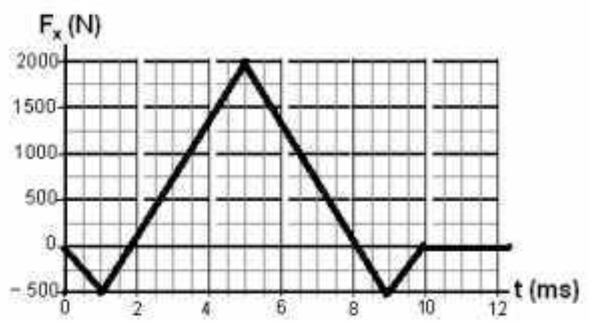


Fig. 2

73. (3ª fase OBF – 2009)

Uma pequena esfera metálica de massa m foi abandonada juntamente com uma bola de borracha de massa M. esférica, de raio R. conforme a figura 4.

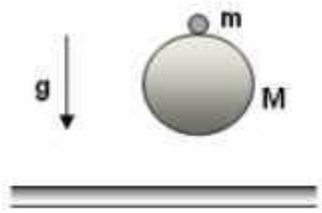


Fig. 4

A massa M é muito menor que m e o volume da esfera metálica é desprezível quando comparado ao da bola de borracha. Considerando que: os movimentos dos centros de massa da esferinha e da bola estão sempre na mesma vertical; o sistema se choca contra o solo e todos os choques envolvidos são perfeitamente elásticos; a distância na vertical percorrida pela esferinha é muito maior que a deformação da bola de borracha; é desprezível a resistência do ar em questão, determine:

a) A velocidade aproximada com que a esferinha se separa da bola na subida.

b) A distância vertical percorrida pela esferinha na subida em função da distância percorrida pela mesma, na descida.

74. (2ª fase OBF – 2009)

Uma esfera de massa $m = 4kg$ presa a uma haste de massa desprezível atinge, numa colisào perfeitamente elástica, um bloco inicialmente em repouso, de massa $m = 6kg$. A haste encontra-se inicialmente na posição horizontal e possui um comprimento igual a $45\ cm$. com mostrado na figura 3. Logo após a colisào. o bloco desliza sobre uma superfície plana com coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0{,}4$, percorrendo uma distância de $50\ cm$. Depois que o bloco passa pela superfície com atrito, ele passa a deslizar sobre uma superfície de coeficiente de atrito cinético desprezível como mostra a figura abaixo. Calcule a altura máxima atingida pelo bloco quando este entra na elevação da pista (á direita).

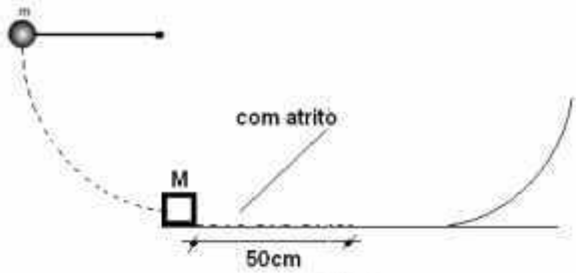


Fig. 3

75. (3ª fase OBF – 2009)

A figura 5 representa duas partículas de massas $m_1 = 4\ kg$ e $m_2 = 6\ kg$ movendo-se em direções opostas, sobre uma superfície plana sem atrito. Elas têm velocidades constantes, cujos módulos são $v_{1i} = 20\ m/s$ e $v_{2i} = 10\ m/s$ e colidem. A colisão é frontal e perfeitamente elástica. Calcule as velocidades finais das partículas.

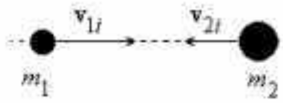
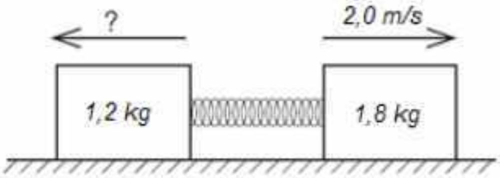


Fig. 5

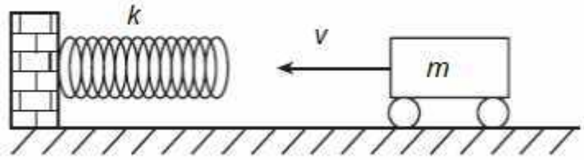
76. (2ª fase OBF – 2010)

Dois blocos são posicionados sobre uma superfície horizontal e sem atrito e conectados por uma mola que é comprimida. Imediatamente após a liberação dos blocos, o bloco de massa $1{,}8\ kg$ adquire uma velocidade de $2{,}0\ m/s$. Determine a velocidade do bloco de $1{,}2\ kg$ imediatamente após a liberação da mola.



77. (3ª fase OBF – 2010)

Um carrinho de massa m com velocidade v movimenta-se sobre uma superfície horizontal conforme a figura abaixo. Este carrinho choca-se com uma mola de constante elástica k (desconsidere todos os efeitos de quaisquer tipos de atrito neste sistema).

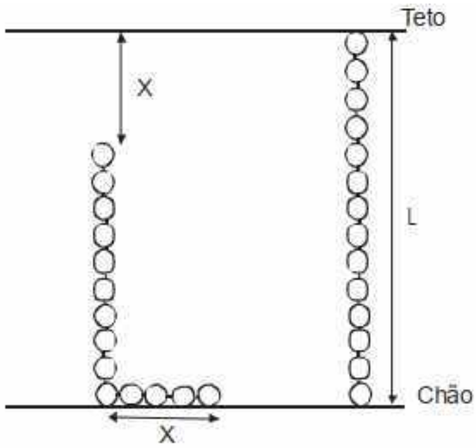


a) Qual o tempo total de colisão entre o carrinho e a mola (tempo em que ambos ficarão em contato)?

b) Faça uma estimativa razoável do impulso total fornecido pela mola após o choque.

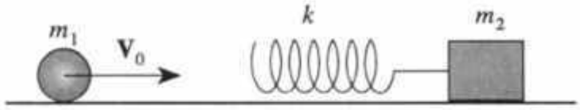
78. (3ª fase OBF – 2010)

Uma corrente de aço de massa M e comprimento L é feita de pequenas argolas entrelaçadas. A corrente esta pendurada na vertical e a parte de baixo toca o chão conforme indicado na figura abaixo. A corrente é então solta e cai na vertical. Considerando x a distância do topo da corrente ao teto, qual será a força (exercida pelo chão) aplicada na corrente durante toda a sua queda. Expresse seu valor como função de M, L, x e g (aceleração gravitacional local).



79. (3ª fase OBF – 2010)

Uma massa m_1, com velocidade inicial V_0, atinge um sistema massa-mola,cuja massa é m_2, inicialmente em repouso, mas livre para se movimentar. A mola é ideal e possui constante elástica k, conforme a figura. Não há atrito com o soio.

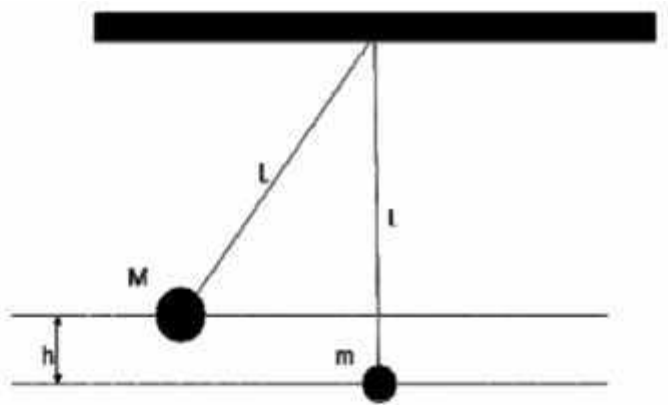


a) Qual é a compressão máxima da mola?

b) Se, após um longo tempo, ambos os objetos, se deslocam na mesma direção, qual serão as velocidades finais V_1 e V_2 das massas m_1 e m_2, respectivamente?

80. (3ª fase OBF – 2010)

Dois pêndulos de mesmo comprimento L são montados de acordo com o diagrama a seguir. Num instante $t = 0$ o pêndulo de massa M é posicionado a uma altura h com relação à horizontal e o pêndulo de massa m permanece em repouso na vertical.



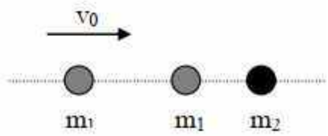
Ao ser liberada a massa M inicia o movimento colidindo com a massa m $(M > m)$ (desconsidere todos os efeitos devido a quaisquer tipos de atrito neste sistema).

a)Determine a altura máxima que as massas M e m atingem após a colisão com relação à horizontal. Use g para a aceleração gravitacional local.

b)Qual será o tempo necessário, após a primeira colisão entre as massas, para que as massas voltem a colidir novamente?

81. (3ª fase OBF – 2013)

Com base na figura, as duas esferas à direita estão inicialmente em repouso e esfera da esquerda incide sobre a do centro com velocidade v_0. Supondo que as colisões sejam frontais e elásticas, mostre que se $m_1 \geq m_2$ há duas colisões $m_1 < m_2$ há três colisões.



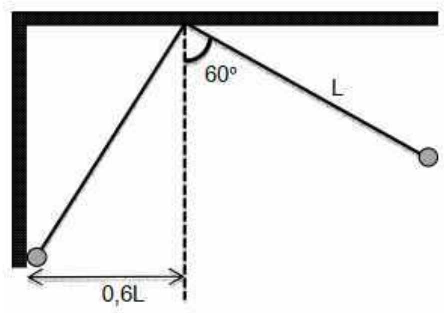
82. (2ª fase OBF – 2014)

Uma bola de futebol de $450\ g$ está se movendo a $2{,}0\ m/s$ quando um jogador a chuta com uma força constante de $45{,}0\ N$ na mesma direção de seu movimento. Por quanto tempo o pé do jogador ficará em contato com a bola para aumentar sua velocidade para $4{,}0\ m/s$?

83. (3ª fase OBF – 2014)

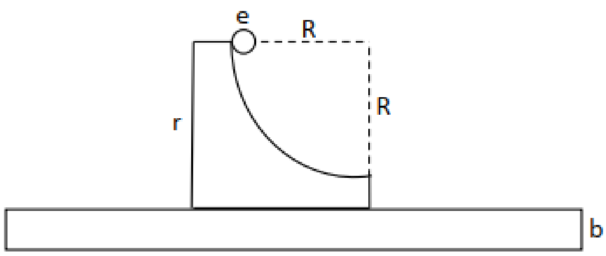
Um pêndulo simples de comprimento L é posto a oscilar com uma abertura angular de 60°. A massa pendular colide com uma parede onde perde 10,0% de sua energia. Quantas colisões o pêndulo realiza com a parede?

Dados $log\ (0{,}4) = -\ 0{,}40$ e $log\ (0{,}90) = -\ 0{,}046$.



84. (2ª fase OBF – 2016)

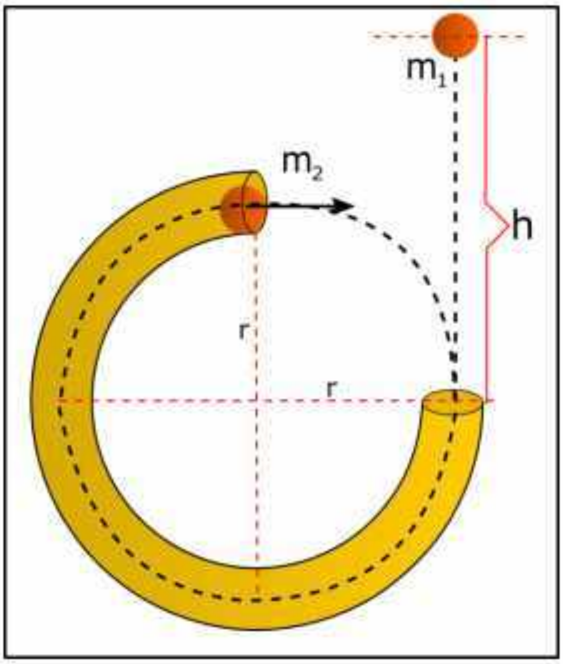
Com a intenção de estudar os movimentos dos corpos e suas relações com a massa, foi construído para uma feira de ciências um experimento que consiste de uma base "b", uma rampa "r" e uma esfera "e", conforme ilustrado na figura abaixo. A base foi fixada ao solo, de modo que sua superfície superior plana e absolutamente lisa ficasse perfeitamente nivelada na horizontal. A rampa, com formato circular de raio $R = 6\ m$ e massa $5M$, foi apoiada em repouso sobre a base, mas podendo deslizar sobre ela praticamente sem atrito. No ponto mais alto da rampa, uma esfera maciça, homogênea, de massa M e absolutamente lisa, foi então abandonada, deslizando sem rolar pela rampa conforme a figura. Desprezando a resistência do ar e qualquer outro atrito, e considerando o módulo da aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$, determine, em m/s, o módulo da velocidade da esfera no instante em que ela perde o contato com a rampa.



85. (2ª fase OBF – 2017)

Uma esfera de massa m_1 é abandonada de uma altura h, conforme ilustra figura. A esfera m_1 entra em um tubo circular e percorrendo o trajeto do tubo, até colidir elasticamente com outra esfera de massa m_2 em repouso.

Desprezando todos os atritos bem como as dimensões das esferas, pede-se



a) justificar os princípios físicos das leis da conservação presentes nesta situação

b) determinar o valor de h tal que na colisão, a massa m_1 entre em repouso e a massa m_2 atinja o outro extremo do tubo.

GABARITO

5. Gabarito sem comentários

1) B
2) A. 3m/s B. 13m C. 5,12mC D. 5,28mC
3) 1. $t = \frac{Mv_0 - mv_f}{(M+m)a}$ 2. $d = \frac{Dv_0}{v_0+v_f} + \frac{(Mv_0-mv_f)^2}{2a(M+m)^2}$
4) 1 m/s
5) 30 N
6) a) $(0,4i + 0,8j)\ (kg \cdot m/s)$ b) $\frac{1}{4} + \frac{4\sqrt{5}}{45}\ m$
7) D
8) a) $-\frac{8}{3}\ m/s$ e $-\frac{2}{3}\ m/s$ b) $-\frac{10}{3}\ m$
9) C
10) A
11) B
12) a) $\vec{p} = \left[0,2(5-\sqrt{3}) \cdot \hat{\imath} + 0,2 \cdot \hat{\jmath}\right] kg \cdot m/s$ b) $\frac{\sqrt{13}}{20}\ m$
13) sem alternativa
14) B
15) B
16) A
17) a) $3,35 \cdot 10^5\ J/kg$ b) $8,59 \cdot 10^{-6}$ c) $3,39\ cm$ d) $11,24\ cm/s$
18) D
19) Ver resolução
20) A
21) D
22) C
23) D
24) C
25) D
26) B
27) D
28) C
29) B
30) C
31) A
32) C
33) $d = \frac{m^2 \cdot L}{0,6 \cdot M^2} \cdot \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$
34) $\sqrt{\frac{4B}{3M}}$
35) C
36) D
37) A (vide comentários)
38) A
39) D
40) D
41) vide comentários.
42) $v_2 = v_1\sqrt{sen^2(\theta) + e^2 \cdot \cos^2(\theta)}$ e $\alpha = arctg[e \cdot cotg(\theta)]$
43) $x = \sqrt{\frac{2am(d-L)}{k}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\frac{m}{M}}}$
44) E
45) $d = \frac{mv\sqrt{2}}{2(M+m)g} \cdot \left(\pm \frac{M \cdot V}{M+m} + \sqrt{\left(\frac{M \cdot V}{m+M}\right)^2 + \frac{v^2}{2}}\right)$ o sinal positivo indica o caso de colisão quando M está subindo e o sinal negativo quando M está descendo.
46) A
47) 10 N
48) $\frac{E_{C,B}}{E_{C,A}} = \frac{8cos^2\theta}{9-8cos^2\theta}$
49) C
50) E
51) B
52) $E_C = \frac{m}{2}\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 v_0^2$
53) O conceito físico envolvido é a conservação da quantidade de movimento e centro de massa.
54) $Q'_A = \frac{3Q}{8}, Q'_B = \frac{3Q}{8}, Q'_C = \frac{Q}{4}$
55) $\Delta y_{cm} = 0$
56) D
57) E

58) a) $\tau = GM(m_1 + m_2)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$ b) $E_{adq} = \frac{GMm_2}{r}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$
59) 10 N
60) $200\,\frac{m}{s}$
61) a) 1,75 N b) -2,0 N
62) a) $10\sqrt{2}\ m/s$ b) 6,67 m/s
63) a) $x = 4000\ m$ e $y = 1000\ m$ b) $x = 6600\ m$ e $y = 2235\ m$ c) $\sqrt{29696400}\ kN$
64) a) $v_b = -\frac{m}{M}v$ b) $v_N \cong 0$
65) a) $5\ N \cdot s$ b) $50\ N$
66) a) $18750\sqrt{3}\ m$ b) $\Delta E_M = 9375\ J$
67) a) $\vartheta' = -2,4\ m/s$ e $v' = 0,6\ m/s$
b) $9\ cm$
68) a) a velocidade final do sistema é 1,5 m/s.
b) A velocidade final do sistema é v = 1,5 m/s, ou seja, a mesma do item (a).
69) 400 m
70) $\left|\overrightarrow{\vartheta_R}\right| = \frac{\vartheta \cdot \sqrt{5}}{2}$ ou $\left|\overrightarrow{\vartheta_R}\right| = \frac{|\vec{\vartheta}|}{2}$
71) 21 m
72) $5\ N \cdot s$
73) a) $v_M + v_m$ b) $9H$
74) $h = 0,088\ m$
75) $v_{2f} = 14\ m/s \quad v_{1f} = -16\ m/s$
76) $v = 3\,m/s$
77) a) $t = \frac{\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}}{2}$; b) $I = 2m \cdot v$
78) $N = \frac{3 \cdot M \cdot g \cdot x}{L}$
79) a) $v_1 = \frac{(m1 - m2)v_0}{(m_1 + m_2)}$ b) $v_2 = \frac{2m_1 \cdot v_0}{(m_1 + m_2)}$
80) a) $h_M = \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{(M-m)v}{(M+m)}\right)^2$ e $h_m = \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{2Mv}{(M+m)}\right)^2$ b) $\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$
81) Demonstração
82) $0,2\ s$
83) 9 colisões
84) $10\ m/s$
85) a) vide comentários. b) $h = r\left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right]$

ESCLARECENDO!

6. Lista de questões comentadas

1. (IME – 2020 – 1ª Fase)

Duas partículas com cargas elétricas q_1 e q_2 movem-se no plano xy e suas posições em função do tempo t são dadas pelos pares ordenados $p_1(t) = [x_1(t), y_1(t)]$ e $p_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$, respectivamente.

Dados:

- constante de Coulomb: $k = 9{,}0 \text{ x } 10^9$;
- cargas elétricas: $q_1 = 2{,}0 \text{ x } 10^{-6}$ e $q_2 = 2{,}5 \text{ x } 10^{-6}$; e
- posições das partículas: $p_1(t) = \left(\frac{5}{\sqrt{t}}, \frac{1}{\sqrt{t}} - 1\right), p_2(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{4}{\sqrt{t}} - 1\right)$

Considerando todas as grandezas dadas no Sistema Internacional de Unidades, o módulo da componente y do impulso da força que uma partícula exerce sobre a outra no intervalo de tempo de 1,0 a 6,0 é:

f) $13{,}5 \text{ x } 10^{-3}$

g) $18{,}9 \text{ x } 10^{-3}$

h) $25{,}2 \text{ x } 10^{-3}$

i) $31{,}5 \text{ x } 10^{-3}$

j) $37{,}8 \text{ x } 10^{-3}$

Comentários:

A distância entre as cargas vale:

$$D(t) = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{t}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{t}}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt{t}}$$

A força elétrica:

$$F(t) = \frac{kq_1q_2}{D(t)^2} = 0{,}018t$$

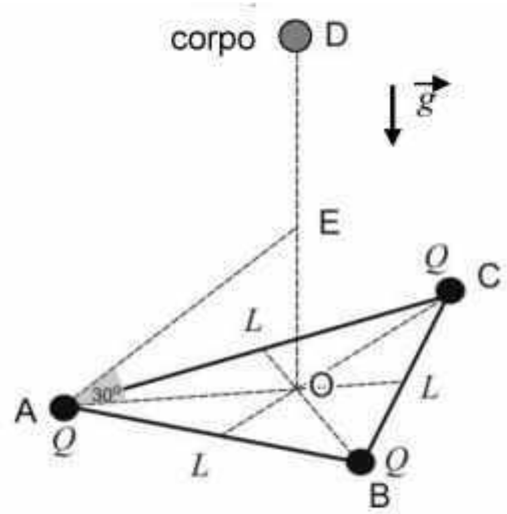
$$F_y(t) = F(t) \cdot \frac{3}{5} = 0{,}0108t$$

O impulso vale a área do gráfico:

$$0{,}0108 \cdot \left(\frac{6^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 0{,}189\ N.s$$

Gabarito: B

2. (IME – 2020 – 1ª Fase)



A figura apresenta três esferas de cargas positivas Q fixas nos vértices de um triângulo equilátero ABC de centro O e localizado no plano horizontal. Um corpo de massa m, posicionado no ponto D em t = 0, tem a ele grudadas milhares de micropartículas de cargas positivas e massas desprezíveis. O corpo sofre uma queda vertical até o ponto O. No intervalo $0 \leq t < 5/3\ s$, diversas micropartículas vão se soltando gradativamente do corpo, de modo que sua velocidade permanece constante. O restante das micropartículas desprende-se totalmente em t = 5/3 s, exatamente no ponto E, no qual o ângulo entre os segmentos AO e AE é de 30^0. O corpo continua em movimento até atingir o plano ABC no ponto O em t = 8/3 s.

Determine:

e) a velocidade do corpo no intervalo $0 \leq t < 5/3\ s$

f) a altura inicial do corpo (comprimento DO) em t = 0;

g) a carga do corpo imediatamente antes do instante t = 5/3 s, quando o restante das micropartículas se desprendeu;

h) a carga inicial do corpo em t = 0.

Observação:

- considere a massa do corpo constante;
- despreze as dimensões do corpo;
- ao se desprenderem, as cargas das micropartículas não influenciam no movimento do corpo.

Dados:

- massa do corpo: m = 2,7 kg;
- cargas fixas nos vértices do triângulo: $Q = 10^{-4}\ C$;
- aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$;
- constante dielétrica do meio: $k = 9 \text{ x } 10^9\ Nm^2/C^2$;
- comprimentos dos lados do triângulo: L = 24 m.

Comentários:

$$OE = \frac{2}{3}L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\tan 30° = 8m$$

$$AE = \frac{OE}{\sin 30°} = 16m$$

A.

$$y = y_0 - V_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

$$0 = 8 - V_{0y}t - 5t^2 = 8 - V_{0y} - 5 \rightarrow V_{0y} = 3m/s$$

B.

$$H = 8 + \left(\frac{5}{3}\right)V_{0y} = 13m$$

$$AD = \sqrt{AO^2 + 13^2} = 19m$$

C.

$$\frac{3kqQ}{16^2}(\sin 30°) = \frac{27}{128} \cdot 10^5 q = mg = 27 \rightarrow q = 5{,}12\ mC$$

D.

$$\frac{3kqQ}{19^2}\left(\frac{13}{19}\right) = \frac{27 \cdot\ 13}{6859} \cdot 10^5 q = mg = 27 \rightarrow q = 5{,}28\ mC$$

Gabarito: A. 3m/s B. 13m C. 5,12mC D. 5,28mC

3. (IME – 2004)

Um tanque de guerra de massa M se desloca com velocidade constante v_0. Um atirador dispara um foguete frontalmente contra o veículo quando a distância entre eles é D. O foguete de massa m e velocidade constante v_f colide com o tanque, alojando-se em seu interior. Neste instante o motorista freia com uma aceleração de módulo a. Determine:

1. o tempo t transcorrido entre o instante em que o motorista pisa no freio e o instante em que o veículo para;

2. a distância a que, ao parar, o veículo estará do local de onde o foguete foi disparado.

Comentários:

Inicialmente, vamos aplicar a conservação da quantidade de movimento para a colisão do foguete com o tanque:

$$Q_{inicial} = Q_{final} \Rightarrow M \cdot v_0 - m \cdot v_f = (M + m) \cdot u \Rightarrow \boxed{u = \frac{M \cdot v_0 - m \cdot v_f}{M + m}}$$

Em que adotamos como eixo de referência orientação no sentido do deslocamento do tanque.

Após a colisão, vamos calcular o tempo que o veículo leva até parar:

$$u_{final} = u + a \cdot t \Rightarrow 0 = u - a \cdot t \Rightarrow \boxed{t = \frac{M \cdot v_0 - m \cdot v_f}{(M + m) \cdot a}}$$

Até atingir o veículo, o foguete percorre uma distância d_f:

$$d_f = v_f \cdot \Delta t_f$$

Note que o tempo que foguete leva para atingir o veículo (Δt_f) pode ser dado pela velocidade relativa e a distância relativa entre eles:

$$\Delta t_f = \frac{\Delta s_{rel}}{v_{rel}} = \frac{D}{v_0 + v_f}$$

Então:

$$d_f = v_f \cdot \frac{D}{v_0 + v_f}$$

Por outro lado, a distância d_{f+T} percorrida até o conjunto parar é de:

$$0^2 = u^2 - 2 \cdot a \cdot d_{f+T} \Rightarrow d_{f+T} = \frac{u^2}{2a} = \frac{1}{2a}\left(\frac{M \cdot v_0 - m \cdot v_f}{M + m}\right)^2$$

Portanto, a distância do veículo quando ele para até a posição do disparo é de:

$$d = |d_f - d_{f+T}|$$

$$\boxed{d = \left|v_f \cdot \frac{D}{v_0 + v_f} - \frac{1}{2a} \cdot \left(\frac{M \cdot v_0 - m \cdot v_f}{M + m}\right)^2\right|}$$

Se considerarmos que a quantidade de movimento do foguete é maior que a do veículo, vemos que após o choque, o tanque deverá recuar e a distância será dada por:

$$\boxed{d = v_f \cdot \frac{D}{v_0 + v_f} + \frac{1}{2a} \cdot \left(\frac{M \cdot v_0 - m \cdot v_f}{M + m}\right)^2}$$

Gabarito: 1. $t = \frac{Mv_0 - mv_f}{(M+m)a}$ **2.** $d = \frac{Dv_0}{v_0+v_f} + \frac{(Mv_0 - mv_f)^2}{2a(M+m)^2}$

---

4. **(IME – 2005)**

Um canhão de massa $M = 200\ kg$ em repouso sobre um plano horizontal sem atrito e carregado com um projétil de massa $m = 1\ kg$, permanecendo ambos neste estado até o projétil ser disparado na direção horizontal. Sabe-se que este canhão pode ser considerado tuna maquina térmica com 20% o de rendimento, porcentagem essa utilizada no movimento do projétil, e que o calor fornecido a esta máquina térmica é igual a $100.000\ J$. Suponha que a velocidade do projétil após o disparo é constante no interior do canhão e que o atrito e a resistência do ar podem ser desprezados. Determine a velocidade de recuo do canhão após o disparo.

Comentários:

Do enunciado vemos que a energia cinética que é transferido ao projétil é dada por:

$$E_c = \eta \cdot Q = 20\% \cdot 100.000 = 20.000\ J$$

Denotando por u a velocidade de recuo do canhão e por v a velocidade do projétil, podemos aplicar a conservação da quantidade de movimento do sistema na horizontal, tomando como eixo de referência orientado no sentido do deslocamento do projétil. Então:

$$Q_{antes} = Q_{depois}$$

$$0 = m \cdot v - M \cdot u \Rightarrow v = \frac{M}{m} \cdot u \Rightarrow \boxed{v = 200 \cdot u}$$

A energia cinética final do projétil é de:

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow 20.000 = \frac{1 \cdot v^2}{2} \Rightarrow \boxed{v = 200\ m/s}$$

Portanto:

$$200 = 200 \cdot u \Rightarrow \boxed{u = 1\ m/s}$$

Gabarito: 1 m/s

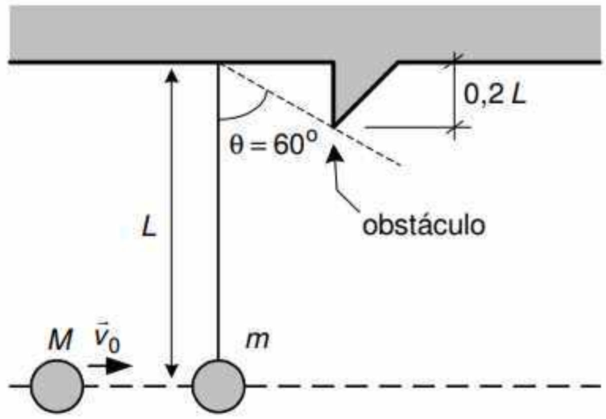
---

5. **(IME – 2007)**

Um pêndulo com comprimento $L = 1\ m$, inicialmente em repouso, sustenta uma partícula com massa $m = 1\ kg$. Uma segunda partícula com massa $M = 1\ kg$ movimenta-se na direção horizontal com velocidade constante v_0 até realizar um choque perfeitamente inelástico com a primeira. Em função do choque, o pêndulo entra em movimento e atinge um obstáculo, conforme ilustrado na figura. Observa-se que a maior altura alcançada pela partícula sustentada pelo pêndulo é a mesma do ponto inferior do obstáculo. O tio pendular possui massa desprezível e permanece sempre esticado. Considerando a aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$ e a resistência do ar desprezível, determine:

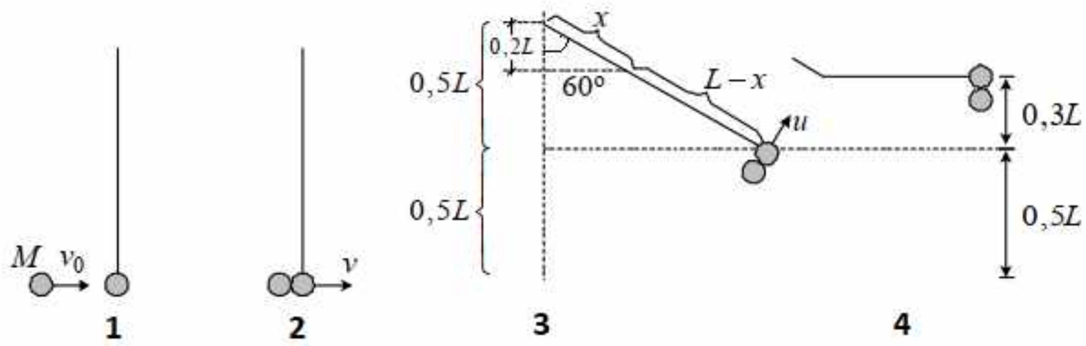
a. a velocidade v_0 da partícula com massa M antes do choque;

b. a força que o fio exerce sobre a partícula de massa m imediatamente após o fio bater no obstáculo.



Comentários:

Nesse problema, temos quatro momentos cruciais para a sua resolução:



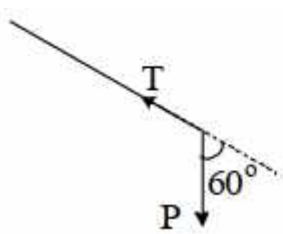
Entre 2 e 4, podemos conversar a energia mecânica:

$$\frac{(m+M)\cdot v^2}{2} = (M+m)\cdot g \cdot 0{,}8L \Rightarrow v^2 = 2\cdot 10\cdot 0{,}8\cdot 1 \Rightarrow \boxed{v = 4\, m/s}$$

Entre 1 e 2 temos uma colisão inelástica:

$$M\cdot v_0 = (M+m)\cdot v \Rightarrow v_0 = 2\cdot v \Rightarrow \boxed{v_0 = 8\, m/s}$$

Logo após o choque com o obstáculo, temos:



Aplicando a segunda lei de Newton, vem:

$$R_{cp} = (M+m)\cdot a_{cp} \Rightarrow T - P\cdot\cos 60° = (m+M)\cdot\frac{u^2}{L-x} \Rightarrow \boxed{T - 20\cdot\frac{1}{2} = 2\cdot\frac{u^2}{L-x}}\ (eq.1)$$

Da geometria em 3, podemos escrever que:

$$\cos 60° = \frac{0{,}2L}{x} \Rightarrow x = 0{,}4\,L \Rightarrow \boxed{L - x = 0{,}6\,m}\ (eq.2)$$

Para determinar a velocidade u, basta conservar a energia mecânica entre 2 e 3:

$$\frac{(m+M)\cdot v^2}{2} = \frac{(m+M)\cdot u^2}{2} + (m+M)\cdot g\cdot 0{,}5L$$

$$4^2 = u^2 + 10\cdot 1 \Rightarrow \boxed{u^2 = 6}\ (eq.3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), temos:

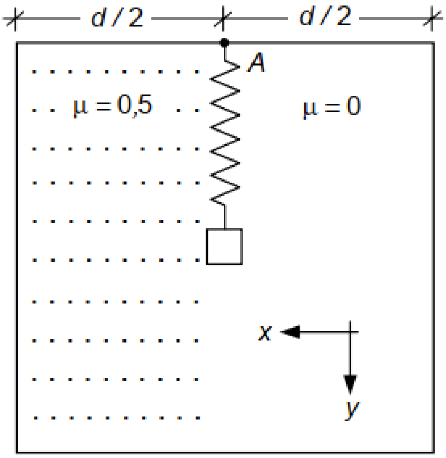
$$T - 20\cdot\frac{1}{2} = 2\cdot\frac{6}{0{,}6} \Rightarrow \boxed{T = 30\,N}$$

Gabarito: 30 N

---

6. (IME – 2008)

A figura abaixo ilustra um pequeno bloco e uma mola sobre uma mesa retangular de largura d, vista de cima. A mesa é constituída por dois materiais diferentes, um sem atrito e o outro com coeficiente de atrito cinético μ igual a 0,5. A mola tem uma de suas extremidades fixada no ponto A e a outra no bloco. A mola está inicialmente comprimida de 4 cm, sendo liberada para que o bloco oscile na região sem atrito na direção y. Depois de várias oscilações, ao passar pela posição na qual tem máxima velocidade, o bloco é atingido por uma bolinha que se move com velocidade de 2 m/s na direção x e se aloja nele. O sistema é imediatamente liberado da mola e se desloca na parte áspera da mesa. Determine:



mesa vista de cima

a) o vetor quantidade de movimento do sistema $bloco + bolinha$ no instante em que ele é liberado da mola;

b) a menor largura e o menor comprimento da mesa para que o sistema pare antes de cair.

Dados:

comprimento da mola $= 25\ cm;$

constante elástica da mola $= 10\ N/cm;$

massa da bolinha $= 0{,}2\ kg;$

massa do bloco $= 0{,}4\ kg;$

aceleração da gravidade $= 10\ m/s^2.$

Comentários:

a)

Pela conservação da energia, podemos encontrar a velocidade do bloco imediatamente antes da colisão.

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{MV^2}{2}$$
$$V = 2\ m/s$$

Pela conservação da quantidade de movimento:

$$\overrightarrow{Q_0} = \overrightarrow{Q_f}$$
$$M\vec{V} + m\vec{v} = (M+m)\overrightarrow{v'}$$
$$0{,}4(0\ ,2) + 0{,}2(2\ ,0) = 0{,}6\overrightarrow{v'}$$
$$\therefore \overrightarrow{v'} = \frac{1}{6}(4\ ,8)$$

Vetor quantidade de movimento: $\overrightarrow{Q_f} = (M+m)\overrightarrow{v'} = (0{,}4i + 0{,}8j)\ (kg \cdot m/s)$

b)

A aceleração após a colisão é dada por:

$$a = \mu g = \frac{5m}{s^2}$$

O módulo da velocidade inicial do conjunto:

$$\left|\overrightarrow{v'}\right| = \frac{2\sqrt{5}}{3} m/s$$

A distância até parar pode ser calculada por Torricelli:

$$D = \frac{\left|\overrightarrow{v'}\right|^2}{2a} = \frac{2}{9}\ m$$

A trajetória do conjunto forma um ângulo θ com o eixo x, tal que:

$$sen\theta = \frac{v_x}{v'} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$cos\theta = \frac{v_y}{v'} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

A largura mínima da mesa é de:

$$L_{min} = 2D_x = 2 \cdot D \cdot sen\theta$$

$$L_{min} = \frac{4\sqrt{5}}{45}\ m$$

O comprimento mínimo da mesa é de:

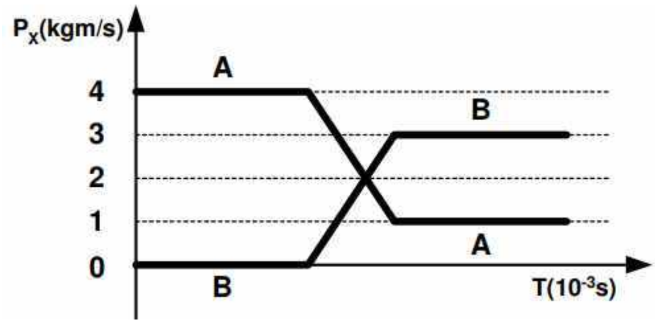
$$C_{min} = 0{,}25 + D_y = 0{,}25 + D \cdot cos\theta$$

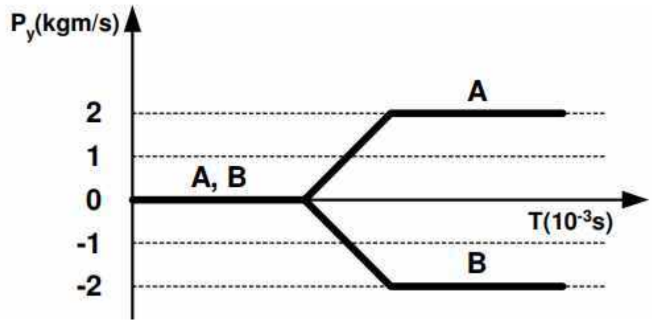
$$\therefore C_{min} = \frac{1}{4} + \frac{4\sqrt{5}}{45}\ m$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{(0,4i + 0,8j)\ (kg \cdot m/s)}$ **b)** $\boldsymbol{\frac{1}{4} + \frac{4\sqrt{5}}{45}\ m}$

---

7. (IME – 2009)





Duas partículas A e B de massas $m_A = 0{,}1\ kg$ e $m_B = 0{,}2\ kg$ sofrem colisão não frontal. As componentes x e y do vetor quantidade de movimento em função do tempo são apresentadas nos gráficos acima.

Considere as seguintes afirmativas:

I. A energia cinética total é conservada.

II. A quantidade de movimento total é conservada.

III. O impulso correspondente à partícula B é $2i + 4j$.

IV. O impulso correspondente à partícula A é $-3i + 2j$.

As afirmativas corretas são apenas:

a) I e II

b) I e III

c) II e III

d) II e IV

e) III e IV

Comentários:

I.FALSA. $E_0 = \frac{m_A v_A^2}{2} = 80\,J$ e $E_f = 57{,}5$ J.

II.VERDADEIRA. Em x, a quantidade de movimento do sistema inicialmente é $4\,kg \cdot m/s$ e, após a colisão, esse valor se conserva. Em y, a quantidade de movimento do sistema se conserva sendo constante igual a 0.

III.FALSA. O impulso correspondente à partícula B é $3i\ -2j$.

IV.FALSA. O impulso correspondente à partícula A é $-3i + 2j$.

Gabarito: D

---

8. **(IME – 2009)**

Dois corpos A e B encontram-se sobre um plano horizontal sem atrito. Um observador inercial O está na origem do eixo x. Os corpos A e B sofrem colisão frontal perfeitamente elástica, sendo que, inicialmente, o corpo A tem velocidade $v_A = 2\,m/s$ (na direção x com sentido positivo) e o coipo B está parado na posição $x = 2\,m$. Considere um outro observador inercial O' que no instante da colisão tem a sua posição coincidente com a do observador O. Se a velocidade relativa de O' em relação a O é $v_{0'} = 2\,m/s$ (na direção x com sentido positivo), determine em relação a O

a) as velocidades dos corpos A e B após a colisào;

b) a posição do corpo A dois segundos após a colisào.

Dados:

• massa de A = $100\,g$;

• massa de B = $200\,g$.

Comentários:

a)

Em relação à O', o corpo A está inicialmente parado e o corpo B tem velocidade $v_B = 2\,m/s$ (na direção de x com sentido negativo).

Dado que a colisão foi perfeitamente elástica, temos que velocidade relativa de afastamento é igual a velocidade relativa de aproximação:

$$v'_A - v'_B = 2$$

A quantidade de movimento se conserva:

$$m_B \cdot 2 = m_A \cdot v'_A + m_B \cdot v'_B$$

$$4 = v'_A + 2v'_B$$

Assim:

$$v'_B = -\frac{2}{3}\frac{m}{s} \;\; e\; v'_A = -\frac{8}{3}\frac{m}{s}$$

b)

Posição do corpo A:

$$S = 2 - \frac{8}{3} \cdot 2 = -\frac{10}{3}\ m$$

Gabarito: a) $-\frac{8}{3}\ m/s$ e $-\frac{2}{3}\ m/s$ b) $-\frac{10}{3}\ m$

---

9. (IME – 2010)

Um soldado em pé sobre um lago congelado (sem atrito) atira horizontalmente com uma bazuca. A massa total do soldado e da bazuca é 100 kg e a massa do projétil é 1 kg. Considerando que a bazuca seja uma máquina térmica com rendimento de 5% e que o calor fornecido a ela no instante do disparo é 100 kJ, a velocidade de recuo do soldado é, em m/s,

a) 0,1

b) 0,5

c) 1,0

d) 10.0

e) 100,0

Comentários:

De acordo com o rendimento da bazuca, ela realiza um trabalho de 5 kJ.

Essa energia é usada para acelerar o projétil, assim, o projétil sai da bazuca com velocidade igual a:

$$\tau = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = 100\frac{m}{s}$$

Conservando a quantidade de movimento, temos:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow 0 = m_B v_B + m_S v_S$$

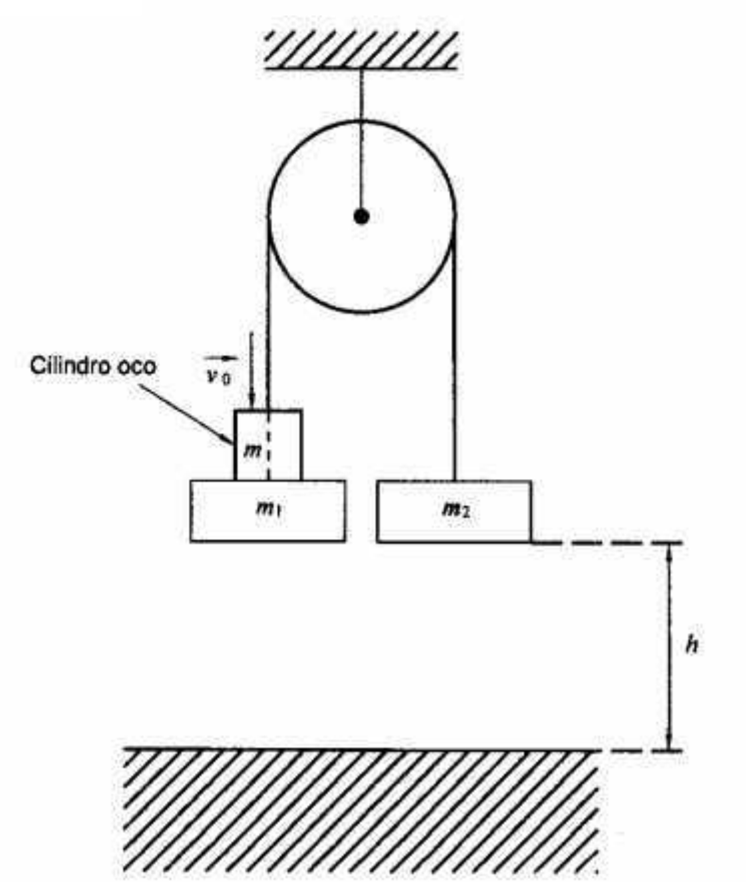
$$v_S = -1\ m/s$$

O sinal negativo indica que o soldado recua com velocidade de 1 m/s.

Gabarito: C

---

10. (IME – 2011)



A figura acima apresenta duas massas $m_1 = 5\ kg$ e $m_2 = 20\ kg$ presas por um fio que passa por uma roldana. As massas são abandonadas a partir do repouso, ambas a uma altura h do solo, no exato instante em que um cilindro oco de massa $m = 5\ kg$ atinge m_1 com velocidade $v = 36\ m/s$, ficando ambas coladas. Determine a altura h, em metros, para que m_1 chegue ao solo com velocidade nula.

Dado:

• Aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$

Observação:

• A roldana e o fio são ideais.

a) 5,4

b) 2,7

c) 3,6

d) 10,8

e) 1,8

Comentários:

Na colisão a quantidade de movimento se conserva:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow mv_0 = (m + m_1 + m_2)v$$

$$\Rightarrow v = 6\ m/s$$

A aceleração do sistema é dada por:

$$F_R = m_{total} \cdot a \Rightarrow a = \frac{10}{3} m/s^2$$

Para que o corpo 1 chegue ao solo com velocidade nula:

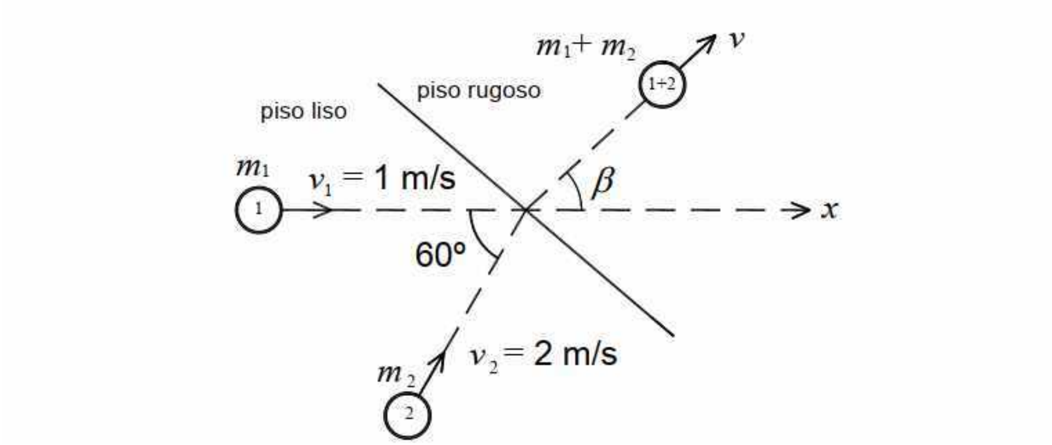
$$v^2 = v_0^2 + 2ah \Rightarrow 0 = 36 + 2\left(-\frac{10}{3}\right)h$$

$$\Rightarrow h = 5{,}4\, m$$

Gabarito: A

---

11. (IME – 2012)



Duas bolas, 1 e 2. movem-se em um piso perfeitamente liso. A bola 1, de massa $m_1 = 2\,kg$, move-se no sentido da esquerda para direita com velocidade $v_1 = 1\,m/s$. A bola 2. de massa $m_2 = 1\,kg$, move-se com ângulo de $60°$ com o eixo x, com velocidade $v_2 = 2\,m/s$. Sabe-se que o coeficiente de atrito cinético entre as bolas e o piso rugoso é $0{,}10 \sec^2 \beta$ e a aceleração gravitacional é $10\,m/s^2$. Ao colidirem, permanecem unidas após o choque e movimentam-se em um outro piso rugoso, conforme mostra a figura. A distância percorrida, em metros, pelo conjunto bola 1 e bola 2 até parar é igual a

a) 0,2

b) 0,5

c) 0,7

d) 0,9

e) 1,2

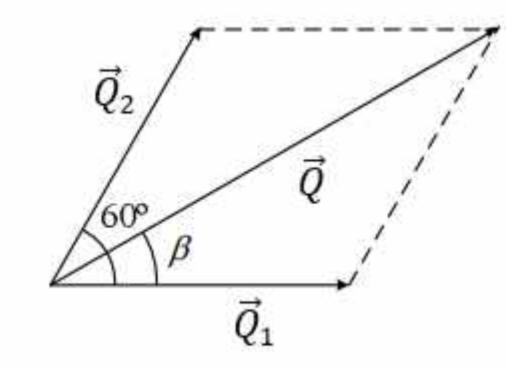
Comentários:

Inicialmente, devemos calcular o módulo da quantidade de movimento inicial para cada corpo:

$$\begin{cases} Q_1 = m_1 \cdot v_1 = 2 \cdot 1 = 2\,kg \cdot m/s \\ Q_2 = m_2 \cdot v_2 = 1 \cdot 2 = 2\,kg \cdot m/s \end{cases}$$

Como na colisão existe conservação da quantidade de movimento, então:

$$\vec{Q}_{inicial} = \vec{Q}_{final} = \vec{Q} \text{ e } \vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$$



O módulo de $\vec{Q}$ é dado por:

$$Q^2 = Q_1^2 + Q_2^2 + 2 \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \cos 60° \Rightarrow \boxed{Q = 2\sqrt{3}\, kg \cdot m/s}$$

Em que $Q = (m_1 + m_2) \cdot v$, então:

$$\boxed{v = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ m/s}$$

Devido ao fato de $Q_1 = Q_2$, pela geometria vemos que $\beta = 30°$. Podemos determinar a distância percorrida no piso rugoso por Torricelli:

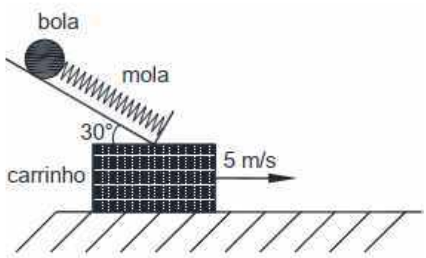
$$v_f^2 = v_i^2 - 2 \cdot a \cdot \Delta s \Rightarrow 0 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot (0{,}1 \cdot \sec^2 \beta) \cdot 10 \cdot \Delta s$$

$$\boxed{d = 0{,}5\ m}$$

Gabarito: B

---

12. (IME – 2012)



A figura apresenta um carrinho que se desloca a uma velocidade constante de $5\ m/s$ para a direita em relação a um observador que está no solo. Sobre o carrinho encontra-se um conjunto formado por um plano inclinado de $30°$, uma mola comprimida inicialmente de $10\ cm$ e uma pequena bola apoiada em sua extremidade. A bola é liberada e se desprende do conjunto na posição em que a mola deixa de ser comprimida. Considerando que a mola permaneça não comprimida após a liberação da bola, devido a um dispositivo mecânico, determine:

a) o vetor momento linear da bola em relação ao solo no momento em que se desprende do conjunto;

b) a distância entre a bola e a extremidade da mola quando a bola atinge a altura máxima.

Dados:

• Constante elástica da mola: $k = 100\ N \cdot m^{-1}$

• Massa da bola: $m = 200\ g$

• Aceleração da gravidade: $g = 10\ m \cdot s^{-2}$

Observação:

A massa do carrinho é muito maior que a massa da bola.

Comentários:

a)

Determinando velocidade com conservação de energia:

$$\frac{k \cdot x^2}{2} = m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$\frac{k \cdot x^2}{2} = m \cdot g \cdot x \cdot sen30° + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (\frac{k \cdot x^2}{2} - m \cdot g \cdot x \cdot sen30°)}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{0{,}2} \cdot (\frac{100 \cdot 0{,}10^2}{2} - 0{,}2 \cdot 10 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{1}{2})}$$

$$v = \sqrt{10 \cdot (0{,}5 - 0{,}1)} = 2\ m/s$$

A velocidade horizontal e vertical serão:

$$V_x = 2 \cdot cos30° = \sqrt{3}\ m/s$$

$$V_y = 2 \cdot sen30° = 1\ m/s$$

Em relação a Terra, os valores são:

$$V'_x = (5 - \sqrt{3})\ m/s$$

$$V'_y = 1\ m/s$$

A quantidade de movimento para alguém no solo será:

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{V}$$

$$\vec{Q} = 0{,}200 \cdot [(5 - \sqrt{3})\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}]\ \frac{kg \cdot m}{s}$$

b)

Para descobrir a altura máxima, podemos realizar os cálculos com o referencial carrinho, já que ele tem a velocidade constante.

Para a vertical temos:

$$V^2 = \mathrm{V}o^2 + 2 \cdot \mathrm{a} \cdot \Delta \mathrm{s}$$
$$0 = \mathrm{V}y^2 - 2 \cdot g \cdot y$$
$$y = 0{,}05m$$

Na horizontal, X é dado por:

$$x = V_x \cdot t_{subida}$$

E t_{subida} é de:

$$S = S_o + V_o t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow y = V_y t_{sub} + \frac{g \cdot t_{sub}^2}{2}$$
$$0{,}05 = t_{sub} - 5 \cdot t_{sub}^2 \Rightarrow t_{sub} = 0{,}1\ s$$

Logo:

$$x = 0{,}1\sqrt{3}\ m/s$$

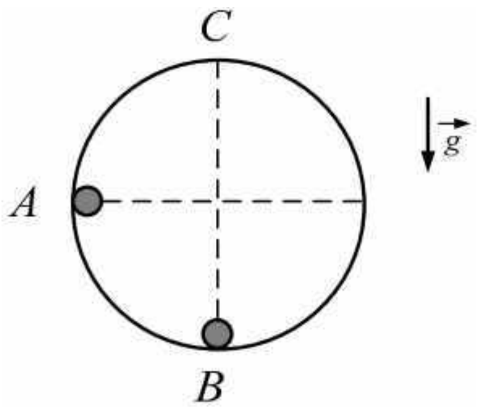
Portanto, a distância máxima entre a bola e a mola será dada por Pitágoras:

$$d^2 = x^2 + y^2 = \left(0{,}1 \cdot \sqrt{3}^{\,2}\right) + 0{,}05^2$$
$$d = \sqrt{0{,}0325}\ m$$

Gabarito: a) $\vec{p} = \left[\mathbf{0,2}\left(\mathbf{5} - \sqrt{\mathbf{3}}\right) \cdot \hat{\imath} + \mathbf{0,2} \cdot \hat{\jmath}\right] \boldsymbol{kg \cdot m/s}$ **b)**$\frac{\sqrt{13}}{20}\ \boldsymbol{m}$

---

13. (IME – 2015)



Um corpo puntiforme de massa m_A parte de ponto A, percorrendo a rampa circular representada na figura acima, sem atrito, colide com outro corpo puntiforme de massa m_B, que se encontrava inicialmente em repouso no ponto B. Sabendo que este choque é perfeitamente inelástico e que o corpo resultante deste choque atinge o ponto C , ponto mais alto da rampa, com a menor velocidade possível mantendo o contato com a rampa, a velocidade inicial do corpo no ponto A, em m/s, é

Dados:

- raio da rampa circular: $2m$;
- aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$;
- massa a/m: $1\ kg$; e
- massa m_A: $1\ kg$.

a) 10

b) 20

c) $4\sqrt{15}$

d) $10\sqrt{5}$

e) $8\sqrt{5}$

Comentários:

Conservação da energia do ponto A até o ponto B:

$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{m_A v_A^2}{2} + m_A g R = \frac{m_A v_B^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_A^2 + 40 = v_B^2$$

Colisão inelástica no ponto B:

$$Q_0 = Q_F \Rightarrow m_A v_B + m_B \cdot 0 = (m_A + m_B)v'$$

$$\therefore v' = \frac{v_B}{2}$$

Conservação de energia do ponto B até o ponto C:

$$E_B = E_C$$

$$\frac{(m_A + m_B){v'}^2}{2} = \frac{(m_A + m_B)v_C^2}{2} + (m_A + m_B)g(2R)$$

$$v'^2 = v_C^2 + 80$$

Como v_C é a velocidade mínima, devemos assumir que $N = 0$.

No ponto C, podemos escrever:

$$F_{cp} = P + N$$

$$N = 0 \Rightarrow F_{cp} = P$$

$$\frac{(m_A + m_B)v_C^2}{R} = (m_A + m_B)g$$

$$\therefore v_C = 2\sqrt{5}\ m/s$$

Assim:

$$v' = 10\ m/s \text{ e } v_B = 20\ m/s$$

Portanto:

$$\boxed{v_A = 6\sqrt{10}\, m/s}$$

Gabarito: sem alternativa

14. (IME – 2016)

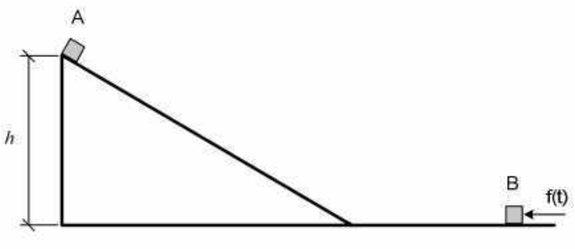


Figura 1

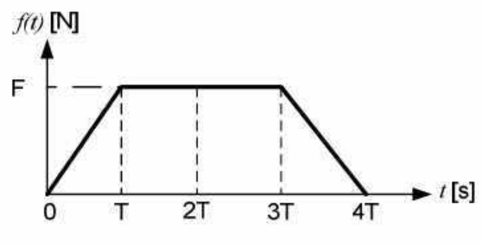


Figura 2

Na Figura 1, o corpo A, constituído de gelo. possui massa m e é solto em uma rampa a uma altura h. Enquanto desliza pela rampa, ele derrete e alcança o plano horizontal com metade da energia mecânica e metade da massa iniciais. Após atingir o plano horizontal, o corpo A se choca, no instante $4T$, com o corpo B, de massa m, que foi retirado do repouso através da aplicação da força $f(t)$, cujo gráfico é exibido na Figura 2.

Para que os corpos parem no momento do choque, F deve ser dado por

Dado:

- aceleração da gravidade: g.

Observações:

- o choque entre os corpos é perfeitamente inelástico:
- o corpo não perde massa ao longo de seu movimento no plano horizontal.

a) $\frac{m\sqrt{2gh}}{8T}$

b) $\frac{m\sqrt{2gh}}{6T}$

c) $\frac{m\sqrt{2gh}}{4T}$

d) $\frac{m\sqrt{2gh}}{3T}$

e) $\frac{m\sqrt{2gh}}{2T}$

Comentários:

Para o corpo B, o impulso da resultante pode ser calculado pela área sob a curva:

$$I_B = \frac{(4T + 2T) \cdot F}{2} \Rightarrow \boxed{I_B = 3 \cdot T \cdot F}$$

Pelo teorema do Impulso, podemos determinar a quantidade de movimento final do corpo B:

$$I_B = \Delta Q_B = Q_B^{final} - Q_B^{inicial} \Rightarrow \boxed{3 \cdot T \cdot F = Q_B}$$

Para o movimento do corpo, podemos admitir que não há perdas de energia por atrito e, assim, podemos determinar a velocidade antes da colisão com o corpo B utilizando a o balanço energético:

$$E_{mec}^{final} = \frac{1}{2} \cdot E_{mec}^{inicial} \Rightarrow \left(\frac{m}{2}\right) \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot h \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$$

Dessa forma, logo antes da colisão, a quantidade de movimento de A é de:

$$Q_A = \frac{m}{2} \cdot v = \frac{m}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Para que os corpos parem no momento da colisão, a quantidade de movimento de cada corpo deve ter a mesma intensidade e sentido opostos. Portanto:

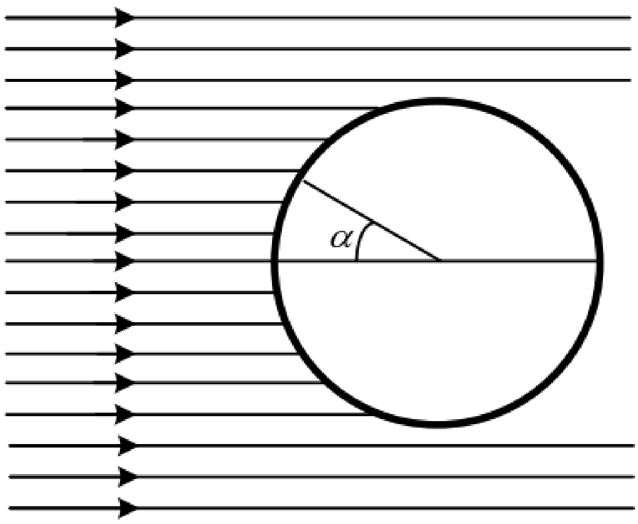
$$Q_A = Q_B \Rightarrow \frac{m}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 3 \cdot T \cdot F$$

$$\therefore \boxed{F = \frac{m \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{6 \cdot T}}$$

Gabarito: B

---

15. (IME – 2017)



Considere um feixe homogêneo de pequenos projéteis deslocando-se na mesma direção e na mesma velocidade constante até atingir a superfície de uma esfera que está sempre em repouso.

A esfera pode ter um ou dois tipos de superfícies: uma superfície totalmente refletora (colisão perfeitamente elástica entre a esfera e o projétil) e/ou uma superfície totalmente absorvedora (colisão perfeitamente inelástica entre a esfera e o projétil).

Em uma das superfícies (refletora ou absorvedora), o ângulo a da figura pertence ao intervalo $[0,\beta]$, enquanto na outra superfície (absorvedora ou refletora) a pertence ao intervalo $(\beta, T/2]$.

Para que a força aplicada pelos projéteis sobre a esfera seja máxima, o(s) tipo(s) de superfície(s) é(são):

a) refletora em $[0, \pi/3]$ e absorvedora em $(\pi/3, \pi/2]$.

b) refletora em $[0, \pi/4]$ e absorvedora em $(\pi/4, \pi/2]$.

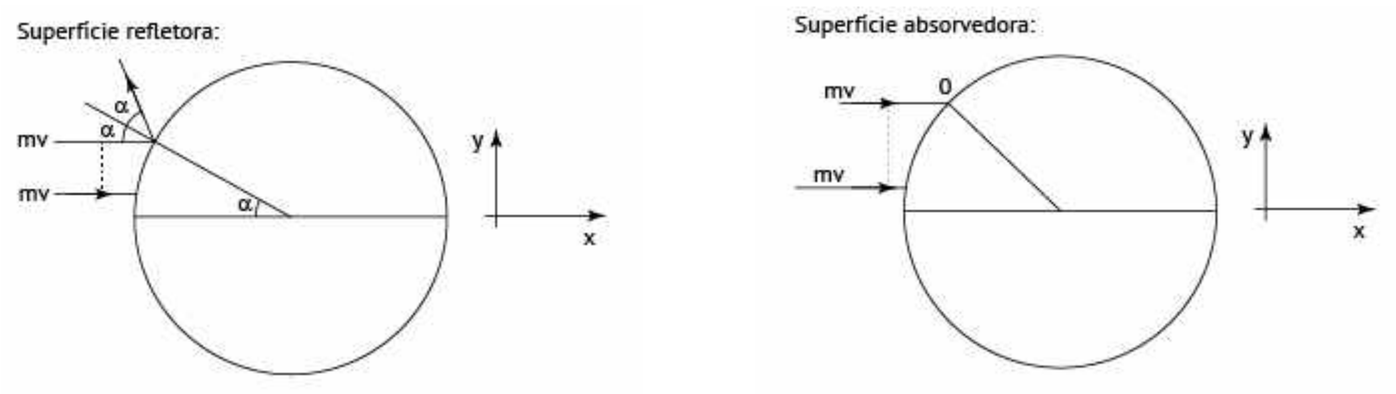
c) absorvedora em $[0, \pi/6]$ e refletora em $(\pi/6, \pi/2]$.

d) absorvedora em $[0, \pi/4]$ e refletora em $(\pi/4, \pi/2]$.

e) absorvedora em $[0, \pi/2]$.

Comentários:

É necessário destacar a seguinte diferença entre uma superfície refletora e uma superfície absorvedora:



A variação da quantidade de movimento transferida é diferente para cada tipo de superfície, já que a quantidade de movimento final do feixe é diferente para cada caso. Seja x projéteis refletidos e y projéteis absorvidos:

$$\vec{F}_{ref} = \frac{\Delta\vec{p}_{ref}}{\Delta t} = \frac{[(-m \cdot v \cdot cos2\alpha \cdot \hat{\imath} + m \cdot v \cdot sen2\alpha \cdot \hat{\jmath}) - m \cdot v \cdot i] \cdot x}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{abs} = \frac{\Delta\vec{p}_{abs}}{\Delta t} = \frac{(0 - y \cdot m \cdot v) \cdot \hat{\imath}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{ref} + \vec{F}_{abs} = \frac{-m \cdot v \cdot [y + x + cos2\alpha] \cdot \hat{\imath} + m \cdot v \cdot x \cdot sen2\alpha \cdot \hat{\jmath}}{\Delta t}$$

Assim, o módulo da $\vec{F}_{total}$ será máximo quando $cos2\alpha > 0$ e $sen2\alpha$ tiver os maiores valores possíveis:

$$0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

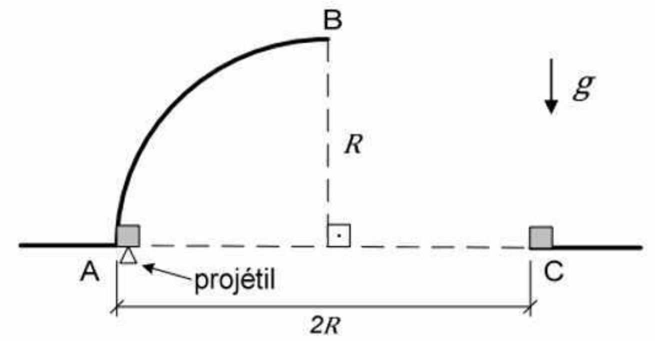
Refletora: $\left[0\ ,\frac{\pi}{4}\right]$

Absorvedora: $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

Gabarito: B

---

16. (IME – 2019)



Conforme a figura acima, um corpo, cuja velocidade é nula no ponto A da superfície circular de raio R, é atingido por um projétil, que se move verticalmente para cima, e fica alojado no corpo. Ambos passam a deslizar sem atrito na superfície circular, perdendo o contato com a superfície no ponto B. A seguir, passam a descrever uma trajetória no ar até atingirem o ponto C, indicado na figura. Diante do exposto, a velocidade do projétil é:

Dados:

- Massa do projétil: m;
- Massa do corpo: $9m$; e
- Aceleração da gravidade: g.

a) $10\sqrt{\frac{5Rg}{2}}$

b) $10\sqrt{\frac{3Rg}{2}}$

c) $10\sqrt{\frac{5Rg}{3}}$

d) $10\sqrt{\frac{3Rg}{5}}$

e) $10\sqrt{\frac{2Rg}{3}}$

Comentários:

Incialmente, o projétil (com velocidade v_0) se choca com o corpo em A e fica alojado nele. Dessa forma, o conjunto (corpo + projétil) saem do ponto A com velocidade v. Pela conservação da quantidade de movimento na direção vertical, temos que:

$$\vec{p}_{antes} = \vec{p}_{depois} \Rightarrow m \cdot v_0 = 10 \cdot m \cdot v \Rightarrow \boxed{v_0 = 10v} \ (eq\ 1)$$

Considerando o sistema constituído pela Terra, pelo conjunto corpo + projétil, temos que a força normal de contato do plano semicircular é perpendicular ao deslocamento. Dessa forma, podemos aplicar o teorema de trabalho e energia entre A e B. Vamos tomar como referência o nível do ponto A para o cálculo da energia potencial gravitacional. Lembrando que não existe atrito nesse trecho.

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$
$$0 = \Delta E_{mec} - 0$$
$$\Delta E_{mec} = 0$$
$$(E_{mec})_{final} = (E_{mec})_{inicial}$$
$$mgR + \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$
$$\boxed{v_B^2 = v^2 - 2 \cdot g \cdot R} \ (eq\ 2)$$

Do trecho B para C, temos um lançamento horizontal, onde a altura de queda é R e a distância percorrida na horizontal também é R.

$$\begin{cases} x = v_B \cdot t \\ y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{g}{2v_B^2} \cdot x^2$$

No ponto C, temos que:

$$R = \frac{g}{2v_B^2} \cdot R^2 \Rightarrow \boxed{v_B^2 = \frac{g \cdot R}{2}} \ (eq\ 3)$$

Substituindo 3 em 2, temos:

$$\frac{g \cdot R}{2} = v^2 - 2 \cdot g \cdot R \Rightarrow v = \sqrt{\frac{5Rg}{2}}$$

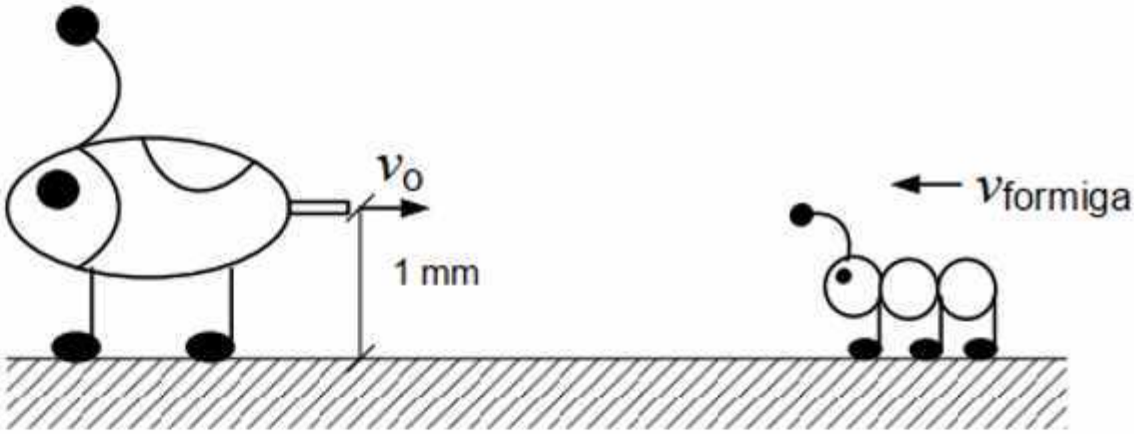
Portanto, encontramos que a velocidade inicial do projétil é de:

$$\boxed{v_0 = 10\sqrt{\frac{5Rg}{2}}}$$

Gabarito: A

---

17. (IME – 2019)



Alguns animais têm mecanismos de defesa muito curiosos. Os besouros-bombardeiros, por exemplo, são insetos que disparam jatos de uma substância superquente pelos seus traseiros quando se sentem ameaçados. Seus corpos são equipados com duas glândulas nas extremidades de seus abdomens e essas estruturas contêm diferentes substâncias químicas. Quando os insetos são provocados, essas substâncias são combinadas em uma câmera de reação e são produzidas explosões na forma de um intenso jato – aquecido de 20 °C para 100 °C pelo calor da reação – para afugentar suas presas. A pressão elevada permite que o composto seja lançado para fora com velocidade de 240 cm/s. uma formiga se aproxima do besouro, pela retaguarda deste e em linha reta, a uma velocidade média de $0{,}20\ cm/s$ e o besouro permanece parado com seu traseiro a uma distância de $1mm$ do chão. Quando pressente o inimigo, o besouro lança o jato em direção à formiga.

Determine:

a) O calor latente da reação das substâncias, em $\mathrm{J/kg}$;

b) O rendimento da máquina térmica, representa pelo besouro;

c) A distância mínima, em cm, entre os insetos, para que o jato do besouro atinja a formiga; e

d) A velocidade, em cm/s, que a formiga adquire ao ser atingida pelo jato do besouro (assumindo que todo líquido fique impregnado na formiga)

Dados:

Calores específicos das substâncias e do líquido borrifado: $c = 4{,}19 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$;

- Massa da formiga: $m_{formiga} = 6{,}0\ mg$;
- Massa do besouro: $m_{besouro} = 290\ mg$;
- Massa do jato: $m_{jato} = 0{,}30\ mg$:
- Velocidade média da formiga: $v_{formiga} = 0{,}20\ cm/s$; e
- Aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$.

Comentários:

a)

Considerando que toda massa das substâncias reage e que seu produto seja ejetado sob a forma do jato, podemos dizer que toda energia da reação foi utilizada para aquecer o jato e fornecer a ele uma energia cinética. Matematicamente, temos que:

$$(Q_L)_{subs} = Q_{jato} + (E_C)_{jato}$$

$$m_{subs} \cdot L_{subs} = m_{jato} \cdot c \cdot \Delta\theta + \frac{m_{jato} v^2}{2}$$

$$m_{subs} = m_{jato}$$

$$L_{subs} = c \cdot \Delta\theta + \frac{v^2}{2}$$

$$L_{subs} = 4{,}19 \cdot 10^3 \cdot (100 - 20) + \frac{2{,}4^2}{2}$$

$$\boxed{L_{subs} \cong 3{,}35 \cdot 10^5 \text{ J/kg}}$$

Note que a parcela $\frac{v^2}{2}$ é praticamente desprezível.

b)

O calor fornecido para que a reação ocorra é dado por:

$$Q = m_{jato} \cdot L$$

$$Q = (0{,}30 \cdot 10^{-6}) \cdot (3{,}35 \cdot 10^5)$$

$$\boxed{Q = 1{,}0056 \cdot 10^{-1} \text{ J}}$$

Trabalho realizado na reação pode ser determinado pelas energias cinéticas do besouro e do jato. Para o besouro, podemos conservar a quantidade de movimento, para que possamos relacionar a velocidade do besouro com a saída do jato.

$$(290 - 30) \cdot 10^{-6} v_{besouro} = 0{,}3 \cdot 10^{-6} v_{jato}$$

$$\boxed{v_{besouro} = 0{,}25\ cm/s}$$

Portanto:

$$W_{reação} = \frac{1}{2} m_{jato} v_{jato}^2 + \frac{1}{2}(m_{besouro} - m_{jato}) v_{besouro}^2$$

$$W_{reação} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}30 \cdot 10^{-6} \cdot (2{,}4)^2 + \frac{1}{2} \cdot 289{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 10^{-4}$$

$$\boxed{W_{reação} = 0{,}864 \cdot 10^{-6} \text{ J}}$$

Assim, o rendimento da máquina pode ser escrito como:

$$\eta = \frac{W_{reação}}{Q} = \frac{0{,}864 \cdot 10^{-6}}{1{,}0056 \cdot 10^{-1}} \therefore \boxed{\eta = 0{,}00086\ \%}$$

c)

Para um lançamento horizontal, lembrando que a formiga também caminha aproxima com velocidade de 0,2 cm/s ($v_{rel} = v_0 + v_{0\,formiga} = 240 + 0,2 = 240,2\ cm/s$), temos que:

$$\begin{cases} x = v_{rel} \cdot t \\ y = \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{g}{2v_{rel}^2} \cdot x^2$$

$$1 \cdot 10^{-3} = \frac{10}{2(240 + 0,2)^2} \cdot D^2$$

$$\boxed{D = 3,39\ cm}$$

d)

Assumindo uma colisão inelástica do jato com a formiga, podemos escrever que:

$$Q_{inicial} = Q_{final}$$

$$m_{jato} \cdot v_{jato} - m_{formiga} \cdot v_{formiga} = \left(m_{jato} + m_{formiga}\right) \cdot v_f$$

$$0,3 \cdot 10^{-6} \cdot 240 - 6,0 \cdot 10^{-6} \cdot 0,2 = 6,3 \cdot 10^{-6} \cdot v_f$$

$$\boxed{v_f = 1,24\ cm/s}$$

Gabarito: a) $\mathbf{3,35 \cdot 10^5\ J/kg}$ b) $\mathbf{8,59 \cdot 10^{-6}}$ c) $\mathbf{3,39\ cm}$ d) $\mathbf{11,24\ cm/s}$

---

18. (ITA – 2020 – 1ª Fase)

Uma pequena esfera com peso de módulo P é arremessada verticalmente para cima com velocidade de módulo V_0 a partir do solo. Durante todo o percurso, atua sobre a esfera uma força de resistência do ar de módulo F constante. A distância total percorrida pela esfera após muitas reflexões elásticas com o solo é dada aproximadamente por

f) $\frac{v_0^2(P-F)}{2gF}$.

g) $\frac{v_0^2(P+F)}{2gF}$.

h) $\frac{2v_0^2P}{gF}$.

i) $\frac{v_0^2P}{2gF}$.

j) $\frac{v_0^2P}{gF}$.

Comentários:

Sendo a distância total D, por conservação da energia:

$$\frac{PV_0^2}{2g} = FD \rightarrow D = \frac{PV_0^2}{2gF}$$

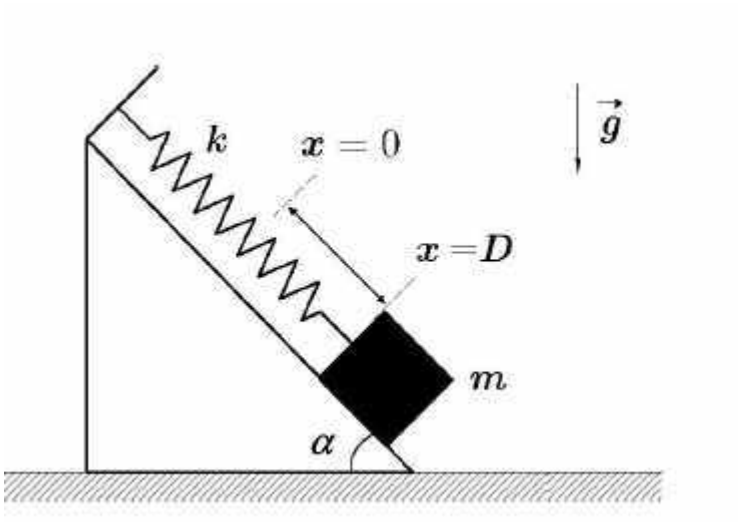
Gabarito: D

19. (ITA – 2020 – 2ª Fase)

Uma mola de constante elástica k é presa a um bloco de massa m sobre um plano inclinado de um ângulo α em relação à horizontal, onde interage entre superfícies um atrito de coeficiente μ. Com o bloco deslocado forçadamente para baixo, a mola é distendida até um comprimento $x = D$ da sua posição $x = 0$, quando livre em seu comprimento natural. A partir do repouso, o bloco é então liberado e se inicia um movimento oscilatório. Pedem-se:

1. As possíveis posições finais x_f de parada do bloco após cessar o movimento oscilatório, em função das grandezas intervenientes.

2. gráfico da quantidade de movimento p do bloco em função da coordenada x, considerando o intervalo de tempo compreendido entre o início do movimento e o instante de sua primeira parada.



Comentários:

Quando o bloco atinge velocidade zero pela primeira vez após ser solto temos:

$$\frac{kD_1^2}{2} + mg(D_1 + D)\sin\alpha = \frac{kD^2}{2} - F_{at}(D + D_1) = \frac{kD^2}{2} - mg(D + D_1)\cos\alpha\,\mu$$

$$\frac{kD_1^2}{2} + mg(D_1 + D)\sin\alpha = \frac{kD^2}{2} - mg(D + D_1)\cos\alpha\,\mu$$

$$\frac{k(D^2 - D_1^2)}{2} = mg(D_1 + D)(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu)$$

$$k(D - D_1) = 2mg(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu) \rightarrow D_1 = D - \frac{2mg}{k}(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu)$$

Quando o bloco atinge velocidade zero pela segunda vez:

$$\frac{kD_2^2}{2} - mg(D_2 + D_1)\sin\alpha = \frac{kD_1^2}{2} - F_{at}(D_1 + D_2)$$

$$k(D_1 - D_2) = 2mg(-\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu) \to D_2 = D_1 - \frac{2mg}{k}(-\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu)$$

$$= D - \frac{4mg\cos\alpha\,\mu}{k}$$

Por indução:

$$D_{2n} = D - \frac{4nmg\cos\alpha\,\mu}{k}$$

$$D_{2n+1} = D_{2n} - \frac{2mg}{k}(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu) = D - \frac{2mg}{k}(\sin\alpha + (2n+1)\cos\alpha\,\mu)$$

O bloco irá parar se:

$$kD_n + mg\sin\alpha < mg\cos\alpha\,\mu \to D_n < \frac{mg}{k}(-\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu)$$

B.

$$\frac{kx^2}{2} + mg(D - x)\sin\alpha + \frac{mv^2}{2} = \frac{kD^2}{2} - F_{at}(D - x) = \frac{kD^2}{2} - mg(D - x)\cos\alpha\,\mu$$

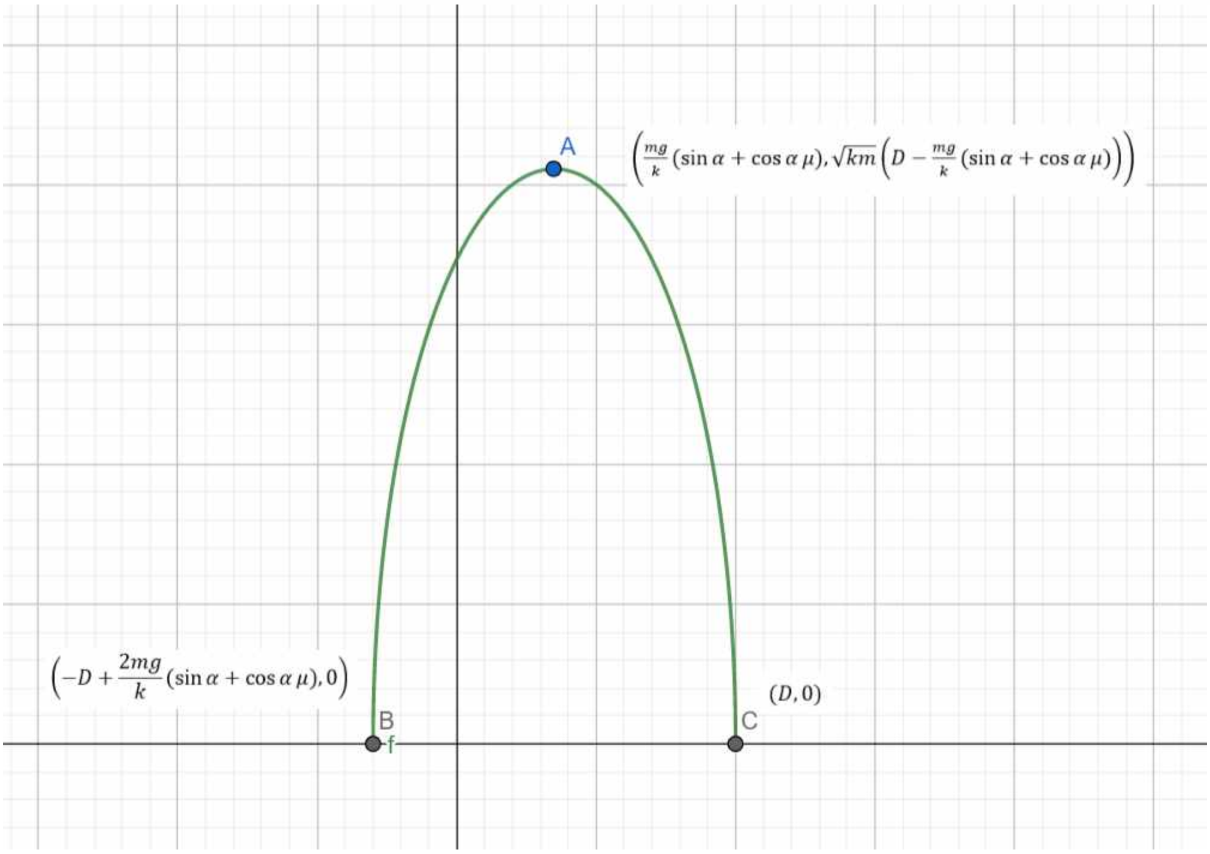
$$\frac{k(D^2 - x^2)}{2} = mg(D - x)(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu) + \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{(D - x)\left(\frac{k}{m}(D + x) - 2g(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu)\right)}$$

Portanto:

$$p = mv = m\sqrt{(D - x)\left(\frac{k}{m}(D + x) - 2g(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu)\right)}$$

O termo dentro da raiz quadrada é uma parábola, cujas raízes são D e $-D + \frac{2mg}{k}(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu)$. A segunda raiz tem módulo menor que D, logo o ponto máximo do gráfico será positivo e ocorrerá em $x_{máx} = \frac{mg}{k}(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu)$ com $p = \sqrt{km}\left(D - \frac{mg}{k}(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mu)\right)$ O gráfico terá a cara a seguir:



Gabarito: Ver resolução

---

20. (ITA – 1990)

Um projétil de massa m e velocidade v atingo um objeto do massa M, inicialmente Imóvel. O projétil atravessa o corpo de massa M e sai dele com velocidade $v/2$. O corpo que foi atingido desliza por uma superfície som atrito, subindo uma rampa até a altura h. Nestas condiçóos podemos afirmar que a velocidade inicial do projétil ora de:

a) $v = \frac{2M}{m}\sqrt{2gh}$

b) $v = 2\sqrt{2\frac{M}{m}\,gh}$

c) $v = 2\sqrt{\frac{M}{m}\,gh}$

d) $v = \sqrt{8gh}$

e) $v = 2\sqrt{gh}$

Comentários:

Conservação da quantidade de movimento na colisão:

$$m \cdot v = m \cdot \frac{v}{2} + M \cdot \vartheta$$
$$\vartheta = \frac{m}{M} \cdot \frac{v}{2}$$

Conservação de energia para o bloco de massa M:

$$\frac{m \cdot \vartheta^2}{2} = m \cdot g \cdot h$$

A partir de (i) e (ii), chegamos que:

$$v = \frac{2M}{m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Gabarito: A

---

21. (ITA – 1991)

Segundo um observador acoplado a um referencial inercial duas partículas de massa m_A e m_B possuem velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$, respectivamente. Qual a quantidade de movimento $\vec{p}_A$ que um observador preso ao centro de massa do sistema mede para a partícula A?

a) $\vec{p}_A = m_A \vec{v}_A$

b) $\vec{p}_A = m_A(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$

c) $\vec{p}_A = \left(\frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B}\right) \vec{v}_A$

d) $\vec{p}_A = \left(\frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B}\right) (\vec{v}_A - \vec{v}_B)$

e) Nenhuma das anteriores.

Comentários:

Calculando a velocidade do centro de massa, temos:

$$\overrightarrow{v_{cm}} = \frac{m_A \overrightarrow{v_A} + m_B \overrightarrow{v_B}}{m_A + m_B}$$

No referencial do centro de massa, a velocidade da partícula A é dada por:

$$\overrightarrow{v_{A`}} = \overrightarrow{v_A} - \overrightarrow{v_{cm}}$$

Portanto:

$$\vec{p}_A = m_A \vec{v}_{A`} = m_A \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_{cm})$$
$$\vec{p}_A = \frac{m_A \cdot m_B}{m_A + m_B} \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B)$$

Gabarito: D

---

22. (ITA – 1991)

Um pêndulo simples de comprimento l e massa m é posto a oscilar. Cada vez que o pêndulo passa pela posição de equilíbrio atua sobre ele, durante um pequeno intervalo de tempo t, uma força F. Esta força é constantemente ajustada para, a cada passagem, ter mesma direção e sentido que a velocidade de m. Quantas oscilações completas são necessárias para que o pêndulo forme um ângulo reto com a direção vertical de equilíbrio?

a) $n = \frac{m\sqrt{gl}}{2Ft}$

b) $n = \frac{mgl\sqrt{2}}{2Ft}$

c) $n = \frac{m\sqrt{2gl}}{2Ft}$

d) $n = \frac{mgl}{Ft} + 1$

e) Nenhuma das anteriores.

Comentários:

A cada vez que o pêndulo passa pela posição de equilíbrio, ele sofre um impulso da força F que altera sua velocidade:

$$I = F \cdot t = m \cdot \Delta v$$

E a cada oscilação completa, o pêndulo passa duas vezes pela posição de equilíbrio. Assim podemos escrever sua velocidade em função do número de oscilações completas n que o pêndulo descreveu:

$$v = \frac{2 \cdot n \cdot F \cdot t}{m}$$

Para que faça um ângulo de 90°, sua velocidade no ponto de equilíbrio deve ser igual a:

$$\frac{mv^2}{2} = mgl \ \Rightarrow \ v = \sqrt{2gl}$$

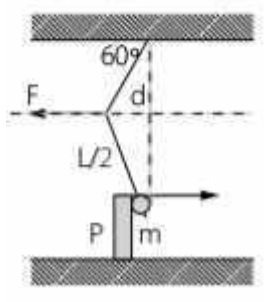
Igualando as equações, temos:

$$n = \frac{m\sqrt{2gl}}{2Ft}$$

Gabarito: C

---

23. (ITA – 1992)



Na figura abaixo, a massa esférica M pende de um fio de comprimento L, mas está solicitada para a esquerda por uma força F que mantém a massa apoiada contra uma parede vertical P sem atrito.

a) Calcule o trabalho W realizado pela força F para fazer subir lentamente ($v = 0$) a massa M em termos da variação da energia potencial de M, desde a posição em que o fio está na vertical até a situação indicada no desenho;

b) Verifique se é possível calcular esse trabalho como o produto de F, já calculada, pelo deslocamento d.

a) $0{,}29Mgl$ Não

b) $0{,}13Mgl$ Sim

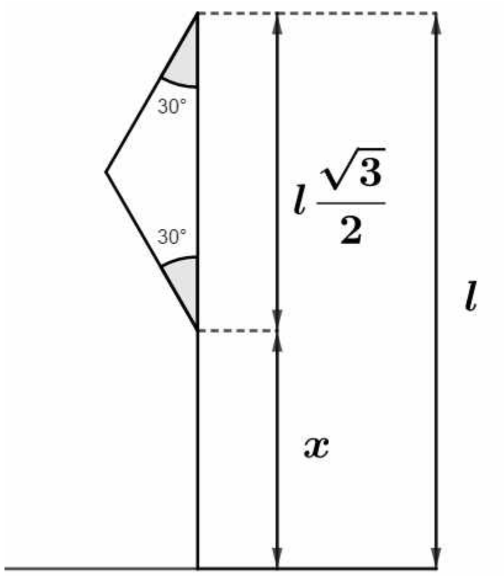
c) $0{,}50Mgl$ Não

d) $0{,}13Mgl$ Não

e) $0{,}29Mgl$ Sim

Comentários:

Da geometria, concluímos que a altura do anteparo será dada por:



$$l - \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2} = x$$

Logo, a variação de energia potencial da bolinha será dada por:

$$M \cdot g \cdot x = 0{,}13\, M \cdot g \cdot l$$

A força F vai variar com o ângulo, dessa forma, não podemos fazer simplesmente o produto da força pela distância, é necessária descobrir como a força se comporta e resolver uma integral.

Gabarito: D

24. (ITA – 1992)

Um objeto de massa M é deixado cair de uma altura h. Ao final do 1° segundo de queda o objeto é atingido horizontalmente por um projétil de massa m e velocidade v, que nele se aloja. Calcule o desvio x que o objeto sofre ao atingir o solo, em relação ao alvo pretendido.

a) $\sqrt{2h/g} \cdot (M+m) \cdot v$

b) $\sqrt{2h/g} \cdot \frac{m}{M+m} \cdot v$

c) $(\sqrt{2h/g} - 1) \cdot \frac{m}{M+m} \cdot v$

d) $(\sqrt{2h/g} - 1) \cdot \frac{M+m}{M} \cdot v$

e) $(1 - \sqrt{2h/g}) \cdot (M+m) \cdot v$

Comentários:

Velocidade do bloco que está caindo após um segundo de queda:

$$\vartheta_y = gt = 10\, m/s$$

Como a colisão não altera a velocidade em y, temos que o tempo de queda é mantido, e se contássemos o tempo para cair, dado que já se passou 1 segundo, teríamos que:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} - 1$$

Conservação da quantidade de movimento na horizontal:

$$m \cdot v = (M+m)v' \Rightarrow v' = \frac{m \cdot v}{(M+m)}$$

Assim, a distância horizontal percorrida será dada por:

$$\Delta x = v' \cdot t$$

$$\Delta x = \frac{m \cdot v}{(M+m)}\left[\sqrt{\frac{2h}{g}} - 1\right]$$

Gabarito: C

---

25. (ITA – 1995)

Todo caçador ao atirar com um rifle, mantém a arma firmemente apertada contra o ombro evitando assim o "coice" da mesma. Considere que a massa do atirador é $95{,}0\, kg$. A massa do rifle é $5{,}00\, kg$, e a massa do projétil é $15{,}0\, g$ o qual é disparada a uma velocidade de $3{,}00 \cdot 10^4\, cm/s$. Nestas condição, a velocidade de recuo do rifle (v_r) quando se segura muito frouxamente a arma e a velocidade de recuo do atirador (v_a) quando ele mantém a arma firmemente apoiada no ombro serão respectivamente:

a) $0{,}90\ m/s$; $4{,}7 \cdot 10^2\ m/s$

b) $90{,}0\ m/s$; $4{,}7\ m/s$

c) $90{,}0\ m/s$; $4{,}5\ m/s$

d) $0{,}90\ m/s$; $4{,}5 \cdot 10^{-2}\ m/s$

e) $0{,}10\ m/s$; $1{,}5 \cdot 10^{-2}\ m/s$

Comentários:

Conservação da quantidade de movimento no caso em que o fuzil está frouxo:

$$m_r \cdot v_r = m_{proj} \cdot v_{proj}$$

$$5{,}00 \cdot v_R = 15{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}00 \cdot 10^2 \Rightarrow \boxed{v_r = 0{,}90\ m/s}$$

Conservação da quantidade de movimento no caso em que o fuzil está preso:

$$(m_r + m_H) \cdot v_a = m_{proj} \cdot v_{proj}$$

$$100 \cdot v_a = 15{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}00 \cdot 10^2$$

$$\boxed{v_a = 4{,}5 \cdot 10^{-2}\ m/s}$$

Gabarito: D

---

26. (ITA – 1996)

Um avião a jato se encontra na cabeceira da pista com a sua turbina ligada e com os freios acionados, que o impedem de se movimentar. Quando o piloto aciona a máxima potência, o ar é expelido a uma razão de $100\ kg$ por segundo, a uma velocidade de $600\ m/s$ em relação ao avião. Nessas condições:

a) a força transmitida pelo ar expelido ao avião é nula, pois um corpo não pode exercer força sobre si mesmo.

b) as rodas do avião devem suportar uma força horizontal igual a $60\ kN$.

c) se a massa do avião é de $7 \cdot 10^3\ kg$ o coeficiente de atrito mínimo entre as rodas e o piso deve ser de $0{,}2$.

d) não é possível calcular a força sobre o avião com os dados fornecidos.

e) nenhuma das afirmativas acima é verdadeira.

Comentários:

Para o sistema de massa variável, podemos escrever que:

$$F_R = \frac{dm}{dt} \cdot v_{rel} + m \cdot a$$

Como a aceleração é nula, temos que a forca gerada pela turbina é igual a:

$$F = 100 \cdot 600\ N = 60kN$$

Para que o avião não se movimente, as rodas devem suportar uma força de atrito com módulo igual à forca da turbina. Assim temos que a letra B é a correta.

Gabarito: B

---

27. (ITA – 1998)

Uma bala de massa 10 g é atirada horizontalmente contra um bloco de madeira de 100 g que está fixo, penetrando nele 10 cm até parar. Depois, o bloco é suspenso de tal forma que se possa mover livremente e uma bala idêntica à primeira é atirada contra ele. Considerando a força de atrito entre a bala e a madeira em ambos os casos como sendo a mesma, conclui-se que a segunda bala penetra no bloco a uma profundidade de aproximadamente:

a) 8.0 cm.

b) 8.2 cm.

c) 8.8 cm.

d) 9.2 cm.

e) 9.6 cm.

Comentários:

No primeiro tiro, o trabalho da força resistiva é igual a variação da energia cinética:

$$W_{F_{res}} = F_{res} \cdot d = \Delta E_{cin}$$

$$F_{res} \cdot 0,1 = \frac{0,01 \cdot v_0^2}{2}$$

$$F_{res} = 0,05 v_0^2$$

No segundo tiro, as velocidades finais podem ser encontradas pela conservação da quantidade de movimento:

$$0,01 \cdot v_0 = (0,11 + 0,01) v`$$

$$v` = \frac{1}{12} v_0$$

Para o bloco:

$$F_{res} \cdot d_1 = \Delta E_{cin}$$

$$0,05 v_0^2 \cdot d_1 = \frac{0,11}{2} \cdot \left(\frac{1}{12} v_0\right)^2 - 0$$

$$d_1 = \frac{1,1}{144}\ m$$

Para o projétil:

$$F_{res} \cdot d_2 = \Delta E_{cin}$$

$$0,05 v_0^2 \cdot d_2 = \frac{0,01}{2} \cdot \left(\frac{1}{12} v_0\right)^2 - \frac{0,01}{2} \cdot (v_0)^2$$

$$d_2 = \frac{14,3}{144}\ m$$

A distância que a bala penetrou é dada por:

$$D = d_2 - d_1 \cong 9,2\ cm$$

Gabarito: D

---

28. (ITA – 1998)

Uma massa m em repouso drvide-se em duas partes, uma com massa $2m/3$ e outra com massa $m/3$. Após a divisão, a parte com massa $m/3$ move-se para a direita com uma velocidade de módulo v_1. Se a massa m estivesse se movendo para a esquerda com velocidade de módulo v antes da divisão, a velocidade da parte $m/3$ depois da divisão seria:

a) $(\frac{1}{3} v_1 - v)$ para a esquerda.

b) $(v_1 - v)$ para a esquerda.

c) $(v_1 - v)$ para a direita.

d) $(\frac{1}{3} v_1 - v)$ para a direita.

e) $(v_1 + v)$ para a direita.

Comentários:

Pela definição da velocidade do centro de massa, temos:

$$\overrightarrow{v_{c_m}} = \frac{m_1 \overrightarrow{v_1} + m_2 \overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2}$$

Suponha agora que a velocidade do centro de massa seja alterada de um valor $\vec{v}$; assim:

$$\overrightarrow{v_{c_m}} - \vec{v} = \frac{m_1 \overrightarrow{v_1} + m_2 \overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2} - \vec{v}$$

$$\overrightarrow{v_{c_m}} - \vec{v} = \frac{m_1 \overrightarrow{(v_1 - \vec{v})} + m_2 (\overrightarrow{v_2} - \vec{v})}{m_1 + m_2}$$

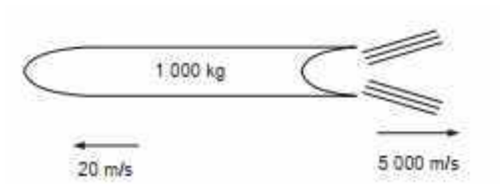
Assim como demonstrado acima, o centro de massa do sistema apresentado muda de $-\vec{v}$ de uma situação para a outra, dessa forma, pode-se calcular a nossa velocidade que uma das partes integrantes terá apenas subtraindo também o vetor $-\vec{v}$.

Gabarito: C

---

29. (ITA – 2000)

Uma sonda espacial de $1000\ kg$, vista de um sistema de referência inercial, encontra-se em repouso no espaço. Num determinado instante, seu propulsor é ligado e, durante o intervalo de tempo de 5 segundos, os gases são ejetados a uma velocidade constante, em relaçào à sonda, de $5000\ m/s$. No final desse processo, com a sonda movendo-se a $20\ m/s$, a massa aproximada de gases ejetados é



a) $0{,}8\ kg$
b) $4\ kg$
c) $5\ kg$
d) $20\ kg$
e) $25\ kg$

Comentários:

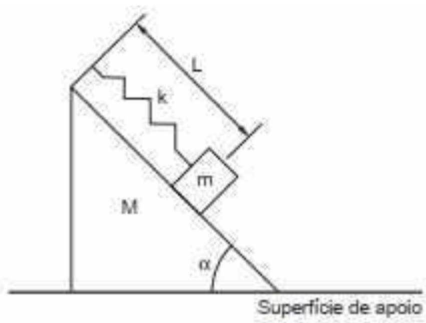
Pela conservação da quantidade de movimento, temos:

$$M(t) \cdot v(t) = m(t)[5000 - v(t)]$$
$$[M - m(t)] \cdot v(t) = m(t)[5000 - v(t)]$$
$$M \cdot v(t) = m(t)[5000]$$
$$M \cdot 20 = m \cdot [5000]$$
$$m = 4\ kg$$

Gabarito: B

---

30. (ITA – 2000)



Um corpo de massa m desliza sem atrito sobre a superfície plana (e inclinada de um ângulo α em relação à horizontal) de um bloco de massa M sob a ação da mola, mostrada na figura. Esta mola, de constante elástica k e comprimento natural C, tem suas extremidades respectivamente fixadas ao corpo de massa m e ao bloco. Por sua vez, o bloco pode deslizar sem atrito sobre a superfície plana e horizontal em que se apóia. O corpo é puxado até uma posição em que a mola seja distendida elasticamente a um comprimento $L(L > C)$, tal que, ao ser liberado, o corpo passa pela posição em que a força elástica é nula. Nessa posição o módulo da velocidade do bloco é

a) $\sqrt{\dfrac{2m\left[\frac{1}{2}k(L-C)^2 - mg(L-C)sen(\alpha)\right]}{M^2[1+sen^2(\alpha)]}}$

b) $\sqrt{\dfrac{2m\left[\frac{1}{2}k(L-C)^2 - mg(L-C)sen(\alpha)\right]}{M^2[1+tg^2(\alpha)]}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2m\left[\frac{1}{2}k(L-C)^2 - mg(L-C)sen(\alpha)\right]}{(m+M)[(m+M)tg^2\alpha + M]}}$

d) $\sqrt{\dfrac{2m\left[\frac{1}{2}k(L-C)^2\right]}{M^2[1+tg^2(\alpha)]}}$

e) 0

Comentários:

O sistema (bloco + corpo + mola) é isolado na horizontal, por isso, em relação à Terra, podemos escrever que:

$$\vec{Q}_{x_i} = \vec{Q}_{x_f} \Rightarrow \vec{0} = \vec{Q}_{x_{corpo}} + \vec{Q}_{x_{bloco}} \Rightarrow m \cdot v_{x/T} = M \cdot V$$

$$\therefore \boxed{v_{x/T} = \frac{M \cdot V}{m}}$$

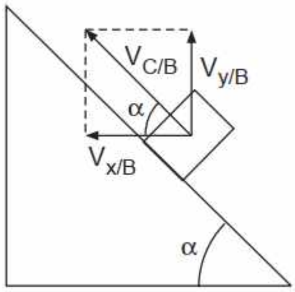
Em que V é a velocidade do bloco em relação à Terra. Podemos escrever a velocidade do corpo na direção x em relação ao bloco da seguinte forma:

$$\vec{v}_{x/T} = \vec{v}_{x/B} + \vec{v}_{B/T}$$

Dessa forma, trabalhando em módulos, temos:

$$\frac{MV}{m} = v_{x/B} - V \Rightarrow \boxed{v_{x/B} = \left(\frac{M+m}{m}\right)V}$$

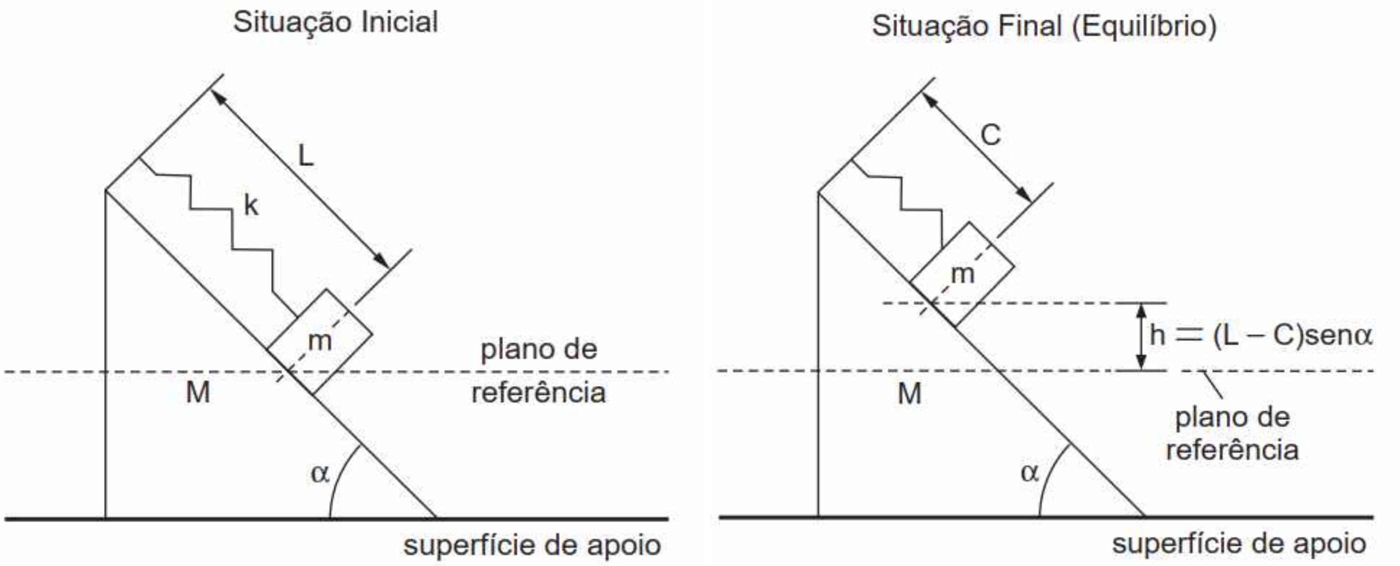
Para determinar a velocidade do corpo em relação ao bloco, devemos notar a seguinte soma vetorial:



Dessa forma, a componente vertical ($v_{y/T}$) da velocidade do corpo em relação à Terra é dada por:

$$v_{y/T} = v_{y/B} = v_{x/B} \cdot tg(\alpha) = \left(\frac{M+m}{m}\right) \cdot V \cdot tg(\alpha)$$

De acordo com o enunciado, temos as duas situações:



Como não há nenhuma força dissipativa atuando em nosso sistema, podemos dizer que ele é conservativo. Assim, a energia mecânica se conserva. Portanto, em relação à Terra, temos:

$$E_{mec}^{i} = E_{mec}^{f}$$

$$\frac{k(L-C)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + mgh$$

$$\frac{k(L-C)^2}{2} = \frac{m\left(v_{x/T}^2 + v_{y/T}^2\right)}{2} + \frac{MV^2}{2} + mg(L-C)sen(\alpha)$$

$$\frac{k(L-C)^2}{2} = \frac{m}{2}\left\{\left(\frac{M \cdot V}{m}\right)^2 + \left[\left(\frac{M+m}{m}\right) \cdot V \cdot tg(\alpha)\right]^2\right\} + \frac{MV^2}{2} + mg(L-C)sen(\alpha)$$

$$\frac{k(L-C)^2}{2} - mg(L-C)sen(\alpha) = \frac{V^2}{2}\left[\frac{M^2}{m} + \frac{(M+m)^2}{m}tg^2\alpha + M\right]$$

$$\frac{V^2}{2m}\left[M^2 + mM + (M+m)^2 tg^2\alpha\right] = \frac{k(L-C)^2}{2} - mg(L-C)sen(\alpha)$$

$$\frac{V^2}{2m}\left\{(m+M)\left[(m+M)tg^2\alpha + M\right]\right\} = \frac{k(L-C)^2}{2} - mg(L-C)sen(\alpha)$$

$$\frac{V^2}{2m}(m+M)[(m+M)tg^2\alpha+M]=\frac{k(L-C)^2}{2}-mg(L-C)sen(\alpha)$$

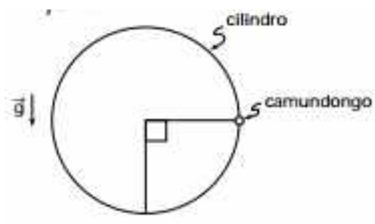
$$\boxed{V=\sqrt{\frac{2m\left[\frac{k(L-C)^2}{2}-mg(L-C)sen(\alpha)\right]}{(m+M)[(m+M)tg^2\alpha+M]}}}$$

Gabarito: C

---

31. (ITA – 2002)

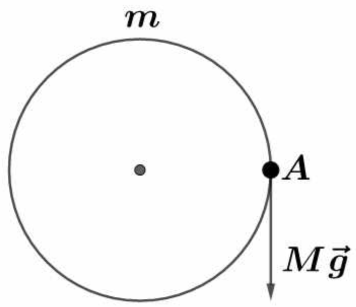
Um pequeno camundongo de massa M corre num plano vertical no interior de um cilindro de massa m e eixo horizontal Suponha-se que o ratinho alcance a posição indicada na figura imediatamente no início de sua corrida nela permanecendo devido ao movimento giratório de reação do cilindro, suposto ocorrer sem resistência de qualquer natureza. A energia despendida pelo ratinho durante um intervalo de tempo T para se manter na mesma posição enquanto corre é



a) $\boldsymbol{E=\frac{M^2}{2m}g^2T^2}$
b) $\boldsymbol{E=Mg^2T^2}$
c) $\boldsymbol{E=\frac{m^2}{M}g^2T^2}$
d) $\boldsymbol{E=mg^2T^2}$
e) n.d.a.

Comentários:

Aplicando a segunda lei de Newton para o cilindro, temos:



$$\vec{F}=m\cdot\vec{a}\Rightarrow Mg=ma\Rightarrow a=\frac{Mg}{m}$$

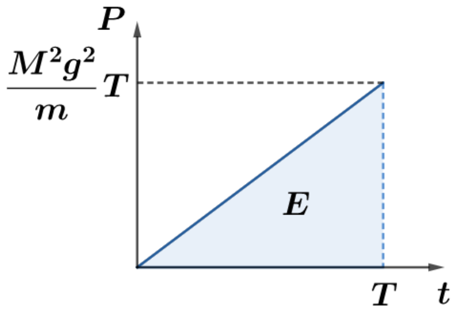
Em que a é a aceleração linear do cilindro no ponto A. Admitindo que o cilindro esteja em repouso imediatamente antes do início da corrida do camundongo, a velocidade linear do cilindro o ponto A, após um tempo T, é de:

$$v=v_0+a\cdot T\Rightarrow\boxed{v=\frac{Mg}{m}\cdot T}$$

Logo, a potência instantânea é expressa por:

$$P = F \cdot v \Rightarrow P = Mg \cdot \frac{Mg}{m} \cdot T \Rightarrow \boxed{P = \frac{M^2 g^2}{m} \cdot T}$$

Note que a potência instantânea varia linearmente com o tempo. Assim, o gráfico da potência pelo tempo é:



A área do gráfico $P \times t$ é numericamente igual à energia. Portanto:

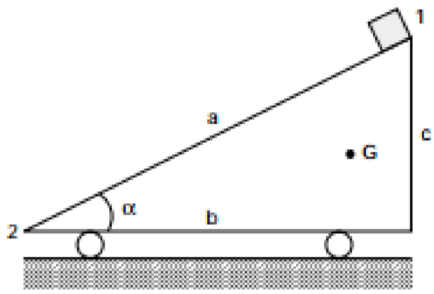
$$E = \frac{\left(\frac{M^2 g^2}{m} \cdot T\right) \cdot T}{2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{M^2 g^2 T^2}{2m}}$$

Gabarito: A

---

32. (ITA – 2002)

Uma tampa rolante pesa $120\ N$ e se encontra Inicialmente em tepousa conto mostra a figura. Um bloco que pesa $80\ N$ também em repousa e abandonado no ponto 1, deslizando a seguir sobre a rampa. O centro de massa G da rampa tem coordenadas: $x_G = 2b/3$ e $y_G = c/3$. São dados ainda: $a = 15{,}0\ m$ e $sen\ \alpha = 0{,}6$. Desprezando os possíveis atritos e as dimensões do bloco, pode-se afirmar que a distância percorrida pela rampa no sola até o instante em que o bloco atinge o ponto 2, é



a) 16,0 m
b) 30,0 m
c) 4,8 m
d) 24,0 m
e) 9,6 m

Comentários:

Como não existem forças externas no eixo das abcissas, o X_{CM} se conserva.

Inicialmente:

$$X_{CM} = \frac{X_1 m_1 + X_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{b \cdot m_1 + \frac{2b}{3} m_2}{m_{total}}$$

Depois da rampa ter percorrido uma distância d no solo e o bloco ter deslizado até o chão:

$$X_{CM} = \frac{d \cdot m_1 + (d + \frac{2b}{3}) m_2}{m_{total}}$$

Igualando as equações e usando que $b = a \cdot cos\alpha = 0{,}8$, temos:

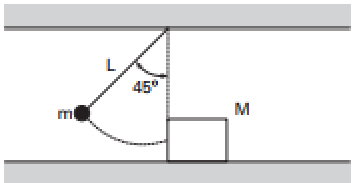
$$d = 4{,}8\ m$$

Gabarito: C

---

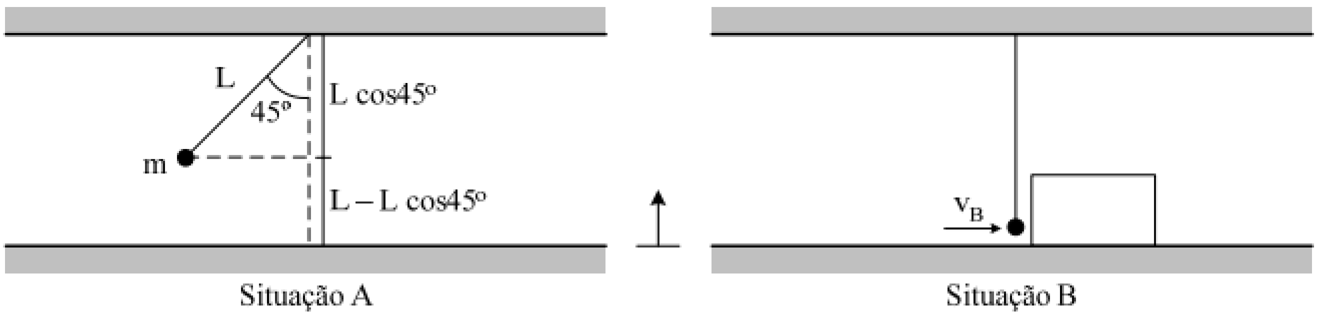
33. (ITA – 2003)

Quando solto na posição angular de 45° (mostrada na figura), um pêndulo simples de massa m e comprimento L colide com um bloco de massa M. Após a colisão, o bloco desliza sobre uma superfície rugosa, cujo coeficiente de atrito dinâmico é igual a 0,3. Considere que após a colisão, ao retornar, o pêndulo alcança uma posição angular máxima de 30°. Determine a distância percorrida pelo bloco em função de m, M e L.



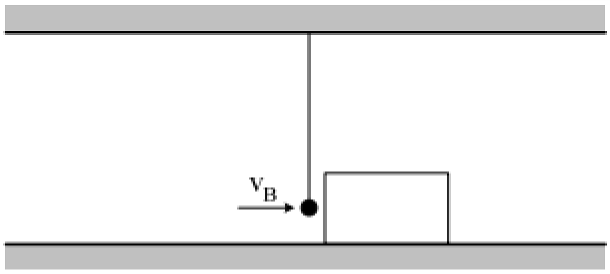
Comentários:

Inicialmente, vamos calcular a velocidade com que o corpo de massa m antes da colisão. Pela conservação da energia mecânica, temos:

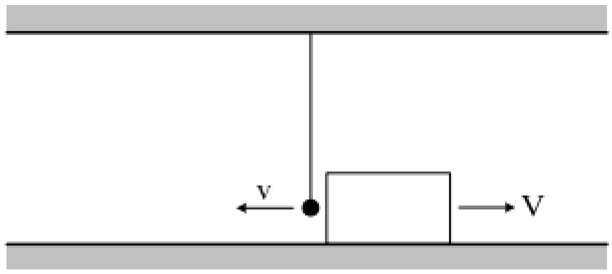


$$E_{mec}^{A} = E_{mec}^{B} \Rightarrow m \cdot g \cdot (L - L \cdot \cos 45°) = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2gL\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}\ (eq.1)$$

Impondo a conservação da quantidade de movimento na colisão, vem:



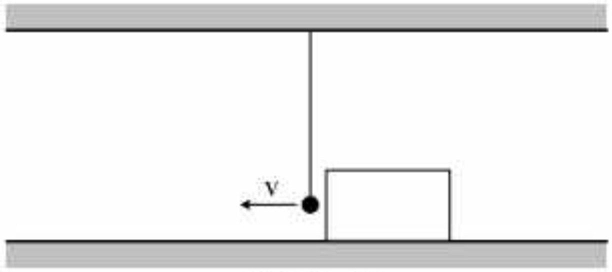
Situação B



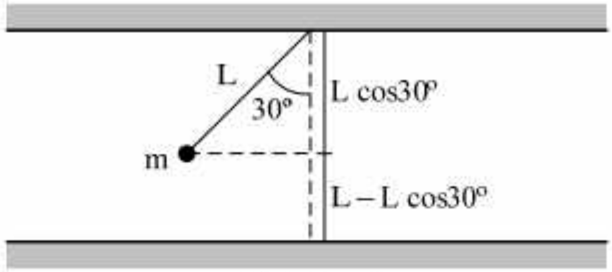
Situação C

$$Q_B = Q_C \Rightarrow \boxed{m \cdot v_B = -m \cdot v + M \cdot V}\ (eq.2)$$

Após o choque, o corpo de massa m volta a ganhar energia potencial gravitacional. Pela conservação de energia, temos:



Situação C



Situação D

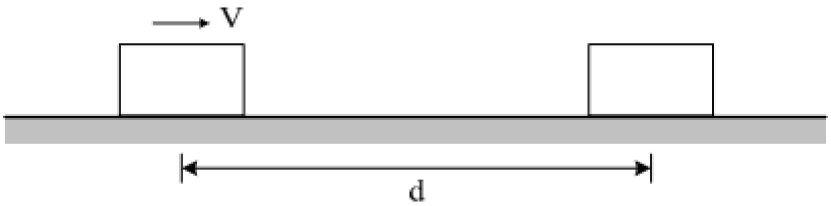
$$E_{mec}^{C} = E_{mec}^{D} \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot (L - L \cdot \cos 30°) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2 \cdot g \cdot L \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}\ (eq.3)$$

Substituindo (1) e (3) em (2), vem:

$$m \cdot \sqrt{2gL\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -m \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot L \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + M \cdot V$$

$$\boxed{V = \frac{m}{M}\sqrt{gL}\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)}$$

O bloco de massa M percorrerá uma distância d, sujeito ao atrito (μ):



$$\tau_{fnc} = \Delta E_{mec} \Rightarrow -\mu \cdot M \cdot g \cdot d = 0 - \frac{1}{2} M V^2 \Rightarrow d = \frac{V^2}{2 \cdot \mu \cdot g}$$

$$d = \frac{1}{2 \cdot 0{,}3 \cdot g} \cdot \frac{m^2}{M^2}\left(\sqrt{gL}\right)^2 \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2$$

$$\boxed{d = \frac{m^2 \cdot L}{0,6 \cdot M^2} \cdot \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{d = \frac{m^2 \cdot L}{0,6 \cdot M^2} \cdot \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}$

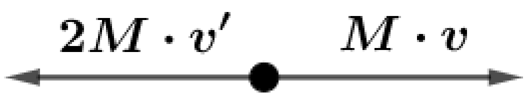
---

34. (ITA – 2004)

Atualmente, vários laboratórios. utilizando várias feixes de laser, são capazes de resfriar gases a temperaturas muito próximas do zero absoluto, obtendo moléculas e átomos ultrafrios. Considere três átomos ultrafrios de massa M, que se aproximam com velocidades desprezíveis. Da colisão tripla resultante, observada de um referencial situado no centro de massa do sistema, forma-se uma molécula diatômica com liberação de certa quantidade de energia B. Obtenha a velocidade final do átomo remanescente em função de B e M.

Comentários:

Como mencionado no enunciado, as velocidades são desprezíveis, isto é, a energia cinética do sistema é nula. Dessa forma, o centro de massa do sistema está em repouso. Portanto, após a colisão, temos:



$$2M \cdot \vec{v}' + M \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{v' = \frac{v}{2}}$$

A energia cinética do sistema formado pela molécula diatômica e pelo átomo é de:

$$B = \frac{1}{2} 2M \cdot v'^2 + \frac{1}{2} M v^2$$

$$B = M \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} M v^2$$

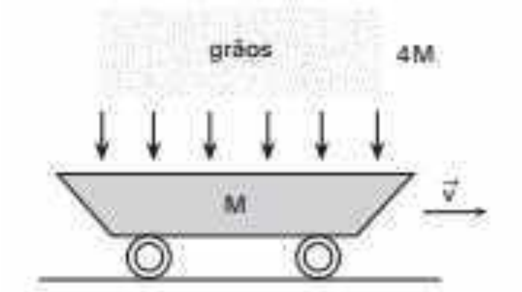
$$\therefore v = \sqrt{\frac{4B}{3M}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\sqrt{\frac{4B}{3M}}}$

---

35. (ITA – 2005)

Um vagão-caçamba de massa M se desprende da locomotiva e corre sobre trilhos horizontais com velocidade constante $v = 72,0\ km/h$ (portanto, sem resistência de qualquer espécie ao movimento). Em dado instante, a caçamba é preenchida com uma carga de grãos de massa igual a $4M$, despejada verticalmente a partir do repouso de uma altura de $6{,}00m$ (veja figura).



Supondo que toda a energia liberada no processo seja integralmente convertida em calor para o aquecimento exclusivo dos grãos, então, a quantidade de calor por unidade de massa recebido pelos grãos é

a) $15\ J/kg$.

b) $80\ J/kg$.

c) $100\ J/kg$.

d) $463\ J/kg$.

e) $578\ J/kg$.

Comentários:

A quantidade de movimento se conserva no eixo horizontal. Assim podemos descobrir a velocidade da caçamba após receber a carga:

$$Q_0 = Q_f$$

$$Mv = 5Mv'$$

Passando a velocidade inicial do carrinho para m/s,$v = 72\frac{km}{h} = \frac{20m}{s}$, temos:

$$v' = 4\ m/s$$

A energia inicial do sistema é dada por:

$$E_0 = 4Mgh + \frac{Mv^2}{2}$$

A energia final do sistema é dada por:

$$E_f = \frac{5Mv'^2}{2}$$

A energia liberada é dada pela diferença entre a energia final e a inicial:

$$E_{lib} = E_f - E_0$$

$$\therefore E_{lib} = 400M$$

Assim a quantidade de energia por unidade de massa é:

$$\frac{Q}{4M} = 100\,J/kg$$

Gabarito: C

36. (ITA – 2005)

Dois corpos esféricos de massa M e $5M$ e raios R e $2R$, respectivamente, são liberados no espaço livre. Considerando que a única força interveniente seja a da atração gravitadonal mútua, e que seja de $12R$ a distância de separação inicial entre os centros dos corpos, então, o espaço percorrido pelo corpo menor até a colisão será de

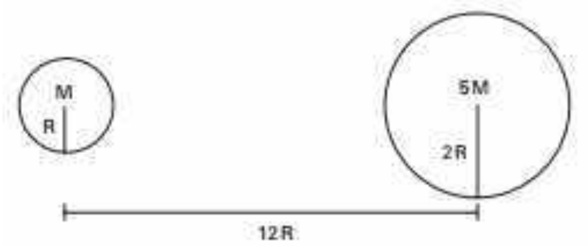
a) $1{,}5R$.

b) $2{,}5R$.

c) $4{,}5R$.

d) $7{,}5R$.

e) $10{,}0R$.



Comentários:

Como todas as forças que agem no sistema constituído pelos corpos são internas, sabemos que a posição do centro de massa não varia. Portanto:

$$X_{CM_{inicial}} = X_{CM_{final}}$$

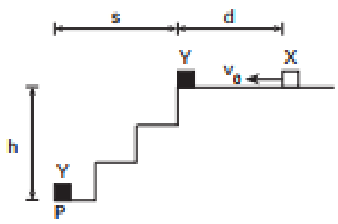
$$\frac{M \cdot 0 + 5M \cdot 12R}{6M} = \frac{M \cdot d + 5M(d + 3R)}{6M}$$

$$\boxed{d = 7{,}5R}$$

Gabarito: D

37. (ITA – 2006)

Animado com velocidade inicial v_0, o objeto X, de massa m, desliza sobre um piso horizontal ao longo de uma distância d, ao fim da qual colide com o objeto Y, de mesma massa, que se encontra inicialmente parado na beira de uma escada de altura h.



Com o choque, o objeto Y atinge o solo no ponto P. Chamando μ_k o coeficiente de atrito cinético entre o objeto X e o piso, g a aceleração da gravidade e desprezando a resistência do ar, assinale a expressão que dá a distância d.

a) $d = \frac{1}{2\mu_k g}\left(v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h}\right)$

b) $d = \frac{-1}{2\mu_k g}\left(v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h}\right)$

c) $d = \frac{-v_0}{2\mu_k g}\left(v_0 - s\sqrt{\frac{g}{2h}}\right)$

d) $d = \frac{1}{2\mu_k g}\left(2v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h}\right)$

e) $d = \frac{-v_0}{\mu_k g}\left(v_0 - s\sqrt{\frac{g}{2h}}\right)$

Comentários:

Admitindo colisão elástica entre X e Y, a velocidade de lançamento de Y logo após o choque é igual a velocidade de X após percorrer a distância d.

O tempo de queda de Y é dado por:

$$t_{queda} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Portanto, a velocidade de lançamento de Y é expressa por:

$$v = \frac{s}{t_{queda}} = s \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Pela equação de Torricelli, podemos determinar o deslocamento de X antes da colisão:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot (-\mu_k \cdot g) \cdot d \Rightarrow \left(s \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}}\right)^2 = v_0^2 - 2 \cdot \mu_k \cdot g \cdot d$$

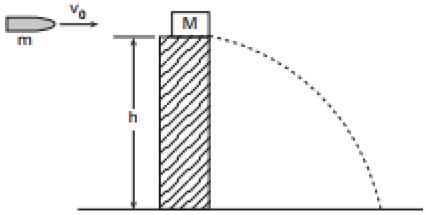
$$\boxed{d = \frac{1}{2 \cdot \mu_k \cdot g}\left(v_0^2 - \frac{s^2 \cdot g}{2h}\right)}$$

Gabarito: $d = \frac{1}{2\mu_k g}\left(v_0^2 - \frac{s^2 g}{2h} - 2v'_x s\sqrt{\frac{g}{2h}} - {v'}_x^2\right)$, se o choque for perfeitamente elástico, letra A

---

38. (ITA – 2007)

Uma bala de massa m e velocidade v_0 é disparada contra um bloco de massa M, que inicialmente se encontra em repouso na borda de um poste de altura h, conforme mostra a figura.



A bala aloja-se no bloco que, devido ao impacto, cai no solo. Sendo g a aceleração da gravidade, e não havendo atrito e nem resistência de qualquer outra natureza, o módulo da velocidade com que o conjunto atinge o solo vale

a) $\sqrt{\left(\frac{mv_0}{m+M}\right)^2 + 2gh}$

b) $\sqrt{v_0^2 + \frac{2ghm^2}{(m+M)^2}}$

c) $\sqrt{v_0^2 + \frac{2mgh}{M}}$

d) $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$

e) $\sqrt{\frac{mv_0^2}{m+M} + 2gh}$

Comentários:

Durante a colisão, podemos conservar a quantidade de movimento:

$$m \cdot v_0 = (m + M) \cdot v \Rightarrow \boxed{v = \frac{m \cdot v_0}{m + M}}$$

Após a colisão, o conjunto $(m + M)$ sai, horizontalmente, com velocidade v. Portanto, pela conservação da energia mecânica, temos:

$$E_{mec}^{antes} = E_{mec}^{final}$$

$$\frac{1}{2}(m + M) \cdot v^2 + (m + M) \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}(m + M) \cdot u^2$$

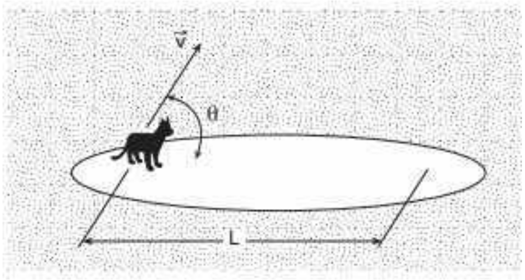
$$u = \sqrt{v^2 + 2 \cdot g \cdot h} \Rightarrow \boxed{u = \sqrt{\left(\frac{m \cdot v_0}{m + M}\right)^2 + 2 \cdot g \cdot h}}$$

Gabarito: A

---

39. (ITA – 2008)

Na figura, um gato de massa m encontra-se parado próximo a uma das extremidades de uma prancha de massa M que flutua em repouso na superfície de um lago. A seguir, o gato salta e alcança uma nova posição na prancha, à distância L. Desprezando o atrito entre a água e a prancha, sendo θ o ângulo entre a velocidade inicial do gato e a horizontal, e g a aceleração da gravidade, indique qual deve ser a velocidade u de deslocamento da prancha logo após o salto.



a) $u = \sqrt{\frac{g \cdot L \cdot M}{\left(1+\frac{M}{m}\right) \cdot m \cdot sen(\theta) \cdot \cos(\theta)}}$

b) $u = \sqrt{\frac{g \cdot L \cdot M}{\left(1+\frac{M}{m}\right) \cdot 2m \cdot sen(2\theta)}}$

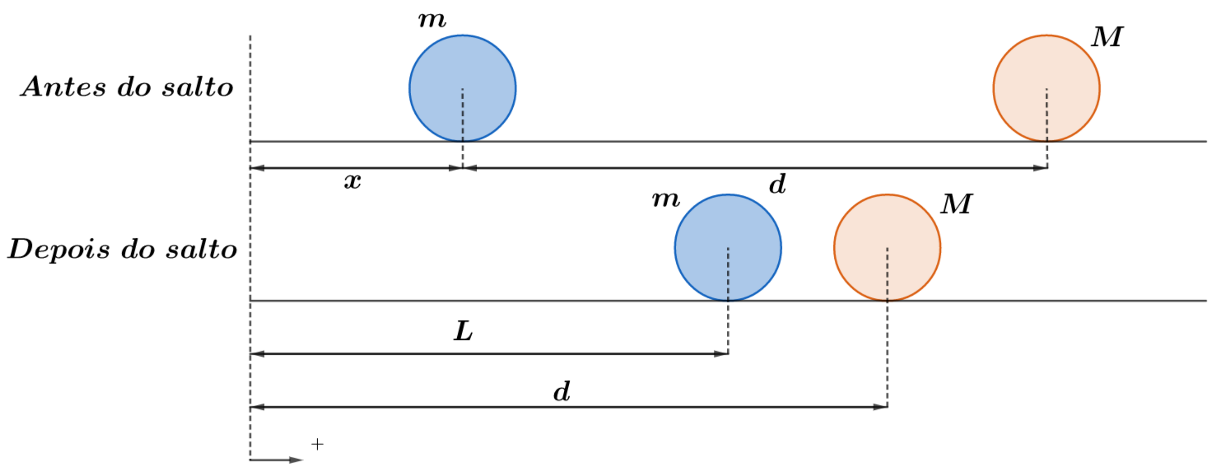
c) $u = \sqrt{\frac{g \cdot L \cdot M}{\left(1+\frac{M}{m}\right) \cdot 2m \cdot sen(\theta)}}$

d) $u = \sqrt{\frac{g \cdot L \cdot m}{\left(1+\frac{M}{m}\right) \cdot 2M \cdot tg(\theta)}}$

e) $u = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot L \cdot m}{\left(1+\frac{M}{m}\right) \cdot M \cdot tg(\theta)}}$

Comentários:

Inicialmente, o gato está parado e não há forças externas agindo na direção horizontal. Dessa forma, podemos dizer que o centro de massa na direção horizontal permanece inalterada. Portanto:



$$x_{cm}^{inicial} = x_{cm}^{final} \Rightarrow \frac{m \cdot x + M \cdot (x+d)}{m+M} = \frac{m \cdot L + M \cdot d}{m+M} \Rightarrow \boxed{x = \frac{mL}{m+M}}$$

Logo, o alcance do salto (A) é de:

$$A = L - x = \frac{M \cdot L}{m+M}$$

Dado que o ângulo de lançamento foi de θ, ângulo entre a velocidade do gato em relação a um referencial inercial e a horizontal, temos:

$$A = \frac{v^2 \cdot sen(2\theta)}{g} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{A \cdot g}{sen(2\theta)}} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{M \cdot L \cdot g}{(m+M) \cdot sen(2\theta)}}}$$

Pela conservação da quantidade de movimento na horizontal, temos:

$$Q^x_{inicial} = Q^x_{final} \Rightarrow 0 = m \cdot v \cdot \cos\theta - M \cdot u \Rightarrow u = \frac{m}{M} \cdot v \cdot \cos\theta$$

Substituindo v e manipulando algebricamente, vem:

$$u = \frac{m}{M} \cdot \sqrt{\frac{M \cdot L \cdot g}{(m+M) \cdot sen(2\theta)}} \cdot \cos\theta \Rightarrow u = \sqrt{\frac{m^2}{M^2} \cdot \frac{M \cdot L \cdot g}{(m+M) \cdot 2 \cdot sen\,\theta \cdot \cos\theta} \cdot \cos^2\theta}$$

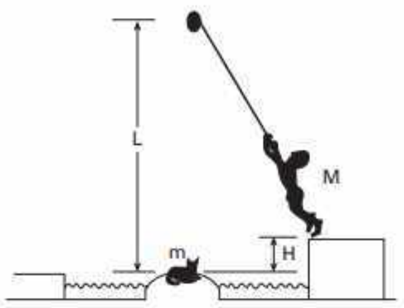
$$u = \sqrt{\frac{1}{M} \cdot \frac{m \cdot L \cdot g}{\frac{(m+M)}{m} \cdot 2 \cdot \frac{sen\,\theta}{\cos\theta}}} \Rightarrow \boxed{u = \sqrt{\frac{m \cdot L \cdot g}{\left(1 + \frac{M}{m}\right) \cdot 2 \cdot M \cdot tg\,\theta}}}$$

Gabarito: D

---

40. (ITA – 2008)

Numa brincadeira de aventura, o garoto (de massa M) lança-se por uma corda amarrada num galho de árvore num ponto de altura L acima do gatinho (de massa m) da figura, que pretende resgatar. Sendo g a aceleração da gravidade e H a altura da plataforma de onde se lança, indique o valor da tensão na corda, imediatamente após o garoto apanhar o gato para aterrisá-lo na outra margem do lago.



a) $M \cdot g \cdot \left(1 + \frac{2H}{L}\right)$

b) $(M+m) \cdot g \cdot \left(1 - \left(\frac{M+m}{M}\right)^2 \cdot \frac{2H}{L}\right)$

c) $M \cdot g \cdot \left(1 - \frac{2H}{L}\right)$

d) $(M+m) \cdot g \cdot \left(1 + \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 \cdot \frac{2H}{L}\right)$

e) $(m+M)\cdot g\cdot\left(\left(\frac{M}{m+M}\right)^2\cdot\frac{2H}{L}-1\right)$

Comentários:

A velocidade do garoto logo antes dele pegar o gato vem da expressão da conservação da energia:

$$E_0 = E_f \Rightarrow MgH = \frac{Mv^2}{2}$$
$$\therefore\ v = \sqrt{2gH}$$

Para encontrarmos a velocidade do conjunto imediatamente após a colisão inelástica iremos conservar a quantidade de movimento:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow M\sqrt{2gH} + 0 = (M+m)u$$
$$u = \frac{M\sqrt{2gH}}{M+m}$$

Numa trajetória circular, temos que:

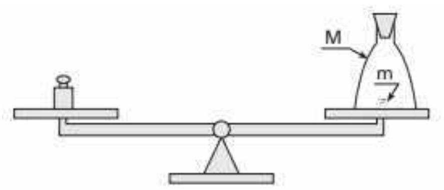
$$R_{cp} = (M+m)\frac{u^2}{L} = T - P$$
$$T = (M+m)\frac{M^2\cdot(2gH)}{(M+m)^2\cdot L} + (M+m)g$$
$$\therefore T = (M+m)g(1+\left(\frac{M}{M+m}\right)^2\cdot\frac{2H}{L})$$

Gabarito: D

---

41. (ITA – 2008)

Num dos pratos de uma balança que se encontra em equilíbrio estático, uma mosca de massa m está em repouso no fundo de um frasco de massa M. Mostrar em que condições a mosca poderá voar dentro do frasco sem que o equilíbrio seja afetado.



Comentários:

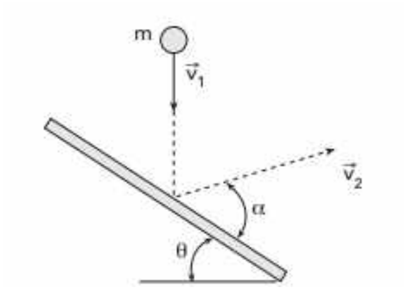
A força que a balança indica é a força vertical que o frasco atua sobre ela. Assim, para que a mosca consiga se locomover no interior do frasco sem afetar o equilíbrio, basta que a aceleração vertical do animal seja sempre nula. Pois, caso contrário, ela estaria gerando força vertical sobre o frasco e consequentemente mudando a leitura da balança.

Além disso, o centro de massa da porção direita da balança deve sempre permanecer à uma mesma distância do pino central. Dessa forma, o movimento da mosca deve se restringir apenas ao plano vertical, perpendicular ao braço da balança, tal que contenha a posição inicial da mosca.

Gabarito: vide comentários.

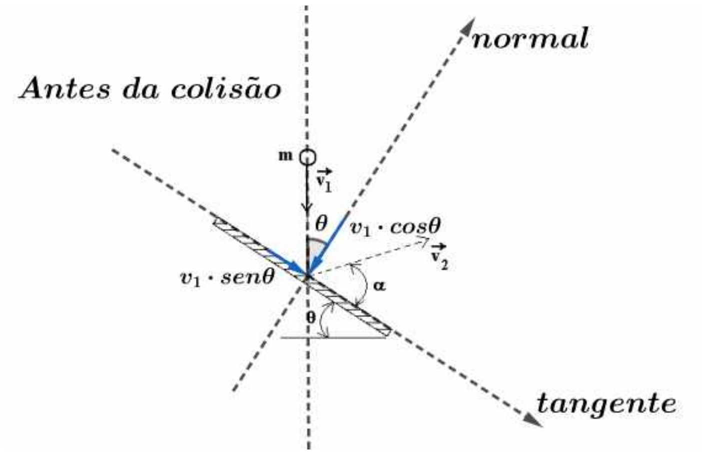
---

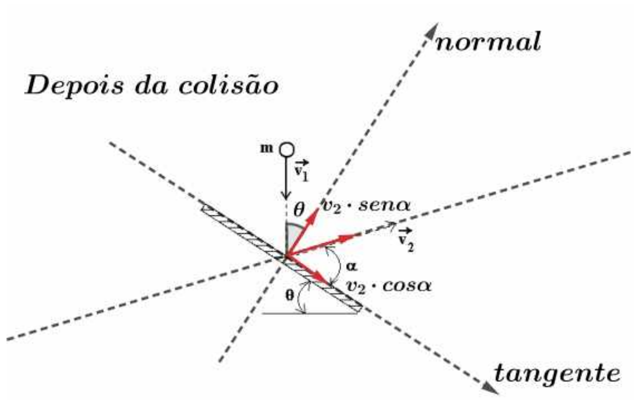
42. (ITA – 2008)



A figura mostra uma bola de massa m que que cai com velocidade $\vec{v}_1$ sobre a superfície de um suporte rígido, inclinada de um ângulo θ em relação ao plano horizontal. Sendo e o coeficiente de restituição para esse impacto, calcule o módulo da velocidade $\vec{v}_2$ com que a bola é ricocheteada, em função de $\vec{v}_1$, θ e e. Calcule também o ângulo a.

Comentários:





Na direção tangencial, o módulo da velocidade não se altera:

$$v_2 \cdot \cos(\alpha) = v_1 \cdot sen(\theta) \; (eq.1)$$

Pela definição do coeficiente de restituição bidimensional, temos:

$$e = \frac{v_2 \cdot sen(\alpha)}{v_1 \cdot \cos(\theta)} \Rightarrow v_2 \cdot sen(\alpha) = e \cdot v_1 \cdot \cos(\theta) \;\; (eq.2)$$

Fazendo $(1)^2 + (2)^2$, temos:

$$(v_2 \cdot \cos(\alpha))^2 + \left(v_2 \cdot sen(\alpha)\right)^2 = \left(v_1 \cdot sen(\theta)\right)^2 + (e \cdot v_1 \cdot \cos(\theta))^2$$

$$v_2^2\left(\cos^2(\alpha)+sen^2(\alpha)\right)=v_1^2[sen^2(\theta)+e^2\cdot\cos^2(\theta)]$$

$$\boxed{v_2=v_1\sqrt{sen^2(\theta)+e^2\cdot\cos^2(\theta)}}\ (eq.3)$$

Dividindo (2) por (1), temos:

$$tg(\alpha)=e\cdot cotg(\theta)$$

$$\therefore \alpha=arctg[e\cdot cotg(\theta)]$$

Gabarito: $\boldsymbol{v_2=v_1\sqrt{sen^2(\theta)+e^2\cdot\cos^2(\theta)}}$ e $\boldsymbol{\alpha=arctg[e\cdot cotg(\theta)]}$

---

43. (ITA – 2009)

Num filme de ficção, um foguete de massa m segue uma estação espacial, dela aproximando-se com aceleração relativa o. Para reduzir o impacto do acoplamento, na estação existe uma mola de comprimento L e constante k. Calcule a deformação máxima sofrida pela mola durante o acoplamento sabendo-se que o foguete alcançou a mesma velocidade da estação quanto dela se aproximou de uma certa distância $d>L$, por hipótese em sua mesma órbita.

Comentários:

Vamos trabalhar o problema no referencial da estação espacial, isto é, um referencial que se move com a mesma velocidade da estação, a partir do instante em que o foguete se encontra a uma distância d da estação. Dessa forma, podemos aplicar a equação de Torricelli para o foguete:

$$v^2=v_0^2+2\cdot a\cdot\Delta s\Rightarrow v^2=2\cdot a\cdot(d-L)$$

Quando começar o atracamento, vamos considerar que pare a propulsão do foguete. Assim, ocorrerá a colisão do foguete (massa m) com a estação (considerada de massa M).

Podemos dizer que quando a distância entre o foguete e a estação for mínima, então a deformação da mola será máxima. Em outras palavras, neste instante a velocidade relativa entre eles é nula, ou seja, ambos terão a mesma velocidade (v') em relação ao referencial escolhido.

De acordo com a conservação da quantidade de movimento linear, temos:

$$m\cdot v=(m+M)\cdot v'\Rightarrow \boxed{v'=\frac{m}{m+M}\cdot v}$$

Durante a colisão, a força que age nos corpos é a elástica, que é conservativa. Então, podemos dizer que há conservação da energia mecânica do sistema:

$$\frac{m\cdot v^2}{2}=\frac{(m+M)\cdot v'^2}{2}+\frac{k\cdot x^2}{2}$$

Substituindo os valores encontrados anteriormente, temos:

$$m\cdot v^2=m+M\cdot\left(\frac{m}{m+M}\cdot v\right)^2+k\cdot x^2$$

$$m \cdot v^2 = \frac{m^2}{m+M} \cdot v^2 + k \cdot x^2$$

$$k \cdot x^2 = m \cdot v^2 \left(1 - \frac{m}{m+M}\right)$$

$$k \cdot x^2 = (2 \cdot a \cdot (d-L) \cdot m) \cdot \left(1 - \frac{m}{m+M}\right)$$

$$\boxed{x = \sqrt{2 \cdot a \cdot \frac{m(d-L)}{k}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\frac{m}{M}}}}$$

Note que se $M \gg m$, então x é dado por:

$$x = \sqrt{2 \cdot a \cdot \frac{m(d-L)}{k}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{x = \sqrt{\frac{2am(d-L)}{k}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\frac{m}{M}}}}$

---

44. (ITA – 2009)

Considere uma bola de basquete de $600\ g$ a $5\ m$ de altura e, logo acima dela, uma de tênis de $60\ g$. A seguir, num dado instante, ambas as bolas são deixadas cair. Supondo choques perfeitamente elásticos e ausência de eventuais resistências, e considerando $g = 10\ m/s^2$, assinale o valor que mais se aproxima da altura máxima alcançada pela bola de tênis em sua ascensão após o choque.

a) 5 m

b) 10 m

c) 15 m

d) 25 m

e) 35 m

Comentários:

Pela conservação da quantidade de movimento do choque da bola de basquete com a bola de tênis logo após a bola de basquete se chocar com o solo, temos:

$$Q_0 = Q_f$$

$$Mv - mv = Mw + mu \ \ (i)$$

Adotamos o eixo de referência do solo para cima. Além disso, note que ao tocar o solo, a velocidade da bola de basquete apenas inverte de sentido, já que todas das colisões são consideradas perfeitamente elásticas.

Como todas as colisões são elásticas, usaremos que $e = 1$:

$$u - w = v - (-v)$$
$$u - w = 2v \quad (ii)$$

Assim ficamos com um sistema e resolvendo, temos:

$$u = \frac{3M - m}{M + m} v$$

Como $M = 10m$, então $u = \frac{29}{11} v$. Podemos encontrar v usando Torriceli:

$$v^2 = 0 + 2gh = 100$$

Para encontrar a altura máxima H basta conservar a energia mecânica entre o ponto logo após as colisões e o ponto mais alto atingido pela bola de tênis:

$$\frac{mu^2}{2} = mgH \Rightarrow \left(\frac{29}{11} v\right)^2 = 2gH$$
$$\boxed{H \cong 35\, m}$$

Gabarito: E

---

45. (ITA – 2011)

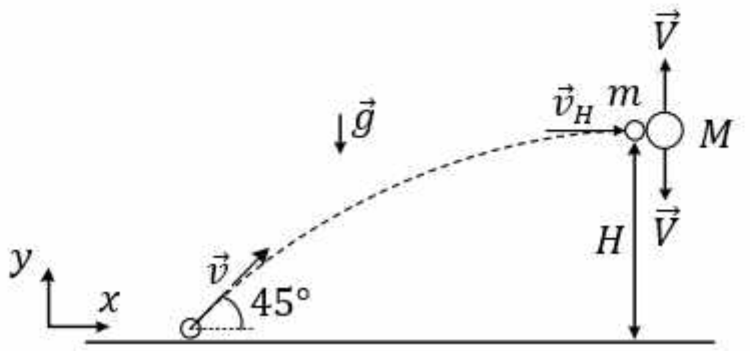
Um objeto de massa m é projetado no ar a 45° do chão horizontal com uma velocidade v. No ápice de sua trajetória, este objeto é interceptado por um segundo objeto, de massa M e velocidade V, que havia sido projetado verticalmente do chão. Considerando que os dois objetos "se colam" e desprezando qualquer tipo de resistência aos movimentos, determine a distância d do ponto de queda dos objetos em relação ao ponto de lançamento do segundo objeto.

Comentários:

No ponto mais alto de sua trajetória o corpo só tem velocidade horizontal, dessa forma, temos:

$$v_H = v \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Observe que a colisão pode ocorrer quando M está subindo ou descendo. No momento do choque temos a seguinte configuração:



A altura máxima instante antes do choque é dada por Torricelli:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S$$

$$0 = v^2 \cdot sen^2 45° - 2 \cdot g \cdot H \Rightarrow \boxed{H = \frac{v^2}{4g}}$$

Entretanto, nas duas possibilidades de $\vec{V}$ podemos conservar a quantidade de movimento na horizontal:

$$\vec{Q}^x_{inicial} = \vec{Q}^x_{final}$$

$$m \cdot \frac{v\sqrt{2}}{2} = (m + M) \cdot v_{f_x} \Rightarrow \boxed{v_{f_x} = \frac{m \cdot v \cdot \sqrt{2}}{2(m + M)}}$$

Nova velocidade vertical após a colisão:

$$M \cdot (\pm V) = (M + m) \cdot V_{f_y} \Rightarrow \boxed{V_{f_y} = \pm \frac{M \cdot V}{(M + m)}}$$

Após a colisão, o tempo de queda em y é dado por:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{(a \cdot t^2)}{2} \Rightarrow 0 = H + v_{f_y} \cdot t - \frac{g}{2} t^2$$

$$\frac{g}{2} t^2 \mp \frac{M \cdot V}{(M + m)} \cdot t - \frac{v^2}{4g} = 0$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$t_1 = \frac{\pm \frac{M \cdot V}{(M + m)} + \sqrt{\left(\frac{M \cdot V}{m + M}\right)^2 - 4 \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(-\frac{v^2}{4g}\right)}}{2 \cdot \frac{g}{2}} \Rightarrow t_1 = \frac{\pm \frac{M \cdot V}{(M + m)} + \sqrt{\left(\frac{M \cdot V}{m + M}\right)^2 + \frac{v^2}{2}}}{g}$$

$$t_2 = \frac{\pm \frac{M \cdot V}{(M + m)} - \sqrt{\left(\frac{M \cdot V}{m + M}\right)^2 - 4 \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(-\frac{v^2}{4g}\right)}}{2 \cdot \frac{g}{2}} \Rightarrow t_2 = \frac{\pm \frac{M \cdot V}{(M + m)} - \sqrt{\left(\frac{M \cdot V}{m + M}\right)^2 + \frac{v^2}{2}}}{g}$$

Note que t_2 é sempre menor que zero, portanto, não serve. Dessa forma, o tempo de queda é de:

$$\boxed{t_q = \frac{\pm \frac{M \cdot V}{(M + m)} + \sqrt{\left(\frac{M \cdot V}{m + M}\right)^2 + \frac{v^2}{2}}}{g}}$$

Logo, a distância horizontal percorrida, enquanto o conjunto $(m + M)$ cai, é de:

$$d = v_{f_x} \cdot t_q$$

$$\boxed{d = \frac{m \cdot v \cdot \sqrt{2}}{2(m+M)} \cdot \left(\frac{\pm \frac{M \cdot V}{(M+m)} + \sqrt{\left(\frac{M \cdot V}{m+M}\right)^2 + \frac{v^2}{2}}}{g} \right)}$$

Gabarito: $\boldsymbol{d = \frac{mv\sqrt{2}}{2(M+m)g} \cdot \left(\pm \frac{M \cdot V}{M+m} + \sqrt{\left(\frac{M \cdot V}{m+M}\right)^2 + \frac{v^2}{2}} \right)}$ **o sinal positivo indica o caso de colisão quando M está subindo e o sinal negativo quando M está descendo.**

---

46. (ITA – 2012)

Apoiado sobre patins niuna superfície horizontal sem atrito, um atirador dispara um projétil de massa m com velocidade v contra um alvo a uma distância d. Antes do disparo, a massa total do atirador e seus equipamentos é M. Sendo v_s a velocidade do som no ar e desprezando a perda de energia em todo o processo, quanto tempo após o disparo o atirador ouviria o ruído do impacto do projétil no alvo?

a) $\dfrac{d(v_s + v)(M - m)}{v\big(M \cdot v_s - m(v_s + v)\big)}$

b) $\dfrac{d(v_s + v)(M + m)}{v\big(M \cdot v_s + m(v_s + v)\big)}$

c) $\dfrac{d(v_s - v)(M + m)}{v\big(M \cdot v_s + m(v_s + v)\big)}$

d) $\dfrac{d(v_s + v)(M - m)}{v\big(M \cdot v_s - m(v_s - v)\big)}$

e) $\dfrac{d(v_s - v)(M - m)}{v\big(M \cdot v_s + m(v_s + v)\big)}$

Comentários:

Pela quantidade de movimento se conserva:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow 0 = mv - (M - m)u$$

$$u = \frac{mv}{M - m}$$

O projetil atinge o alvo após um tempo t_1:

$$t_1 = \frac{d}{v}$$

Façamos a função horaria para o atirador e para o som:

$$S_A = d + u \cdot t_1 + u \cdot t$$
$$S_S = v_S \cdot t$$

O atirador ouve o impacto quando $S_A = S_S$, então:

$$d + u \cdot t_1 + u \cdot t_2 = v_S \cdot t_2$$
$$t_2 = \frac{d + u \cdot t_1}{v_S - u}$$

Assim:

$$t_{t_{total}} = t_1 + t_2$$
$$t_{total} = \frac{d \cdot (M - m) \cdot (v_S + v)}{v(M \cdot v_S - m(v_S + v))}$$

Gabarito: A

---

47. (ITA – 2012)

100 cápsulas com água, cada uma de massa $m = 1{,}0\ g$, são disparadas à velocidade de $10{,}0\ m/s$ perpendicularmente a uma placa vertical com a qual colidem inelasticamente. Sendo as cápsulas enfileiradas com espaçamento de $1{,}0\ cm$, determine a força média exercida pelas mesmas sobre a placa.

Comentários:

Pelo teorema do impulso, podemos calcular a força média exercida pelas cápsulas:

$$\vec{I} = \Delta\vec{Q} \Rightarrow \vec{F}_m \cdot \Delta t = m \cdot \Delta\vec{v} \Rightarrow |\vec{F}_m| = \frac{m}{\Delta t} \cdot |\Delta\vec{v}|$$

Como a colisão é inelástica, então:

$$|\Delta\vec{v}| = |0 - 10| = 10\ m/s$$

Assim, o tempo decorrido entre os choques das cápsulas é de:

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{1 \cdot 10^{-2}\ m}{10\ m/s} = 10^{-3}\ s$$

Admitindo que a força média sobre as cápsulas tem a mesma intensidade que a força média sobre a placa. Portanto:

$$|\vec{F}_m| = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} \cdot 10{,}0 \Rightarrow \boxed{|\vec{F}_m| = 10\ N}$$

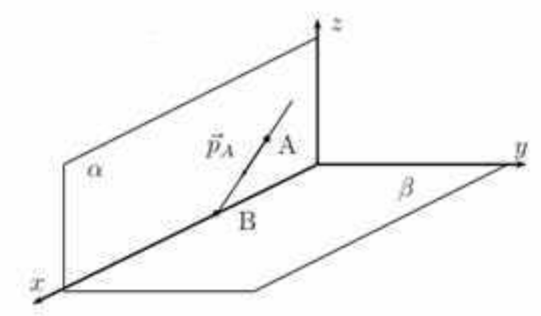
Gabarito: 10 N

---

48. (ITA – 2012)

Átomos neutros ultrafnos restritos a um plano são uma realidade experimental atual em armadilhas magneto-ópticas. Imagine que possa existir uma situação na qual átomos do tipo

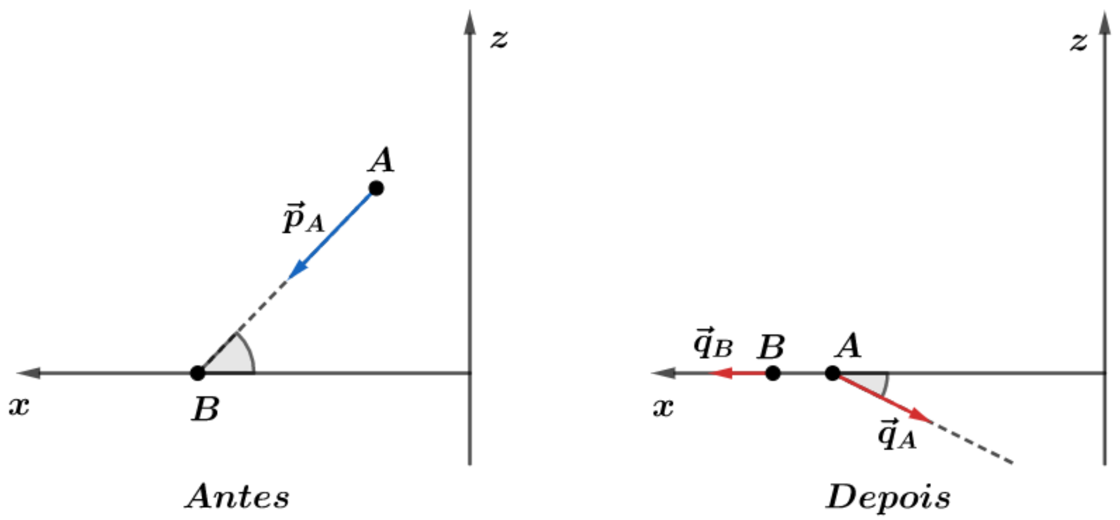
A e B estão restritos respectivamente aos planos α e β, perpendiculares entre si, sendo suas massas tais que $m_A = 2m_B$. Os átomos A e B colidem elasticamente entre si não saindo dos respectivos planos, sendo as quantidades de movimento iniciais $\vec{p}_A$ e $\vec{p}_B$,e as finais, $\vec{q}_A$ e $\vec{q}_B$. $\vec{p}_A$ forma um ângulo θ com o plano horizontal e $\vec{p}_B = \vec{0}$. Sabendo que houve transferência de momento entre A e B, qual é a razão das energias cinéticas de B e A após a colisão?



Comentários:

Como bem sabemos, podemos conservação a quantidade de movimento em uma colisão. Antes da colisão, não existe quantidade de movimento em y. Após a colisão, A não possui quantidade de movimento em y, logo, B tem quantidade de movimento apenas em x.

Dessa forma, podemos representar a colisão no plano $x - z$:



Aplicando a conservação da quantidade de movimento, temos:

$$\begin{cases} em\ x: Q^x_{inicial} = Q^x_{final} \Rightarrow p_A \cdot \cos\theta = q_B - q_A \cdot \cos\alpha \Rightarrow \boxed{q_A \cdot \cos\alpha = q_B - p_A \cdot \cos\theta}\ (eq.1) \\ em\ z: Q^z_{inicial} = Q^z_{final} \Rightarrow -p_A \cdot sen\ \theta = -q_A \cdot sen\ \alpha \Rightarrow \boxed{q_A \cdot sen\ \alpha = p_A \cdot sen\ \theta}\ (eq.2) \end{cases}$$

Devido ao fato de a colisão ser elástica, sabemos que não há variação da energia cinética do sistema. Portanto:

$$E_C^{inicial} = E_C^{final} \Rightarrow \frac{p_A^2}{2m_A} = \frac{q_A^2}{2m_A} + \frac{q_B^2}{2m_B} \Rightarrow \frac{p_A^2}{2m_A} = \frac{q_A^2}{2m_A} + \frac{q_B^2}{m_A}$$

$$\therefore \boxed{p_A^2 = q_A^2 + 2q_B^2}\ (eq.3)$$

Fazendo $(1)^2 + (2)^2$, vem:

$$q_A^2(sen^2\alpha + \cos^2\alpha) = p_A^2(\cos^2\theta + sen^2\theta) - 2p_A \cdot q_B \cdot \cos\theta + q_B^2$$

$$q_A^2 = p_A^2 - 2p_A \cdot q_B \cdot \cos\theta + q_B^2\ (eq. 4)$$

Substituindo p_A^2 de (3) em (4), temos:

$$q_A^2 = q_A^2 + 2q_B^2 - 2p_A \cdot q_B \cdot \cos\theta + q_B^2 \Rightarrow 3q_B = 2p_A \cdot \cos\theta$$

$$\therefore \boxed{p_A = \frac{3q_B}{2\cos\theta}}$$

Substituindo p_A em (3), vem:

$$\left(\frac{3q_B}{2\cos\theta}\right)^2 = q_A^2 + 2q_B^2 \Rightarrow 9q_B^2 = 4 \cdot \cos^2\theta \cdot q_A^2 + 8 \cdot \cos^2\theta \cdot q_B^2$$

$$q_B^2(9 - 8 \cdot \cos^2\theta) = 4 \cdot \cos^2\theta \cdot q_A^2$$

$$\frac{q_B^2}{q_A^2} = \frac{4 \cdot \cos^2\theta}{9 - 8 \cdot \cos^2\theta}$$

Portanto, após a colisão, temos a seguinte razão entre as energias cinéticas:

$$\frac{E_C^B}{E_C^A} = \frac{\frac{q_B^2}{2m_B}}{\frac{q_A^2}{2m_A}} = \frac{q_B^2}{q_A^2} \cdot \frac{m_A}{m_B} = \frac{4 \cdot \cos^2\theta}{9 - 8 \cdot \cos^2\theta} \cdot 2$$

$$\boxed{\frac{E_C^B}{E_C^A} = \frac{8 \cdot \cos^2\theta}{9 - 8 \cdot \cos^2\theta}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{E_{C,B}}{E_{C,A}} = \frac{8cos^2\theta}{9 - 8cos^2\theta}}$

---

49. (ITA – 2013)

Uma rampa maciça de $120\ kg$ inicialmente em repouso, apoiada sobre um piso horizontal, tem sua declividade dada por $tg(\theta) = 3/4$. Um corpo de $80\ kg$ desliza nessa rampa a partir do repouso, nela percorrendo $15\ m$ até alcançar o piso. No final desse percurso, e desconsiderando qualquer tipo de atrito, a velocidade da rança em relação ao piso é de aproximadamente

a) 1 m/s.

b) 3 m/s.

c) 5 m/s.

d) 2 m/s.

e) 4 m/s.

Comentários:

Devido à ausência de forças externas, a posição do centro de massa do sistema não se altera. Assim podemos encontrar o quanto a rampa se deslocou:

$$X_{CM_{inicial}} = X_{CM_{final}}$$

$$\frac{80 \cdot 12 + 120 \cdot 8}{80 + 120} = \frac{80x + 120(8 + x)}{80 + 120}$$

$$x = 4{,}8\ m$$

Adotando o referencial não inercial e fazendo as equações das forças, temos:

Para a rampa:

$$Nsen\theta = Ma$$

Para o bloco:

$$N + ma \cdot sen\theta = mgcos\theta$$

Substituindo a N podemos encontrar a aceleração da rampa:

$$a \cong 2{,}58\ m/s^2$$

Logo a velocidade da rampa é:

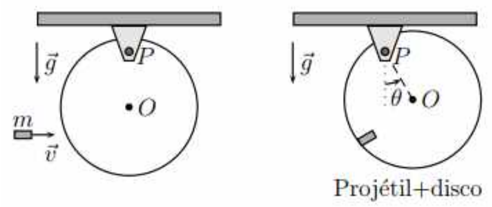
$$v^2 = 2a\Delta S \Rightarrow v = 5m/s$$

Gabarito: C

---

50. (ITA – 2014)

Um disco rígido de massa M e centro O pode oscilar sem atrito num plano vertical em torno de uma articulação P. O disco é atingido por um projétil de massa $m \ll M$ que se move horizontalmente com velocidade v no plano do disco. Após a colisão, o projétil se incrusta no disco e o conjunto gira em torno de P até o ângulo θ. Nestas condições, afirmam-se:



I. A quantidade de movimento do conjunto $projétil + disco$ se mantém a mesma imediatamente antes e imediatamente depois da colisão.

II. A energia cinética do conjunto $projétil + disco$ se mantem a mesma imediatamente antes e imediatamente depois da colisão.

III. A energia mecânica do conjunto $projétil + disco$ imediatamente após a colisão é igual à da posição de ângulo $\theta/2$.

É (são) verdadeira(s) apenas a(s) assertiva(s)

a) I.

b) I e II.

c) I e III.

d) II e III.

e) III.

Comentários:

I. FALSA. A articulação P realiza sobre o sistema um impulso e, por isso, a quantidade de movimento não se conserva.

II. FALSA. Na colisão inelástica não há conservação de energia.

III. VERDADEIRA. Após a colisão, a única força realizando trabalho é a força Peso. Assim a energia se conserva.

Gabarito: E

---

51. (ITA – 2015)

Uma chapa metálica homogênea quadrada de $100\ cm^2$ de área, situada no plano xy de um sistema de referência, com um dos lados no eixo x, tem o vértice inferior esquerdo na origem. Dela, retira-se uma porção circular de $5{,}00\ cm$ de diâmetro com o centro posicionado em $x = 2{,}50\ cm$ e $y = 5{,}00\ cm$. Determine as coordenadas do centro de massa da chapa restante.

a) $(x_C, y_C) = (6{,}51, 5{,}00)\ cm$

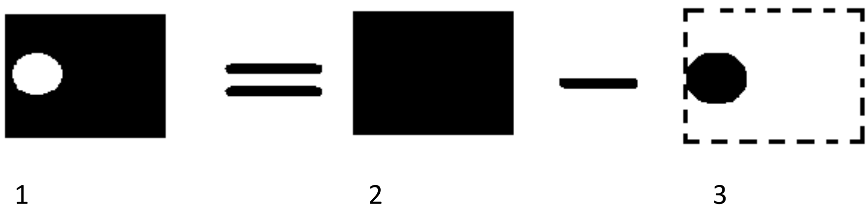
b) $(x_C, y_C) = (5{,}61, 5{,}00)\ cm$

c) $(x_C, y_C) = (5{,}00, 5{,}61)\ cm$

d) $(x_C, y_C) = (5{,}00, 6{,}51)\ cm$

e) $(x_C, y_C) = (5{,}00,\ 5{,}00)\ cm$

Comentários:



Pela definição do centro de massa, sabemos que:

$$y_c = \frac{\sum my}{\sum m};\ x_c = \frac{\sum mx}{\sum m}$$

Como a chapa é homogênea, então podemos escrever a massa em função da área e da densidade superficial de massa:

$$m_i = \mu \cdot A_i$$

Com isso, podemos escrever a posição do centro de massa em função das áreas.

$$y_c = \frac{\sum \mu \cdot A_i \cdot y_i}{\sum \mu \cdot A_i};\ x_c = \frac{\sum \mu \cdot A_i \cdot x_i}{\sum \mu \cdot A_i}$$

$$y_c = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i};\ x_c = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i}$$

Pelo princípio da superposição, podemos dizer que:

$$x_{cm} = \frac{A_{total} \cdot x_{total} - A_{círculo} \cdot x_{círculo}}{A_{total} - A_{círculo}} \Rightarrow x_{cm} = \frac{100 \cdot 5 - (3{,}14 \cdot 2{,}5^2) \cdot 2{,}5}{100 - (3{,}14 \cdot 2{,}5^2)}$$

$$\boxed{x_{cm} = 5{,}61\ cm}$$

Devido à simetria do problema, a posição vertical do centro de massa deve permanecer a mesma:

$$\boxed{y_{cm} = 5{,}00\ cm}$$

Gabarito: B

---

52. (ITA – 2015)

Nêutrons podem atravessar uma fina camada de chumbo, mas têm sua energia cinética absorvida com alta eficiência na água ou em materiais com elevada concentração de hidrogênio. Explique este efeito considerando um nêutron de massa m e velocidade v_0 que efetua uma colisão elástica e central com um átomo qualquer de massa M inicialmente em repouso.

Comentários:

Considerando a colisão elástica e central, temos:

$$e = 1 \Rightarrow \frac{v' - v}{v_0} = 1 \Rightarrow \boxed{v_0 = v' - v}\ (eq.1)$$

Aplicando a conservação da quantidade de movimento, vem:

$$\vec{Q}_{inicial} = \vec{Q}_{final} \Rightarrow m \cdot v_0 = m \cdot v + M \cdot v' \Rightarrow \boxed{\frac{m}{M} \cdot v_0 = \frac{m}{M} \cdot v + v'}\ (eq.2)$$

Fazendo (2) – (1), temos que:

$$\left(\frac{m}{M} - 1\right) \cdot v_0 = \left(\frac{m}{M} + 1\right) \cdot v \Rightarrow \boxed{v = v_0 \cdot \left(\frac{m - M}{m + M}\right)}$$

Dessa forma, a energia cinética do nêutron logo após o choque é de:

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow \boxed{E_C = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{m - M}{m + M}\right)^2 \cdot v_0^2}$$

Com esse resultado, como $m < M$, a energia cinética do nêutron deve ser menor após a colisão com algum átomo. Por outro lado, em colisões com átomos de hidrogênio, em que $m \approx M$, a energia cinética do nêutron tende a zero após o choque, pois $m - M \approx 0$.

Gabarito: $\boldsymbol{E_C = \frac{m}{2}\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 v_0^2}$

53. (ITA – 2016)

Dois garotos com patins de rodinhas idênticos encontram-se numa superfície horizontal com atrito e, graças a uma interação, conseguem obter a razão entre seus respectivos pesos valendo-se apenas de uma fita métrica. Como é resolvida essa questão e quais os conceitos físicos envolvidos?

Comentários:

Como não atuam forças externas, a posição do CM é constante.

$$X_{CM_{inicial}} = X_{CM_{final}}$$

Adotando o $X_{CM_{inicial}}$ como a origem dos eixos cartesianos, temos:

$$0 = \frac{-m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Podemos multiplicar por g e encontramos:

$$0 = \frac{-P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2} \Rightarrow P_1 x_1 = P_2 x_2$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

Então, para qualquer instante, os garotos conseguem a razão entre seus respectivos pesos medindo o deslocamento de cada um com a fita métrica.

O conceito físico envolvido é a conservação da quantidade de movimento e centro de massa.

Gabarito: O conceito físico envolvido é a conservação da quantidade de movimento e centro de massa.

54. (ITA – 2016)

Na ausência da gravidade e no vácuo, encontram-se três esferas condutoras alinhadas, A, B e C, de mesmo raio e de massas respectivamente iguais a m, m e $2m$. Inicialmente B e C encontram-se descarregadas e em repouso, e a esfera A, com carga elétrica Q, é lançaria contra a intermediária B com uma certa velocidade v. Supondo que todos movimentos ocorram ao longo de uma mesma reta, que as massas sejam grandes o suficiente para se desprezar as forças coulombianas e ainda que todas as colisões sejam elásticas, determine a carga elétrica de cada esfera após todas as colisões possíveis.

Comentários:

A primeira colisão ocorre entre as bolas A e B. Como todas as colisões são elásticas usaremos que $e = 1$.

Numa colisão, a quantidade de movimento se conserva:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow mv = mv'_A + mv'_B$$

$$e = 1 \Rightarrow \ v = v'_B - v'_A$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$v'_B = v \ \ e \ v'_A = 0$$

Resultado que já esperávamos, pois numa colisão elástica entre corpos de mesma massa, eles trocam de velocidade.

Como todas têm o mesmo raio, a carga se distribui igualmente. Assim, após a primeira colisão:

$$Q_A = \frac{Q}{2} \ e \ \ Q_B = \frac{Q}{2} \ e \ Q_C = 0$$

Para a segunda colisão, aplicando os mesmos passos, temos:

$$v''_B = v/3 \ \ e \ v'_C = 2v/3$$

E:

$$Q_A = \frac{Q}{2} \ e \ \ Q_B = \frac{Q}{4} \ e \ Q_C = \frac{Q}{4}$$

Para a terceira colisão, A e B trocam de velocidades e, assim, não haverá mais colisões.

Assim, após todas as colisões:

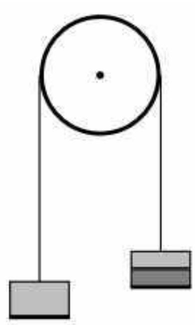
$$Q'_A = \frac{3Q}{8} \ e \ \ Q'_B = \frac{3Q}{8} \ e \ Q'_C = \frac{Q}{4}$$

Gabarito: $\boldsymbol{Q'_A = \frac{3Q}{8}, Q'_B = \frac{3Q}{8}, Q'_C = \frac{Q}{4}}$

---

55. (ITA – 2017)

Mediante um fio inextensível e de peso desprezível, a polia da figura suporta à esquerda uma massa de 60 kg, e à direita, uma massa de 55 kg tendo em cima outra de 5 kg, de formato anelar, estando este conjunto a 1 m acima da massa da esquerda. Num dado instante, por um dispositivo interno, a massa de 5 kg é lançada para cima com velocidade $v = 10\ m/s$, após o que, cai e se choca inelasticamente com a de 55 kg. Determine a altura entre a posição do centro de massa de todo o sistema antes do lançamento e a deste centro logo após o choque.



Comentários:

Inicialmente, devemos determinar a aceleração dos corpos de $60\ kg$ e de $55\ kg$, pela segunda lei de Newton:

$$60 \cdot g - 55 \cdot g = (60 + 55) \cdot a \Rightarrow \boxed{a = \frac{50}{115}\ m/s^2}$$

Da conservação da quantidade de movimento, podemos determinar a velocidade dos corpos logo após o lançamento do bloco de $5{,}0\ kg$:

$$5{,}0 \cdot 10 = (60 + 55) \cdot u \Rightarrow \boxed{u = \frac{50}{115}\ m/s^2}$$

O tempo de encontro do corpo de massa $5{,}0\ kg$ com o de $55\ kg$ é dado por:

$$s_5 = s_{55} \Rightarrow 10 \cdot t - \frac{10 \cdot t^2}{2} = -\frac{50}{115} \cdot t + \frac{\frac{50}{115} \cdot t^2}{2} \Rightarrow \frac{t}{2}\left(\frac{50}{115} + 10\right) = \frac{55}{115} + 10 \Rightarrow \boxed{t = 2\ s}$$

Sendo assim, o ponto de encontro é dado por:

$$s_5 = s_{55} = 10 \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 0$$

Portanto, eles se encontram na mesma posição inicial. Assim, o centro de massa se encontra também na mesma posição de antes do lançamento, isto é:

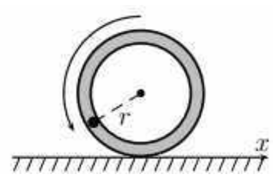
$$\Delta y_{cm} = 0$$

Gabarito: $\boldsymbol{\Delta y_{cm} = 0}$

---

56. (ITA – 2018)

Um tubo fino cie massa $1225\ g$ e raio $r = 10{,}0\ cm$ encontra-se inicialmente em repouso sobre um plano horizontal sem atrito. A partir do ponto mais alto, um corpo de massa $71{,}0\ g$ com velocidade inicial zero desliza sem atrito pelo interior do tubo no sentido anti-horário, conforme a figura. Então, quando na posição mais baixa, o corpo terá uma velocidade relativa ao tubo, em cm/s, igual a



a) $-11{,}3$.

b) -206.

c) $11{,}3$.

d) 206.

e) 194.

Comentários:

Devido ao fato de não ter atrito entre o tubo fino e o solo, o tubo não realiza rolamento. Assim, na posição mais baixa, o corpo de massa $71{,}0\ g$ se desloca para a direita e, para conservar a quantidade de movimento do sistema constituído pelos dois corpos, o tubo deve se deslocar para esquerda. Como o sistema é isolado de forças externas em x, então:

$$\vec{Q}^{x}_{inicial} = \vec{Q}^{x}_{final} \Rightarrow 0 = m \cdot v - M \cdot u \Rightarrow \boxed{u = \frac{m}{M} \cdot v}\ (eq. 1)$$

Pela conservação da energia mecânica, temos:

$$E^{inicial}_{mec} = E^{final}_{mec} \Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot r = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{m \cdot u^2}{2}$$

$$4 \cdot m \cdot g \cdot r = m \cdot v^2 + M \cdot u^2\ (eq. 2)$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$4 \cdot m \cdot g \cdot r = m \cdot v^2 + M \cdot \left(\frac{m}{M} \cdot v\right)^2$$

$$v^2 = \frac{4Mgr}{M + m} \Rightarrow \boxed{v = 1{,}94\ m/s}$$

Portanto:

$$u = \frac{m}{M} \cdot v = \frac{71}{1225} \cdot 1{,}94 \Rightarrow \boxed{u = 0{,}11\ m/s}$$

Logo, a velocidade relativa do tubo é de:

$$v_{rel} = v + u = 2{,}05\ m/s = 205\ cm/s$$

Gabarito: D

---

57. (ITA – 2018)

Num plano horizontal liso, presas cada qual a uma corda de massa desprezível, as massas m_1 e m_2 giram em órbitas circulares de mesma frequência angular uniforme, respectivamente com raios r_1 e $r_2 = r_1/2$. Em certo instante essas massas colidem-se frontal e elasticamente e cada qual volta a perfazer jum movimento circular uniforme. Sendo iguais os módulos das velocidades de m_1 e m_2 após o choque, assinale a relação m_2/m_1.

a) 1

b) 3/2

c) 4/3

d) 5/4

e) 7/5

Comentários:

Antes da colisão, sabemos que as frequências angulares das massas são iguais, mas que $r_1 = 2r_2$. Portanto:

$$\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}$$

$$\therefore v_1 = 2v_2$$

Na colisão, se conserva a quantidade de movimento:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_2 - m_1)u$$

A colisão é elástica:

$$e = 1 \Rightarrow v_1 + v_2 = 2u$$

Resolvendo o sistema, encontramos:

$$\begin{cases} v_1 = 2v_2 \\ m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_2 - m_1)u \\ v_1 + v_2 = 2u \end{cases}$$

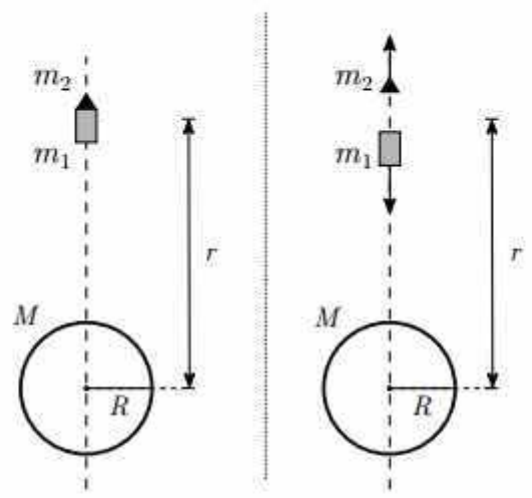
$$\therefore \frac{m_2}{m_1} = \frac{7}{5}$$

Gabarito: E

---

58. (ITA – 2019)

Conforme a figura, um veículo espacial, composto de um motor-foguete de massa m_1 e carga útil de massa m_2, é lançado verticalmente de um planeta esférico e homogêneo de massa M e raio R. Após esgotar o combustível, o veículo permanece em voo vertical até atingir o repouso a uma distância r do centro do planeta. Nesse instante um explosivo é acionado, separando a carga útil do motor-foguete e impulsionando-a verticalmente com velocidade mínima para escapar do campo gravitacional do planeta. Desprezando forças dissipativas, a variação de massa associada à queima do combustível do foguete e efeitos de rotação do planeta, e sendo G a constante de gravitação universal, determine



a) o trabalho realizado pelo motor-foguete durante o 1° estágio do seu movimento de subida; e

b) a energia mecânica adquirida pelo sistema devido à explosão.

Comentários:

a)

De acordo com o enunciado, o foguete fornece energia ao sistema, de tal forma que o trabalho corresponde a variação da energia mecânica do sistema:

$$\tau = \Delta E_{mec} = (E_{mec})_{final} - (E_{mec})_{inicial}$$

$$\tau = -\frac{GM(m_1 + m_2)}{r} - \left[-\frac{GM(m_1 + m_2)}{R}\right]$$

$$\boxed{\tau = GM(m_1 + m_2)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}$$

b)

Como ocorre conservação do momento linear, podemos escrever que:

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2}$$

Lembrando que a velocidade de escape é dada por:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Então, a energia da explosão é convertida em energia cinética das partes:

$$E_{adq} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$E_{adq} = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{2GM}{r}}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\sqrt{\frac{2GM}{r}}\right)^2$$

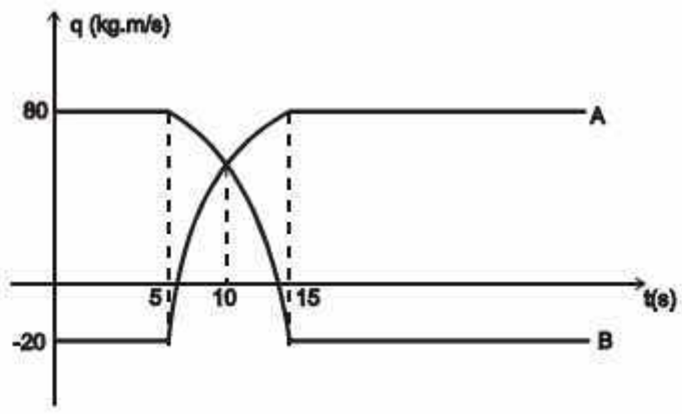
$$\boxed{E_{adq} = \frac{GMm_2}{r}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{\tau = GM(m_1 + m_2)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}$ **b)** $\boldsymbol{E_{adq} = \frac{GMm_2}{r}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}$

---

59. (2ª fase OBF – 2005)

Os movimentos, em uma linha reta, de dois corpos A e B são descritos pelo gráfico a seguir, que relaciona as quantidades de movimento com o tempo. Qual a intensidade média da força de interação que o corpo A exerceu sobre o corpo B?



Comentários:

Temos que $\vec{F}_R = \frac{d\vec{Q}}{dt}$, ou seja, a força resultante é dada pela variação da quantidade de movimento com o tempo. Para encontrarmos a intensidade média da $\vec{F}_R$ devemos fazer $\vec{F}_R = \frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta t}$.

Assim:

$$\left|\vec{F}_R\right| = \frac{|-20-80|}{10} = 10\ N$$

Gabarito: 10 N

---

60. (3ª fase OBF – 2005)

Uma bala, de massa $10\ g$, atinge e se encrava em um bloco de chumbo de massa igual a $990\ g$ que se encontra em repouso sobre uma superfície sem atrito. Após a penetração da bala no bloco, este se move com velocidade constante igual a $2\ m/s$. Qual era a velocidade da bala antes de penetrar no bloco?

Comentários:

A quantidade de movimento se conserva, pois não há forças externas.

Então:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow m_1v_1 + m_2v_2 = m_fv_f$$
$$\Rightarrow 10 \cdot v + 990 \cdot 0 = 1000 \cdot 2$$
$$\Rightarrow v = 200\ m/s$$

Gabarito: 200 m/s

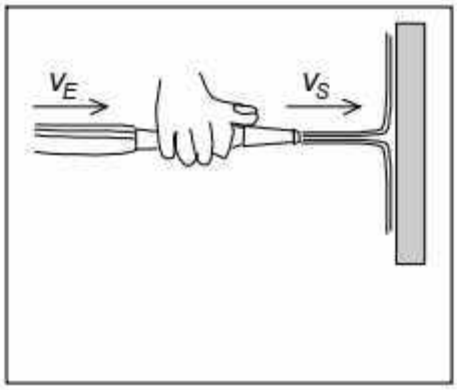
---

61. (2ª fase OBF – 2006)

A figura mostra a mão de um jardineiro segurando o bico de uma "mangueira" de regar jardins e o jato de água da mesma batendo em uma parede e sendo espalhado perpendicularmente ao bico da mangueira. Supondo o escoamento igual a $1,0\,kg$ de água por segundo, a velocidade da água no interior da mangueira v_E igual a $0,25\,m/s$ e a velocidade da água ao sair pelo bico vs igual a $2,0\,m/s$, pede-se determinar:

a) o valor da força horizontal que o jardineiro exerce para equilibrar a força associada à mudança de velocidade da água no bico da "mangueira";

b) o valor da força de reação exercida pela parede contra o jato de água.



Comentários:

a)

Considere, para simplificar os cálculos, o intervalo de 1 segundo.

A mudança de velocidade da água tende a jogar a mangueira para trás, a fim de conservar a quantidade de movimento. Assim, a força horizontal exercida pelo jardineiro está relacionada com o impulso que causa a variação da quantidade de movimento do sistema.

$$I = m \cdot v_S - m \cdot v_E$$
$$\Rightarrow I = 1,75$$

De acordo com a definição de impulso, $I = F \cdot \Delta t$, temos para o intervalo de 1 segundo considerado que:

$$F = 1,75\,N$$

b)

A força de reação da parede também está associada ao impulso que faz a água parar, variando a quantidade de movimento.

$$I = 0 - m \cdot v_E \Rightarrow I = -2,0$$

Para o intervalo de 1 segundo considerado temos que $F = -2,0\,N$

Gabarito: a) 1,75 N b) -2,0 N

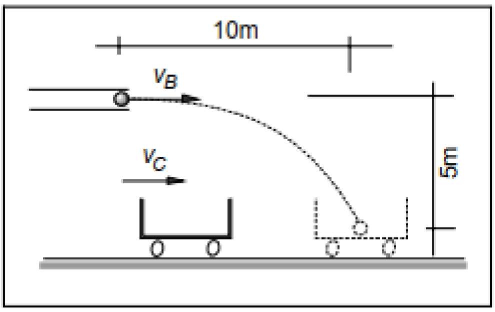
62. (2ª fase OBF – 2006)

Uma bola de chumbo de massa m_B igual a $5\ kg$ é lançada com uma velocidade v_B que faz com que ela caia e fique imobilizada dentro de um carrinho, conforme mostrado no desenho. O carrinho tem massa m_c igual a $10\ kg$ e se move com velocidade constante $v_c = 5\ m/s$.

De posse desses dados:

a) calcule o valor da velocidade v_B com que a bola colide com o carrinho;

b) calcule a velocidade v com que o carrinho se movimentará após ter recebido a bola de chumbo.



Comentários:

a)

O que ocorre é um lançamento horizontal. Sabemos que a velocidade em x é constante. E a velocidade em y é dada por:

$$v_y{}^2 = 2 \cdot g \cdot \Delta S \Rightarrow v_y = 10\ m/s$$

O tempo de queda é dado por:

$$v_y = at \Rightarrow t = 1s$$

A velocidade em x é dada por:

$$S = v_B t \Rightarrow v_B = 10\ m/s$$

b)

Assim a velocidade com que a bola colide com o carrinho é de:

$$v^2 = v_B^2 + v_y^2 \Rightarrow v = 10\sqrt{2}\ m/s$$

A quantidade de movimento se conserva no eixo x:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow m_B v_B + m_C v_C = (m_B + m_C) v_F$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 10 + 10 \cdot 5 = 15 \cdot v_F \Rightarrow v_F = \frac{20}{3}\ m/s$$

Gabarito: a) $10\sqrt{2}\ m/s$ b) 6,67 m/s

---

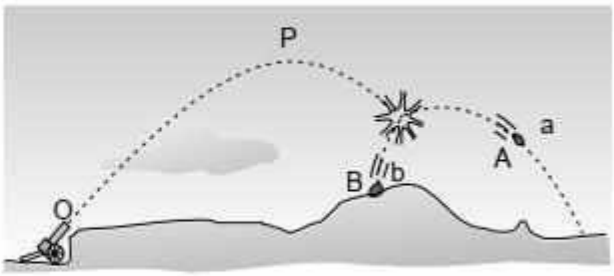
63. (3ª fase OBF – 2006)

O canhão mostrado dispara uma granada de massa $m = 6{,}00\,kg$ da posição $O(x_O; y_O)$ $(0\,m; 0\,m)$ que atinge seu ponto mais alto na posição $P(x_P; y_P)$ de coordenadas $(3000\,m; 1125\,m)$. Decorridos $20{,}0\,s$ após o disparo, a granada explode e seus fragmentos "a" e "b" de massas iguais a $m_a = 2{,}00\,kg$ e $m_b = 4{,}00\,kg$, respectivamente, caem segundo trajetórias coplanares à trajetória anterior à explosão. Despreze a resistência do ar e calcule:

a) o valor das coordenadas do ponto de explosão:

b) as coordenadas de posição $A(x_A; y_A)$ do fragmento "a" no instante em que o fragmento "b", 1,0 segundo após a explosão, toca o solo em um ponto $B(x_B; y_B)$, cuja posição é dada pelas coordenadas $(3000\,m; 300\,m)$;

c) o valor, em N, da força F da explosão, constante, de duração $1\,ms$ e que atuou no fragmento A. (deixar indicada a raiz quadrada)



Comentários:

a)

Após ser disparada pelo canhão, a granada descreve uma trajetória parabólica.

No eixo x, temos:

$$x = v_0 \cdot cos\theta \cdot t$$

$$v_x = v_0 \cdot cos\theta$$

No eixo y, temos:

$$y = v_0 \cdot sen\theta \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

$$v_y = v_0 \cdot sen\theta - gt$$

No ponto mais alto, a velocidade em y é zero:

$$v_y = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{v_0 \cdot sen\theta}{g}$$

Sabendo que as coordenadas do ponto P são $(3000\,m, 1125\,m)$, temos:

$$v_{oy}^2 = 2g \cdot y_p \Rightarrow v_{oy} = 150\,m/s$$

Assim:

$$t_s = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{150}{10} \Rightarrow \boxed{t_s = 15s}$$

Com isso, podemos calcular a velocidade horizontal da granada antes da explosão:

$$x_P = v_{0x} \cdot t_s \Rightarrow 3000 = v_{0x} \cdot 15$$
$$\Rightarrow v_{ox} = 200\, m/s$$

Agora podemos calcular a posição no instante da explosão:

$$x = 200 \cdot 20 = 4000m$$
$$y = 150 \cdot 20 - 5 \cdot 20 \cdot 20 = 1000m$$
$$\boxed{(x, y) = (4000, 1000)}$$

b)

Cálculo da posição do centro de massa (CM) do sistema 1 segundo após o instante da explosão ($t = 21\, s$):

$$x = 200 \cdot 21 = 4200m$$
$$y = 150 \cdot 21 - 5 \cdot 21 \cdot 21 = 945m$$

Podemos calcular a posição do fragmento A:

$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = 6600m$$
$$y_{CM} = \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B} = 2235m$$

c)

Velocidade da granada imediatamente antes da explosão:

$$v_x = 200\, m/s$$
$$v_y = 150 - 10 \cdot 20 = -50\, m/s$$

Para calcular a velocidade do fragmento A imediatamente após a explosão, usaremos o ponto encontrado no item anterior (t=21s):

$$6600 = 4000 + v_{Ax} \cdot 1 \Rightarrow v_{Ax} = 2600\, m/s$$
$$2235 = 1000 + v_{Ay} \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 \Rightarrow v_{Ay} = 1240\, m/s$$

Podemos calcular a Força através da variação na quantidade de movimento:

$$F_x \cdot \Delta t = Q_{Af,x} - Q_{Ai,x} = 2 \cdot 2600 - 2 \cdot 200 = 4800$$
$$\Delta T = 1s \;\Rightarrow\; F_x = 4800\, N$$
$$F_y \cdot \Delta t = Q_{Af,y} - Q_{Ai,y} = 2 \cdot 1240 + 2 \cdot 50 = 2580$$
$$\Delta T = 1s \;\Rightarrow\; F_x = 2580\, N$$

Assim:

$$F_R^2 = F_x^2 + F_y^2 \Rightarrow F_R^2 = 4800 \cdot 4800 + 2580 \cdot 2580 = 29696400$$
$$\boxed{F_R = \sqrt{29696400}\, N}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{x = 4000\ m}$ **e** $\boldsymbol{y = 1000\ m}$ **b)** $\boldsymbol{x = 6600\ m}$ **e** $\boldsymbol{y = 2235\ m}$ **c)** $\boldsymbol{\sqrt{29696400}\ kN}$

64. (2ª fase OBF – 2007)

Um garoto de massa m está num pequeno barco, de massa M, que se encontra em repouso em um lago de águas paradas. Em um determinado momento ele anda com velocidade v de um extremo do barco ao outro. Desprezando os efeitos dissipativos.

a) Qual será a velocidade do barco em relação à margem?

b) Se o barco fosse transformado num navio, qual seria a velocidade do navio?

Comentários:

a)

A quantidade de movimento se conserva:

$$Q_0 = Q_f \Rightarrow 0 = \ mv + Mv'$$

$$\Rightarrow v' = -\frac{m}{M}v$$

b)

Se $M >> m$, temos que $\frac{m}{M} \to 0$, o que faz com que a velocidade do navio tenda para 0 também.

$$\frac{m}{M} \to 0 \Rightarrow v' \to 0$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{v_b = -\frac{m}{M}v}$ **b)** $\boldsymbol{v_N \cong 0}$

65. (3ª fase OBF – 2007)

Uma partícula de massa $m = 0{,}5\ kg$ tem velocidade inicial horizontal de $6\ m/s$. Ao receber um impulso de uma força F constante, modifica sua velocidade para $8\ m/s$, em direção ' perpendicular à inidal, num intervalo de tempo $\Delta t = 0{,}1\ s$.

a) Qual a intensidade do impulso da força F?

b) Qual a intensidade da força F?

Comentários:

a)

A quantidade de movimento é uma grandeza vetorial.

Pelo teorema do Impulso, sabemos que o impulso da força resultante é a variação da quantidade de movimento:

$$\vec{I} = \ \overrightarrow{Q_f} - \ \overrightarrow{Q_0}$$

$$|\vec{I}| = |(0\,,4) - (3\,,0)| = |(-3\,,4)|$$

$$I = 5\ Ns$$

b)

Pela definição de impulso de uma força, temos que:

$$I = F \cdot \Delta t$$

$$F = 50\ N$$

Gabarito: a) $5\ N \cdot s$ b) $50\ N$

---

66. (3ª fase OBF – 2007)

Um projétil de massa $m = 0{,}1\ kg$ é lançado a um ângulo de $30°$ com a horizontal e com uma velocidade de $500\ m/s$. No ponto mais alto da trajetória ele explode em dois fragmentos iguais, A e B. Suponha que o fragmento B, imediatamente após a explosão, cai verticalmente a partir do repouso.

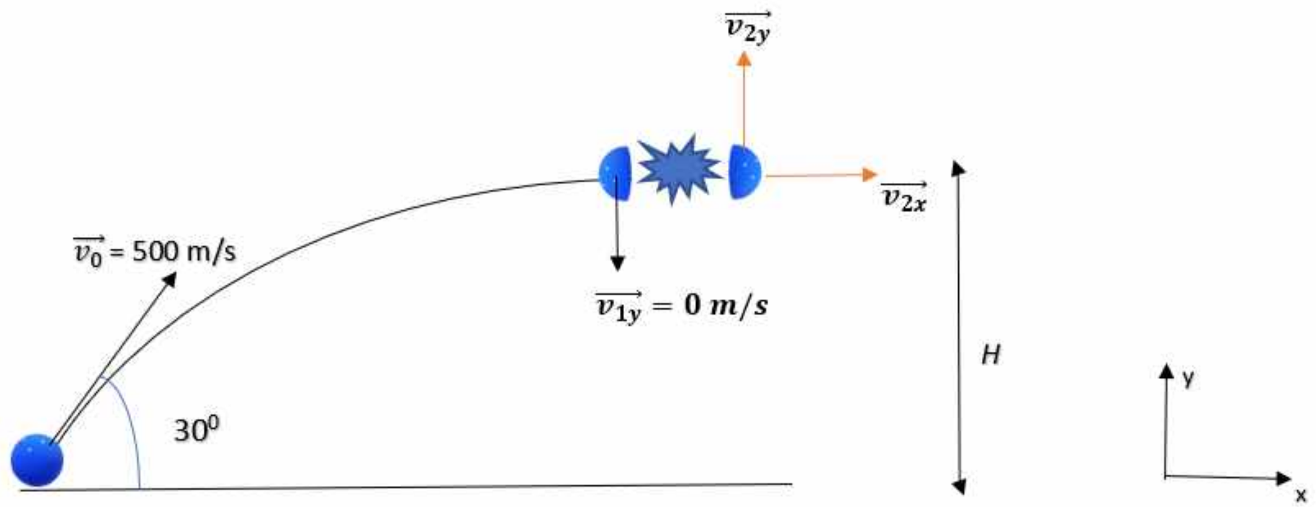
a) A que distância do ponto de lançamento cai o fragmento A, supondo-se o solo horizontal?

b) Calcule a diferença entre a energia mecânica do sistema, imediatamente após e imediatamente antes da explosão.

Comentários:

a)

Inicialmente, vamos fazer um desenho esquemático da granada explodindo no ponto mais alto da trajetória:



No ponto mais alto da trajetória, a velocidade vertical do corpo é nula, e, como a velocidade horizontal é constante, temos que:

$$v = 500 \cdot \cos 30° = 250\sqrt{3}\ m/s$$

Como a explosão acontece devido a forças internas, a quantidade de movimento do sistema se conserva:

$$2 \cdot m \cdot v = m\overrightarrow{v_{2x}}$$

$$\overrightarrow{v_{2x}} = 500\sqrt{3}\, m/s$$

Dado que a velocidade em y era zero antes da explosão e que o corpo 1 cai em queda livre, temos, pela conservação da quantidade de movimento no eixo y, que:

$$\overrightarrow{v_{2y}} = 0\, m/s$$

Assim, podemos calcular a distância atingida pelo corpo a partir da altura do ponto máximo e do tempo de queda:

$$H = \frac{[|\overrightarrow{v_0}| \cdot sen(30)]^2}{2 \cdot g} = 3125\, m$$

$$Tq_{(tempo\ de\ queda)} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 25\, s$$

$$|\overrightarrow{v_{2x}}| = \frac{d_1}{25} \rightarrow d_1 = 12500\sqrt{3}\, m$$

Distância percorrida até atingir o ponto de altura máxima:

$$d_2 = v \cdot Tq = 6250\sqrt{3}\, m$$

Logo, a distância que o corpo 2(A) cai do ponto de lançamento é dado por:

$$d_2 + d_1 = 18750\sqrt{3}\, m$$

b)

Primeiramente concluímos que a energia potencial gravitacional do sistema não varia, logo, a subtração das energias potenciais antes e depois se anulam.

Logo, a variação de energia do sistema será dada pela variação da energia cinética do sistema:

$$\Delta E = \left|\frac{2m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_{2x}^2}{2}\right| = 9375 J$$

Gabarito: a) $\mathbf{18750\sqrt{3}\, m}$ b) $\mathbf{\Delta E_M = 9375\, J}$

---

67. (3ª fase OBF – 2007)

Uma esfera de aço de massa $m_1 = 200\, g$, está presa à extremidade de uma corda de comprimento $l = 45\, cm$, e que tem fixa a outra extremidade. A esfera é abandonada sob a ação de seu peso quando a corda está na horizontal. No ponto mais baixo de sua trajetória a esfera colide elasticamente com um bloco de aço de massa $m_2 = 1{,}8\, kg$, inicialmente em repouso, sobre uma superfície horizontal, cujo coeficiente de atrito vale $\mu = 0{,}2$.

a) Qual a velocidade dos corpos imediatamente após a colisão?

b) Quanto o bloco se desloca sobre a superfície horizontal até atingir o repouso?

Comentários:

a)

Inicialmente, a conservação de energia do ponto A para o ponto B:

$$m \cdot g \cdot l = \frac{m\vartheta^2}{2}$$
$$\vartheta = \sqrt{2 \cdot g \cdot l} \; = \; 3\, m/s$$

A quantidade de movimento se conserva na colisão entre os blocos devido à existência unicamente de forças internas, além disso a colisão é elástica e o coeficiente de restituição "e" é 1, assim:

$$(1)\; Mv' + m\vartheta' = m\vartheta$$
$$(2)\quad e = \frac{v' - \vartheta'}{\vartheta} = \; 1$$

De (1) e (2), concluímos que:

$$v' = \frac{2m\vartheta}{M+m} \; = 0{,}6 \text{ m/s}$$
$$\vartheta' \; = \; -2{,}4\, m/s$$

b)

Conservação da energia de "M" logo após à colisão até o ponto onde ele para:

$$\frac{Mv'^2}{2} = \mu M g d$$
$$d = \frac{v'^2}{2\mu g} \; = \; 0{,}09\, m$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{\vartheta' = -2,4\, m/s}$ **e** $\boldsymbol{v' = 0,6\, m/s}$ **b)** $\boldsymbol{9\, cm}$

---

68. (3ª fase OBF – 2007)

Dois carrinhos A e B idênticos estão ligados rigidamente por uma barra e juntos (carrinho A + carrinho B + barra) têm a massa de $4\ kg$. Dois carrinhos C e D. de massas $M_C = 2\ kg$ e $M_D = 2kg$. São colocados em repouso entre os carrinhos A e B. a iguais distâncias (Figura 1).

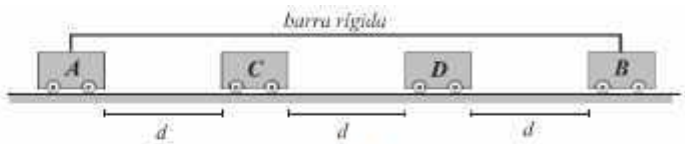


Fig. 1

Sabendo que a velocidade de A e B é de $3m/s$ para a direita, e considerando que o atrito entre as rodas dos carrinhos e o solo é desprezível, responda:

a) Se a colisão entre A e C for perfeitamente inelástica (C fica "grudado" em A) e, entre C e D for perfeitamente elástica, qual será a velocidade final do sistema sabendo que a colisão entre D e B também será perfeitamente inelástica (D fica “grudado” em B)?

b) Qual a velocidade final do sistema considerando a colisão entre A e C perfeitamente inelástica. e entre C e D também perfeitamente inelástica? Compare essa velocidade com aquela obtida no item (a). Explique o resultado.

Comentários:

a)

(i) <u>Colisão Inelástica:</u>

$$m_{AB} \cdot \vartheta_{AB} = (m_{AB} + m_c) \cdot \vartheta_{ABC} \Rightarrow \vartheta_{ABC} = \frac{m_{AB} \cdot \vartheta_{AB}}{m_{AB} + m_c} = 2\, m/s$$

(ii) <u>Colisão Elástica:</u>

$$(1)(m_{AB} + m_c) \cdot \vartheta_{ABC} = (m_{AB} + m_c) \cdot \vartheta'_{ABC} + m_d \vartheta_d$$

$$(2)\ e = 1 = \frac{\vartheta_d - \vartheta'_{ABC}}{\vartheta_{ABC}}$$

De (1) e (2), temos que:

$$\vartheta_d = \frac{2(m_{AB} + m_c)\vartheta_{ABC}}{m_{AB} + m_c + m_d} = 3\, m/s \text{ e } \vartheta_d - \vartheta_{ABC} = \vartheta'_{ABC} = 1\, m/s$$

(iii) <u>Colisão Inelástica:</u> (ϑ é $a\ velocidade\ resultante\ do\ sistema$)

$$m_d \vartheta_d + (m_{AB} + m_c) \cdot \vartheta'_{ABC} = (m_{AB} + m_c + m_d) \cdot \vartheta$$

Portanto:

$$\vartheta = \frac{m_d \vartheta_d + (m_{AB} + m_c) \cdot \vartheta'_{ABC}}{(m_{AB} + m_c + m_d)} = 1{,}5\, m/s$$

b)

De acordo vimos no item a), temos para a primeira colisão que:

$$\vartheta_{ABC} = \frac{m_{AB} \cdot \vartheta_{AB}}{m_{AB} + m_c} = 2\, m/s$$

(i) <u>Colisão Inelástica:</u>

$$(m_{AB} + m_c) \cdot \vartheta_{ABC} = (m_{AB} + m_c + m_d) \cdot \vartheta$$

$$\vartheta = \frac{(m_{AB} + m_c) \cdot \vartheta_{ABC}}{(m_{AB} + m_c + m_d)} = 1{,}5\, m/s$$

Análise dos resultados obtidos:

Observe que, ao considerarmos os 4 corpos como um único sistema, temos que a quantidade de movimento total do sistema deve se conservar dado que as colisões ocorrem mediante forças internas. Assim, é de se esperar que os itens ***(a)*** e ***(b)*** tenham o mesmo resultado, pois, apesar de possuírem diferentes processos intermediários, apresentam a mesma configuração inicial e final do sistema. Matematicamente:

$$Q_i = (m_{AB} + m_c + m_d) \cdot \vartheta = Q_f$$

Gabarito: a) a velocidade final do sistema é 1,5 m/s. b) A velocidade final do sistema é v = 1,5 m/s, ou seja, a mesma do item (a).

---

69. (2ª fase OBF – 2008)

Um projétil é disparado por um canhão e. no ponto mais alto de sua trajetória, a uma distância horizontal de 100 m do canhão, explode, dividindo-se em dois pedaços iguais. Um dos fragmentos é lançado horizontalmente para trás com velocidade de mesmo módulo que possuía o projétil imediatamente antes de explodir. Considerando desprezível a resistência do ar. a que distância entre si cairão no solo os dois fragmentos?

Comentários:

A explosão ocorre no ponto mais alto da trajetória do projétil e os fragmentos são lançados horizontalmente. Isso nos diz que a velocidade inicial em y dos fragmentos é nula. O que nos leva a importante conclusão de que o tempo de queda dos fragmentos será igual ao tempo de subida do projétil.

O fragmento que é lançado para trás com velocidade de mesmo módulo que possuía o projétil imediatamente antes de explodir percorrerá 100 m de distância horizontal, haja visto o tempo de queda já discutido.

Usaremos a conservação da quantidade de movimento para descobrir a velocidade do segundo fragmento:

$$Q_0 = Q_f$$

$$\Rightarrow 2mv = -mv + mv'$$

$$v' = 3v$$

Assim temos que o segundo fragmento percorrerá uma distância horizontal de 300m antes de cair no chão, pois seu tempo de queda é o mesmo e sua velocidade é 3 vezes maior.

Portanto, tendo um fragmento percorrido 100 m para trás e o outro 300 para frente, a distância em que cairão os fragmentos será de 400 m.

Gabarito: 400 m

---

70. (2ª fase OBF – 2008)

Duas partículas, uma de massa m e velocidade v, e outra de massa $2m$ e velocidade $v/2$, movem-se perpendicularmente sobre uma superfície horizontal lisa como mostra a figura 3. Num determinado instante atuam, sobre estas partículas, forças de igual módulo, direção e sentido. Quando estas forças deixam de atuar, a primeira partícula adquire um movimento perpendicular à sua direção inicial, sendo o módulo da velocidade, o mesmo. Qual o módulo da velocidade adquirida pela segunda partícula?

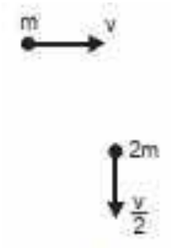


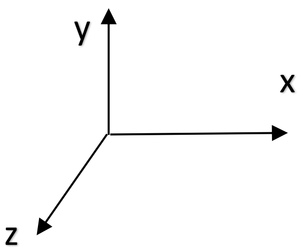
Fig. 3

Comentários:

Para que o corpo "m" tenha sua velocidade final perpendicular à velocidade inicial, devemos ter uma componente da força responsável por gerar um impulso e zerar a velocidade inicial de "m" no eixo x:

$$-\overrightarrow{F_x} \cdot \Delta t = m \cdot \overrightarrow{\vartheta} = \vec{I}_x$$

Existem infinitas formas de o corpo adquirir uma velocidade perpendicular à sua velocidade inicial, basta que os demais impulsos fornecidos pela força F não tenham componentes em x.



Entretanto, da forma que o problema foi abordado, nos é possível calcular a velocidade do segundo corpo de uma forma mais categórica considerando um problema bidimensional trabalhado somente nos eixos x e y.

Assim, vamos considerar dois possíveis Impulsos, positivo em relação à direção do eixo y (Tipo1) e negativo em relação ao eixo y (Tipo2).

Tipo1:

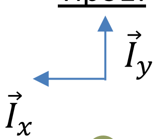
$$\overrightarrow{F_y} \cdot \Delta t = m \cdot \overrightarrow{\vartheta} = \vec{I}_y$$

Tipo2:

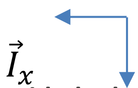
$$-\overrightarrow{F_y} \cdot \Delta t = m \cdot \overrightarrow{\vartheta} = \vec{I}_y$$

Como as duas partículas estão sujeitas à mesma força, teremos os seguintes impulsos para a segunda partícula:

Tipo1:



Tipo2:



$$\vec{I}_y$$

Velocidade resultante no eixo x da partícula “$2m$” para ambos os casos:

$$-m \cdot \vec{\vartheta} = 2m \cdot \vec{\vartheta}_x \Rightarrow \vec{\vartheta}_x = -\frac{\vec{\vartheta}}{2}$$

Velocidade resultante no eixo y da partícula “$2m$”:

Tipo1:

$$m \cdot \vec{\vartheta} - 2m \cdot \frac{\vec{\vartheta}}{2} = \vec{0}$$

$$\vec{\vartheta_y} = \vec{0}\, m/s$$

Tipo2:

$$-m \cdot \vec{\vartheta} - 2m \cdot \frac{\vec{\vartheta}}{2} = -2m \cdot \vec{\vartheta}$$

$$2m \cdot \vec{\vartheta}_y = -2m \cdot \vec{\vartheta} \Rightarrow \vec{\vartheta}_y = -\vec{\vartheta}$$

Velocidade resultante da partícula “$2m$”:

Tipo1: $\left|\vec{\vartheta_R}\right| = \frac{|\vec{\vartheta}|}{2}$ Tipo2: $\left|\vec{\vartheta_R}\right| = \sqrt{\vartheta^2 + \frac{\vartheta^2}{4}} = \frac{\vartheta \cdot \sqrt{5}}{2}$

Gabarito: $\left|\vec{\boldsymbol{\vartheta}_R}\right| = \frac{\boldsymbol{\vartheta} \cdot \sqrt{5}}{2}$ **ou** $\left|\vec{\boldsymbol{\vartheta}_R}\right| = \frac{|\vec{\boldsymbol{\vartheta}}|}{2}$

---

71. (2ª fase OBF – 2008)

Na superfície de um lago de águas paradas encontra-se em movimento um tronco, de massa $400\ kg$ e comprimento $18\ m$, com uma velocidade constante igual a $4{,}0\ m/s$ em relação às margens do lago. Em um determinado instante, um homem de massa $80\ Kg$ começa a correr sobre ele, saindo de uma extremidade a outra, com uma velocidade igual a $3{,}0\ m/s$ em relação ao tronco e no mesmo sentido de seu movimento. Qual a distância percorrida pelo tronco sobre a água, do instante que o homem deixa uma de suas extremidades e alcança a outra extremidade? Considere desprezível a resistência produzida pela água ao movimento do tronco.

Comentários:

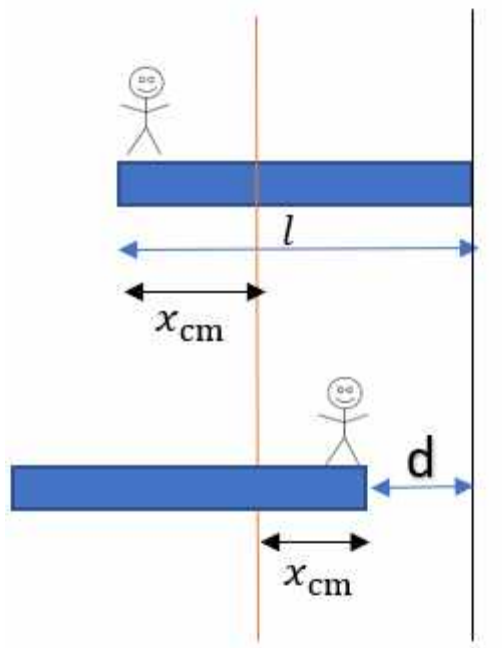
Como a velocidade do homem é constante em relação ao tronco, temos que:

$$3 = \frac{18}{t_{travessia}} \Rightarrow t_{travessia} = 6\ s$$

Deslocamento que o tronco teria nesse intervalo de tempo caso o homem não estivesse deslocando em sua superfície:

$$d_{hipotético} = 4 \cdot 6 = 24\ m$$

Entretanto, a relação entre o homem e o tronco se dá por forças internas, dessa forma, para que o centro de massa seja mantido numa posição constante no referencial do tronco, devemos ter um pequeno deslocamento do tronco para trás:



A posição inicial do centro de massa (considerando a origem a posição em que o homem se encontra inicialmente):

$$\frac{400 \cdot \frac{l}{2}}{400 + 80} = x_{cm} = 7{,}5m$$

Deslocamento de recuo do tronco:

$$x_{cm} + d = l - x_{cm}$$
$$d = 3m$$

Assim:

$$d_{efetivo} = d_{hipotético} - d = 21\, m$$

Gabarito: 21 m

---

72. (3ª fase OBF – 2009)

A figura 2 representa a força que uma partícula sofre durante um pequeno intervalo de tempo. Calcule o impulso que a partícula sofreu.

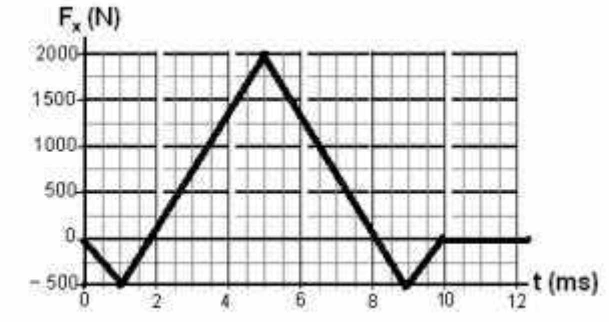


Fig. 2

Comentários:

Impulso é dado por $I = \int F dt$, portanto, pode ser calculado como a área sob o gráfico F por t.

$$I = -\frac{2 \cdot 500}{2} + \frac{6 \cdot 2000}{2} - \frac{2 \cdot 500}{2} = 5000\ N \cdot ms$$

$$I = 5\ N \cdot s$$

Gabarito: $\boldsymbol{5\ N \cdot s}$

---

73. (3ª fase OBF – 2009)

Uma pequena esfera metálica de massa m foi abandonada juntamente com uma bola de borracha de massa M. esférica, de raio R. conforme a figura 4.

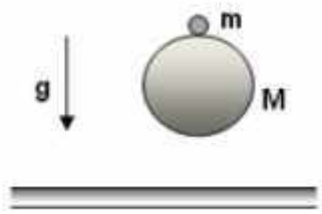


Fig. 4

A massa M é muito menor que m e o volume da esfera metálica é desprezível quando comparado ao da bola de borracha. Considerando que: os movimentos dos centros de massa da esferinha e da bola estão sempre na mesma vertical; o sistema se choca contra o solo e todos os choques envolvidos são perfeitamente elásticos; a distância na vertical percorrida pela esferinha é muito maior que a deformação da bola de borracha; é desprezível a resistência do ar em questão, determine:

a) A velocidade aproximada com que a esferinha se separa da bola na subida.

b) A distância vertical percorrida pela esferinha na subida em função da distância percorrida pela mesma, na descida.

Comentários:

a)

Velocidade com que a bola chega ao chão:

$$MgH = \frac{Mv_M^2}{2}$$
$$mgH = \frac{mv_m^2}{2}$$
$$\Rightarrow v_M^2 = v_m^2 = 2gH$$

Na colisão, a quantidade de movimento se conserva:

$$Mv_M - mv_m = mv`_m + Mv`_M$$

A colisão é elástica:

$$e = 1 \ \Rightarrow \ v_M + v_m = v`_m - v`_M = v_{separacao}$$

Assim:

$$\frac{2Mv_M + (M-m)v_m}{(M+m)} = v`_m \Rightarrow \frac{2M}{M+m} \cdot v_M + \frac{M-m}{M+m} \cdot v_m = v'_m$$
$$\frac{(M-m)v_M - 2mv_m}{(M+m)} = v`_M \Rightarrow \frac{M-m}{M+m} \cdot v_M - \frac{2m}{M+m} \cdot v_m = v'_M$$

Mas, M é muito maior que m, então:

$$\Rightarrow v`_m \cong 2v_M + v_m$$
$$\Rightarrow v`_M \cong v_M$$

Assim:

$$v_{separação} = v_M + v_m$$

b)

Pela conservação da energia mecânica, temos:

$$mgH_F = \frac{mv`^2_m}{2}$$
$$2gH_F = 9v_M^2 = 18gH$$
$$\Rightarrow H_F = 9H$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{v_M + v_m}$ b) $\boldsymbol{9H}$

---

74. (2ª fase OBF – 2009)

Uma esfera de massa $m = 4kg$ presa a uma haste de massa desprezível atinge, numa colisào perfeitamente elástica, um bloco inicialmente em repouso, de massa $m = 6kg$. A haste encontra-se inicialmente na posição horizontal e possui um comprimento igual a $45\ cm$. com mostrado na figura 3. Logo após a colisào. o bloco desliza sobre uma superfície plana com coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0{,}4$, percorrendo uma distância de $50\ cm$. Depois que o bloco passa pela superfície com atrito, ele passa a deslizar sobre uma superfície de coeficiente de atrito cinético desprezível como mostra a figura abaixo. Calcule a altura máxima atingida pelo bloco quando este entra na elevação da pista (á direita).

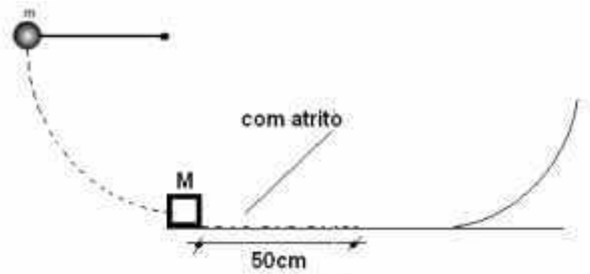


Fig. 3

Comentários:

Pela conservação da energia, encontramos a velocidade com que a esfera atinge o nosso bloco:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 3\, {}^{m}/_{s}$$

Conservação da quantidade de movimento:

$$m \cdot v = -m \cdot u + M \cdot \vartheta$$

Na colisão elástica o coeficiente de restituição $e = 1$:

$$\frac{u + \vartheta}{v} = 1$$

Das equações (iii) e (iv), temos um sistema de duas equações e duas incógnitas cuja solução nos dá:

$$\vartheta = 2{,}4\, {}^{m}/_{s}$$

A energia da bolinha após passar pela zona de atrito será totalmente convertida em energia potencial gravitacional para que seja atingida assim a altura máxima:

$$\frac{M \cdot \vartheta^2}{2} - \mu M g d = M g h \Rightarrow h = \left[\frac{\vartheta^2}{2} - \mu g d\right] \cdot \frac{1}{g} = 0{,}088\, m$$

Gabarito: $\boldsymbol{h = 0,088\, m}$

---

75. (3ª fase OBF – 2009)

A figura 5 representa duas partículas de massas $m_1 = 4\, kg$ e $m_2 = 6\, kg$ movendo-se em direções opostas, sobre uma superfície plana sem atrito. Elas têm velocidades constantes, cujos módulos são $v_{1i} = 20\, m/s$ e $v_{2i} = 10\, m/s$ e colidem. A colisão é frontal e perfeitamente elástica. Calcule as velocidades finais das partículas.

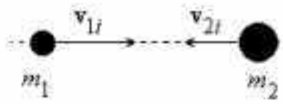


Fig. 5

Comentários:

Vamos assumir por hipótese que as duas partículas vão para a direita da figura após a colisão:

a. $m_1 \cdot v_{1i} - m_2 v_{2i} = m_1 \cdot v_{1f} + m_2 v_{2f} \Rightarrow 4 \cdot v_{1f} + \ 6v_{2f} \ = \ 20$
(conservação da quantidade de movimento)

b. Como a colisão é elástica, temos que o coeficiente de restituição é igual a i.

$$e = \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{1i} + v_{2i}} \Rightarrow v_{2f} - v_{1f} \ = \ 30$$

De "a" e "b" temos um sistema de duas equações e duas incógnitas, resolvendo:

$$v_{2f} \ = \ 14 \ m/s \text{ e } v_{1f} \ = \ -16 \ m/s$$

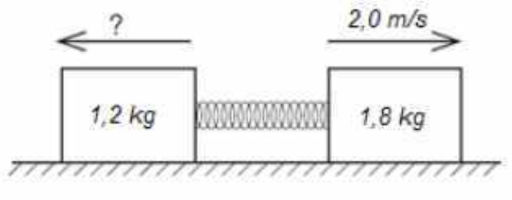
Como assumimos o referencial positivo para a direita, concluímos que a bolinha 2 passa a ir para a direita e a bolinha 1 passa a ir para a esquerda.

Gabarito: $\boldsymbol{v_{2f} \ = \ 14 \ m/s \quad v_{1f} \ = \ -16 \ m/s}$

---

76. (2ª fase OBF – 2010)

Dois blocos são posicionados sobre uma superfície horizontal e sem atrito e conectados por uma mola que é comprimida. Imediatamente após a liberação dos blocos, o bloco de massa $1{,}8\,kg$ adquire uma velocidade de $2{,}0\,m/s$. Determine a velocidade do bloco de $1{,}2\,kg$ imediatamente após a liberação da mola.



Comentários:

Observe que o sistema trabalha unicamente com a aplicação de forças internas, logo, a quantidade de movimento do sistema se conserva:

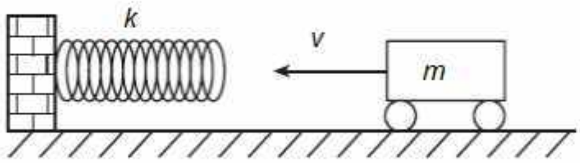
$$1{,}2 \cdot v = 1{,}8 \cdot 2 \ \Rightarrow v \ = 3\,m/s$$

Gabarito: $\boldsymbol{v \ = 3\,m/s}$

---

77. (3ª fase OBF – 2010)

Um carrinho de massa m com velocidade v movimenta-se sobre uma superfície horizontal conforme a figura abaixo. Este carrinho choca-se com uma mola de constante elástica k (desconsidere todos os efeitos de quaisquer tipos de atrito neste sistema).



a) Qual o tempo total de colisão entre o carrinho e a mola (tempo em que ambos ficarão em contato)?

b) Faça uma estimativa razoável do impulso total fornecido pela mola após o choque.

Comentários:

a)

Caso a mola estivesse presa ao corpo, o período de oscilação do sistema seria dado por:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Entretanto, podemos observar que o movimento que o corpo equivale à metade de um período de oscilação completo, e, portanto, eles ficarão em contato o tempo total de:

$$\frac{T}{2} = t = \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

b)

O impulso é dado pela variação da quantidade de movimento do corpo, como a velocidade não muda de direção, somente de sentido, podemos escrever:

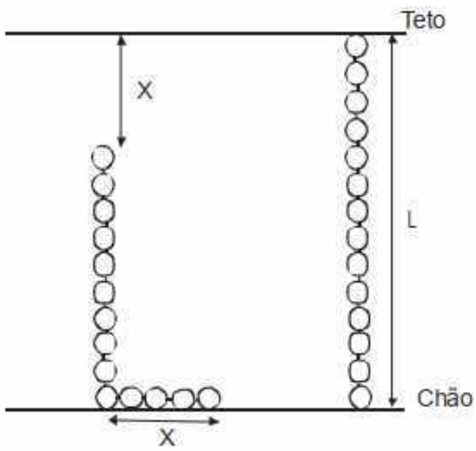
$$I = m \cdot v - (-m \cdot v) = 2m \cdot v$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{t = \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}}$; b) $\boldsymbol{I = 2m \cdot v}$

---

78. (3ª fase OBF – 2010)

Uma corrente de aço de massa M e comprimento L é feita de pequenas argolas entrelaçadas. A corrente esta pendurada na vertical e a parte de baixo toca o chão conforme indicado na figura abaixo. A corrente é então solta e cai na vertical. Considerando x a distância do topo da corrente ao teto, qual será a força (exercida pelo chão) aplicada na corrente durante toda a sua queda. Expresse seu valor como função de M, L, x e g (aceleração gravitacional local).



Comentários:

Em teoria, vimos a abordagem mais geral, utilizando o Cálculo para o caso mais geral possível. Para essa questão da OBF, vamos fazer uma abordagem matemática um pouco diferente, mais parecido ainda com aquilo que pode aparecer na sua prova.

De fato, precisamos determinar a quantidade de movimento do sistema em função do tempo. Observe que somente a parte da corda que ainda não chegou ao solo irá possuir velocidade e essa velocidade será a mesma de uma queda livre, já que a corda não está tracionada e cada parte da corda sofre apenas ação do próprio peso.

Se a densidade linear da corda é constante, então:

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

Considerando que um pedaço da corda caiu x, então:

$$\Delta m = M \cdot \left(\frac{L-x}{L}\right)$$

Logo, pelo teorema do impulso, a variação da quantidade de movimento do instante 0 a t é dada por:

$$\Delta Q = \Delta Peso \cdot \Delta t \Rightarrow Q = M \cdot \left(\frac{L-x}{L}\right) \cdot g \cdot t$$

Mas $x = \frac{gt^2}{2}$, então:

$$Q = M \cdot g \cdot t - \frac{M \cdot g^2 \cdot t^3}{2 \cdot L}$$

Agora, se tomarmos um intervalo de tempo muito pequeno (Δt) após esse instante (t), ou seja, $t + \Delta t$ e aplicarmos a equação que acabamos de desenvolver, podemos encontrar a força normal em função do tempo:

$$\Delta Q = F_{resultante} \cdot \Delta t$$

$$Q(t + \Delta t) - Q(t) = (M \cdot g - N) \cdot \Delta t$$

$$\left[M \cdot g \cdot (t + \Delta t) - \frac{M \cdot g^2 \cdot (t + \Delta t)^3}{2 \cdot L}\right] - \left[M \cdot g \cdot t - \frac{M \cdot g^2 \cdot t^3}{2 \cdot L}\right] = (M \cdot g - N) \cdot \Delta t$$

Vamos expandir o termo $(t + \Delta t)^3$ e simplificar nossa equação:

$$M \cdot g \cdot \Delta t - (t^3 + 3t^2 \cdot \Delta t + 3t \cdot \Delta t^2 + \Delta t^3) \cdot \left(\frac{M \cdot g^2}{2 \cdot L}\right) + \frac{M \cdot g^2 \cdot t^3}{2 \cdot L} = (M \cdot g - N) \cdot \Delta t$$

$$M \cdot g \cdot \Delta t - 3t^2 \cdot \left(\frac{M \cdot g^2}{2 \cdot L}\right) \cdot \Delta t - \Delta t^2 \cdot (3t + \Delta t) \cdot \left(\frac{M \cdot g^2}{2 \cdot L}\right) = (M \cdot g - N) \cdot \Delta t$$

$$M \cdot g - 3t^2 \cdot \left(\frac{M \cdot g^2}{2 \cdot L}\right) - \Delta t \cdot (3t + \Delta t) \cdot \left(\frac{M \cdot g^2}{2 \cdot L}\right) = M \cdot g - N$$

Fazendo o intervalo tender a zero, $\Delta t \to 0$, temos:

$$M \cdot g - 3t^2 \cdot \left(\frac{M \cdot g^2}{2 \cdot L}\right) = M \cdot g - N$$

$$\therefore \boxed{N = \frac{3 \cdot M \cdot g^2 \cdot t^2}{2 \cdot L}}$$

Como $x = \frac{gt^2}{2}$, então:

$$N = \frac{3 \cdot M \cdot g^2 \cdot t^2}{2 \cdot L} \Rightarrow N = \frac{3 \cdot M \cdot g}{L} \cdot \frac{g \cdot t^2}{2}$$

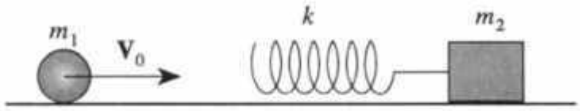
$$\boxed{N = \frac{3 \cdot M \cdot g \cdot x}{L}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{N = \frac{3 \cdot M \cdot g \cdot x}{L}}$

---

79. (3ª fase OBF – 2010)

Uma massa m_1, com velocidade inicial V_0, atinge um sistema massa-mola,cuja massa é m_2, inicialmente em repouso, mas livre para se movimentar. A mola é ideal e possui constante elástica k, conforme a figura. Não há atrito com o soio.



a) Qual é a compressão máxima da mola?

b) Se, após um longo tempo, ambos os objetos, se deslocam na mesma direção, qual serão as velocidades finais V_1 e V_2 das massas m_1 e m_2, respectivamente?

Comentários:

a)

O corpo m_1, ao entrar em contato com a mola pela primeira vez, se aproxima de m_2, variando a quantidade de movimento do segundo por estar empurrando a mola, até o momento em que eles possuem velocidade relativa igual a zero, ou seja, momento em que a mola para de comprimir. Sendo assim, pela conservação da quantidade de movimento podemos calcular as velocidades nesse ponto:

$$m_1 \cdot v_0 = v(m_1 + m_2) \Rightarrow v = \frac{m_1 \cdot v_0}{(m_1 + m_2)}$$

Ademais, como o sistema é conservativo, podemos conservar a energia do instante inicial (antes da colisão), até o instante em que as velocidades se igualam:

$$\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + \frac{k \cdot x^2}{2} = \frac{m_1 {v_0}^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_1^2 \cdot v_0^2}{(m_1 + m_2)} + k \cdot x^2 = m_1 {v_0}^2$$

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m_1 \cdot m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

b)

Como o sistema é conservativo, podemos considerar a colisão sendo uma colisão elástica, e, portanto, com coeficiente de restituição igual a 1.

i. Conservação da quantidade de movimento:

$$m_1 \cdot v_0 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$$

ii. Coeficiente de restituição:

$$\frac{v_2 - v_1}{v_0} = 1$$

Observe que temos um sistema simples de duas equações e duas incógnitas, cuja solução será dada por:

$$v_2 = \frac{2m_1 \cdot v_0}{(m_1 + m_2)}$$

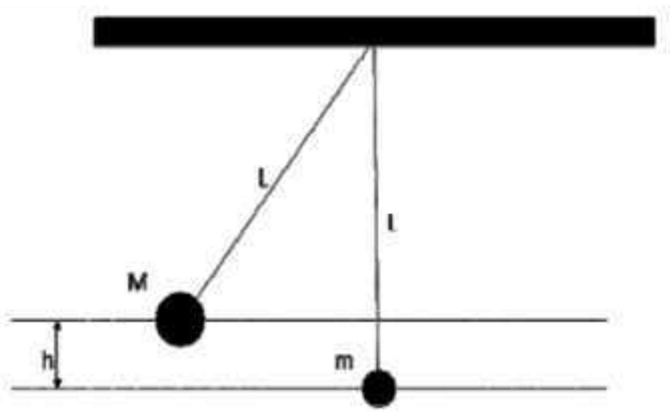
$$v_1 = \frac{(m1 - m2)v_0}{(m_1 + m_2)}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{v_1 = \frac{(m1-m2)v_0}{(m_1+m_2)}}$ b) $\boldsymbol{v_2 = \frac{2m_1 \cdot v_0}{(m_1+m_2)}}$

---

80. (3ª fase OBF – 2010)

Dois pêndulos de mesmo comprimento L são montados de acordo com o diagrama a seguir. Num instante $t = 0$ o pêndulo de massa M é posicionado a uma altura h com relação à horizontal e o pêndulo de massa m permanece em repouso na vertical.



Ao ser liberada a massa M inicia o movimento colidindo com a massa m ($M > m$) (desconsidere todos os efeitos devido a quaisquer tipos de atrito neste sistema).

a) Determine a altura máxima que as massas M e m atingem após a colisão com relação à horizontal. Use g para a aceleração gravitacional local.

b) Qual será o tempo necessário, após a primeira colisão entre as massas, para que as massas voltem a colidir novamente?

Comentários:

a)

A energia se conserva e, assim, podemos encontrar a velocidade de M imediatamente antes da colisão:

$$Mgh = \frac{Mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Na colisão a quantidade de movimento se conserva:

$$Mv = mu + Mw$$

Considerando $e = 1$:

$$v = u - w$$

Assim:

$$Mv = mv + mw + Mw \Rightarrow w = \frac{(M-m)v}{(M+m)}$$

$$\Rightarrow u = v + w = v + \frac{(M-m)v}{(M+m)} = \frac{2Mv}{(M+m)}$$

Conservando a energia, encontramos a altura máxima atingida pelas massas:

$$Mgh_M = \frac{Mw^2}{2} \Rightarrow h_M = \frac{w^2}{2g} = \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{(M-m)v}{(M+m)}\right)^2$$

$$mgh_m = \frac{mu^2}{2} \Rightarrow h_m = \frac{u^2}{2g} = \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{2Mv}{(M+m)}\right)^2$$

b)

O período de um pêndulo é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

O tempo para que as massas voltem a colidir é $\frac{T}{2}$

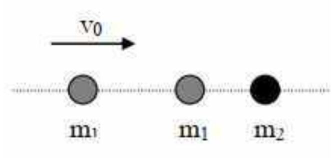
Portanto:

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{h_M = \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{(M-m)v}{(M+m)}\right)^2}$ **e** $\boldsymbol{h_m = \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{2Mv}{(M+m)}\right)^2}$ **b)** $\boldsymbol{\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}}$

81. (3ª fase OBF – 2013)

Com base na figura, as duas esferas à direita estão inicialmente em repouso e esfera da esquerda incide sobre a do centro com velocidade v_0. Supondo que as colisões sejam frontais e elásticas, mostre que se $m_1 \geq m_2$ há duas colisões $m_1 < m_2$ há três colisões.



Comentários:

A esfera de massa m_1 colide com a outra esfera de massa m_1 $(colisão\ 1)$:

$$m_1 \cdot v_0 = m_1(v' + v'') \Rightarrow v_0 = v' + v''(i)$$

A colisão é elástica:

$$e = \frac{v'' - v'}{v_0} = 1 \Rightarrow v'' - v' = v_0\ (ii)$$

De (i) e (ii), concluímos que:

$$v'' = v_0 \text{ e } v' = 0\ m/s$$

A segunda esfera de massa m_1 colide com a esfera de massa m_2 (colisão 2):

$$m_1 \cdot v_0 = m_1 \cdot v + m_2 \cdot v_2\ (iii)$$

A colisão novamente é elástica:

$$e = \frac{v_2 - v}{v_0} = 1$$

$$m_1 \cdot v_0 = m_1 \cdot v_2 - m_1 \cdot v\ (iv)$$

De (iii) e (iv), podemos chegar ao valor de v_2 e v:

$$v_2 = \frac{2m_1 \cdot v_0}{(m_1 + m_2)}$$

$$v = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_0}{(m_1 + m_2)}$$

Observe que se $m_1 \geq m_2$, v é nulo ou v tem o mesmo sentido e direção de v_2 só que possui um menor módulo; assim, tem-se que só existirão duas colisões. Entretanto, se $m_1 < m_2$, v passar a ser menor do que 0, e assume o sentido contrário fazendo com que esta colida com a massa m_1 que antes estava parada, totalizando para este caso 3 colisões.

Gabarito: demonstração

82. (2ª fase OBF – 2014)

Uma bola de futebol de $450\ g$ está se movendo a $2,0\ m/s$ quando um jogador a chuta com uma força constante de $45,0\ N$ na mesma direção de seu movimento. Por quanto tempo o pé do jogador ficará em contato com a bola para aumentar sua velocidade para $4,0\ m/s$?

Comentários:

O impulso é a variação da quantidade de movimento. Logo:

$$I_R = \Delta Q$$

Como a força é constante, então:

$$F \cdot \Delta t = Q_f - Q_0 = m(v_f - v_o)$$

$$45 \cdot \Delta t = 0,45(4-2)$$

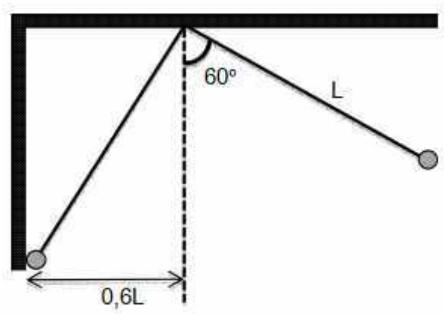
$$\Delta t = 0,2\ s$$

Gabarito: $\mathbf{0,2\ s}$

83. (3ª fase OBF – 2014)

Um pêndulo simples de comprimento L é posto a oscilar com uma abertura angular de 60°. A massa pendular colide com uma parede onde perde 10,0% de sua energia. Quantas colisões o pêndulo realiza com a parede?

Dados $log\ (0,4) = -\ 0,40$ e $log\ (0,90) = -\ 0,046$.



Comentários:

A energia inicial do pêndulo é dada por:

$$E_0 = mgL(1 - cos60°) = 0,5mgL$$

Pela geometria, quando o pêndulo colide com a parede, ele está na altura de:

$$h = 0,2L$$

As colisões vão parar quando o pêndulo chegar na parede com velocidade zero, neste momento sua energia vai ser:

$$E_f = mgh = 0{,}2mgL$$

A cada colisão o pêndulo perde 10% de sua energia, portanto:

$$E_f = E_0 \cdot (0{,}9)^n$$

Em que n é o número de colisões.

Substituindo as expressões encontradas, temos:

$$0{,}2mgL = 0{,}5mgL \cdot (0{,}9)^n$$

$$0{,}4 = (0{,}9)^n$$

$$0{,}40 = n \cdot 0{,}046$$

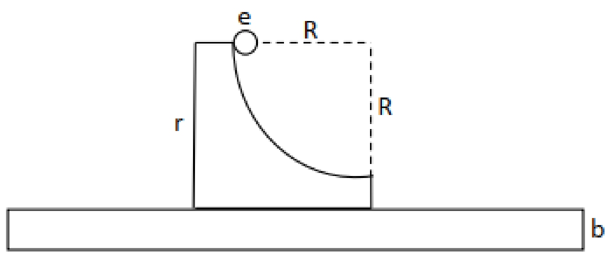
$$n \cong 8{,}7$$

Ocorreram 9 colisões no total.

Gabarito: 9 colisões

84. (2ª fase OBF – 2016)

Com a intenção de estudar os movimentos dos corpos e suas relações com a massa, foi construído para uma feira de ciências um experimento que consiste de uma base "b", uma rampa "r" e uma esfera "e", conforme ilustrado na figura abaixo. A base foi fixada ao solo, de modo que sua superfície superior plana e absolutamente lisa ficasse perfeitamente nivelada na horizontal. A rampa, com formato circular de raio $R = 6\ m$ e massa $5M$, foi apoiada em repouso sobre a base, mas podendo deslizar sobre ela praticamente sem atrito. No ponto mais alto da rampa, uma esfera maciça, homogênea, de massa M e absolutamente lisa, foi então abandonada, deslizando sem rolar pela rampa conforme a figura. Desprezando a resistência do ar e qualquer outro atrito, e considerando o módulo da aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$, determine, em m/s, o módulo da velocidade da esfera no instante em que ela perde o contato com a rampa.



Comentários:

Em nosso sistema a energia mecânica se conserva:

$$MgR = \frac{Mv^2}{2} + \frac{5Mu^2}{2}$$

Na horizontal, o sistema é isolado de forças externas, portanto, a quantidade de movimento na direção horizontal se conserva:

$$Mv - 5Mu = 0$$
$$v = 5u$$

Substituindo, temos:

$$120 = (5u)^2 + 5u^2$$
$$u = 2\ m/s$$
$$\therefore v = 10\ m/s$$

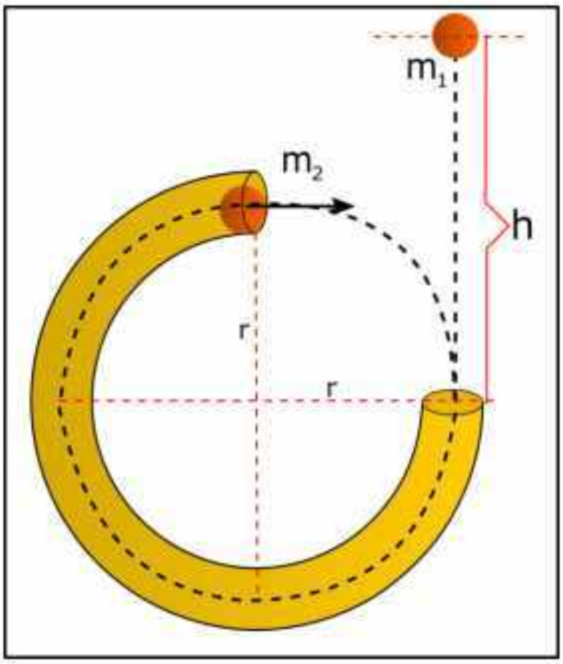
Gabarito: $\mathbf{10\ m/s}$

---

85. (2ª fase OBF – 2017)

Uma esfera de massa m_1 é abandonada de uma altura h, conforme ilustra figura. A esfera m_1 entra em um tubo circular e percorrendo o trajeto do tubo, até colidir elasticamente com outra esfera de massa m_2 em repouso.

Desprezando todos os atritos bem como as dimensões das esferas, pede-se



a) justificar os princípios físicos das leis da conservação presentes nesta situação

b) determinar o valor de h tal que na colisão, a massa m_1 entre em repouso e a massa m_2 atinja o outro extremo do tubo.

Comentários:

a)

Devido à ausência de forças externas e pelo fato de não haver forças dissipativas, podemos dizer que nosso sistema é conservativo, isto é, a energia mecânica do sistema se conserva. Além disso, quando m_1 se choca com m_2, o tempo de colisão é muito pequeno de tal forma que podemos conversar a quantidade de movimento na colisão.

b)

Desprezando os atritos, todas as forças que agem no corpo 1 antes da colisão são conservativas. Assim, podemos encontrar a velocidade do corpo 1 imediatamente antes da colisão, usando o fato de que a energia se conserva:

$$m_1gh = m_1gr + \frac{m_1v_1^2}{2}$$

$$v_1 = \sqrt{2g(h-r)}$$

Na colisão, a quantidade de movimento se conserva:

$$m_1v_1 = m_1 \cdot 0 + m_2v_2$$

$$v_2 = \frac{m_1v_1}{m_2}$$

Depois da colisão, ocorre um lançamento horizontal.

Podemos escrever:

$$r = 0 + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow r = v_2 \cdot t$$

$$2r = g\left(\frac{r}{v_2}\right)^2$$

Substituindo, temos:

$$2{v_2}^2 = rg \Rightarrow 2\left(\frac{m_1v_1}{m_2}\right)^2 = rg$$

$$2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \cdot 2(h-r) = r$$

$$h = r\left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right]$$

Gabarito: a) vide comentários. b) $\boldsymbol{h = r\left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right]}$

7. Considerações finais

Chegamos ao final da nossa aula. Relembre os principais conceitos estudados nessa aula e tenha no sangue o teorema do impulso, o que é um sistema isolado, a conservação da quantidade de movimento na colisão e as propriedades do centro de massa.

Essa aula possui muitos exercícios resolvidos e muitos exercícios, pois trata-se de um assunto que requer muito prática. Tente fazer todos os exercícios da lista. É muito comum aparecer questões envolvendo energia mecânica, quantidade de movimento, centro de massa e vínculo geométrico. Normalmente, são questões bem difíceis, por isso colocamos muitas questões na lista e nos simulados exploraremos bastante esse tema.

Na próxima, estudaremos estática de um ponto material e de um corpo extenso. Outro tema bem cobrado pelo ITA e pelo IME. Além disso, veremos a dinâmica do corpo extenso, que é um dos tópicos especiais não ensinado no ensino médio comum brasileiro, mas que pode aparecer nos nossos vestibulares.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

8. Referências bibliográficas

[1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.

[2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Selecionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.

[3] Brito, Renato. Fundamentos de Mecânica. 2 ed. VestSeller, 2010. 496p.

[4] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.

[5] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física 1. 9ª ed. Moderna. 490p.

[6] Resnick, Halliday. Fundamentos de Física. 8ª ed. LTC. 349p. Versão

9. Versão de aula

Versão de Aula	Data da última atualização
1.0	21/08/2019