

Hidrostática e Hidrodinâmica

João Maldonado

Aula 16

ITA 2020

SUMÁRIO

Introdução	3
1. Pressão	4
1.2. Propriedades da pressão	5
1.3. Lei de Pascal.....	9
1.4. Medidas de pressão	11
1.5. Diagramas e pressão em barragens planas.....	15
1.6. Forças sobre superfície curvas.....	19
2. Líquidos acelerados.....	23
2.1. Movimento horizontal com aceleração constante	23
2.2. Rotação de um líquido	26
3. Princípio de Arquimedes.....	29
3.1. Introdução	29
3.2. Empuxo	30
4. Hidrodinâmica.....	39
4.1. Análise de fluxos	39
4.2. Visualização dos fluxos.....	39
4.3. Princípio da continuidade.....	40
4.4. Energia associada a um líquido em movimento	41
4.5. Equação de Bernoulli.....	42
4.6. Tubo de Venturi.....	43
4.7. Tubo de Pitot.....	44
4.8. Teorema de Torricelli	45
4.9. Algumas aplicações de hidrodinâmica.....	49
5. Lista de exercícios	56
5. Gabarito sem comentários	88
6. Lista de questões comentadas	90
7. Considerações finais.....	174
8. Referências bibliográficas	175
9. Versão de aula	176



Introdução

Nesta aula vamos trabalhar os conceitos de pressão, forças advindas da pressão em corpos diversos, empuxo, equilíbrio de corpos submersos e líquidos em movimento. Este tema costuma ser cobrado com diversas áreas da física. Destaca-se a união entre hidrostática e estática.

A ideia central dessa aula é a fixação sólida dos conceitos envolvidos na hidrostática e hidrodinâmica. Entretanto, recomenda-se a realização de muitos exercícios. Embora não seja tão complexo, hidrostática e hidrodinâmica apresentam questões conceitualmente elaboradas que merecem sua atenção.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



@prof.maldonado



1. Pressão

Um fluido é uma substância líquida ou gasosa que não apresenta forma definida como os sólidos. Os líquidos diferem dos gases quanto a pressão de superfície.

1.0. Densidade e massa específica

Considere um corpo de massa m com uma cavidade em seu interior. O volume total (V_{Total}) do corpo é a contribuição preenchida ($V_{material}$) por material e a cavidade ($V_{cavidade}$).

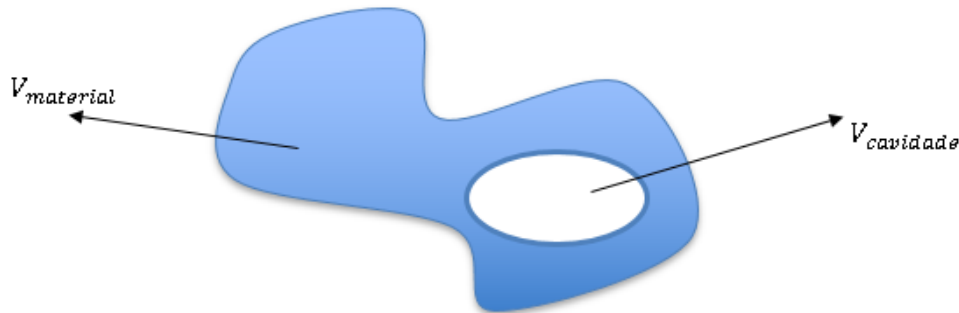


Figura 1: Corpo com formato qualquer não homogêneo.

Da soma total, temos:

$$V_{Total} = V_{material} + V_{cavidade}$$

Define-se densidade (d) como a razão entre a massa e o volume total do corpo:

$$d = \frac{m}{V_{Total}} = \frac{m}{V_{material} + V_{cavidade}}$$

Define-se massa específica (ρ) como a razão entre a massa e o volume de material:

$$\rho = \frac{m}{V_{material}}$$

As unidades de densidade e de massa específica no SI é o kg/m^3 .

1.1. Definição

A pressão causada por uma força em uma determinada área é dada por:

$$P = \frac{F_N}{A}$$

Em que F_N representa a força normal à superfície.

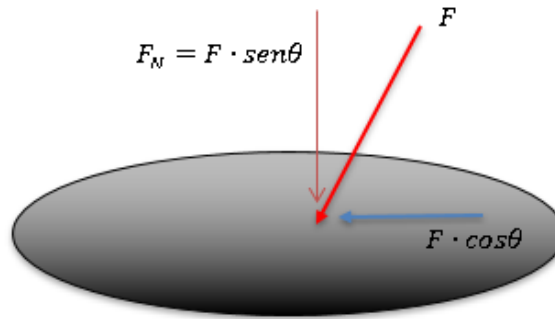


Figura 2: Definição de pressão em uma superfície.

Apenas a componente perpendicular (normal) à área causa pressão. A componente tangencial não provoca “estresse” na superfície em questão.

1.2. Propriedades da pressão

1.2.1. Isotropicidade

A pressão exercida por um líquido em um ponto é a mesma em todas as direções. A figura abaixo mostra um pequeno elemento cúbico de líquido, em que uma força está atuando em cada face deste elemento. Como este elemento está em equilíbrio, as forças devem ser todas iguais.

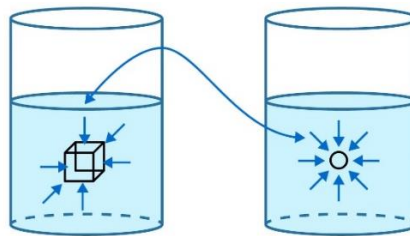


Figura 3: Elemento infinitesimal do líquido.

Se o elemento for um ponto, as forças diametralmente opostas também devem ser iguais. Assim, todo ponto de um líquido é igualmente comprimido.

1.2.2. Pressão uniforme na mesma horizontal

Para um líquido em repouso (ou movendo-se com velocidade constante ou aceleração puramente vertical), a pressão em diferentes pontos da mesma horizontal é a mesma.

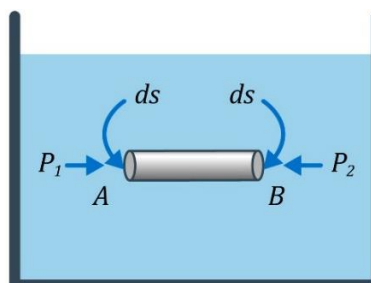


Figura 4: Análise das pressões em um ponto do líquido.

Considere o cilindro de líquido mostrado abaixo. A área de seção deste cilindro é dS . A força em cada extremidade deste cilindro deve ser igual para que ele esteja em equilíbrio.

$$F_1 = F_2 \Rightarrow P_1 \cdot dS = P_2 \cdot dS \Rightarrow \boxed{P_1 = P_2}$$

Desta maneira, para um mesmo líquido, as pressões são iguais quando estão a uma mesma altura.

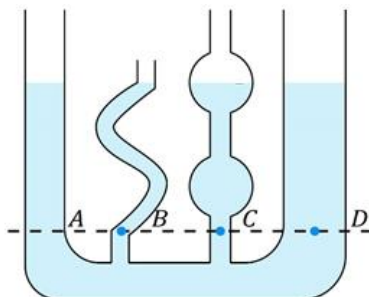


Figura 5: Pressões são iguais na mesma reta horizontal.

$$P_A = P_B = P_C = P_D$$

1.2.3. Perpendicularidade da pressão

A pressão exercida por um líquido em equilíbrio segue as três propriedades abaixo:

- A força atuando sobre um líquido em repouso é perpendicular à superfície do frasco que o contém.
- A força exercida por um líquido em qualquer superfície de contato é chamada de impulso do líquido.
- O impulso exercido por um líquido (em repouso) por unidade de área da superfície, em contato com o líquido, é chamado de pressão.

1.2.4. Pressão e altura

Considere um recipiente aberto que contém um líquido de densidade ρ . A pressão externa é a pressão atmosférica (P_{atm}). Considere um elemento horizontal infinitesimal de líquido, que está a uma profundidade y , conforme ilustra a figura logo abaixo.

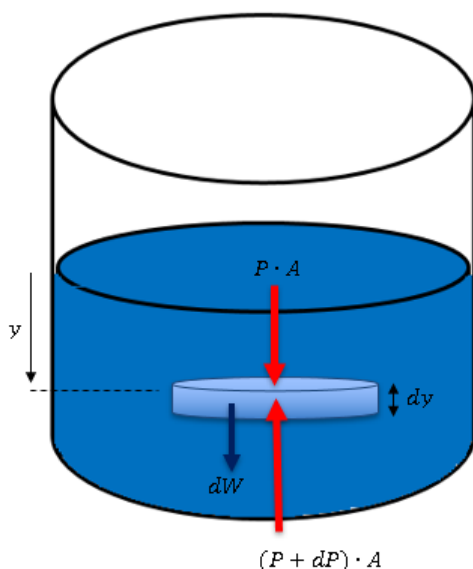


Figura 6: Elemento infinitesimal e pressões.

O peso do elemento infinitesimal de líquido é dado por dW . Como o elemento está em equilíbrio, temos:

$$(P + dP) \cdot A - P \cdot A = dW \Rightarrow (dP) \cdot A = dW$$



$$(dP) \cdot A = \rho \cdot g \cdot A \cdot dy$$

$$\Rightarrow dP = \rho \cdot g \cdot dy$$

Esse resultado mostra que o elemento de peso infinitesimal (dW) de altura dy gera uma diferença de pressão $dP = \rho \cdot g \cdot dy$. Dessa forma, se eu quero saber qual é a pressão a uma altura h da superfície do líquido, basta somar a diferença de pressão gerada por cada elemento de peso do líquido logo acima, ou seja, basta integrar de P_0 (ponto que corresponde a superfície do líquido, isto é, altura $h = 0$) até o ponto onde desejo calcular a pressão P (ponto que corresponde a altura h abaixo da superfície do líquido). Matematicamente, temos:

$$dP = \rho \cdot g \cdot dy \Rightarrow \int_{P_0}^P dP = \int_0^h \rho \cdot g \cdot dy$$

$$P - P_0 = \rho \cdot g \cdot h - \rho \cdot g \cdot 0 \Rightarrow P = P_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

A pressão (P_0) é a pressão na superfície do líquido e, portanto, é a pressão atmosférica. Então:

$$P = P_{ATM} + \rho \cdot g \cdot h$$

Desta maneira, podemos destacar as seguintes propriedades:

- A pressão do líquido é a mesma em todos os pontos em uma mesma altura.
- A pressão a uma profundidade h é a soma entre a pressão externa, exercida na superfície do líquido, e a pressão gerada por todas as camadas de líquido acima.
- A pressão no fundo de um recipiente não depende da forma e nem do tamanho da superfície de contato.
- A pressão aumenta linearmente com a profundidade.

1.2.5. Pressão maior que o peso do líquido

Um líquido pode exercer uma pressão maior que o próprio peso de suas colunas de fluido. Considere um vaso fechado que possui um cilindro maior de área da base S e altura total h e um cilindro mais fino de seção s , tal que $s < S$, e altura $H - h$ na parte superior. Um líquido de densidade ρ é colocado até que o recipiente esteja completo.

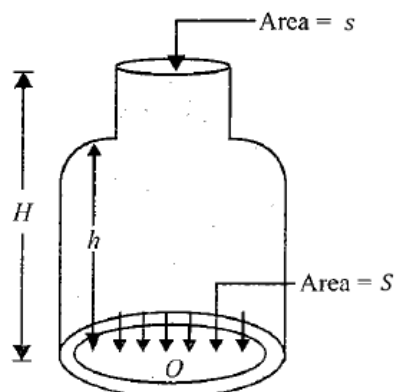


Figura 7: Vaso com formato não uniforme.

A força exercida na base do cilindro é dada por:

$$F_{BASE} = P_{BASE} \cdot S$$

$$F_{BASE} = (\rho \cdot g \cdot H) \cdot S \quad (I)$$

Entretanto, o peso total do líquido é dado por:

$$M_{líquido} \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \text{Peso}_{Líquido}$$

$$\text{Peso}_{Líquido} = \rho \cdot (S \cdot h + s(H - h)) \cdot g \quad (II)$$

Analisando as expressões (I) e (II), percebemos que a força gerada pelo líquido é maior que o seu próprio peso. Tal fato pode ser melhor verificando fazendo:

$$F_{BASE} - \text{Peso}_{Líquido} = (\rho \cdot g \cdot H) \cdot S - \rho \cdot (S \cdot h + s(H - h)) \cdot g$$

$$F_{BASE} - \text{Peso}_{Líquido} = \rho \cdot g \cdot [H \cdot S - s \cdot H - h \cdot (S - s)]$$

$$F_{BASE} - \text{Peso}_{Líquido} = \rho \cdot g \cdot [H \cdot (S - s) - h \cdot (S - s)]$$

$$F_{BASE} - \text{Peso}_{Líquido} = \rho \cdot g \cdot (H - h)(S - s)$$

Como $H > h$ e $S > s$ por construção do problema, então:

$$F_{BASE} - \text{Peso}_{Líquido} > 0 \Rightarrow F_{BASE} > \text{Peso}_{Líquido}$$

Para entender a situação, analisaremos outras forças atuantes no sistema, que por vezes passam despercebidas.

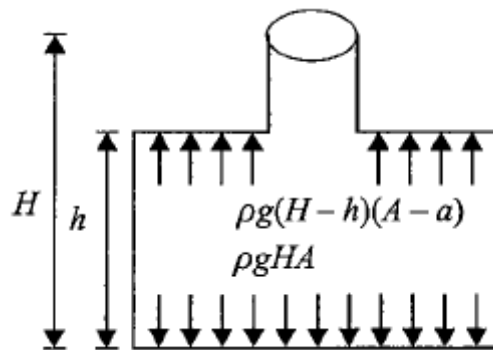


Figura 8: Diagrama de forças no vaso.

A força exercida no fundo do recipiente é dada por:

$$F_{BASE} = (\rho \cdot g \cdot H) \cdot S$$

A força exercida na face superior é dada por:

$$F_{sup} = \rho \cdot g \cdot (H - h) \cdot (S - s)$$

Fazendo $F_{BASE} - F_{sup}$:

$$F_{BASE} - F_{sup} = \text{Peso}_{Líquido} = \rho \cdot (S \cdot h + s(H - h)) \cdot g$$

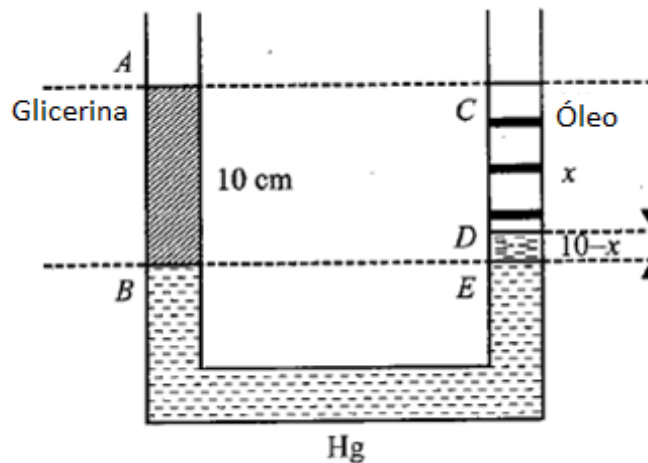
Deste modo, o peso é a diferença entre duas forças.



1.

Um tubo em U contém mercúrio em ambos os lados. Uma coluna de 10 cm de glicerina ($d = 1,3 \text{ g/cm}^3$) é introduzida em um dos ramos do tubo. Óleo é colocado no outro ramo do tubo até que a superfície do óleo e da glicerina fiquem na mesma horizontal. Encontre o comprimento da coluna de óleo. A densidade do óleo é $0,8 \text{ g/cm}^3$ e a do mercúrio é $13,6 \text{ g/cm}^3$.

Comentário:



A coluna de óleo será chamada de x cm. O comprimento da coluna de glicerina é dado por 10 cm.

$$DE = 10 - x$$

Para um mesmo líquido, pontos na mesma horizontal apresentam a mesma pressão.

$$P_B = P_E$$

$$10 \cdot d_{\text{glicerina}} \cdot g = x \cdot d_{\text{óleo}} \cdot g + (10 - x) \cdot d_{\text{mercúrio}} \cdot g$$

$$10 \cdot 1,3 \cdot g = x \cdot 0,8 \cdot g + (10 - x) \cdot 13,6 \cdot g$$

$$x = 9,6 \text{ cm}$$

1.3. Lei de Pascal

O princípio de Pascal diz que:

Uma pressão aplicada em um líquido confinado é transmitida igualmente para todos os pontos do líquido.

Lembrando que a pressão exercida é sempre perpendicular ao corpo que sofre esta pressão. Este princípio é usado em elevadores hidráulicos, para levantar grandes pesos com pequenos esforços. Veja a seguir o funcionamento deste dispositivo:



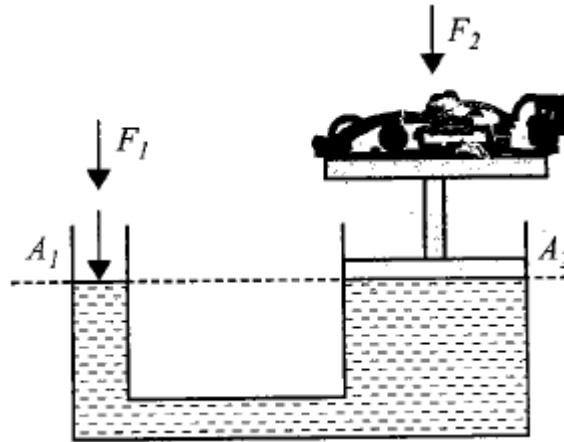


Figura 9: Esboço de um elevador hidráulico.

Se aplicarmos uma pressão, por meio de uma força F_1 , no ramo esquerdo, essa pressão será transmitida integralmente para todos os pontos do líquido. Desta maneira, o ramo direito sofrerá a ação da mesma pressão.

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \boxed{\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}}$$

Então, uma pequena força F_1 atuando em uma pequena área A_1 , resulta em uma grande força F_2 , atuando em uma grande área A_2 . Essa é uma forma de multiplicar forças, utilizando um fluido.



2.

Em uma prensa hidráulica, a seção transversal dos ramos é dada por $5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ e 10^{-2} m^2 . Uma força de 20 N é aplicada no menor ramo.

- Qual é a pressão produzida no sistema?
- Qual é a força produzida no ramo maior?
- Qual é o trabalho realizado pelo operador, se o menor ramo se desloca 0,1 m?

Comentário:

a)

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{20}{5 \cdot 10^{-4}} = 40000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\boxed{P = 40000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}$$

b)

Utilizando a lei de Pascal, temos:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{20}{5 \cdot 10^{-4}} = \frac{F_2}{10^{-2}}$$

$$F_2 = 400 \text{ N}$$

c)

O trabalho realizado pela força é dado por:

$$\tau = F_1 \cdot d = 20 \cdot 0,1 \Rightarrow \tau = 20 \cdot 0,1$$

$$\tau = 2 \text{ J}$$



1.4. Medidas de pressão

1.4.1. Pressão absoluta e pressão manométrica

A pressão absoluta é a pressão total em um ponto do líquido. A pressão total é a contribuição da pressão do líquido mais a pressão da atmosfera.

Já a pressão manométrica é a apenas a contribuição do líquido para a pressão (sem a contribuição atmosférica).

$$P_{Absoluta} = P_{Manométrica} + P_{Atmosférica}$$

Considere um recipiente com um líquido de densidade ρ e um ponto A, a uma profundidade h_0 , em seu interior.

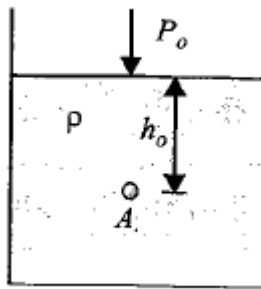


Figura 10: Representação da pressão absoluta em um ponto do líquido.

$$P_{Manométrica} = \rho \cdot g \cdot h_0$$

$$P_{Atmosférica} = P_0$$

$$P_{Absoluta} = P_A = P_0 + \rho \cdot g \cdot h_0$$

Em que:

- A pressão absoluta é sempre positiva e nunca igual a zero.
- A pressão manométrica pode ser positiva, negativa ou nula.

- Uma pressão manométrica negativa diz que a pressão no ponto é menor que a atmosférica.

1.4.2. Manômetros

Os manômetros são instrumentos usados para a mediação de pressão manométrica de um líquido. Há dois tipos de manômetro.

a) Manômetro simples

O manômetro simples consiste em um tubo de vidro vertical atrelado a um compartimento esférico, conforme a Figura 9 abaixo. O compartimento esférico é fechado e a parte vertical é aberta à atmosfera. A pressão no interior do compartimento esférico é medida a partir do tamanho da coluna de líquido no tubo vertical de vidro, pois:

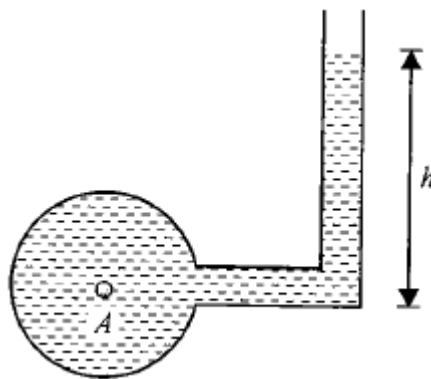


Figura 11: Vaso comunicante com uma extremidade aberta.

$$P_A = P_0 + \rho \cdot g \cdot h_0 \Rightarrow P_A - P_0 = \rho \cdot g \cdot h_0$$

$$P_{A-\text{manométrica}} = P_A - P_0 = \rho \cdot g \cdot h_0$$

b) Manômetro em U

É um manômetro construído com dois tubos conectados, formando uma forma em U. Este manômetro é capaz de medir pressões de gases. Para isso, conectamos um dos ramos desse tubo em U a um compartimento contendo um gás. O outro ramo é exposto à pressão atmosférica.

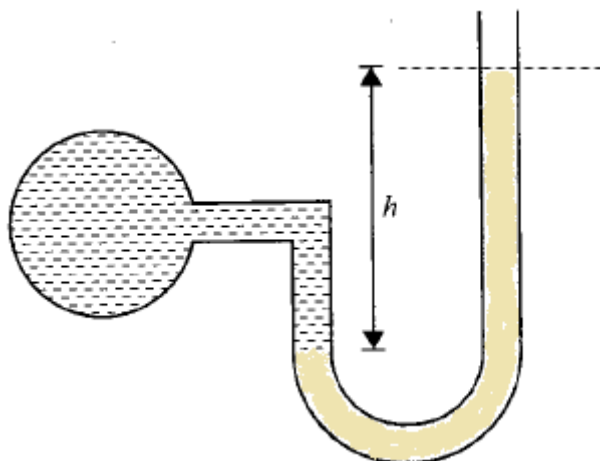


Figura 12: Tubo em U; gás e líquido.

A pressão do gás pode ser medida da seguinte forma:

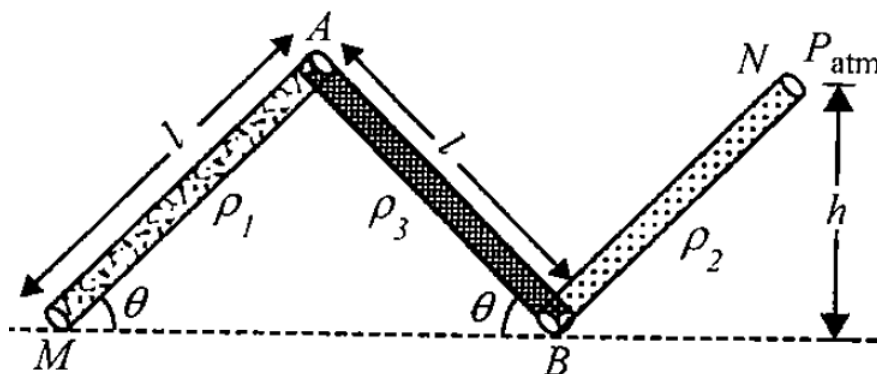
$$P_{gás} = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$$

ATENÇÃO
DECORE!



3.

Encontre o ângulo θ . O tubo em Zig-Zag é aberto em N, têm líquidos de densidades ρ_1, ρ_2 e ρ_3 e está disposto em um plano vertical. Além disso, a pressão em M é igual a pressão atmosférica.



Comentário:

A pressão nos pontos A e B são dadas por:

$$P_A = P_{atm} - \rho_1 \cdot (l \cdot \text{sen}\theta) \cdot g$$

$$P_B = P_{atm} + \rho_2 \cdot h \cdot g$$

Temos a seguinte relação entre as pressões:

$$P_B = P_A + \rho_3 \cdot (l \cdot \text{sen}\theta) \cdot g$$

Substituindo, temos:

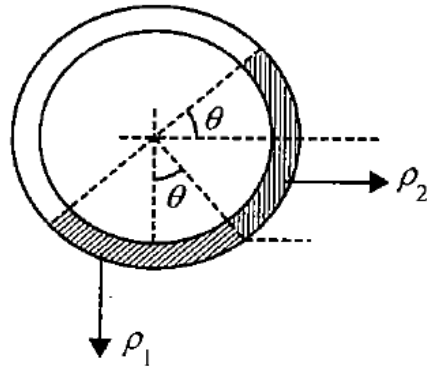
$$P_{atm} + \rho_2 \cdot h \cdot g = P_{atm} - \rho_1 \cdot l \cdot \text{sen}\theta \cdot g + \rho_3 \cdot l \cdot \text{sen}\theta \cdot g$$

$$\boxed{\text{sen}\theta = \frac{\rho_2 \cdot h}{(\rho_3 - \rho_1) \cdot l}}$$

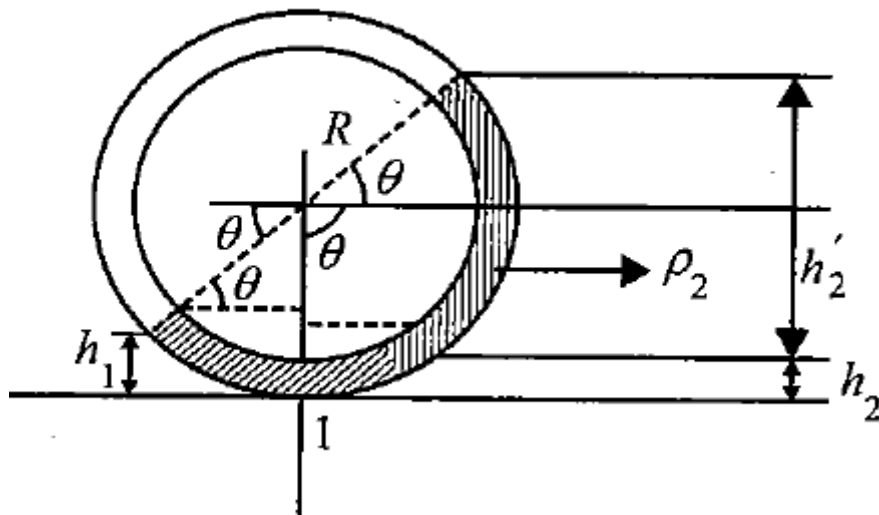
4.

Um tubo circular de seção uniforme é completamente cheio com dois líquidos de densidade ρ_2 e ρ_1 . Cada líquido ocupa um quarto do tubo. Se a linha que delimita a superfície livre dos líquidos forma um ângulo θ com a horizontal, encontre o valor de θ .





Comentário:



Primeiramente, iremos calcular a pressão no ponto 1 devido ao líquido de densidade ρ_1 .

$$P_1 = \rho_1 \cdot g \cdot h_1$$

A pressão no ponto 1 devido ao líquido de densidade ρ_2 é:

$$P_1 = \rho_1 \cdot g \cdot h_2 + \rho_2 \cdot g \cdot h'_2$$

Igualando as duas expressões:

$$\rho_1 \cdot h_1 = \rho_1 \cdot h_2 + \rho_2 \cdot h'_2$$

Da geometria do problema:

$$h'_2 = R \cdot \text{sen}\theta + R \cdot \text{cos}\theta$$

$$h_2 = R \cdot (1 - \text{cos}\theta)$$

$$h_1 = R \cdot (1 - \text{sen}\theta)$$

Substituindo:

$$\rho_1 \cdot R \cdot (1 - \text{sen}\theta) = \rho_1 \cdot R \cdot (1 - \text{cos}\theta) + \rho_2 \cdot R \cdot \text{sen}\theta + R \cdot \rho_2 \cdot \text{cos}\theta$$

$$\boxed{\text{tg}\theta = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}}$$





1.5. Diagramas e pressão em barragens planas

Um diagrama de pressão é uma representação gráfica da intensidade da pressão sobre uma superfície. O diagrama de pressões é montado para mostrar como a pressão varia sua intensidade com a profundidade. O gradiente de pressão é representado por uma sequência de “setas”. Essas “setas”, ou medidor de intensidade de pressão, são sempre perpendiculares à superfície em que o líquido exerce pressão.

1.5.1. Barragem e diagrama

Uma barragem é um dispositivo civil da engenharia que tem o objetivo de confinar certa quantidade de fluido. Uma barragem pode apresentar os mais diversos formatos geométricos. Nesta aula, estudaremos apenas as barragens com perfil simétrico plano e esférico.

Considere abaixo o perfil do diagrama de pressão em algumas barragens.

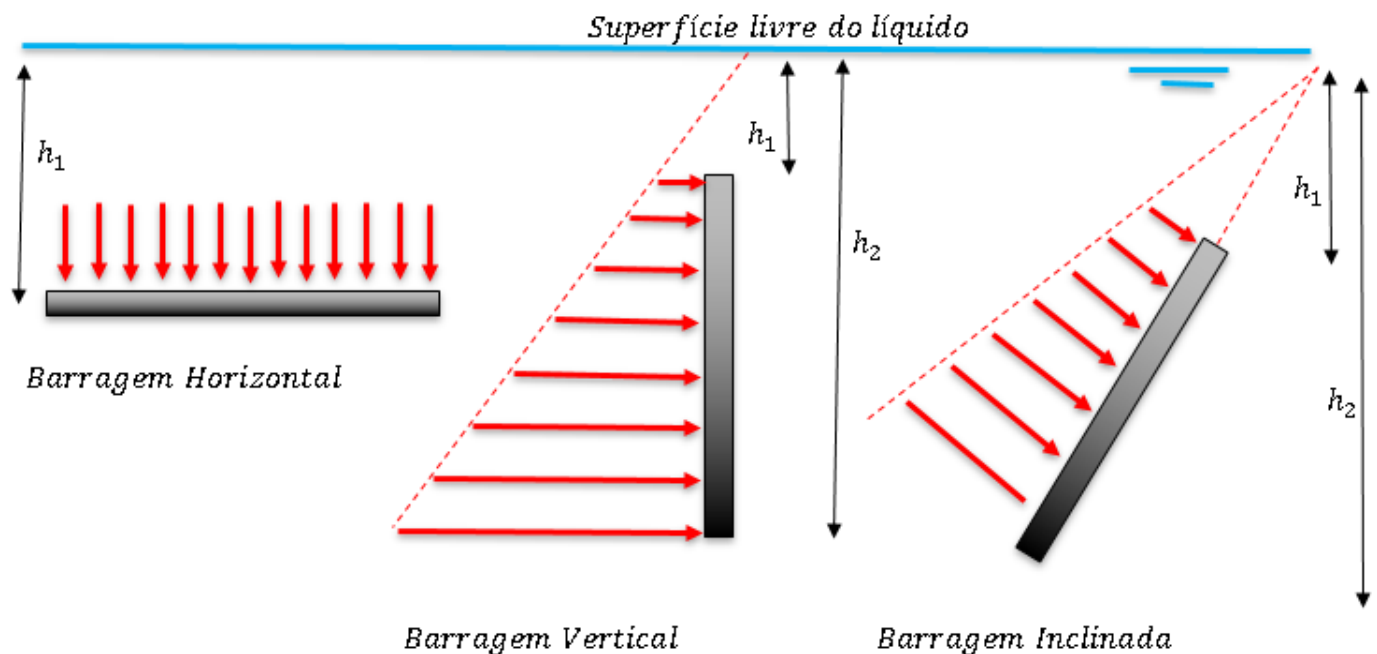


Figura 13: Tipos de barragens.

1.5.2. Força sobre a superfície plana imersa

Considere um chapa de área A imersa em um líquido de densidade ρ . A parte superior da chapa está a uma distância h_1 da superfície livre do líquido e a parte inferior está a uma distância h_2 . Considere um elemento infinitesimal de área dS .

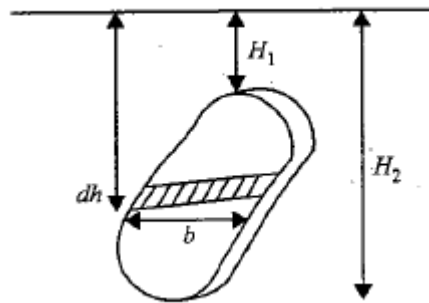


Figura 14: Representação infinitesimal do elemento de uma barragem.

$$dS = b \cdot dh$$

A pressão a uma profundidade h é dada por:

$$P = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$$

A força manométrica (dF) exercida pela água nesse elemento infinitesimal é dada por:

$$dF = P \cdot dS$$

$$dF = (P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h) \cdot b \cdot dh$$

$$\int dF = \int_{h_1}^{h_2} (P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h) \cdot b \cdot dh$$

Se a dimensão b é constante com a variação da altura:

$$F = P_{atm} \cdot b \cdot (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot b \cdot (h_2^2 - h_1^2)$$



1.5.3. Centro de aplicação da força

O centro de força é um ponto no qual podemos aplicar a força produzida pela água de tal maneira que iremos produzir o mesmo torque que sistema de forças produziria. Desta maneira, temos o momento:

$$F_{\text{água}} \cdot x = \int_{h_1}^{h_2} F_{\text{água}} \cdot dh$$

O valor de x fornece a profundidade do ponto de aplicação da força resultante. Outra maneira para encontrar esse ponto, é a determinação do centro geométrico da figura formada pelos gradientes de pressão.

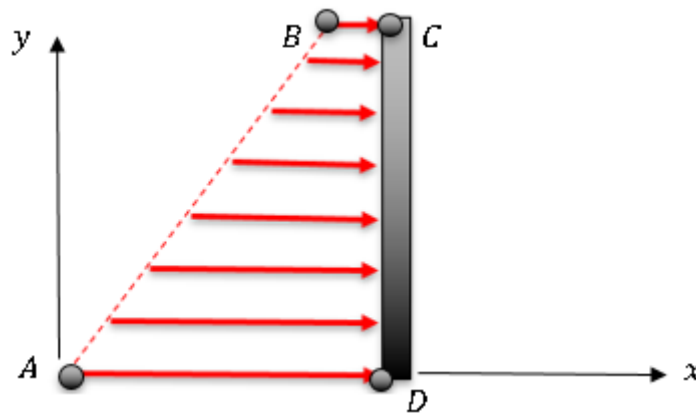


Figura 15: Centro geométrico do trapézio.

Para a barragem da Figura 15, o centro de aplicação da força resultante é a coordenada y do centro geométrico do trapézio ABCD.

1.5.4. Tanque retangular

Considere um tanque em forma de paralelepípedo de dimensões $(l \times b \times H)$ cheia de um líquido de densidade ρ .

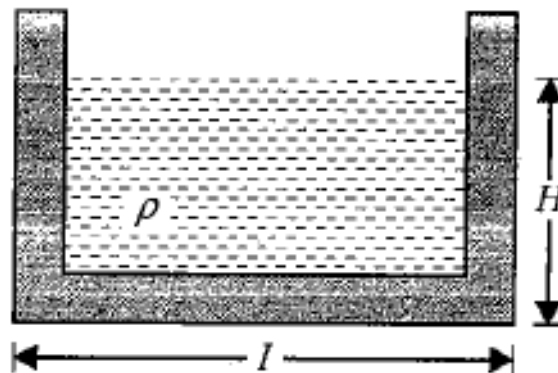


Figura 16: Tanque retangular

(A) Força na base

A pressão é uniforme na base. Deste modo, podemos calcular a força como:

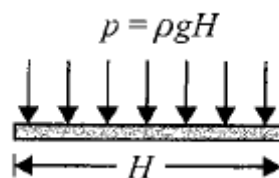


Figura 17: Pressão sobre a base

$$F_{\text{fundo}} = P \cdot \text{Area}$$

$$F_{\text{fundo}} = \rho \cdot g \cdot h \cdot (l \cdot b)$$

(B) Força nas paredes laterais

A pressão que atua nas paredes laterais não é uniforme. Entretanto, essa pressão cresce linearmente com a profundidade h .

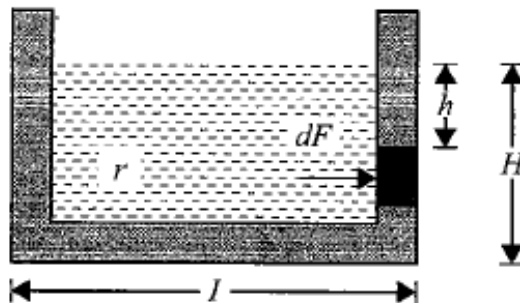


Figura 18: Diagrama de pressão nas laterais

A pressão a uma profundidade h é dada por:

$$P = \rho \cdot g \cdot h$$

A força que atua no elemento diferencial de área é dada por:

$$dF = P \cdot b \cdot dh$$

$$\int dF = \int_0^H \rho \cdot g \cdot h \cdot b \cdot dh$$

$$F_{lateral} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot b \cdot H^2$$

Para encontrar o ponto de aplicação da força, utilizamos a expressão da definição do centro de aplicação da força, temos:

$$F_{\acute{a}gua} \cdot x = \int_{h_1}^{h_2} F_{\acute{a}gua} \cdot dh \text{ e } F_{lateral} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot b \cdot H^2$$

$$x = \frac{1}{(b \cdot H) \cdot \frac{H}{2}} \cdot \left[\int_0^H b \cdot h^2 \cdot dh \right]$$

$$x = \frac{2H}{3}$$

Assim, o ponto de aplicação está a uma profundidade de dois terços da altura da parede lateral vertical.

1.5.5. Barragem inclinada

Considere uma barragem retangular de dimensões $(a \times b)$.



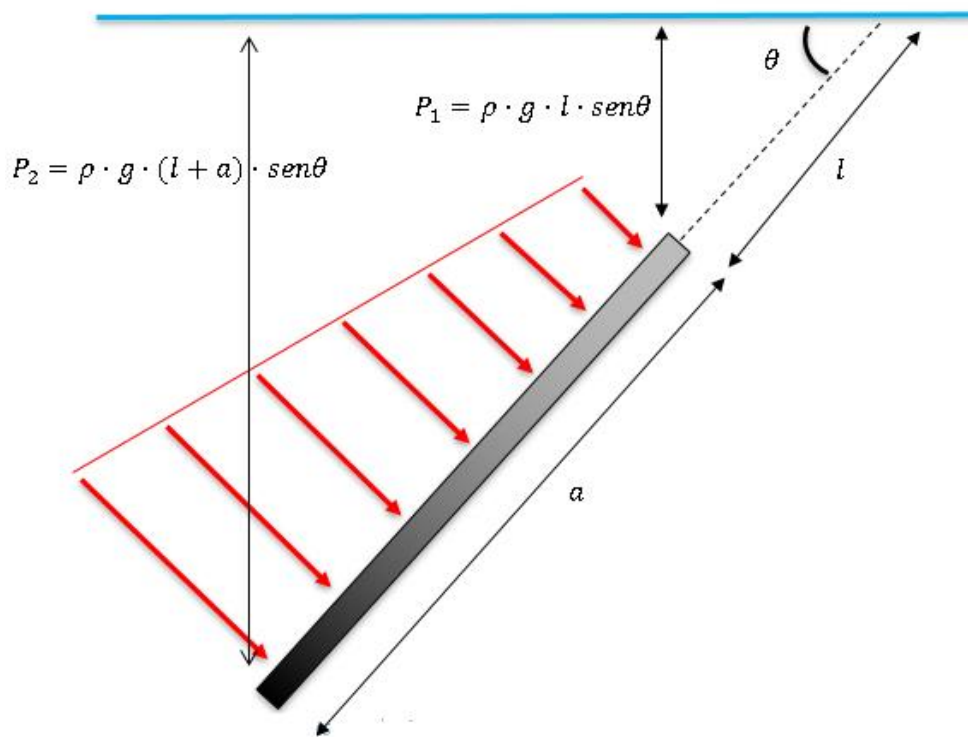


Figura 19: Gradiente de pressão na barragem inclinada

A força na barragem inclinada pode ser determinada pela pressão média.

$$F = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot A$$

$$F = \frac{\rho \cdot g \cdot l \cdot \text{sen}\theta + \rho \cdot g \cdot (l + a) \cdot \text{sen}\theta}{2} \cdot (a \cdot b)$$

$$F_{\text{inclinada}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot ab \cdot g \cdot \text{sen}\theta(a + 2l)$$

Quando utilizamos esse método de resolução, a força determinada ($F_{\text{inclinada}}$) é perpendicular à superfície da barragem.



1.6. Forças sobre superfície curvas

1.6.1. Tronco de cone

Considere um recipiente fechado com a forma de um tronco de cone de raios a e b e altura h . Enchemos completamente esse recipiente com um líquido de densidade ρ .

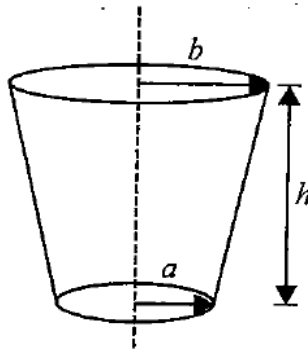


Figura 20: Tronco de cone

Considere o diagrama de forças do líquido sobre as paredes do recipiente:

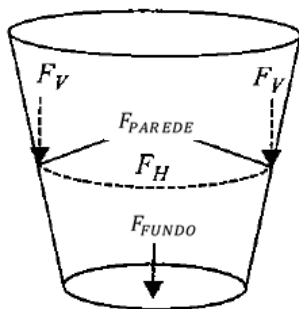


Figura 22: Forças do líquido no recipiente

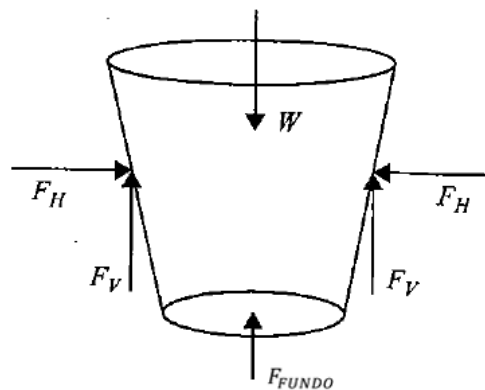


Figura 21: Diagrama do líquido

A líquido aplica uma força normal nas paredes inclinadas e no fundo do recipiente, tal força é expressa por:

$$F_{FUNDO} = \rho \cdot g \cdot h \cdot (\pi a^2)$$

O peso do líquido é dado por:

$$W = Volume \cdot \rho \cdot g$$

$$W = \frac{1}{3} \cdot \pi h \cdot (a^2 + ab + b^2) \cdot \rho \cdot g$$

Em que W é o peso do líquido (em inglês, *peso = weight*). Dessa forma, a força vertical do líquido (F_V) sobre as paredes do recipiente pode ser calculada pela segunda lei de Newton na vertical:

$$F_V = W - F_{FUNDO}$$

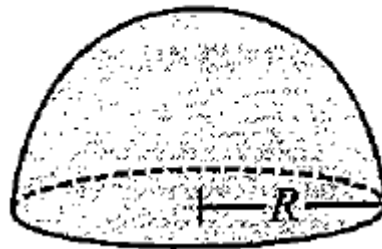
$$F_V = \frac{1}{3} \cdot \pi h \rho g \cdot (b + 2a) \cdot (b - a)$$

ATENÇÃO
DECORE!



6.

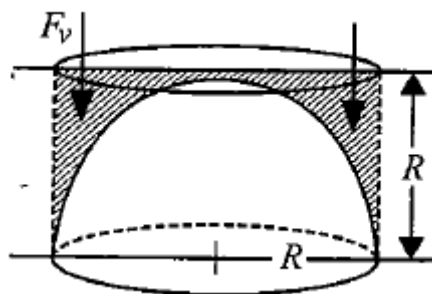
Um recipiente com o formato de uma semiesfera sólida de raio R é colocado dentro de um líquido de densidade ρ .



- Qual é a força vertical que o líquido faz sobre o recipiente em sua porção curva?
- Qual é a força vertical que o líquido faz sobre a parte plana do recipiente?
- Qual é a força horizontal que o líquido faz sobre o recipiente?

Comentário:

a) A força vertical é numericamente igual a peso da água sobre a superfície. Esse peso é dado pelo volume hachurado.



$$F_V = \rho \cdot g \cdot V_{Hachurada}$$

$$V_{Hachurada} = \pi R^2 \cdot R - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{\rho \cdot g \cdot \pi R^3}{3}$$

$$F_V = \frac{\rho \cdot g \cdot \pi R^3}{3}$$

b) Na parte plana, a força vertical é numericamente igual ao peso total da coluna de líquido. Esse peso corresponde ao volume de um cilindro.

$$F_V = \rho \cdot g \cdot V_{cilindro}$$



$$F_V = \rho \cdot g \cdot \pi R^3$$

c) A força horizontal é nula, pois as componentes se cancelam.



2. Líquidos acelerados

ACORDE!



2.1. Movimento horizontal com aceleração constante

Considere um líquido de densidade ρ que está dentro de um tanque, com a geometria de um paralelepípedo, de dimensões $(l \times b \times c)$ que se move para a direita com aceleração a .

Inicialmente, o tanque está em repouso e a altura do líquido é H , conforme figura abaixo:

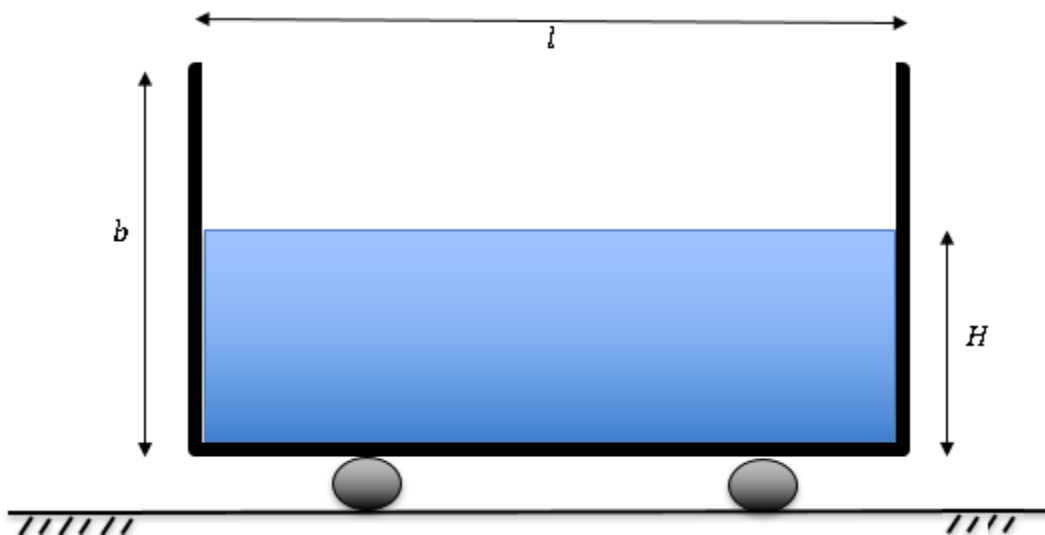


Figura 23: Tanque inicialmente em repouso.

Quando o vagão começa a se mover a superfície do líquido se inclina. A inclinação é tal que a superfície fica perpendicular à “gravidade resultante”.

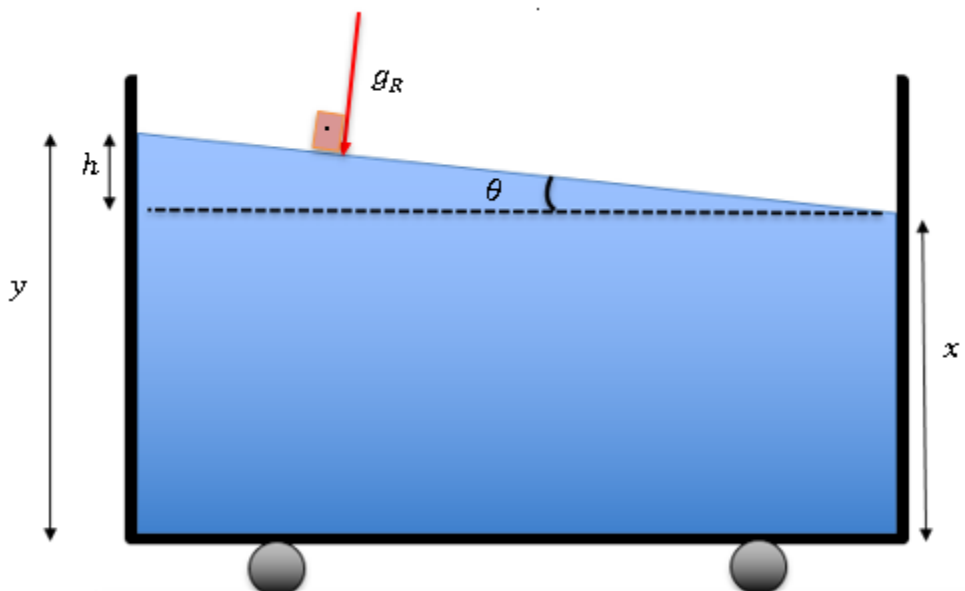


Figura 24: Tanque acelerado para a direita.



Para o referencial não inercial do tanque, temos a seguinte geometria para o movimento.

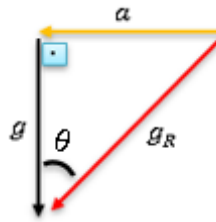


Figura 25: Somatória das acelerações

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a}{g} \quad (I)$$

Para a superfície do líquido, temos:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h}{l} = \frac{y-x}{l} \quad (II)$$

Igualando as equações (I) e (II):

$$\frac{a}{g} = \frac{y-x}{l} \Rightarrow y = x + \frac{a}{g} \cdot l \quad (III)$$

Da situação inicial (repouso) para a situação de movimento acelerado há conservação do volume de água.

$$\begin{aligned} V_{\text{antes}} &= V_{\text{depois}} \\ H \cdot l \cdot c &= \left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot l \cdot c \\ y &= -x + 2H \quad (IV) \end{aligned}$$

Igualando as equações (III) e (IV):

$$x + \frac{a \cdot l}{g} = -x + 2H$$

$$\boxed{x = H - \frac{l}{2g} \cdot a} \quad (V)$$

$$\boxed{y = H + \frac{l}{2g} \cdot a} \quad (VI)$$

Note que quando maior for a aceleração horizontal a , maior será o valor de y e menor será o valor de x . Diante disso, podemos trabalhar as condições para que não haja transbordamento e qual o máximo volume de líquido o tanque pode ter.

2.1.1. Não transbordamento

Para que o líquido não transborde do tanque, quando ele estiver na iminência de transbordar, temos:

$$y = b$$

$$b = H + \frac{a_{\text{máx}} \cdot l}{2g} \quad (\text{VII})$$

Então, a máxima aceleração possível para essa condição é de:

$$a_{\text{máx}} = \left(\frac{2(b - H)}{l} \right) \cdot g$$

Note que quanto maior a diferença $b - H$, isto é, a diferença entre a altura da parede vertical do tanque e a altura do líquido dentro do tanque, maior será a aceleração máxima para que não ocorra transbordamento, resultado que é bem visível. Se $b - H$ é muito pequeno, ou seja, a altura do líquido já está bem próxima do topo do tanque e, assim, uma pequena aceleração do tanque já seria o suficiente para fazer o fluido transbordar.

O volume máximo de água carregada, para uma dada aceleração a , é dado por:

$$V_{\text{máx}} = H \cdot l \cdot c = \left(b - \frac{a \cdot l}{2g} \right) \cdot l \cdot c$$

$$V_{\text{máx}}(l) = b \cdot l \cdot c - \frac{a \cdot c \cdot l^2}{2g} \quad (\text{VIII})$$

2.1.2. Otimização do volume

Para otimizar o volume máximo carregado, isto é, encontrar as dimensões do recipiente que maximizam o volume de líquido transportado para aquele a , basta maximizar a função acima:

$$\frac{dV_{\text{máx}}(l)}{dl} = b \cdot c - \frac{a \cdot c \cdot l}{g} = 0$$

$$b = \frac{a \cdot l_{\text{máx}}}{g}$$

Note que a trata-se de uma função do segundo grau, com concavidade para baixo. Então, o termo que maximiza a função do volume é de:

$$x_v = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{b \cdot c}{2 \cdot \left(-\frac{a \cdot c}{g} \right)} = \frac{b \cdot g}{a} = l_{\text{máx}}$$

Substituindo na expressão (VII):

$$\frac{a \cdot l_{\text{máx}}}{g} = H + \frac{a \cdot l_{\text{máx}}}{2g} \Rightarrow H = \frac{a \cdot l_{\text{máx}}}{2g}$$

$$H = \frac{b}{2}$$

Desta maneira, para otimizar o volume armazenado no tanque, temos a altura da água na situação inicial é a metade da altura do tanque. Logo:

$$V_{\text{máx}} = \frac{c \cdot b^2 \cdot g}{2a}$$



INDO MAIS
FUNDO!



2.2. Rotação de um líquido

Quanto um líquido sofre uma rotação, sua superfície modifica-se de tal forma que seja perpendicular à aceleração resultante. Considere um recipiente cilíndrico que gira ao redor do eixo Y , representado abaixo.

Determinaremos a forma da superfície do líquido, quando ele sofre uma rotação de ω rad/s. O nível inicial do líquido (em repouso sem a rotação) é y_0 .

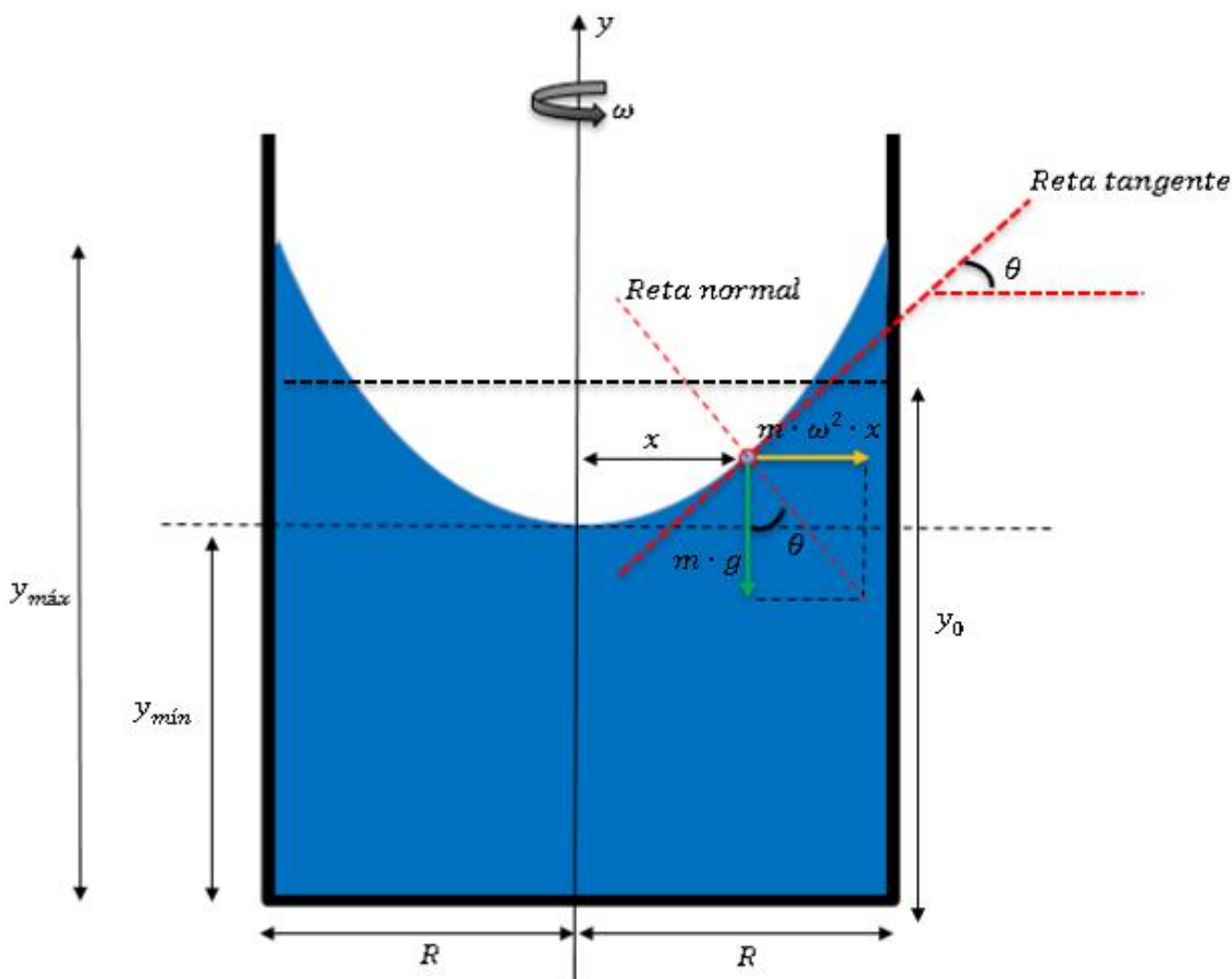


Figura 26: Líquido em rotação



Considere um pequeno elemento de água na superfície do líquido. Esse elemento sofre ação da força centrífuga, no referencial não inercial do próprio líquido, e a força peso. Traçando a reta tangente, a normal e analisando os ângulos congruentes, temos:

$$tg\theta = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot x}{m \cdot g} \Rightarrow \boxed{tg\theta = \frac{\omega^2 \cdot x}{g}}$$

O ângulo θ é a inclinação da reta tangente à curva dada. Deste modo, adotando como origem do eixo x o centro da base do tanque cilíndrico, temos:

$$tg\theta = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 \cdot x}{g} \Rightarrow \int_{y_{\min}}^y dy = \int_0^x \frac{\omega^2 \cdot x}{g} \cdot dx = \frac{\omega^2}{g} \cdot \int_0^x x dx$$

$$\boxed{y = y_{\min} + \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2}$$

Essa equação representa a curva parabólica da superfície do líquido de acordo com a velocidade angular ω , ou seja, para cada ω , teremos uma curva parabólica e teremos um y_{\max} e um y_{\min} .

2.2.1. Altura máxima (y_{\max})

A altura máxima na parede do recipiente é dada por:

$$x = R$$

$$y_{\max} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{2g} + y_{\min} \quad (I)$$

Da Geometria analítica espacial, sabe-se que o volume do parabolóide de revolução é a metade do cilindro circunscrito.

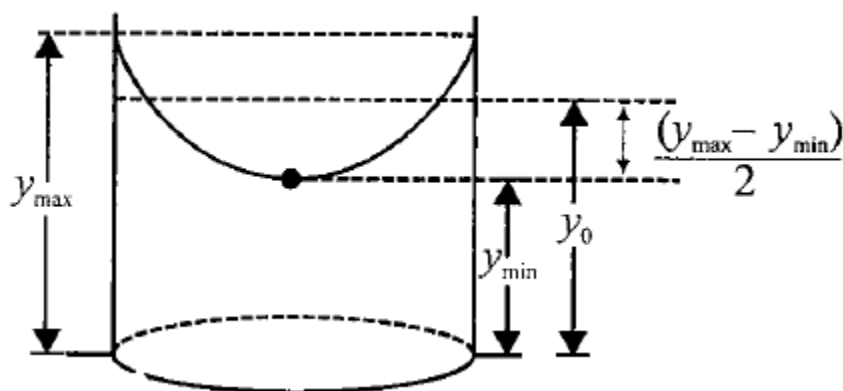


Figura 27: Posição mínima da superfície d'água

O volume do parabolóide é dado por:

$$V = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \cdot \pi R^2$$

Também há a conservação de volume do líquido. No início tínhamos o líquido em repouso ocupando um volume V_0 . No final, temos o líquido ocupando um volume $V + V'$.

$$V' = \pi R^2 \cdot y_{\min}$$

Deste modo, temos:

$$V_0 = V + V'$$

$$\pi R^2 \cdot y_0 = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \cdot \pi R^2 + \pi R^2 \cdot y_{\min}$$

$$y_0 = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} + y_{\min}$$

Usando a relação (I), temos:

$$y_{\max} = y_0 + \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4g}$$

Então, y_{\min} é expresso por:

$$y_{\min} = y_0 - \frac{\omega^2 \cdot R^2}{4g}$$



3. Princípio de Arquimedes

3.1. Introdução

Considere um cilindro de volume V e área A flutuando em líquido de densidade ρ . O cilindro está parcialmente submerso. O volume imerso, porção do corpo que está no interior do líquido, é V_{sub} e o volume emerso, volume exterior ao líquido é $(V - V_{sub})$.

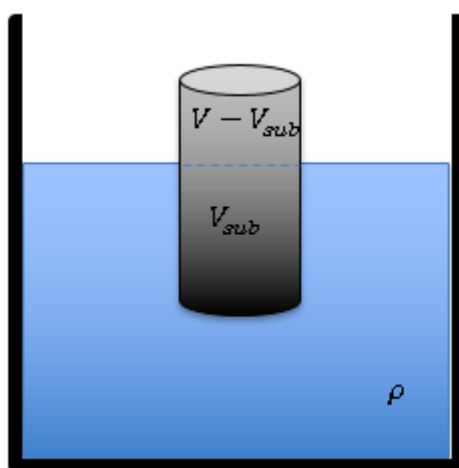


Figura 28: Corpo parcialmente submerso

Sobre esse corpo, na porção imersa, atuam forças hidrostáticas, que são forças advinhas da pressão causada pela água e que são perpendiculares ao contorno de superfície.



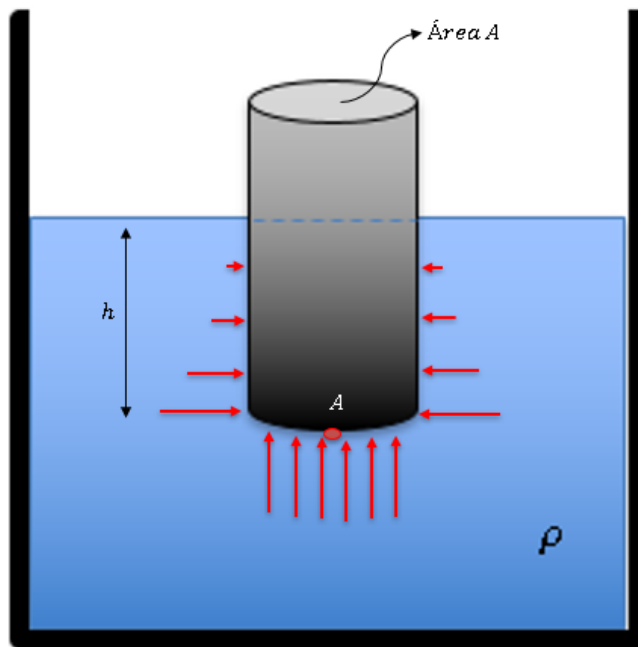


Figura 29: Forças advindas da pressão

As forças horizontais sobre o cilindro se anulam. Desta maneira, não há resultante das forças, advindas da pressão hidrostática, sobre esse corpo na horizontal. Na vertical, encontraremos o módulo da resultante e chamaremos ela de força de Empuxo.

Para a vertical, temos:

- A pressão na superfície inferior do cilindro é a pressão manométrica do ponto A:

$$P_A = \rho \cdot g \cdot h$$

- A força resultante, advinda das pressões hidrostáticas, (F_{hid}) que atua na base inferior do cilindro é dada por:

$$F_{hid} = P_A \cdot A$$

$$F_{hid} = \rho \cdot g \cdot h \cdot A \Rightarrow F_{hid} = \rho \cdot g \cdot (h \cdot A)$$

$$\boxed{F_{hid} = \rho \cdot g \cdot (V_{sub})}$$

A expressão encontrada acima é chamada de força de Empuxo. No tópico seguinte, detalharemos essa força para um corpo genérico que está submerso ou parcialmente submerso.

3.2. Empuxo

3.2.1. Princípio de Arquimedes

Todo corpo imerso em um fluido sofre ação de uma força vertical, cujo módulo é numericamente igual ao peso do fluido deslocado. Denomina-se essa força vertical de **Empuxo**.



3.2.2. Módulo do empuxo newtoniano

Considere um corpo de forma genérica, com volume V , e densidade volumétrica σ . O corpo está parcialmente submerso em um líquido de densidade ρ .

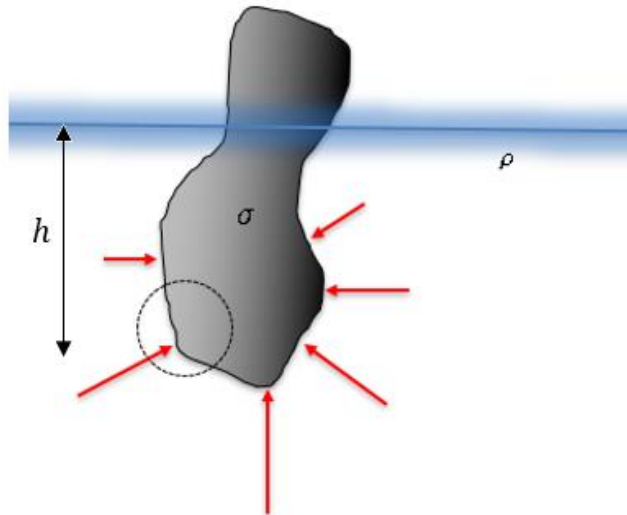


Figura 30: Atuação do empuxo.

Considere uma porção pequena de área dA , circulada na figura acima, da superfície deste sólido.

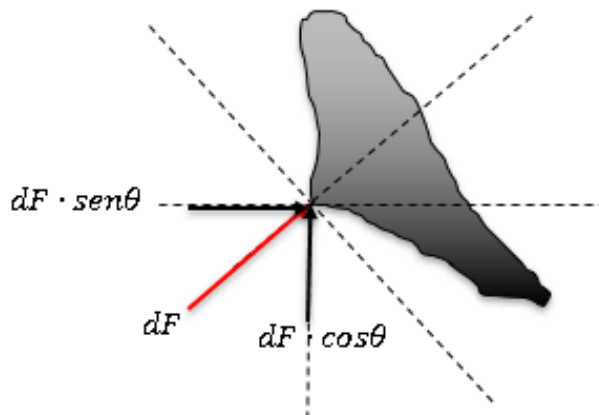


Figura 31: Análise de um elemento infinitesimal.

A pressão manométrica sobre essa porção é dada pela lei de Stevin:

$$P = \rho \cdot g \cdot h$$

Deste modo, a força resultante, produzida pela somatória das pressões, na vertical sobre a porção dA é dada por:

$$dF_y = \rho \cdot g \cdot h \cdot dA \cdot \cos\theta$$

Se efetuarmos a soma de todas as forças verticais, atuando em cada pequena porção com a mesma profundidade, teremos a resultante vertical da força hidrostática para um elemento em uma dada altura. Somando todas temos:

$$F_y(h) = \rho \cdot g \cdot \left(h \cdot \sum_{i=1}^{\infty} dA_i \cdot \cos\theta_i \right)$$

O termo $dA_i \cdot \cos\theta_i$ representa a área projetada na direção vertical do sistema. Assim, trocamos um corpo de forma genérica por um cilindro de área constante e altura h , de tal forma que o volume submerso é igual para ambos.

$$V_{sub} = h \cdot \sum_{i=1}^{\infty} dA_i \cdot \cos\theta_i$$

Deste modo, a soma de todas contribuições é a força de empuxo sobre o corpo.

$$F_y(h) = \text{Empuxo} = E$$

$$E = \rho \cdot g \cdot V_{sub}$$



3.2.3. Ponto de aplicação do empuxo

O centro de aplicação do empuxo é chamado de centro de **Carena**.

O centro de **Carena** é o centro de gravidade do volume de líquido deslocado por um corpo.

A seguir, temos algumas propriedades para esse ponto. Consideraremos o centro de massa coincidente com o centro de gravidade do corpo. Então:

- Se o corpo possuir densidade uniforme, o centro de carena é coincidente com o centro de massa da parte submersa.
- O empuxo sempre é aplicado no centro de carena de um corpo.
- O centro de carena é uma propriedade do fluido deslocado e não da parte submersa do corpo.
- Na maioria das vezes, o centro de carena não é coincidente com o centro de massa do corpo.
- É comum utilizarmos a letra B para o centro de carena, pois em inglês este ponto é chamado de *buoyancy*.

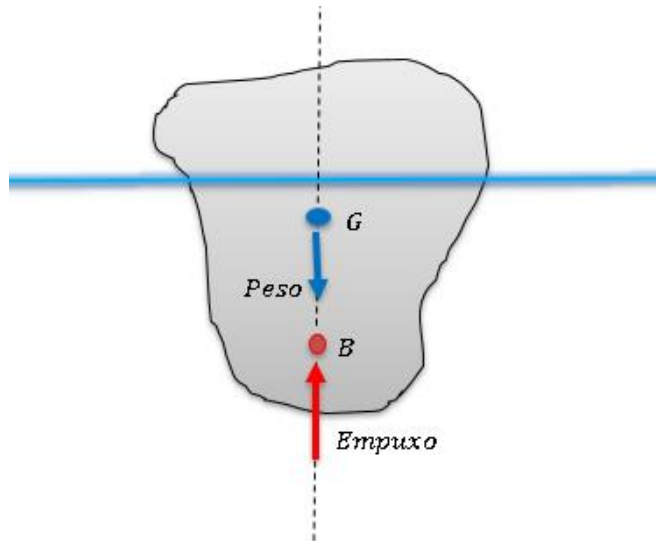


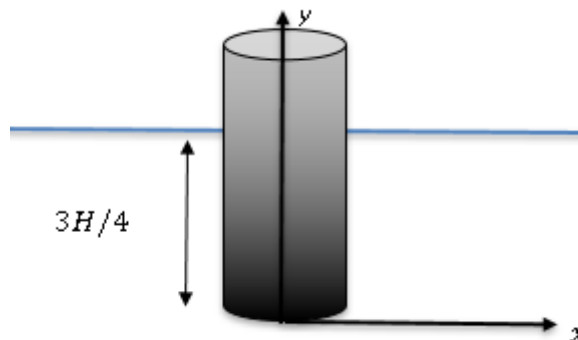
Figura 32: Representação do centro de Carena

- Não necessariamente o centro de carena B está abaixo do centro de massa G .



7.

Um cilindro de altura H e área da base A está flutuando em líquido de densidade ρ . Três quartos de seu volume submerso. Se o cilindro possui densidade uniforme, determine o ponto de Carena e o centro de massa.



Comentário:

O centro de carena é o centro de gravidade do volume de líquido deslocado e, portanto, é a metade do comprimento submerso.

$$B = \left(0, \frac{3H}{8}\right)$$

O centro de massa está na metade do comprimento total do cilindro e, portanto, temos:

$$G = \left(0, \frac{H}{2}\right)$$



3.2.4. Noções de equilíbrio

Considere um corpo de densidade σ e massa m . Ao colocarmos esse corpo em líquido de densidade ρ , o corpo sofre a ação de duas forças: Empuxo e peso.

a) Equilíbrio translacional:

(I) Se $\sigma > \rho$:

A força de empuxo é dada por:

$$E = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot \frac{m}{\sigma} = m \cdot g \left(\frac{\rho}{\sigma} \right), \quad \text{com } 0 < \frac{\rho}{\sigma} < 1$$

E a força peso por:

$$P = m \cdot g$$

Das expressões do peso e do empuxo, podemos afirmar que:

$$P > E$$

Desta maneira, o corpo afundará e ficará em equilíbrio estável na vertical. Portanto, nenhum deslocamento pequeno afetará o equilíbrio desse sistema.

Na horizontal o equilíbrio é indiferente, pois não há ação de nenhuma força de perturbação.

(II) Se $\sigma < \rho$:

Para esse caso, temos o $P < E$, pois $\frac{\rho}{\sigma} > 1$.

Para qualquer perturbação na vertical, tão pequena quanto se queira, o corpo começa a oscilar com polo na posição de equilíbrio estável.

Para perturbações horizontais, o corpo continua em equilíbrio indiferente.

(III) Se $\sigma = \rho$:

O corpo encontra-se em equilíbrio indiferente para qualquer deslocamento feito.

b) Equilíbrio rotacional:

Considere um corpo de centro de gravidade G e centro de carena B . O equilíbrio rotacional deste corpo depende da disposição vertical entre o centro de gravidade e o centro de carena. Para o equilíbrio rotacional, temos as possíveis configurações:

(I) B acima de G

Sempre que o centro de gravidade estiver abaixo do centro de carena o corpo estará em equilíbrio estável.

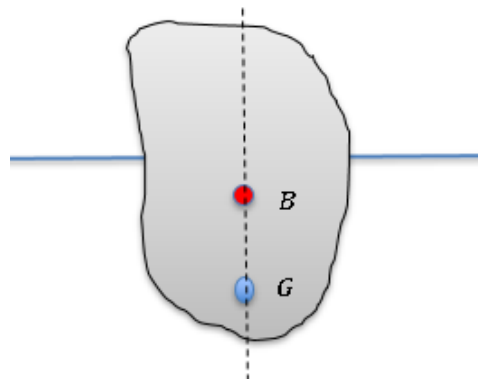


Figura 33: Disposição do centro de carena e centro de massa

(II) Outras situações

Se o centro de gravidade estiver acima do centro de carena podemos avaliar o equilíbrio usando o conceito de Meta-centro (M).

Considere um corpo o parcialmente submerso da figura abaixo. O centro de carena está abaixo do centro de gravidade. Faça um deslocamento angular θ da seguinte forma:



Figura 34: Situação de equilíbrio (Esquerda); Situação de perturbação (Direita)

O centro de carena mudará de posição, pois o volume deslocado de líquido sofreu alteração. Chamaremos esse novo ponto de carena de B' .

Trace uma reta passando pelo centro de gravidade e o antigo de carena B . Trace outra reta vertical passando agora pelo novo ponto de carena B' . A intersecção entre essas retas será o Meta-centro M .

- Se M estiver acima do centro de gravidade G - equilíbrio estável.
- Se M estiver abaixo do centro de gravidade G - equilíbrio instável.

Se M coincidir com G - equilíbrio indiferente.



8.

Qual é a fração submersa de um iceberg? A densidade da água é 1028 kg/m^3 e a densidade do gelo é 917 kg/m^3 .

Comentário:

O peso do iceberg é igual ao empuxo.

$$P = E$$

$$m \cdot g = \rho_{\text{água}} \cdot g \cdot V_{\text{sub}}$$

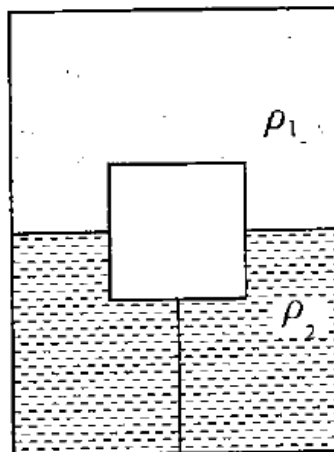
$$\rho_{\text{gelo}} \cdot V \cdot g = \rho_{\text{água}} \cdot g \cdot V_{\text{sub}}$$

$$\frac{V_{\text{sub}}}{V} = \frac{\rho_{\text{gelo}}}{\rho_{\text{água}}} = \frac{917}{1028}$$

$$\boxed{\frac{V_{\text{sub}}}{V} = 0,892}$$

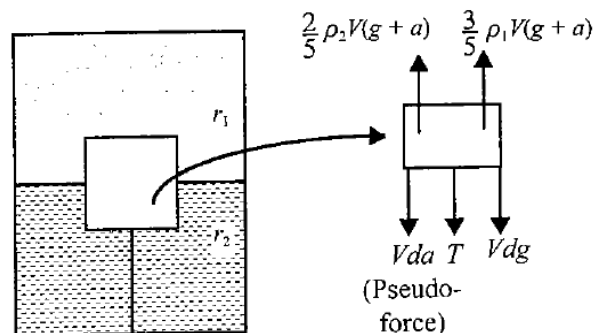
9.

Um vaso contém dois líquidos imiscíveis de densidades 1000 kg/m^3 e 1500 kg/m^3 . Um bloco sólido de volume $V = 0,001 \text{ m}^3$ e densidade 800 kg/m^3 está preso ao fundo do vaso por um fio ideal. O bloco está parcialmente submerso em ambos os líquidos, com metade do volume em cada líquido. Esse sistema está em um elevador que se move para cima com aceleração 5 m/s^2 . Se a gravidade local vale 10 m/s^2 , determine a tensão no fio.



Comentário:

Considere as forças sobre o bloco, no referencial não inercial do vaso.



$$E_{ap} = T + P_{ap}$$

$$\left(\frac{2}{5} \cdot V \cdot \rho_2 + \frac{3}{5} \cdot V \cdot \rho_1\right) \cdot (g + a) = T + V \cdot d \cdot (g + a)$$

$$T = (g + a) \cdot V \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot \rho_2 + \frac{3}{5} \cdot \rho_1 - d \right]$$
$$T = (10 + 5) \cdot 0,001 \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot 1500 + \frac{3}{5} \cdot 1000 - 800 \right]$$
$$\boxed{T = 6 \text{ N}}$$

10. (ITA – 2018)

Uma esfera sólida e homogênea de volume V e massa específica ρ repousa totalmente imersa na interface entre dois líquidos imiscíveis. O líquido de cima tem massa específica ρ_C e o de baixo, ρ_B , tal que $\rho_C < \rho < \rho_B$. Determine a fração imersa no líquido superior do volume da esfera.

Comentário:

Para o equilíbrio translacional do sistema:

$$E = P$$
$$\rho_C \cdot g \cdot V_C + \rho_B \cdot g \cdot V_B = (\rho \cdot V) \cdot g$$
$$\rho_C \cdot V_C + \rho_B \cdot (V - V_C) = \rho \cdot V$$
$$\boxed{\frac{V_C}{V} = \frac{\rho_B - \rho}{\rho_B - \rho_C}}$$

11. (ITA – 2016 - modificada)

Um cubo de peso P_1 , construído com um material cuja densidade é ρ_1 , dispõe de uma região vazia em seu interior e, quando inteiramente imerso em um líquido de densidade ρ_2 , seu peso reduz-se a P_2 . Determine a expressão do volume da região vazia deste cubo.

Comentário:

A redução do peso é o peso aparente do objeto:

$$E = P_1 - P_2$$
$$\rho_2 \cdot V \cdot g = P_1 - P_2 \quad (I)$$

O volume total do cilindro é a soma do volume vazio e do volume efetivo:

$$V = V_{\text{vazio}} + V_{\text{preenchido}}$$
$$V = V_{\text{vazio}} + \frac{m}{\rho_1}$$
$$V = V_{\text{vazio}} + \frac{P_1}{\rho_1 \cdot g} \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II):

$$\rho_2 \cdot \left(V_{\text{vazio}} + \frac{P_1}{\rho_1 \cdot g} \right) \cdot g = P_1 - P_2$$



$$V_{\text{vazio}} = \frac{P_1 - P_2}{\rho_2 \cdot g} - \frac{P_1}{\rho_1 \cdot g}$$





4. Hidrodinâmica

4.1. Análise de fluxos

4.1.1. Fluxo constante (ou estado estacionário ou regime permanente)

O fluxo constante é uma condição na qual a quantidade de líquido fluindo por unidade de tempo é constante. Se o fluxo é constante, então a velocidade, a pressão e a densidade em um determinado ponto são constantes. Matematicamente, podemos afirmar que as propriedades do fluido em fluxo constante obedecem à condição:

$$\frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dP}{dt} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Em um fluxo não constante, algumas propriedades do fluido podem variar com o tempo.

4.1.2. Fluxo uniforme

Um fluxo é dito uniforme se em qualquer instante de tempo a velocidade não varia ao longo da direção de fluxo.

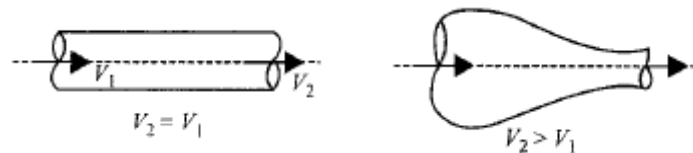


Figura 35: Linhas de escoamento

ESCLARECENDO!



4.2. Visualização dos fluxos

O padrão de fluxo de um fluido pode ser visualizado em termos de linhas de caminho e linhas de fluxo.

4.2.1. Linhas de caminho

É a linha que descreve a trajetória de um fluido que se move com a passagem do tempo. A reta tangente a essas linhas fornece a direção da velocidade do fluido. As linhas de caminho podem se interceptar em tempos diferentes.

4.2.2. Linhas de fluxo

É uma linha desenhada de tal forma que uma tangente em cada ponto estabelece a direção da velocidade naquele instante.

O agrupamento de todas as linhas de fluxo indica o fluxo do líquido naquele instante. Se cada ponto de um líquido que flui continuamente segue exatamente o mesmo caminho que foi seguido pelas partículas que o precedem, diz-se que o fluxo é laminar.

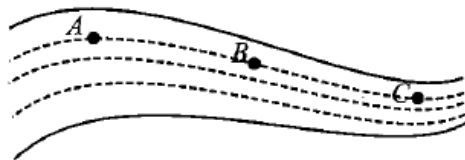


Figura 36: Linhas de fluxo

Se um líquido segue o caminho ABC, as partículas que o sucederem se movem ao longo do mesmo caminho.



4.3. Princípio da continuidade

Se o fluxo de um líquido é dito constante, podemos dizer que a quantidade de líquido atravessando uma seção não varia com o tempo. Dessa maneira, poderá ocorrer qualquer variação geométrica do fluxo sem que se altere sua vazão.

Considere as seguintes linhas de fluxo:

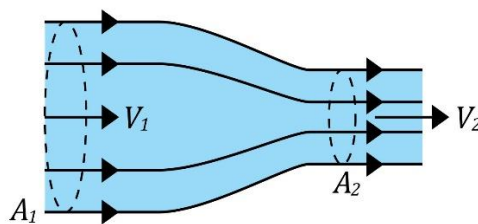


Figura 37: Análise da mudança de perfil das linhas de fluxo

A vazão de um fluido por uma determinada área de seção transversal A pode ser escrita como:

$$\phi = A \cdot V$$

Em que V é a velocidade do fluido no local onde a área transversal é A . No SI, a unidade de área é o m^2 e a unidade de velocidade é o m/s . Portanto:

$$u(\phi) = u(A) \cdot u(V) = m^2 \cdot m/s$$

$$u(\phi) = m^3/s$$

Como a vazão é constante no tempo, então:

$$\phi_1 = \phi_2$$

$$\boxed{A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2}$$

4.3.1. Aplicação do princípio da continuidade

Considere um líquido que percorre um tubo de seção variável. Podemos aplicar o princípio da continuidade.

$$A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{A_1}{A_2}$$

Então:

a) $A_1 > A_2$:

$$\frac{A_1}{A_2} > 1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} > 1 \Rightarrow \boxed{V_2 > V_1}$$

Este resultado mostra que para um fluxo constante, se a área é maior em um trecho, então a velocidade será menor naquele trecho.

b) $A_1 < A_2$:

$$\frac{A_1}{A_2} < 1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} < 1 \Rightarrow V_2 < V_1 \text{ ou } \boxed{V_1 > V_2}$$

Este resultado mostra que para um fluxo constante, se a área é menor em um trecho, então a velocidade será maior naquele trecho.

Resumidamente, a área e a velocidade são grandezas inversamente proporcionais, isto é:

Quanto maior a área de seção, menor será a velocidade do fluido.



4.4. Energia associada a um líquido em movimento

4.4.1. Energia potencial

Em virtude da disposição espacial do fluido, é necessária a associação de uma energia potencial gravitacional.

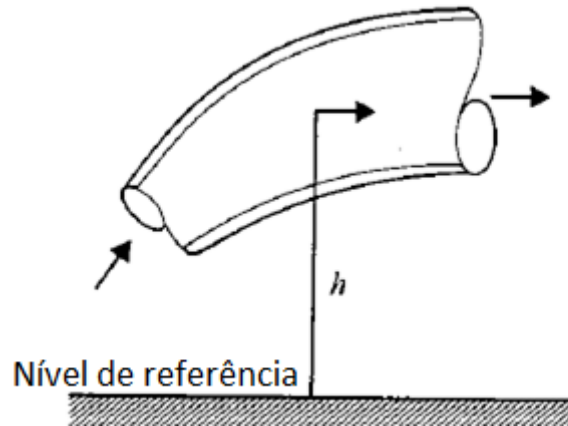


Figura 38: Elemento de líquido

$$U = \frac{\Delta m}{\Delta V} \cdot g \cdot h = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow \boxed{U = \rho \cdot g \cdot h}$$

4.4.2. Energia cinética

Devido a velocidade do fluido, podemos associar uma energia cinética por volume de líquido.

$$K = \frac{1}{\Delta V} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v^2 \right) \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2}$$

4.4.3. Energia associada a pressão

O conceito de energia de pressão é compreendido quando analisamos um deslocamento do fluido. Considere o trabalho realizado para deslocar uma massa de líquido (densidade ρ), a uma pressão P , por uma distância x . A área de seção do líquido é A .

$$W = P \cdot A \cdot x$$

Associamos essa pressão P a uma diferença de altura:

$$W = \rho g h \cdot A \cdot x$$

A energia de pressão é o trabalho dividido pelo volume deslocado é dada por:

$$E_p = \frac{W}{A \cdot x} \Rightarrow \boxed{E_p = \rho \cdot g \cdot h = P}$$

Desse modo, a energia de pressão de um líquido é igual a pressão hidrostática manométrica.

4.5. Equação de Bernoulli

A equação de Bernoulli relaciona a energia potencial, cinética e de pressão de um fluido. A equação de Bernoulli mostra que a soma dessas três energias é um valor constante no tempo.

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h + P = constante}$$

4.5.1. Considerações e limitações

- O fluxo do líquido deve ser constante para que se aplique a equação de Bernoulli.

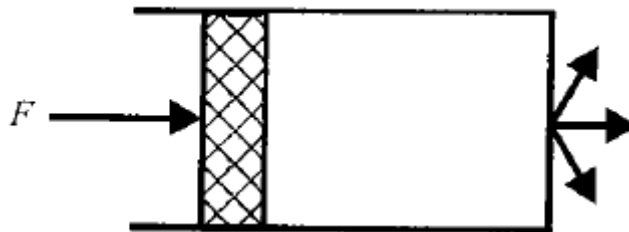
- O fluido deve ser incompressível.
- O fluido deve ser ideal. Não há perdas internas de energia devido ao escoamento do fluido.

ATENÇÃO
DECORE!



12.

Considere um cilindro horizontal de comprimento l contendo água. Uma força constante F é aplicada no pistão. Na extremidade direita no cilindro, há um furo de área a . Qual é a velocidade do pistão? A área do pistão é A .



Comentário:

Ao empurrar o pistão, a água vaza pelo lado direito do cilindro com velocidade v_{saida} .

Aplicando a equação de Bernoulli temos:

$$\left(\frac{F}{A} + P_0\right) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{pistão}^2 = P_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{saida}^2$$

Como não há variação de vazão, aplicaremos a equação da continuidade:

$$A \cdot V_{pistão} = a \cdot V_{saida}$$

Das duas expressões temos:

$$V_{pistão} = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot a^2}{\rho \cdot A(A^2 - a^2)}}$$

ESCLARECENDO!



4.6. Tubo de Venturi

O tubo de Venturi é um instrumento que indica a variação de pressão sofrida por um líquido. Ele é formado por dois tubos de diâmetros diferentes, conectados e submetidos a uma vazão

constante. Do lado esquerdo do tubo, o fluido inicia-se com uma velocidade v_1 e após sofrer uma estrangulação sua velocidade é v_2 , conforme figura abaixo. Considere um líquido de densidade ρ .

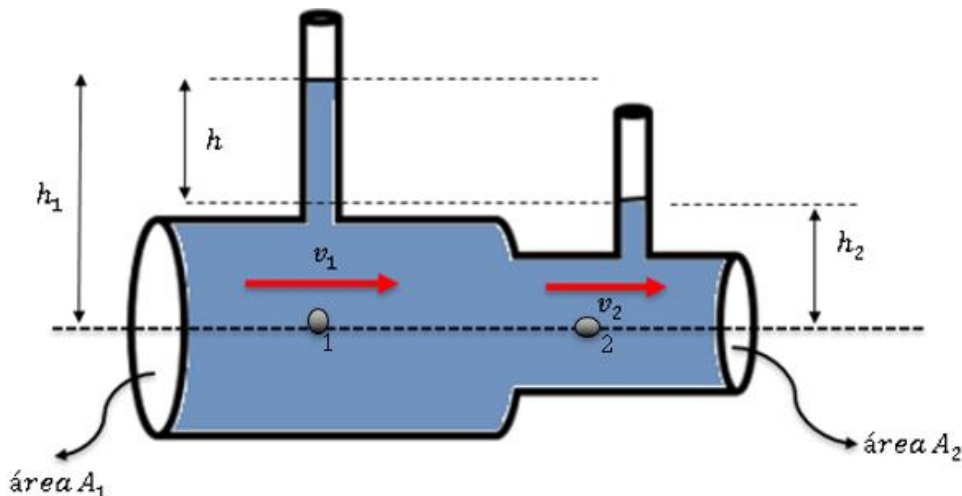


Figura 39: Esquemática do tubo de Venturi

Como o fluxo é constante para as duas seções, podemos aplicar a equação da continuidade:

$$v_1 A_1 = v_2 \cdot A_2 \quad (\text{eq1})$$

Das pressões absolutas:

$$P_1 = P_{ATM} + \rho \cdot g \cdot h_1$$

$$P_2 = P_{ATM} + \rho \cdot g \cdot h_2$$

Subtraindo as duas equações, temos:

$$P_1 = P_2 + \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) \quad (\text{eq2})$$

Aplicando a equação de Bernoulli, temos:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2$$

Substituindo a equação (2):

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) = \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Substituindo a equação (1):

$$v_1 = A_2 \cdot \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{A_1^2 - A_2^2}} \quad \text{e} \quad v_2 = A_1 \cdot \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{A_1^2 - A_2^2}}$$

4.7. Tubo de Pitot

O tubo de Pitot é um instrumento de medição de velocidade muito utilizado em aeronaves. Este instrumento utiliza a diferença de pressões manométricas e estrangulamento de fluidos.

Considere um fluido, densidade ρ_{ar} , que escoa da esquerda para a direita com velocidade V_1 . O Tubo de Pitot é composto por um cilindro e um tubo em U, contendo um líquido manométrico de densidade ρ .

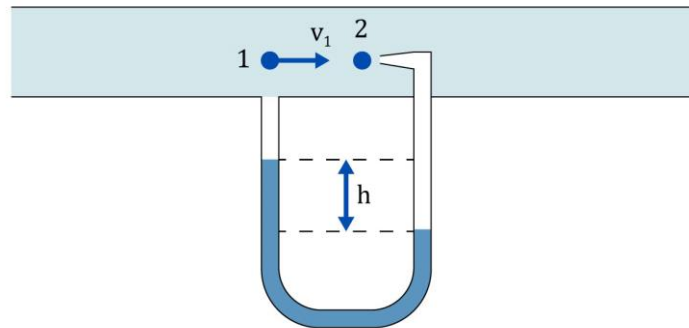


Figura 40: Esquematização do tubo de Pitot

Ao atingir o ponto 2, chamado de estrangulamento, a velocidade do fluido vai a zero. Utilizando a equação de Bernoulli temos:

$$\rho_{ar} \cdot \frac{V_0^2}{2} + P_1 = P_2$$

Da diferença de pressões:

$$P_2 = P_1 + \rho \cdot g \cdot h$$

Substituindo as pressões:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho \cdot g \cdot h}{\rho_{ar}}}$$



4.8. Teorema de Torricelli

Considere um reservatório cilindro de altura H e raio R . O reservatório é preenchido completamente com um líquido de densidade ρ . A uma altura h do solo, um furo, de área a , é feito no reservatório. Por esse furo, o líquido escapa com velocidade v .



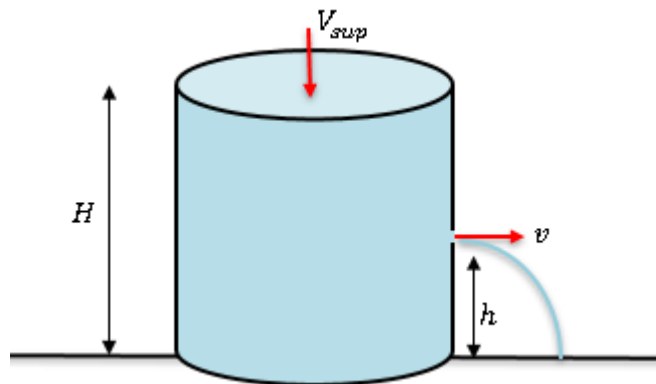


Figura 41: Compartimento com furo lateral

Tanto a superfície do líquido quanto o furo estão sujeitos à pressão atmosférica. Utilizando a equação de Bernoulli, temos:

$$\rho \cdot \frac{V_{sup}^2}{2} + P_{atm} + \rho \cdot g \cdot H = P_{atm} + \rho \cdot \frac{v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h$$

Podemos utilizar a equação da continuidade da seguinte forma:

$$V_1 \cdot A_1 = V_2 \cdot A_2 \Rightarrow V_{sup} \cdot \pi R^2 = v \cdot a \Rightarrow \boxed{V_{sup} = \frac{v \cdot a}{\pi R^2}}$$

Note que se a é muito pequena, isto é, o orifício possui uma área bem estreita, então V_{sup} é muito pequeno, próximo de zero.

Substituindo V_{sup} na equação de Bernoulli, vem:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (H - h)}{1 - \left(\frac{a}{\pi R^2}\right)^2}}$$

Se o tamanho do buraco é desprezível em relação a área do cilindro, temos:

$$\boxed{v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)}} \text{ Eq. de Torricelli}$$

4.8.1. Força de reação devido a ejeção de um líquido

Na situação acima, considere que uma placa é colocada imediatamente após o furo. O líquido ao se chocar com a placa, colide inelasticamente, e cai verticalmente em queda livre. Determinaremos a força que esse líquido faz na placa.

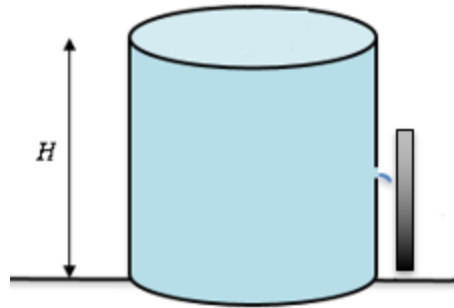


Figura 42: Inserção da placa em frente ao furo lateral

A água sai do furo com uma velocidade v , dado pela equação de Bernoulli:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (H - h)}{1 - \left(\frac{a}{\pi R^2}\right)^2}}$$

Considerando um trecho cilíndrico de líquido:

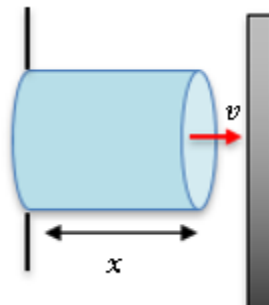


Figura 43: Elemento infinitesimal de líquido

O volume de água desse trecho cilíndrico é dado por:

$$V = a \cdot x$$

Assim, a massa é de:

$$m = \rho \cdot a \cdot x$$

Pela primeira lei de Newton (Teo. do Impulso), temos:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

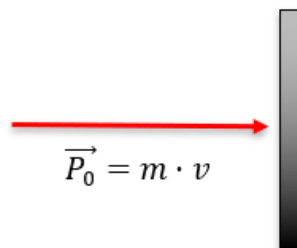


Figura 44: Variação de momento na placa

Assim, a força sobre a parede é dada por:

$$F = \frac{m \cdot (v - 0)}{\Delta t} \Rightarrow F = \frac{\rho \cdot a \cdot x \cdot v}{\Delta t}$$
$$F = \rho \cdot a \cdot v \cdot \frac{x}{\Delta t}$$

Em que:

$$\frac{x}{\Delta t} = \text{velocidade de saída} = v$$

Portanto:

$$F = \rho \cdot a \cdot v^2$$

Substituindo a expressão da velocidade calculada anteriormente, temos:

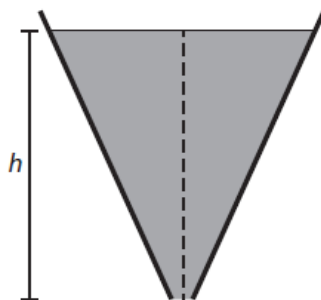
$$F = \frac{2 \cdot g \cdot \rho \cdot a \cdot (H - h)}{1 - \left(\frac{a}{\pi R^2}\right)^2}$$

ATENÇÃO
DECORE!



13. (ITA – 2018)

Na figura, o tanque em forma de tronco de cone, com 10 cm de raio de base, contém água até o nível de altura $h = 500$ cm, com 100 cm de raio da superfície livre. Removendo-se a tampa da base, a água começa a escoar e, nesse instante, a pressão no nível a 15 cm de altura é de



- a) 100 kPa.
- b) 102 kPa.
- c) 129 kPa.
- d) 149 kPa.
- e) 150 kPa.

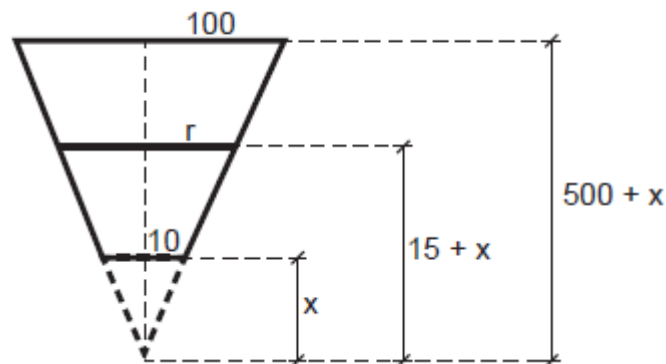
Comentário:

A velocidade de saída da água pelo fundo do tanque é dada pela equação de Torricelli.

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} = 10 \text{ m/s}$$



Da geometria do problema, temos:



Podemos fazer uma semelhança de triângulos para encontrar o raio da área da seção transversal na altura de 15 cm do tronco:

$$\frac{x}{10} = \frac{15 + x}{r} = \frac{500 + x}{100}$$
$$x = 55,5 \text{ cm e } r = 12,7 \text{ cm}$$

Devemos encontrar a velocidade a uma altura de 15 cm. Utilizando a equação da continuidade, temos:

$$v_1 A_1 = v_2 \cdot A_2$$
$$\pi \cdot 10^2 \cdot 10 = \pi (12,7)^2 \cdot v$$
$$v = 6,2 \text{ m/s}$$

Aplicando a equação de Bernoulli, vem:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h + P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v'^2 + \rho \cdot g \cdot h' + P'$$
$$10^5 + 10^3 \cdot 10 \cdot 0 + 10^3 \cdot \frac{10^2}{2} = P' + 10^3 \cdot 10 \cdot 0,15 + 10^3 \cdot \frac{6,2^2}{2}$$
$$P' = 129 \text{ kPa}$$

4.9. Algumas aplicações de hidrodinâmica

Vimos em hidrostática que o Teorema de Stevin fornece a diferença de pressão entre dois pontos situados dentro de um mesmo fluido em repouso, devido a diferença de níveis entre esses dois pontos. Dessa forma, dizemos que a diferença de pressão é função do desnível entre os pontos.

Para um fluido em movimento, a velocidade surge como um novo fator que altera a pressão, de acordo com a equação de Bernoulli. Nessa equação, estudamos que a soma da pressão estática com a pressão dinâmica permanece constante, desde que não haja perdas durante o escoamento. Trata-se de uma forma de conservação de energia.

Por exemplo, para um duto disposto horizontalmente, sem perdas por atritos (fluido ideal). Pelo princípio da continuidade, sabemos que as velocidades se relacionam da seguinte forma:

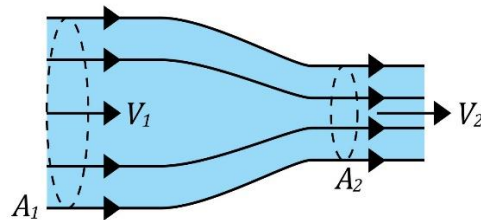


Figura 45: Fluido escoando por um duto com áreas A_1 e A_2 .

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

$$A_1 > A_2$$

$$\boxed{v_2 > v_1}$$

Se aplicarmos a equação de Bernoulli, temos:

$$p_1 + \frac{\rho_{liq} \cdot v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho_{liq} \cdot v_2^2}{2}$$

Como $v_2 > v_1$, podemos concluir que:

$$p_1 > p_2$$

Esse resultado mostra que quanto maior a pressão dinâmica ($\frac{\rho_{liq} v^2}{2}$) menor será a pressão estática. Em outras palavras, dizemos que no trecho em que a velocidade é maior, a pressão é menor. Este princípio é utilizado em diversas situações físicas.

4.9.1. A força de sustentação de um avião

Para facilitar o entendimento, vamos imaginar um avião em movimento horizontal, com velocidade constante, da esquerda para a direita. Podemos analisar esse problema considerando um referencial fixo no avião, ou seja, supomos que o avião está em repouso e o ar se movimenta da direita para a esquerda.

Assim, a asa do avião é projetada (se você escolher o curso de engenharia aeronáutica no ITA, você projetará diversos perfis de aeronaves) de modo que as linhas de correntes próximas dela se curvam como na figura abaixo:



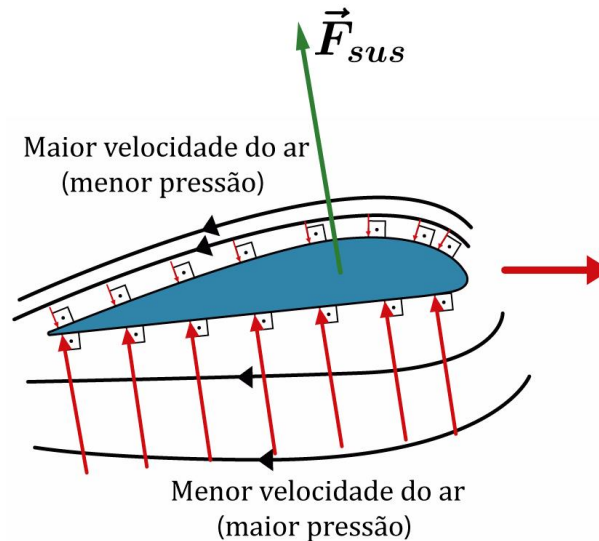


Figura 46: Asa de um avião vista em corte transversal. Devido à diferença entre as pressões na região logo acima e logo abaixo da asa, podemos representar a força resultante de sustentação (\vec{F}_{sus}) no centroide da asa.

Dessa forma, na região logo acima da asa, as linhas de corrente estão mais próximas do que na região abaixo da asa. Portanto, logo acima da asa, a velocidade é maior do que logo abaixo. Com isso, cria-se uma diferença de pressão entre as duas regiões. Como resultado, surge uma **força de sustentação** para cima, dado que a pressão logo abaixo é maior que a pressão logo acima.

4.9.2. Aproximação de objetos

Outro experimento interessante é assoprar entre duas folhas bem leves, como bandeirinhas de festa junina. Quando você assopra entre as folhas, a pressão dinâmica aumenta e a pressão estática nessa região interna diminui. Dessa forma, a pressão estática externa empurra as folhas, aproximando-as.

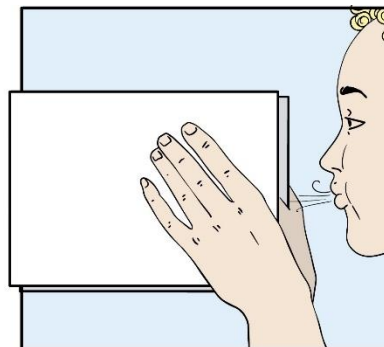


Figura 47: Quando o garoto assopra na região entre as duas folhas leves, a pressão dinâmica aumenta, diminuindo a pressão estática na região considerada. Dessa forma, as folhas se aproximam.

4.9.3. Vaporizadores

A figura abaixo representa um vaporizador simples. Quando o operador aperta a borracha, é produzido um jato de ar que provoca uma diminuição da pressão no tubo, promovendo a subida do líquido que está no recipiente.



Figura 48: Esquema simples de um vaporizador manual.

Quando o líquido entra em contato com o ar, ocorre uma dispersão das partículas em pequenas gotas que saem pelo orifício do vaporizador. Se você estreitar o tubo de saída do líquido, o efeito de dispersão será intensificado. Esse mesmo princípio é utilizado em sprays.

4.9.4. Levantamento de teto

Um fenômeno muito comum em tempestades é o levantamento do telhado do edifício devido aos fortes ventos.

Quando um vento de alta velocidade passa sobre o teto de uma casa, ele cria uma região de baixa pressão. Dessa forma, a pressão logo abaixo do teto torna-se muito maior que a região logo acima. Se a diferença de pressão for muito grande, o teto pode ser levantado.

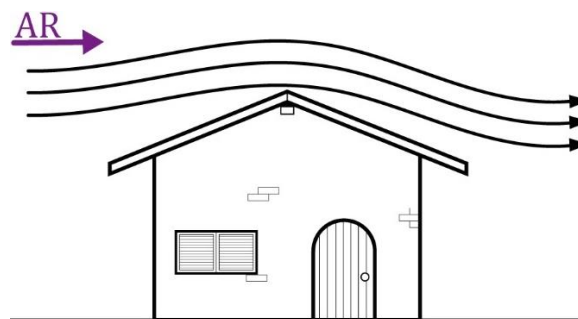


Figura 49: Vento tangenciando um telhado. Se a diferença de pressão for muito grande, ela pode ser capaz de arrancar o telhado da casa.

Para evitar esse problema são feitas amarrações entre a superfície do telhado e a casa, para evitar que o teto seja arremessado para longe.

Outro fato semelhante, ocorre quando uma rajada de vento tangencia uma janela de vidro. Nessa situação, cria-se uma região de baixa pressão e a pressão do outro lado do vidro pode ser tão maior que pode haver um estouro do vidro.

4.6.5. A equação de Bernoulli aplicada na natureza

Sabemos que fluidos ideais tem viscosidade nula, mas os fluidos reais possuem uma certa viscosidade e isso tem algumas consequências importantíssimas na natureza.

Um caso muito interessante ocorre com os coelhos. Eles criam tocas de tal forma que o ar dentro dela circule, espontaneamente, para que eles não fiquem sufocados. Para que isso ocorra, os coelhos criam suas tocas com duas entradas, de modo que sempre haja um pequeno desnível entre as entradas.

Por causa da viscosidade, a velocidade do ar próximo ao solo é menor que a velocidade um pouco acima. Devido a essa diferença nas velocidades, existe uma diferença de pressão entre as duas entradas, promovendo um fluxo de ar dentro da toca do coelho.

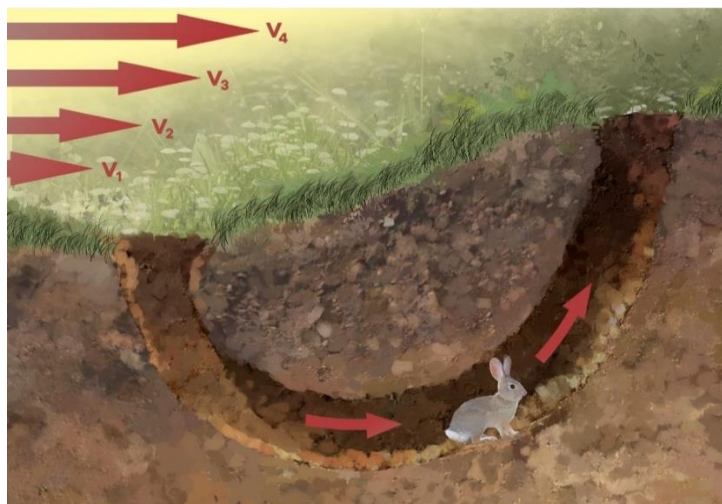


Figura 50: Tocais de coelhos são construídos de tal forma que sempre há um fluxo de ar dentro da toca, devido ao desnível das duas entradas.

4.9.6. Efeito Magnus

Outra aplicação bem interessante é o chamado efeito Magnus (explicação fundamentada pelo físico-químico alemão Heinrich Gustav Magnus). Você já deve ter reparado que a trajetória de uma bola de futebol, por exemplo, depende do fato dela ter ou não rotação. Provavelmente, você já viu inúmeros gols de cobranças de falta e deve ter se perguntado: como a bola fez aquela curva?

Para entender um pouco sobre como isso é possível, vamos imaginar uma bola se movendo sem rotação, ou seja, somente movimento de translação. Assim, as linhas de corrente de ar podem ser representadas da seguinte forma:

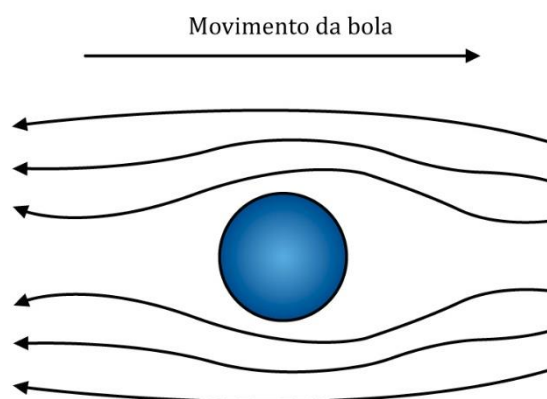


Figura 51: Bola com movimento de translação apenas.

Agora, vamos supor que ela tenha apenas rotação, isto é, ela não tem movimento de translação, como na figura abaixo.

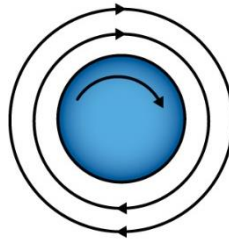


Figura 52: Bola com movimento de rotação apenas.

Devido à viscosidade do ar (que é um tipo de atrito), a bola arrasta o ar que está bem próximo, fazendo com que as linhas de corrente se tornem aproximadamente circulares. Quando fazemos a superposição dos dois movimentos (translação e rotação), temos:

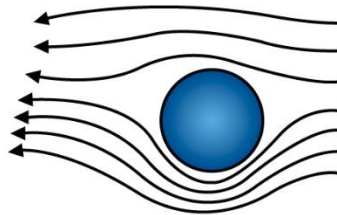


Figura 53: Bola com movimento de translação e de rotação.

Na parte superior as velocidades têm sentidos opostos e, portanto, há uma diminuição da velocidade resultante. Em contrapartida, na parte de baixo as velocidades têm o mesmo sentido, promovendo um aumento na velocidade resultante.

Dessa forma, o resultado é que a velocidade do escoamento na região logo abaixo a bola é maior que a velocidade logo acima. Com isso, a pressão logo abaixo é menor que a pressão logo acima, resultando numa força para baixo. Por isso, há um desvio na trajetória da bola, fato que não ocorreria se houvesse apenas translação.

Note que se a rotação da bola fosse no sentido oposto, a força seria para cima.

Vamos analisar as velocidades um pouco mais afundo. Para isso, considere uma bola subindo com velocidade $-\vec{V}_0$ (velocidade de translação da bola em relação ao ar), de tal forma que a velocidade do ar em relação à bola é \vec{V}_0 . Então, no referencial no centro da bola, tudo se passa como se a bola estivesse em repouso e o ar tivesse velocidade \vec{V}_0 .

Além disso, em relação ao centro da bola, devido à rotação da bola, as partículas de ar nos pontos A e B são dadas por $V_1 = \omega \cdot R$, em que R é o raio da bola.

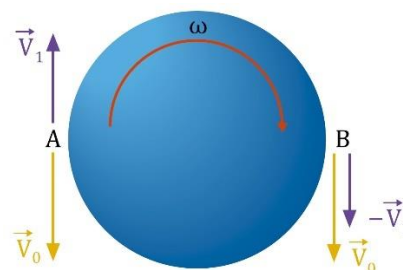


Figura 54: Diagrama das velocidades na bola rotacionando e transladando.

Supondo que $V_0 > V_1$ (a velocidade de translação é maior que a velocidade linear na superfície da bola devido à rotação) e utilizando a composição de movimento, podemos concluir que:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 \Rightarrow \boxed{V_A = V_0 - V_1}$$

E:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 \Rightarrow \boxed{V_B = V_0 + V_1}$$

Podemos concluir que $V_B > V_A$. Pela equação de Bernoulli, podemos ver que a pressão na região de A é maior que a pressão na região de B:

$$\boxed{P_A > P_B}$$



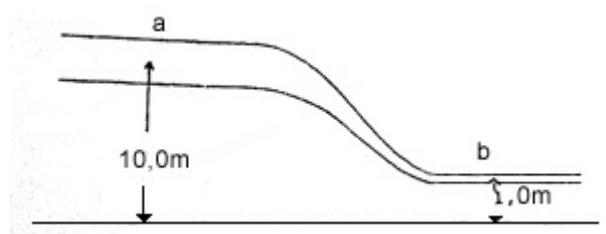


5. Lista de exercícios

1. (ITA – 1983)

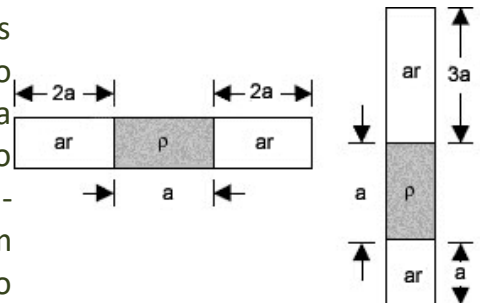
Álcool, cuja densidade de massa é de $0,80 \text{ g/cm}^3$ está passando através de um tubo como mostra a figura. A seção reta do tubo em a é 2 vezes maior do que em b . Em a a velocidade é de $v_a = 5 \text{ m/s}$, a altura $H_a = 10 \text{ m}$ e a pressão $P_a = 7,0 \times 10^3 \text{ N/m}^2$. Se a altura em b é $H_b = 1 \text{ m}$ a velocidade e a pressão b são:

- a) $0,10 \text{ m/s}$ e $7,9 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$
- b) 10 m/s e $4 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$
- c) $0,10 \text{ m/s}$ e $4,9 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$
- d) 10 m/s e $4,9 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$
- e) 10 m/s e $7,9 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$



2. (ITA - 1986)

Um tubo capilar de comprimento “ $5a$ ” é fechado em ambas as extremidades. E contém ar seco que preenche o espaço no tubo não ocupado por uma coluna de mercúrio de massa específica ρ e comprimento “ a ”. Quando o tubo está na posição horizontal, as colunas de ar seco medem “ $2a$ ” cada. Levando-se lentamente o tubo à posição vertical as colunas de ar têm comprimentos “ a ” e “ $3a$ ”. Nessas condições, a pressão no tubo capilar quando em posição horizontal é:

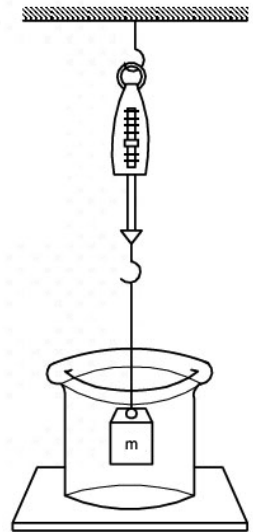


- a) $3g \rho a/4$
- b) $2g \rho a/5$
- c) $2g \rho a/3$
- d) $4g \rho a/3$
- e) $4g \rho a/5$

3. (ITA – 1987)



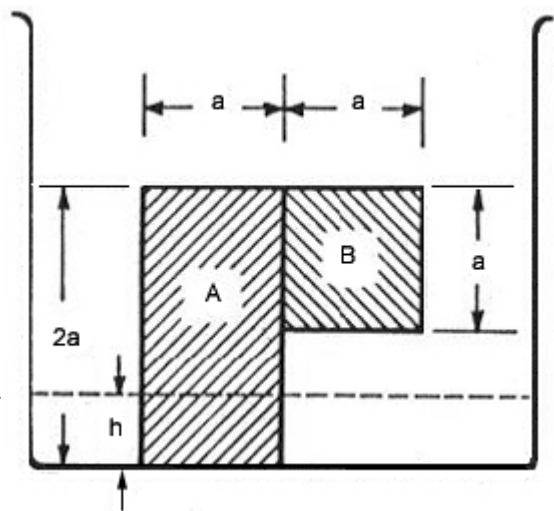
Um bloco de urânio de peso 10N está suspenso a um dinamômetro e submerso em mercúrio de massa específica $13,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, conforme a figura. A leitura no dinamômetro é 2,9N. Então, a massa específica do urânio é:



- a) $5,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
- b) $24 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
- c) $19 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
- d) $14 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
- e) $2,0 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$

4. (ITA - 1988)

Dois blocos, A e B, homogêneos e de massa específica $3,5 \text{ g/cm}^3$ e $6,5 \text{ g/cm}^3$, respectivamente, foram colados um no outro e o conjunto resultante foi colocado no fundo (rugoso) de um recipiente, como mostra a figura. O bloco A tem o formato de um paralelepípedo retangular de altura $2a$, largura a e espessura a . O bloco B tem o formato de um cubo de aresta a . Coloca-se, cuidadosamente, água no recipiente até uma altura h , de modo que o sistema constituído pelos blocos A e B permaneça em equilíbrio, isto é, não tombe. O valor máximo de h é:



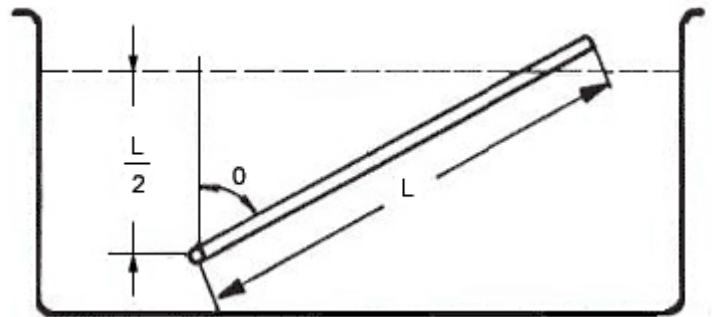
- a) 0
- b) $0,25 a$
- c) $0,5 a$
- d) $0,75 a$
- e) a

5. (ITA - 1988)

Uma haste homogênea e uniforme de comprimento L , seção reta de área A , e massa específica ρ é livre de girar em torno de um eixo horizontal fixo num ponto P localizado a uma distância $d = L/2$ abaixo da superfície de um líquido de massa específica 2ρ . Na situação de equilíbrio estável, a haste forma com a vertical um ângulo igual a:



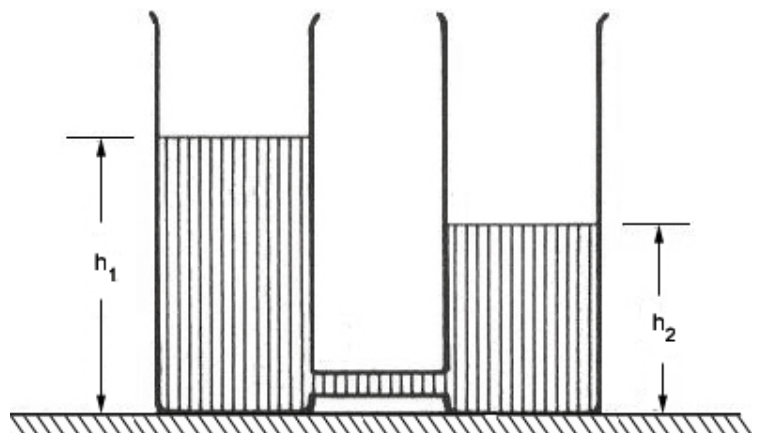
- a) 45°
- b) 60°
- c) 30°
- d) 75°
- e) 15°



6. (ITA - 1988)

Dois baldes cilíndricos idênticos, com as suas bases apoiadas na mesma superfície plana, contém água até as alturas h_1 e h_2 , respectivamente. A área de cada base é A . Faz-se a conexão entre as bases dos dois baldes com o auxílio de uma fina mangueira. Denotando a aceleração da gravidade por g e a massa específica da água por ρ , o trabalho realizado pela gravidade no processo de equalização dos níveis será:

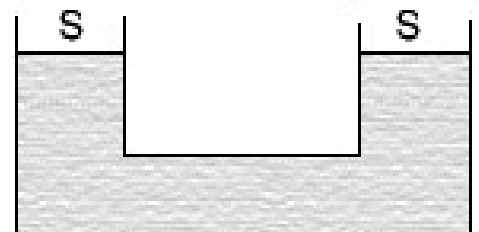
- a) $\rho Ag(h_1 - h_2)/4$
- b) $\rho Ag(h_1 - h_2)/2$
- c) *nulo*
- d) $\rho Ag(h_1 + h_2)/4$
- e) $\rho Ag(h_1 - h_2)/2$



7. (ITA - 1993)

Os dois vasos comunicantes da figura abaixo são abertos, têm seções retas iguais a S e contêm um líquido de massa específica ρ . Introduce-se no vaso esquerdo um cilindro maciço e homogêneo de massa M , seção $S' < S$ e menos denso que o líquido. O cilindro é introduzido e abandonado de modo que no equilíbrio seu eixo permaneça vertical. Podemos afirmar que no equilíbrio o nível de ambos os vasos sobe:

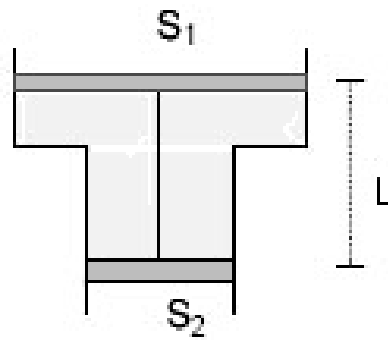
- a) $M/[\rho(S - S')]$
- b) $M/[\rho(2S - S')]$
- c) $M/[2\rho(2S - S')]$
- d) $2M/[2\rho(2S - S')]$
- e) $M/[2\rho S]$



8. (ITA - 1993)

Um recipiente, cujas seções retas dos êmbolos valem S_1 e S_2 , está cheio de um líquido de densidade ρ , como mostra a figura. Os êmbolos estão unidos entre si por um arame fino de

comprimento l . Os extremos do recipiente estão abertos. Despreze o peso dos êmbolos, do arame e quaisquer atritos. Quanto vale a tensão T no arame?



9. (ITA - 1997)

Um anel, que parece ser de ouro maciço, tem massa de 28,5 g. O anel desloca 3 cm³ de água quando submerso. Considere as seguintes afirmações:

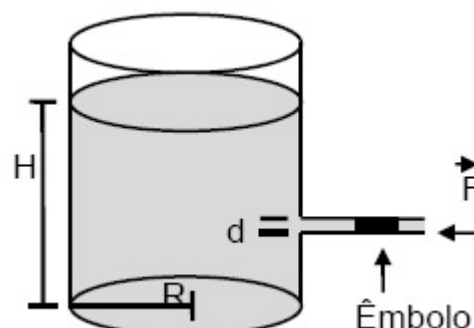
- I- O anel é de ouro maciço.
- II- O anel é oco e o volume da cavidade 1,5 cm³.
- III- O anel é oco e o volume da cavidade 3,0 cm³.
- IV- O anel é feito de material cuja massa específica é a metade da do ouro.

Das afirmativas mencionadas:

- a) Apenas I é falsa.
- b) Apenas III é falsa.
- c) Apenas I e III são falsas.
- d) Apenas II e IV são falsas.
- e) Qualquer uma pode ser correta.

10. (ITA - 1997)

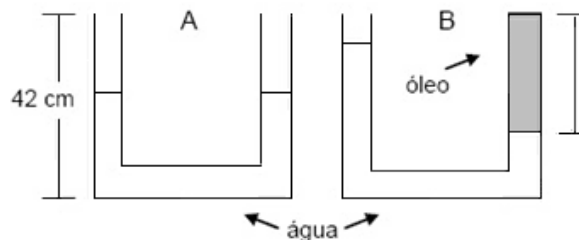
Um recipiente de raio R e eixo vertical contém álcool até uma altura H . Ele possui, à meia altura da coluna de álcool, um tubo de eixo horizontal cujo diâmetro d é pequeno comparado a altura da coluna de álcool, como mostra a figura. O tubo é vedado por um êmbolo que impede a saída de álcool, mas que pode deslizar sem atrito através do tubo. Sendo p a massa específica do álcool, qual é a magnitude da força F necessária para manter o êmbolo sua posição?



11. (ITA - 1997)

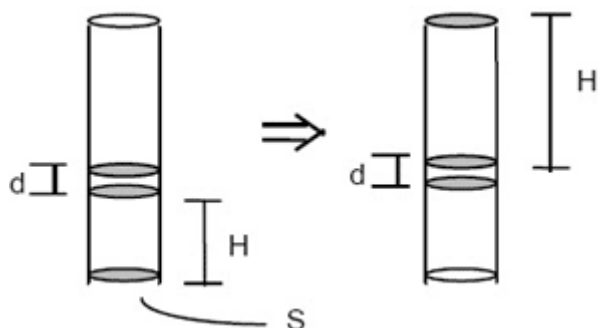
Um vaso comunicante em forma de U possui duas colunas da mesma altura $h = 42,0$ cm, preenchidas com água até a metade. Em seguida, adiciona-se óleo de massa específica igual a $0,80$ g/cm³ a uma das colunas até a coluna estar totalmente preenchida, conforme a figura B. A coluna de óleo terá comprimento de:

- a) 14,0 cm
- b) 16,8 cm.
- c) 28,0 cm
- d) 35,0 cm.
- e) 37,8 cm.



12. (ITA - 1997)

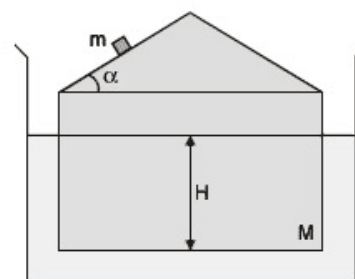
Um tubo vertical de seção S , fechado em uma extremidade, contém um gás, separado da atmosfera por um êmbolo de espessura d e massa específica ρ . O gás, suposto perfeito, está à temperatura ambiente e ocupa um volume $V = SH$ (veja figura). Virando o tubo tal que a abertura fique voltada para baixo, o êmbolo desce e o gás ocupa um novo volume, $V = SH'$. Denotando a pressão atmosférica por P_0 , qual é a nova altura H ?



13. (ITA - 2005)

Um pequeno objeto de massa m desliza sem atrito sobre um bloco de massa M com o formato de uma casa (veja figura). A área da base do bloco é S e o ângulo que o plano superior do bloco forma com a horizontal é α . O bloco flutua em um líquido de densidade ρ , permanecendo, por hipótese, na vertical durante todo o experimento. Após o objeto deixar o plano e o bloco voltar à posição de equilíbrio, o decréscimo da altura submersa do bloco é igual a:

- a) $m \cdot \text{sen}^2 \alpha / S\rho$
- b) $m \cdot \text{cos}^2 \alpha / S\rho$
- c) $m \cdot \text{cos} \alpha / S\rho$

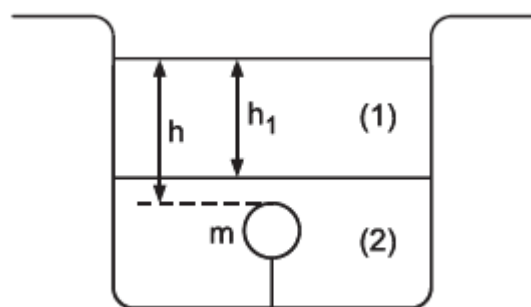


d) $m/S\rho$

e) $m + M/S\rho$

14. (ITA – 2007)

A figura mostra uma bolinha de massa $m = 10\text{ g}$ presa por um fio que a mantém totalmente submersa no líquido (2), cuja densidade é cinco vezes a densidade do líquido (1), imiscível, que se encontra acima. A bolinha tem a mesma densidade do líquido (1) e sua extremidade superior se encontra a uma profundidade h em relação à superfície livre. Rompido o fio, a extremidade superior da bolinha corta a superfície livre do líquido (1) com velocidade de $8,0\text{ m/s}$. Considere aceleração da gravidade $g = 10\text{ m/s}^2$, $h_1 = 20\text{ cm}$, e despreze qualquer resistência ao movimento de ascensão da bolinha, bem como o efeito da aceleração sofrida pela mesma ao atravessar a interface dos líquidos. Determine a profundidade h .



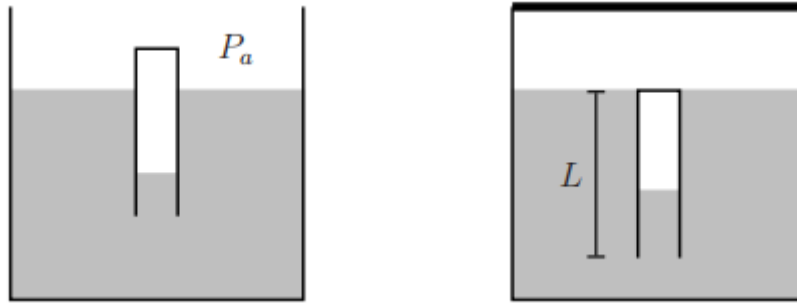
15. (ITA-2009)

Uma balsa tem o formato de um prisma reto de comprimento L e seção transversal como vista na figura. Quando sem carga, ela submerge parcialmente até a uma profundidade h_0 . Sendo ρ a massa específica da água e g a aceleração da gravidade, e supondo seja mantido o equilíbrio hidrostático, determine a carga P que a balsa suporta quando submersa a uma profundidade h_1 .



16. (ITA-2009)

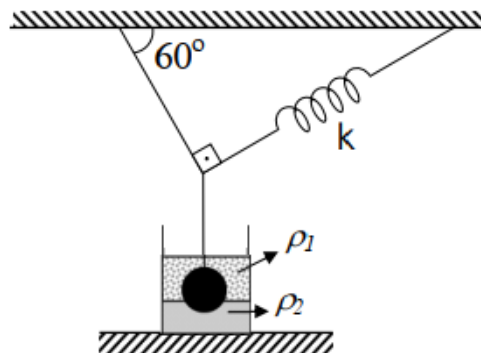
Para ilustrar os princípios de Arquimedes e de Pascal, Descartes emborcou na água um tubo de ensaio de massa m , comprimento L e área da seção transversal A . Sendo g a aceleração da gravidade, ρ a massa específica da água, e desprezando variações de temperatura no processo, calcule:



- a) o comprimento da coluna de ar no tubo, estando o tanque aberto sob pressão atmosférica P_a .
- b) e, o comprimento da coluna de ar no tubo, de modo que a pressão no interior do tanque fechado possibilite uma posição de equilíbrio em que o topo do tubo se situe no nível da água (ver figura).

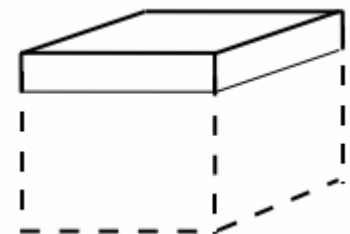
17. (ITA-2010)

Uma esfera maciça de massa específica ρ e volume V está imersa entre dois líquidos, cujas massas específicas são ρ_1 e ρ_2 , respectivamente, estando suspensa por uma corda e uma mola de constante elástica k , conforme mostra a figura. No equilíbrio, 70% do volume da esfera está no líquido 1 e 30% no líquido 2. Sendo g a aceleração da gravidade, determine a força de tração na corda.



18. (ITA – 2011)

Um cubo maciço homogêneo com $4,0\text{ cm}$ de aresta flutua na água tranquila de uma lagoa, de modo a manter 70% da área total da sua superfície em contato com a água, conforme mostra a figura. A seguir, uma pequena rã se acomoda no centro da face superior do cubo e este se afunda mais $0,50\text{ cm}$ na água. Assinale a opção com os valores aproximados da densidade do cubo e da massa da rã, respectivamente.

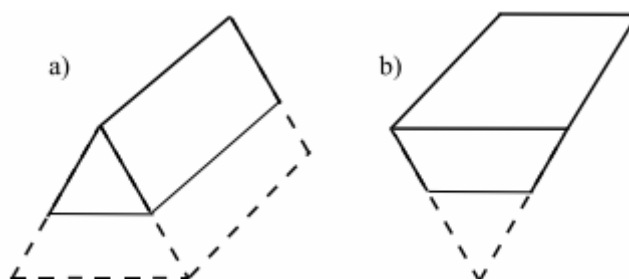


- a) $0,20\text{ g/cm}^3$ e $6,4\text{ g}$
- b) $0,70\text{ g/cm}^3$ e $6,4\text{ g}$
- c) $0,70\text{ g/cm}^3$ e $8,0\text{ g}$
- d) $0,80\text{ g/cm}^3$ e $6,4\text{ g}$

e) $0,80 \text{ g/cm}^3$ e $8,0 \text{ g}$

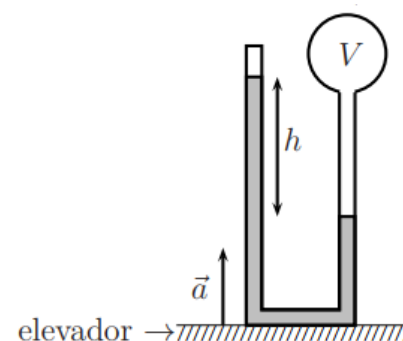
19. (ITA – 2011)

Um bloco, com distribuição homogênea de massa, tem o formato de um prisma regular cuja seção transversal é um triângulo equilátero. Tendo $0,5 \text{ g/cm}^3$ de densidade, tal bloco poderá flutuar na água em qualquer das posições mostradas na figura. Qual das duas posições será a mais estável? Justifique sua resposta. Lembrar que o baricentro do triângulo se encontra a $2/3$ da distância entre um vértice e seu lado oposto.



20. (ITA – 2012)

No interior de um elevador encontra-se um tubo de vidro fino, em forma de U, contendo um líquido sob vácuo na extremidade vedada, sendo a outra conectada a um recipiente de volume V com ar mantido à temperatura constante. Com o elevador em repouso, verifica-se uma altura h de 10 cm entre os níveis do líquido em ambos os braços do tubo. Com o elevador subindo com aceleração constante \vec{a} (ver figura), os níveis do líquido sofrem um deslocamento de altura de $1,0 \text{ cm}$. Pode-se dizer então que a aceleração do elevador é igual a

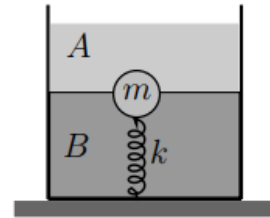


- a) $-1,1 \text{ m/s}^2$.
- b) $-0,91 \text{ m/s}^2$.
- c) $0,91 \text{ m/s}^2$.
- d) $1,1 \text{ m/s}^2$.
- e) $2,5 \text{ m/s}^2$.

21. (ITA – 2013)

Um recipiente contém dois líquidos homogêneos e imiscíveis, A e B, com densidades respectivas ρ_A e ρ_B . Uma esfera sólida, maciça e homogênea, de massa $m = 5 \text{ kg}$, permanece em equilíbrio sob ação de uma mola de constante elástica $k = 800 \text{ N/m}$, com metade de seu volume imerso em cada um dos líquidos, respectivamente, conforme a figura. Sendo $\rho_A = 4\rho$ e $\rho_B = 6\rho$, em que ρ é a densidade da esfera, pode-se afirmar que a deformação da mola é de

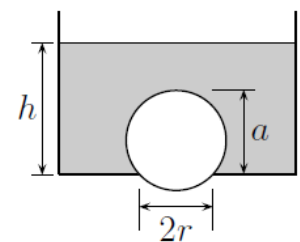
- a) 0 m.
- b) 9/16 m.
- c) 3/8 m.
- d) 1/4 m.
- e) 1/8 m.



22. (ITA – 2014)

Uma esfera de massa m tampa um buraco circular de raio r no fundo de um recipiente cheio de água de massa específica ρ . Baixando-se lentamente o nível da água, num dado momento a esfera se desprende do fundo do recipiente. Assinale a alternativa que expressa a altura h do nível de água para que isto aconteça, sabendo que o topo da esfera, a uma altura a do fundo do recipiente, permanece sempre coberto de água.

- a) $m/\rho\pi a^2$
- b) $m/\rho\pi r^2$
- c) $a(3r^2 + a^2)/(6r^2)$
- d) $a/2 - m/\rho\pi r^2$
- e) $a(3r^2 + a^2)/(6r^2) - m/\rho\pi r^2$



23. (ITA – 2015)

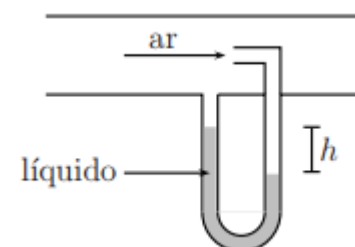
Um tubo em forma de U de seção transversal uniforme, parcialmente cheio até uma altura h com um determinado líquido, é posto num veículo que viaja com aceleração horizontal, o que resulta numa diferença de altura z do líquido entre os braços do tubo interdistantes de um comprimento L . Sendo desprezível o diâmetro do tubo em relação à L , a aceleração do veículo é dada por

- a) $\frac{2zg}{L}$
- b) $\frac{(h-z)g}{L}$
- c) $\frac{(h+z)g}{L}$
- d) $\frac{2gh}{L}$
- e) $\frac{zg}{L}$

24. (ITA – 2016)

Um estudante usa um tubo de Pitot esquematizado na figura para medir a velocidade do ar em um túnel de vento. A densidade do ar é igual a $1,2 \text{ kg/m}^3$ e a densidade do líquido é $1,2 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$, sendo $h = 10 \text{ cm}$. Nessas condições a velocidade do ar é aproximadamente igual a

- a) 1,4 m/s
- b) 14 m/s
- c) $1,4 \cdot 10^2 \text{ m/s}$
- d) $1,4 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
- e) $1,4 \cdot 10^4 \text{ m/s}$



25. (ITA – 2016)

Balão com gás Hélio inicialmente a 27°C de temperatura e pressão de $1,0 \text{ atm}$, as mesmas do ar externo, sobe até o topo de uma montanha, quando o gás se resfria a -23°C e sua pressão reduz-se a $0,33$ de atm , também as mesmas do ar externo. Considerando invariável a aceleração da gravidade na subida, a razão entre as forças de empuxo que atuam no balão nestas duas posições é

- a) 0,33. b) 0,40. c) 1,0. d) 2,5. e) 3,0.

26. (ITA – 2016)

Um corpo flutua estavelmente em um tanque contendo dois líquidos imiscíveis, um com o dobro da densidade do outro, de tal forma que as interfaces líquido/líquido e líquido/ar dividem o volume do corpo exatamente em três partes iguais. Sendo completamente removido o líquido mais leve, qual proporção do volume do corpo permanece imerso no líquido restante?

- a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{2}{5}$
e) $\frac{3}{5}$

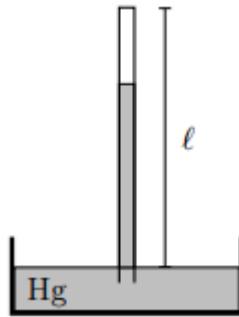
27. (ITA-2016)

Um cilindro vertical de seção reta de área A_1 , fechado, contendo gás e água é posto sobre um carrinho que pode se movimentar horizontalmente sem atrito. A uma profundidade h do cilindro, há um pequeno orifício de área A_2 por onde escoar a água. Num certo instante a pressão do gás é p , a massa de água, M_a e a massa restante do sistema, M . Determine a aceleração do carrinho nesse instante mencionado em função dos parâmetros dados. Justifique as aproximações eventualmente realizadas.

28. (ITA – 2017)

Em equilíbrio, o tubo emborcado da figura contém mercúrio e ar aprisionado. Com a pressão atmosférica de 760 mm de Hg a uma temperatura de 27°C , a altura da coluna de mercúrio é de 750 mm . Se a pressão atmosférica cai a 740 mm de Hg a uma temperatura de 2°C , a coluna de mercúrio é de 735 mm . Determine o comprimento l aparente do tubo.

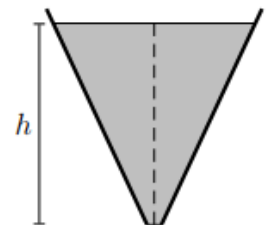




29. (ITA – 2018)

Na figura, o tanque em forma de tronco de cone, com $10,0 \text{ cm}$ de raio da base, contém água até o nível de altura $h = 500 \text{ cm}$, com 100 cm de raio da superfície livre. Removendo-se a tampa da base, a água começa a escoar e, nesse instante, a pressão no nível a $15,0 \text{ cm}$ de altura é de

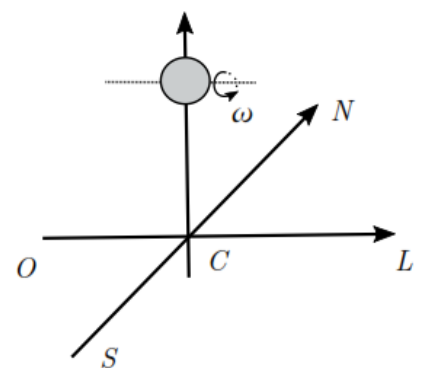
- a) 100 kPa.
- b) 102 kPa.
- c) 129 kPa.
- d) 149 kPa.
- e) 150 kPa.



30. (ITA – 2019)

Uma bola é deixada cair conforme mostra a figura. Inicialmente, ela gira com velocidade angular ω no sentido anti-horário para quem a observa do Leste, sendo nula a velocidade do seu centro de massa. Durante a queda, o eixo de rotação da bola permanece sempre paralelo à direção oeste-leste. Considerando o efeito do ar sobre o movimento de queda da bola, são feitas as seguintes afirmações:

- I. A bola está sujeita apenas a forças verticais e, portanto, cairá verticalmente.
- II. A bola adquire quantidade de movimento para o norte (N) ou para o oeste (O).
- III. A bola adquire quantidade de movimento para o leste (L) ou para o sul (S).
- IV. Quanto maior for a velocidade angular ω da bola, mais ela se afastará do ponto C.



Está(ão) correta(s) apenas

- a) I.
- b) II e IV.
- c) III e IV.
- d) III.
- e) II.

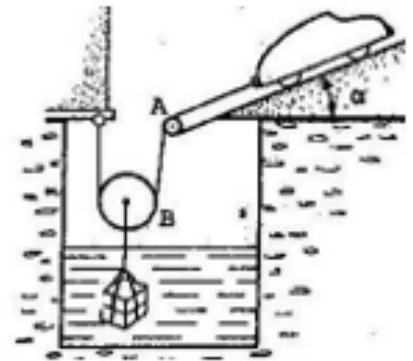
31. (IME)



Dois líquidos imiscíveis em um tubo em U (seção constante) tem as densidades na relação de dez para um: o menos denso tem a superfície livre 10 cm acima da separação dos líquidos. Qual a diferença de nível entre as superfícies livres nos dois ramos do tubo?

32. (IME – 1982)

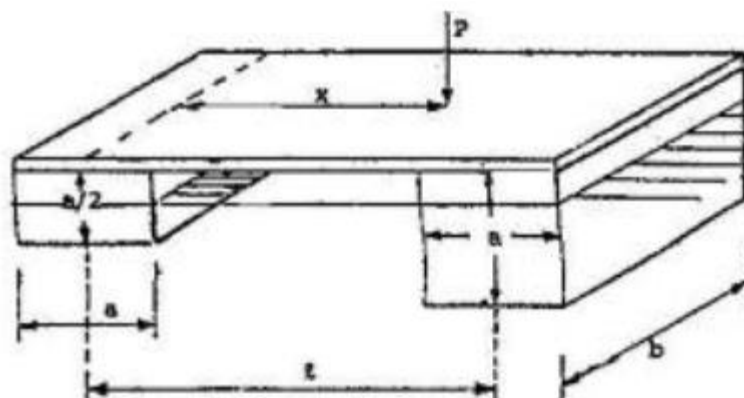
O automóvel de massa m_1 , representado na figura, está subindo a rampa de inclinação com uma aceleração constante. Preso ao automóvel existe um cabo de massa desprezível o qual passa por uma roldana fixa A e por uma roldana móvel B , ambas de massa desprezível, tendo finalmente a outra extremidade fixa em D . Ao eixo da roldana móvel, cujos fios são paralelos, está presa uma caixa cúbica de volume V e massa m_2 imersa em um líquido de massa específica ρ . Sabendo-se que o automóvel, partindo do repouso, percorreu um espaço “ e ” em um intervalo de tempo t e que a caixa permaneceu inteiramente submersa neste período, calcular a força desenvolvida pelo conjunto motor do automóvel. Desprezar a resistência oferecida pelo líquido ao deslocamento da caixa.



33. (IME – 1982)

O flutuador da figura é constituído de duas vigas de madeira de comprimento b e seções $(a \times a)$ e $(a \times \frac{a}{2})$ distantes l de centro a centro. Sobre as vigas existe uma plataforma de peso desprezível. Determinar, em função de a, b, l, P e γ a posição da carga x para que a plataforma permaneça na horizontal.

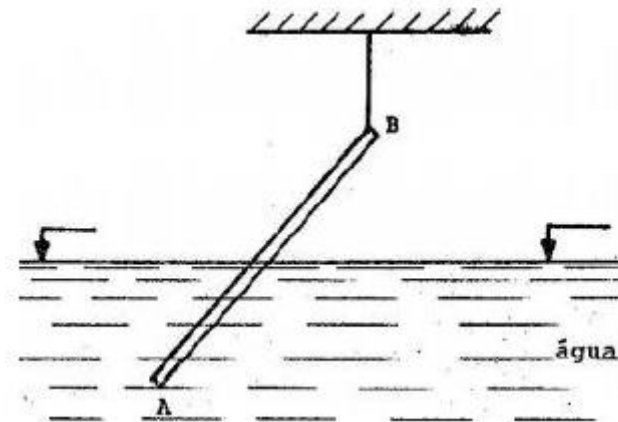
Dados:



- γ = peso específico da água.
- Densidade da madeira em relação à água = 0,80.

34. (IME – 1986)

Uma barra uniforme e delgada AB de 3,6 m de comprimento, pesando 120 N, é segura na extremidade B por um cabo, possuindo na extremidade A um peso de chumbo de 60N. A barra flutua, em água, com metade do seu comprimento submerso, como é mostrado na figura abaixo.



Desprezando empuxo sobre o chumbo, calcule:

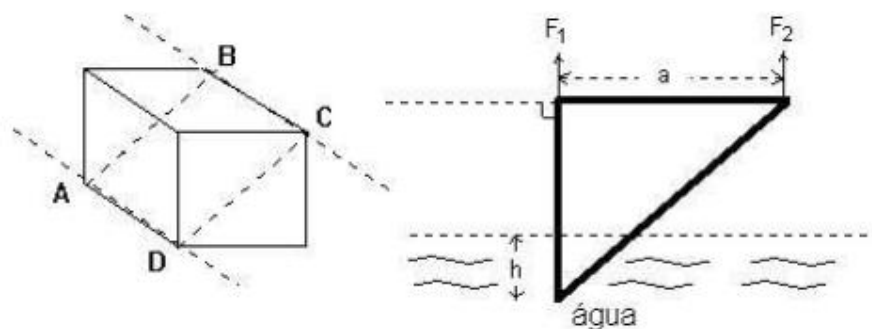
- O valor da força de tração no cabo.
- O volume total da barra.

Dados:

- $g = 10 \text{ m/s}^2$ - aceleração da gravidade;
- $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ - massa específica da água.

35. (IME – 1999)

Um objeto de massa m é construído ao seccionar-se ao meio um cubo de aresta a pelo plano que passa pelos seus vértices $ABCD$, como mostrado nas figuras abaixo. O objeto é parcialmente imerso em água, mas mantido em equilíbrio por duas forças F_1 e F_2 . Determine:

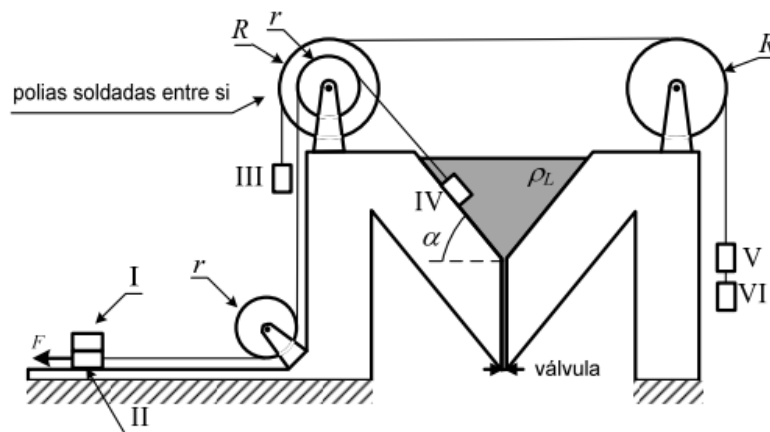


- o módulo do empuxo que age sobre o objeto;
- os pontos de aplicação do empuxo e do peso que agem sobre o objeto;
- os módulos e os pontos de aplicação das forças verticais F_1 e F_2 capazes de equilibrar o objeto.

Dados:

- aceleração da gravidade (g);
- massa específica da água (μ);
- profundidade de imersão (h);
- a massa m é uniformemente distribuída pelo volume do objeto.

36. (IME – 2016)



Seis blocos idênticos, identificados conforme a figura, encontram-se interligados por um sistema de cordas e polias ideais, inicialmente em equilíbrio estático sob ação de uma força F , paralela ao plano de deslizamento do bloco II e sentido representado na figura. Considere que: o conjunto de polias de raios r e R são solidárias entre si; não existe deslizamento entre os cabos e as polias; e existe atrito entre os blocos I e II e entre os blocos II e IV com as suas respectivas superfícies de contato. Determine:

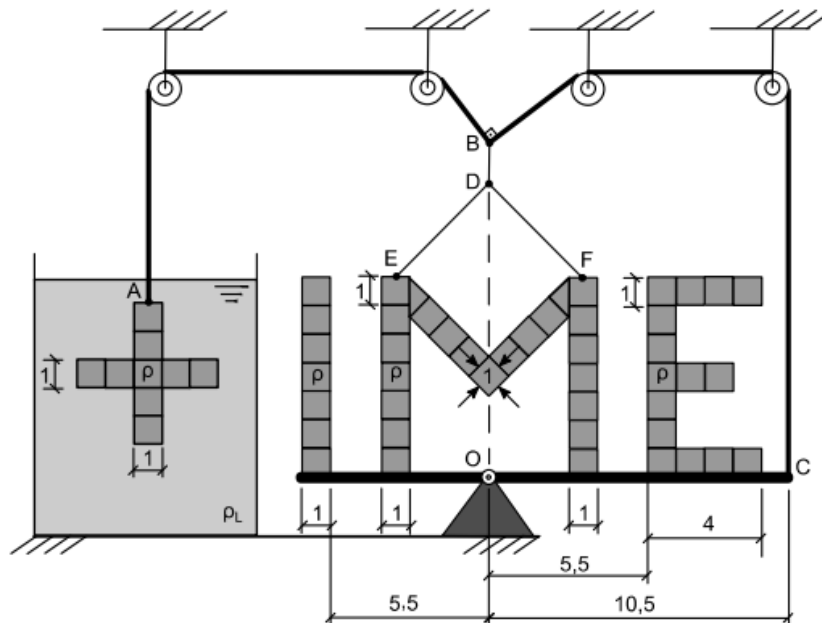
- a) o menor valor do módulo da força F para que o sistema permaneça em equilíbrio estático;
- b) o maior valor do módulo da força F para que o sistema permaneça em equilíbrio estático quando a válvula for aberta e o líquido totalmente escoado;
- c) o maior valor do módulo da força F para que não haja deslizamento entre os blocos I e II, admitindo que a válvula tenha sido aberta, o tanque esvaziado e a força F aumentado de modo que o sistema tenha entrado em movimento.

Dados:

- aceleração da gravidade: g ;
- massa específica de cada bloco: ρ_B ;
- volume de cada bloco: V_B ;
- massa específica do líquido: ρ_L ;
- coeficiente de atrito entre os blocos I e II: μ ;
- coeficiente de atrito estático entre o bloco II e o solo: $1,5 \mu$;
- coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco II e o solo: $1,4 \mu$;
- coeficiente de atrito estático entre o bloco IV e a superfície com líquido: $0,5 \mu$;

- coeficiente de atrito estático entre o bloco IV e a superfície sem líquido: $0,85 \mu$;
- coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco IV e a superfície sem líquido: $0,75 \mu$
- ângulo entre a superfície de contato do bloco IV e a horizontal: α .

37. (IME – 2017)



O sistema apresentado na figura encontra-se em equilíbrio estático, sendo composto por quatro corpos homogêneos, com seção reta na forma “+ I M E”. O corpo “+” está totalmente imerso em um líquido e sustentado pela extremidade A de um fio flexível ABC, de peso desprezível, que passa sem atrito por polias fixas ideais. Sabe-se que, no ponto B, o fio forma um ângulo de 90° e sustenta parcialmente o peso do corpo “M”. Finalmente, na extremidade C, o fio é fixado a uma plataforma rígida de peso desprezível e ponto de apoio O, onde os corpos “I M E” estão apoiados. Diante do exposto, determine:

- a) a intensidade da força de tração no fio BD;
- b) a intensidade da força de cada base do corpo “M” sobre a plataforma.

Observação:

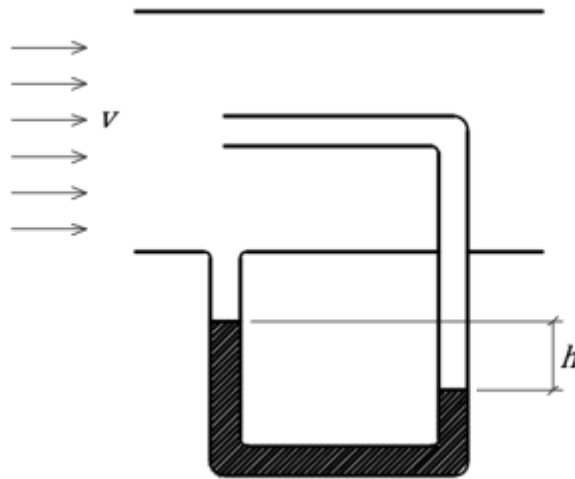
- dimensão das cotas dos corpos “+ I M E” na figura em unidade de comprimento (u.c.);
- considere fios e polias ideais; e
- existem dois meios cubos compondo a letra “M”

Dados:

- aceleração da gravidade: g ;
- massa específica dos corpos “+ I M E”: ρ ;
- massa específica do líquido: $\rho_L = \rho/9$;

- espessura dos corpos “+ I M E”: 1 u.c.; e
- comprimento dos fios $DE = DF$.

38. (IME – 2018)



A figura acima mostra esquematicamente um tipo de experimento realizado em um túnel de vento com um tubo de Pitot, utilizado para medir a velocidade v do ar que escoa no túnel de vento. Para isso, a diferença de nível h entre as colunas do líquido é registrada. Em um dia frio, o experimento foi realizado e foi obtido o valor de $10,00 \text{ cm}$ para a diferença de nível h . Em um dia quente, o experimento foi repetido e foi obtido o valor de $10,05 \text{ cm}$ para a diferença de nível h . Determine:

- a) o valor do coeficiente de dilatação volumétrica do líquido no interior do tubo, sabendo que a variação de temperatura entre o dia quente e o dia frio foi de 25 K ;
- b) a velocidade do ar v .

Dados:

- a massa específica do líquido é 1.000 vezes maior que a massa específica do ar no dia frio; e
- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

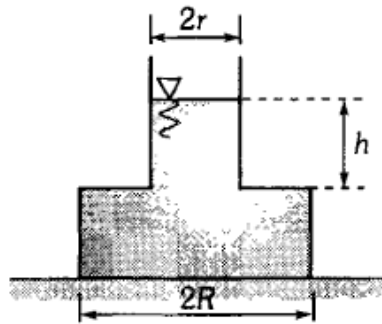
Considerações:

- a velocidade do ar no túnel de vento foi a mesma nos dois experimentos;
- a massa específica do ar foi a mesma nos dois experimentos;
- a aceleração da gravidade foi a mesma nos dois experimentos; e
- despreze a dilatação térmica da estrutura do tubo de Pitot.

39.

Um recipiente sem base, de peso P e de paredes cilíndricas encontra-se sobre uma mesa. A bordas do recipiente estão bem ajustadas a mesa. O recipiente começa a ser enchido com água

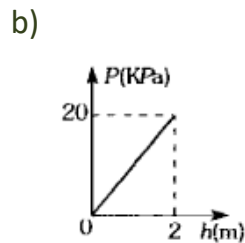
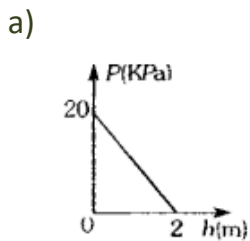
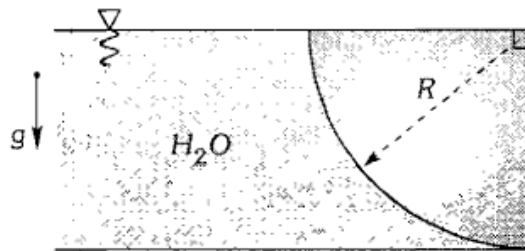
até uma altura h , quando praticamente perde o contato com a mesa. Determine a densidade do líquido

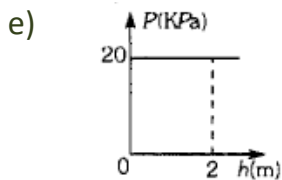
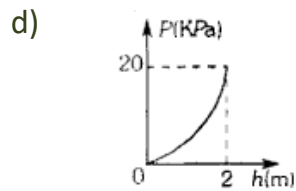
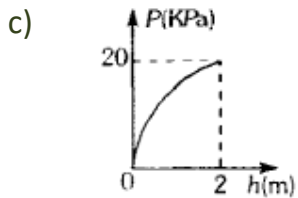


- a) $\frac{P}{2gh\pi(R^2-r^2)}$
- b) $\frac{2P}{gh\pi(R^2-r^2)}$
- c) $\frac{P}{gh\pi R^2}$
- d) $\frac{P}{gh\pi r^2}$
- e) $\frac{P}{gh\pi(R^2-r^2)}$

40.

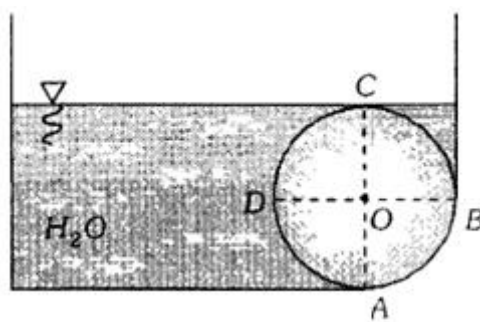
Determine o gráfico corresponde a pressão hidrostática na superfície do cilindro em função da profundidade h . ($R = 2 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$).





41.

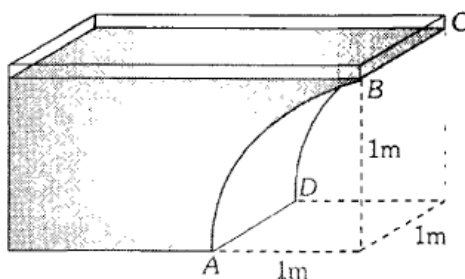
O cilindro de raio R e geratriz L cobre completamente o buraco AB , impedindo que haja passagem de água. Em relação a força hidrostática, assinale a alternativa incorreta.



- a) $\frac{3}{2}\rho_{\text{água}}gR^2L$, na direção horizontal
- b) $0,5\rho_{\text{água}}gR^2L$, na direção vertical sobre a superfície BC
- c) $\rho_{\text{água}}gR^2L$, na direção vertical sobre o volume ADC
- d) $0,5\rho_{\text{água}}gR^2L$, na direção vertical para baixo
- e) $2\rho_{\text{água}}gR^2L$ horizontal sobre BC

42.

O recipiente mostrado abaixo está cheio de água. Determine a força horizontal que exerce a água sobre a superfície $ABCD$ (parte de um cilindro) ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



- a) 2000 N b) 3000 N c) 4000 N d) 5000 N e) 7850 N

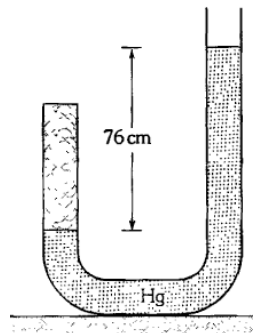
43.

Uma bolha de ar se desprende do fundo de um lago. Ao chegar à superfície seu volume havia triplicado. Determine a profundidade do lago.

- a) 5 m b) 10 m c) 15 m d) 20 m e) 25 m

44.

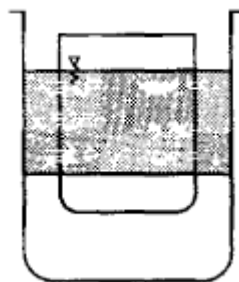
A coluna de ar mostrada na figura tem 18 cm. Que comprimento adicional de mercúrio deve-se colocar para que o volume de ar se reduza de $\frac{1}{3}$?



- a) 100 cm b) 88 cm c) 76 cm d) 60 cm e) 48 cm

45.

Um cilindro flutua parcialmente submerso em água e azeite, tal como mostra a figura abaixo. Se adicionamos mais azeite ao recipiente



- a) o volume submerso em água aumenta.
b) o volume submerso em água não varia.
c) o volume submerso em água diminui.
d) o volume submerso em água diminui, mas rapidamente aumenta.
e) não é possível prever.

46.



Na superfície de separação de dois líquidos com densidades ρ_1 e ρ_2 flutua um objeto de densidade ρ ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). A altura do objeto vale h . Determine a profundidade submersa no segundo líquido.

- a) $\frac{\rho_1}{\rho_2} h$
- b) $\frac{\rho - \rho_1}{2\rho_1 - \rho_2} h$
- c) $\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} h$
- d) $\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_1} h$
- e) $\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho} h$

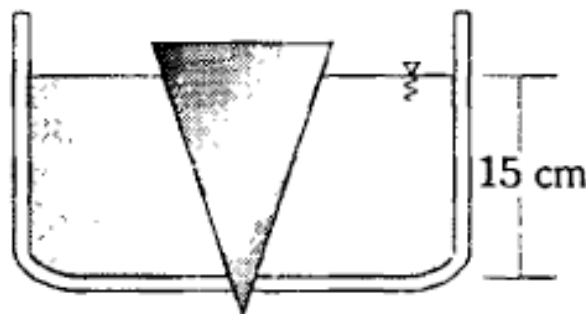
47.

Um cubo de estanho ($\rho_{Sn} = 7,3 \text{ g/cm}^3$) de 16 cm de aresta, flutua em mercúrio ($\rho_{Hg} = 13,6 \text{ g/cm}^3$). Se sobre o mercúrio coloca-se água; qual é a mínima espessura de água colocada para que cubra a face superior do cubo?

- a) 2 cm
- b) 3 cm
- c) 4 cm
- d) 6 cm
- e) 8 cm

48.

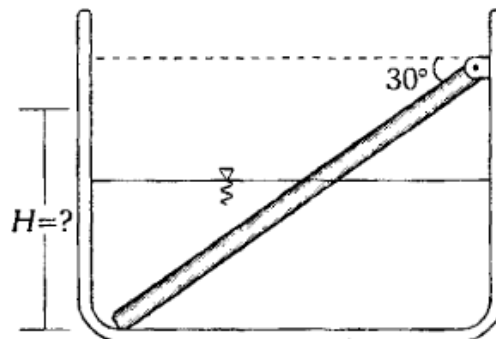
Um orifício de 400 cm^2 de área situado no fundo do recipiente que contém água é tampado por um cone. Se a altura do cone é 60 cm e sua base tem área 1600 cm^2 , qual é força hidrostática resultante que atua sobre o cone?



- a) 15 N
- b) 25 N
- c) 35 N
- d) 45 N
- e) 60 N

49.

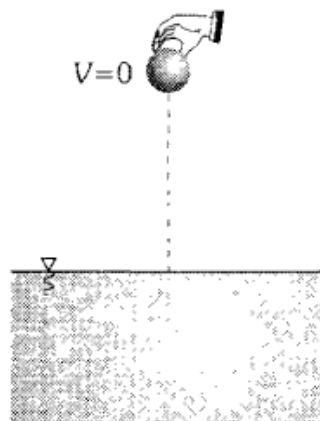
Uma barra homogênea de 10 m de comprimento e 960 kg/m^3 de densidade se encontra parcialmente submersa em água, com sua extremidade livre apoiada no fundo do recipiente. Calcule a altura mínima de água para que a barra perca o contato com o fundo do recipiente.



- a) 1 m
- b) 2 m
- c) 4 m
- d) 5 m
- e) 6 m

50.

Uma esfera de 3 kg e densidade 3000 kg/m^3 é solta sobre um lago. Se considerarmos que a densidade da água varia de acordo com a equação $\rho = (1000 + 2h)\text{ kg/m}^3$ ($h = \text{profundidade}$), determine o trabalho realizado pela força de empuxo até a esfera alcançar sua velocidade máxima. O lago é muito profundo e não apresenta viscosidade. ($g = 10\text{ m/s}^2$)



- a) 5 kJ
- b) 10 kJ
- c) 15 kJ
- d) 20 kJ
- e) 25 kJ



51.

Dentro de um bloco de gelo há uma moeda de 20 g e densidade 2 g/cm^3 . Calcule o desnível da água quando o bloco de gelo derreter. A área do fundo do recipiente é 50 cm^2 .



52.

Um tanque de dimensões ($3l \times 2l \times l$) deve ser utilizado para transportar água em um caminhão que desenvolve uma aceleração de $a \text{ m/s}^2$. A parte superior do tanque sempre deve estar destampada.

- Como devemos posicionar o tanque para que transporte a máxima quantidade de água sem vazamento?
- Calcule o volume máximo de água transportado nas condições do item (a).

53.

Um recipiente cilíndrico de massa m , raio R e parede de espessura desprezível tem o seu centro de gravidade a uma distância H da base. Qual a altura h do nível da água (densidade ρ) para a qual deve ser preenchido o recipiente, de tal forma que ele fique o mais estável possível.

54.

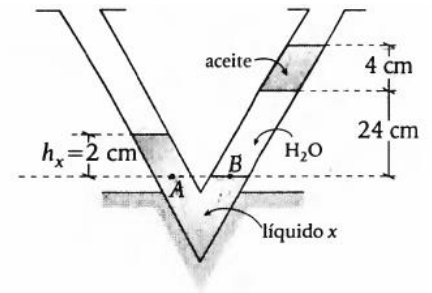
Um cilindro de madeira de comprimento L , raio R e densidade ρ tem uma pequena peça metálica de massa m (volume desprezível) fixada em umas das suas extremidades. Determine o menor valor possível de m , em função dos parâmetros fornecidos, que faz com que o cilindro flutue verticalmente em equilíbrio estável em um líquido de densidade σ .

55.

Sabendo que as densidades da água e do azeite são 1 g/cm^3 e $0,8 \text{ g/cm}^3$ respectivamente, determine a densidade do líquido x que se encontra em repouso.



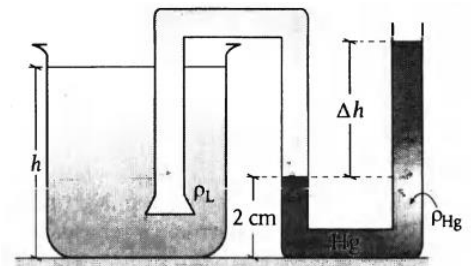
- a) $8,4 \text{ g/cm}^3$
- b) $8,7 \text{ g/cm}^3$
- c) $9,2 \text{ g/cm}^3$
- d) $10,5 \text{ g/cm}^3$
- e) $13,6 \text{ g/cm}^3$



56.

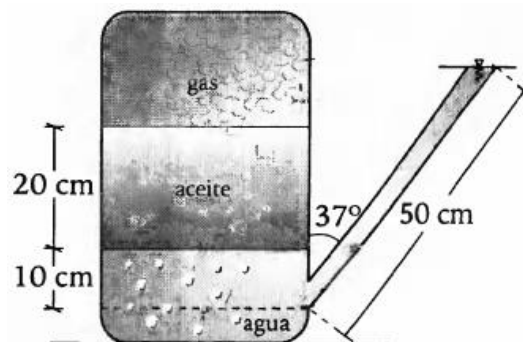
Determine a altura h do líquido contido no recipiente da figura abaixo, se mediante um tubo em S percebe-se que a diferença dos níveis de mercúrio é $\Delta h = 250 \text{ mm}$. Considere $\rho_L = 860 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_{HG} = 13,6 \text{ g/cm}^3$.

- a) 4,85 m
- b) 4,13 m
- c) 3,97 m
- d) 3,62 m
- e) 2,86 m



57.

O sistema mostrado na figura abaixo está em repouso. Determine a pressão do gás. Dado: $\rho_{\text{água}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\rho_{\text{azeite}} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $P_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$.

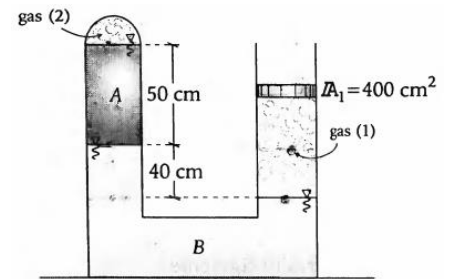


- a) 240 kPa
- b) 101,4 kPa
- c) 1,4 kPa
- d) 0,14 kPa
- e) 105,4 kPa

58.

O embolo que fecha o tubo tem massa de 8 kg e se encontra em equilíbrio, como mostrado na figura abaixo. Que pressão suporta o gás 2, se as densidades dos líquidos A e B são 2 g/cm^3 e 3 g/cm^3 respectivamente? Dado: $P_{atm} = 10^5$.

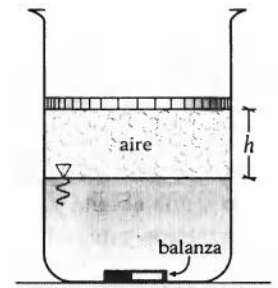
- a) 80 kPa
- b) 70 kPa
- c) 800 kPa
- d) 90 kPa
- e) 8 kPa



59.

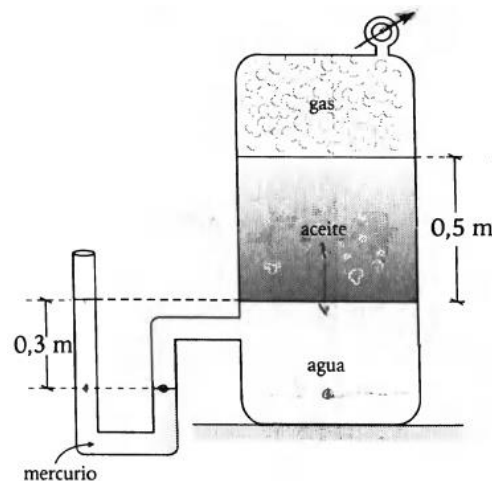
No sistema em repouso a pequena balança de área 5 cm^2 indica 15 N . Se o embolo é erguido uma altura h a balança indica 5 N . Determine a pressão inicial do ar encerrado.

- a) 10 kPa
- b) 20 kPa
- c) 30 kPa
- d) 40 kPa
- e) 50 kPa



60.

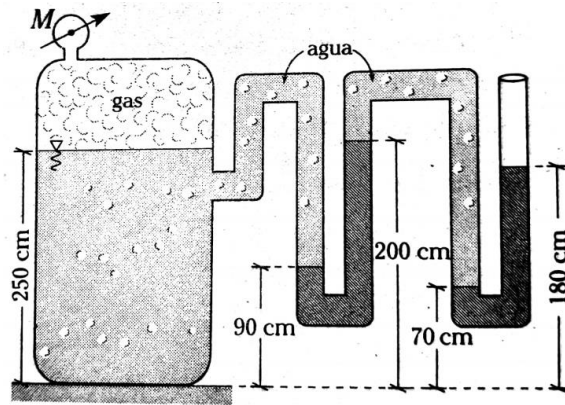
A figura abaixo mostra um sistema em repouso. Qual é a indicação do manômetro? Considere $\rho_{\text{azeite}} = 0,8\text{ g/cm}^3$; $\rho_{\text{Hg}} = 13,6\text{ g/cm}^3$.



- a) 38,8 b) 36,8 c) 34,8 d) 33,8 e) 32,8

61.

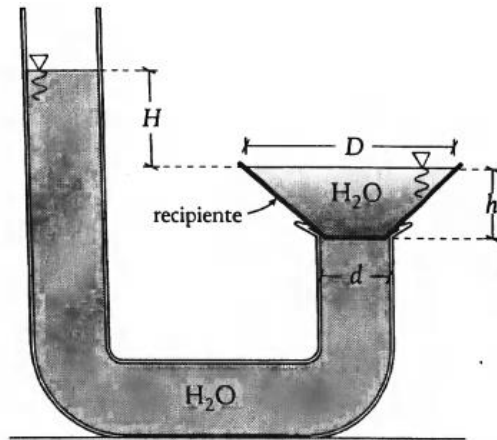
A partir do sistema que contém água e mercúrio em repouso, qual é a leitura do manômetro (em 10^5 Pa)? $\rho_{\text{Hg}} = 13,6\text{ g/cm}^3$.



- a) 1,7 b) 2,7 c) 3,2 d) 3,8 e) 27

62.

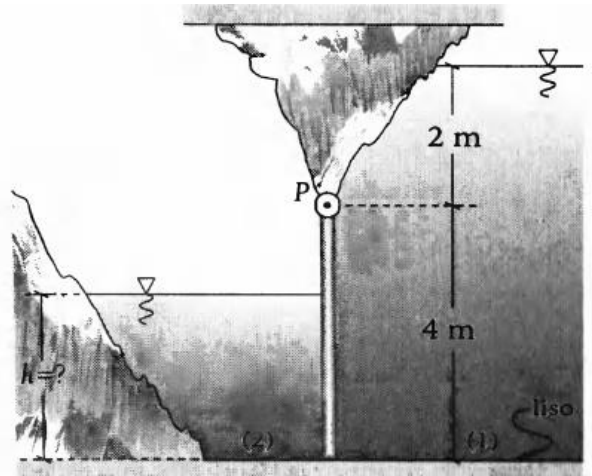
Na figura abaixo, o recipiente de massa desprezível está em repouso, se o sistema é livre de atrito determine H/h , se $D/d = 4$.



- a) 2,5
b) 3,75
c) 4
d) 6
e) 4,25

63.

Uma comporta está separando dois líquidos na posição vertical, como é mostrado na figura abaixo. Determine a que altura se encontra o nível do líquido (2), de tal maneira que a comporta não se abra. Considere $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{28}{5}$.



- a) 4,8 m
- b) 4 m
- c) 3 m
- d) 2 m
- e) 1 m

64.

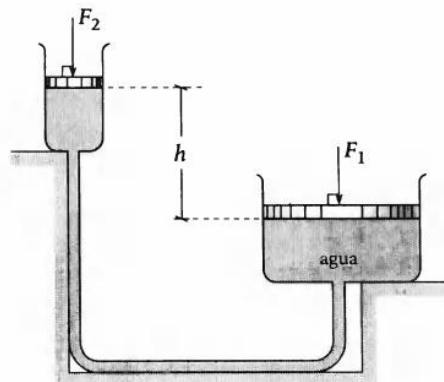
Em uma piscina de águas tranquilas um jovem de 75 kg flutua de tal maneira que apenas seu nariz está fora da água. Determine o volume desse jovem, em litros.

- a) 65
- b) 75
- c) 7,5
- d) 6,5
- e) 750

65.

Dois cilindros estão unidos mediante a um tubo como mostra a figura abaixo. Sendo que $D_1 = 50$ cm, $D_2 = 20$ cm, (D é o diâmetro).

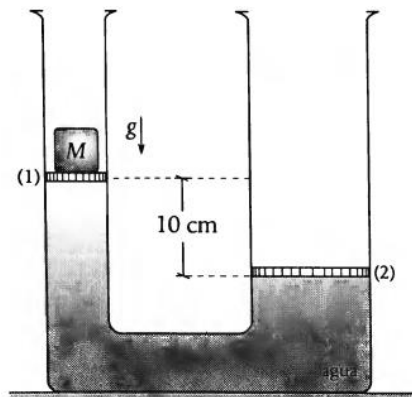
O cilindro menor está situado mais acima a uma altura $h = 0,5$ m do cilindro de maior diâmetro. Determine o módulo da força F_1 para manter o equilíbrio do sistema se $F_2 = 500$ N. Despreze as massas dos êmbolos.



- a) 6,378 kN b) 6,105 kN c) 5,734 kN d) 5,084 kN e) 4,106 kN

66.

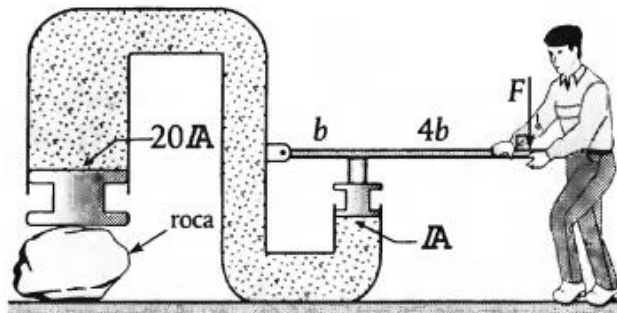
O sistema mostrado a seguir está em equilíbrio; qual será a nova separação dos êmbolos se o bloco é retirado lentamente? Considere $M_1 = 2 \text{ kg}$; $M_2 = 3 \text{ kg}$; $M = 1 \text{ kg}$ e $A_1 = 400 \text{ cm}^2$.



- a) 7,5 cm
b) 6,24 cm
c) 12,5 cm
d) 1,66 cm
e) 1,33 cm

67.

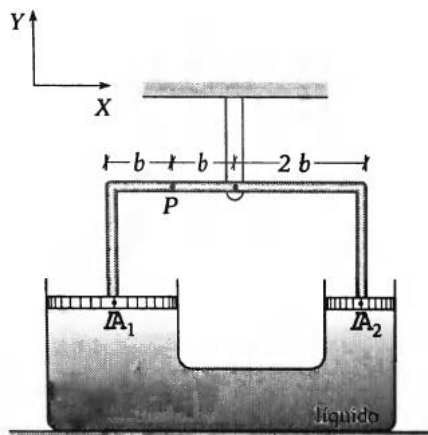
A figura abaixo mostra um esquema simplificado para triturar rochas. Se a rocha indicada está suportando 3 kN e como o máximo que ela pode resistir, antes de quebrar, é 7,5 kN, em quanto deve variar o modulo da força que exerce o jovem para quebrar a rocha?



- a) 15 N
- b) 20 N
- c) 25 N
- d) 40 N
- e) 45 N

68.

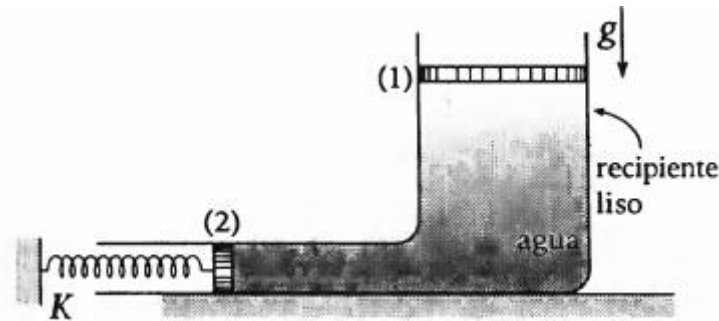
O sistema mostrado, as barras e os êmbolos são de massa desprezível. Se sobre o ponto P começa a atuar uma força $\vec{F} = 100(4\hat{i} - 3\hat{j})$ N, determine a mudança no valor da força que o líquido exerce sobre cada embolo ($A_1 = 4A_2$).



- a) 25 N; 100 N
- b) 40 N; 160 N
- c) 35 N; 150 N
- d) 30 N; 120 N
- e) 50 N; 200 N

69.

O sistema mostrado a seguir está em repouso. Que valor deve ter a força vertical exercida sobre o embolo (1) para que a mola se comprima 1 cm a mais. Considere $A_1 = 10 \cdot A_2 = 10 \text{ m}^2$ e $K = 10 \text{ N/m}$.

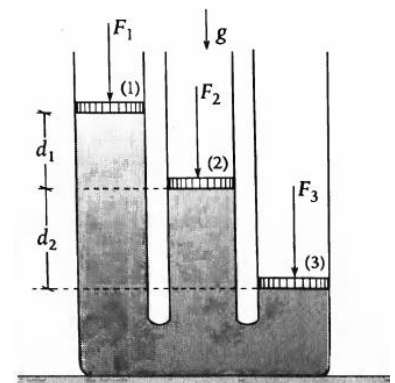


- a) 1 N b) 50,5 N c) 100 N d) 101 N e) 110 N

70.

Três êmbolos de massa desprezíveis e de área A_1 , A_2 e A_3 , respectivamente, descansam sobre a superfície de um líquido de densidade ρ . Determine d_1 e d_2 . Despreze todos os atritos.

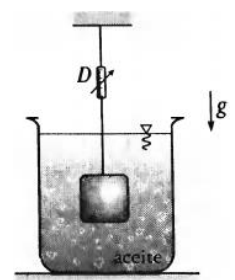
- a) $\frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_1}{A_1} \right); \frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_3}{A_3} - \frac{F_2}{A_2} \right)$
 b) $\frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_3}{A_3} \right); \frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_1}{A_1} \right)$
 c) $\frac{1}{\rho g} (F_1 + F_2); \frac{1}{\rho g} (F_2 + F_3)$
 d) $\frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_1}{A_1} - \frac{F_2}{A_2} \right); \frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_3}{A_3} - \frac{F_2}{A_2} \right)$
 e) $\frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_3}{A_3} + \frac{F_1}{A_1} \right); \frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_3}{A_3} - \frac{F_2}{A_2} \right)$



71.

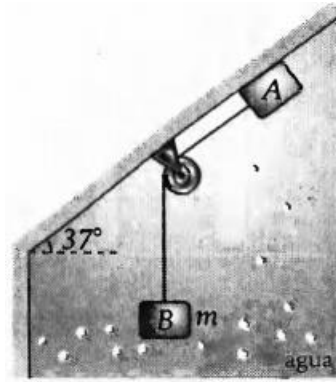
Ao se retirar o recipiente com azeite a indicação do dinamômetro aumenta em 24 N. Se o bloco é introduzido em outro recipiente que contém um líquido de densidade $2,5 \text{ g/cm}^3$; quanto indicará o dinamômetro? Considere $\rho_{\text{bloco}} = 2,9 \text{ g/cm}^3$.

- a) 16 N
 b) 18 N
 c) 20 N
 d) 12 N
 e) 15 N



72.

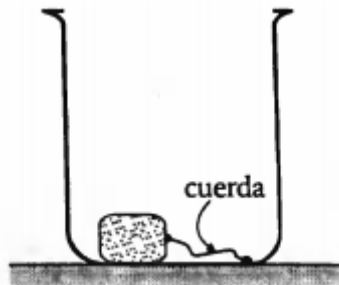
O sistema mostrado se encontra em equilíbrio e os blocos são de mesma massa. Determine o módulo da reação da superfície lisa inclinada sobre o bloco A. Considere $M = 1 \text{ kg}$; $V_B = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$.

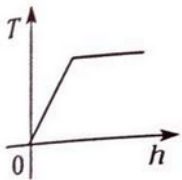
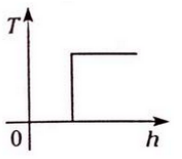
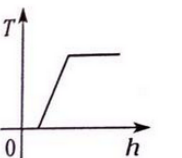



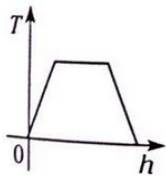
- a) 2 N b) 3 N c) $2\sqrt{5}$ N d) 5 N e) 8 N

73.

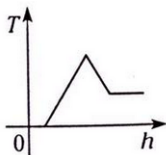
Um bloco de isopor descansa no fundo de um recipiente vazio fixo a uma corda como é mostrado na figura abaixo. Se começamos a encher o recipiente de água, qual é o gráfico que melhor representa o comportamento da tensão (T) em relação à altura da água (h)?



- a) 
- b) 
- c) 
- d) 

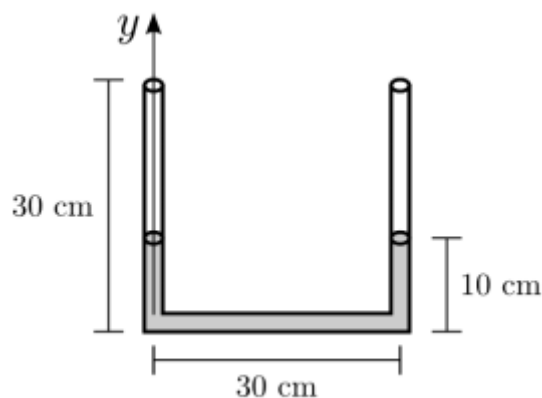


e)



74. (OBF 3ª fase 2017)

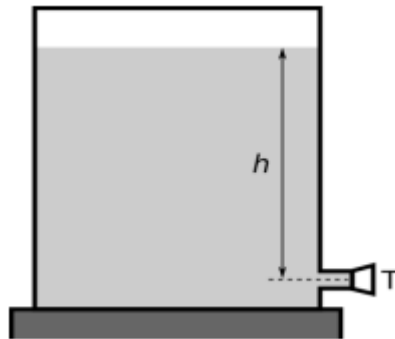
A figura abaixo ilustra um tubo fino de extremidades abertas em forma de U, em repouso, e que contém água até o nível $H = 10 \text{ cm}$. Acionando um motor é possível fazer com que o tudo gire com velocidade angular constante ω ; em torno do eixo vertical y centrado no ramo esquerdo do tubo. Para que valor de ω a água está no limite de escapar do tubo? Use em suas considerações o fato de que a pressão de equilíbrio de líquidos que estão dentro de recipientes em rotação uniforme varia com a distância r ao eixo de rotação de acordo com expressão $p = p_c + \frac{1}{2}\rho\omega^2r^2$ onde p_c é a pressão do líquido sobre o eixo e ρ é a densidade do líquido.



75. (OBF – 2016)

Um recipiente contendo água possui uma pequena abertura de área de seção transversal localizada a uma profundidade h e que está inicialmente bloqueada por um tampão T , conforme figura abaixo. Movendo-se e segurando-se o tampão a uma pequena distância Δx para a direita, a água esguicha pela abertura, atinge o tampão, colide inelasticamente e escorre verticalmente para baixo. Determine (a) a velocidade com que a água sai pela abertura e (b) a força exercida pela água no tampão em termos de a , h , g e densidade da água. Ao expressar seus resultados, além das grandezas dadas, use g para aceleração da gravidade e ρ para a densidade da água.







5. Gabarito sem comentários

- 1) D
2) A
3) C
4) C
5) A
6) não há alternativa correta.
7) E
8) $T = \frac{\rho g l S_1 S_2}{S_1 - S_2}$
9) C
10) $F = \rho g H \pi d^2 / 8$
11) D
12) $H = \frac{P_o + \rho \cdot g \cdot d}{P_o - \rho \cdot g \cdot d}$
13) B
14) 1,0 m
15) $\rho \cdot g \cdot L(h_1^2 - h_0^2) \cdot tg \frac{\theta}{2}$
16) a) $L' = \frac{P_a \cdot L \cdot A}{P_a \cdot A + mg}$ b) $y = \frac{m}{\rho \cdot A}$
17) $T = V(\rho - 0,7 \cdot \rho_1 - 0,3 \cdot \rho_2)g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
18) D
19) vide comentários.
20) E
21) D
22) E
23) E
24) C
25) C
26) A
27) $a = \frac{2 \cdot A_2 \cdot (p - p_{atm} + \rho \cdot g \cdot h)}{(M + M_a) \cdot \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}$
28) $l = 768 \text{ mm}$
29) C
30) B
31) 9 cm
32) $F = \frac{m_1 \cdot 2 \cdot e}{t^2} + m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \alpha + \frac{m_2 \cdot g}{2} - \frac{\rho \cdot V \cdot g}{2}$
33) $x = \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{a \cdot b \cdot \gamma}{10P} + 1\right)$
34) a) 20 N b) 0,032 m³
35) a) $\frac{\mu \cdot h^2 \cdot a \cdot g}{2}$ b) O é a origem: $P = \left(\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$
 $E = \left(\frac{h}{3}; -a + \frac{2h}{3}\right)$ c) $F_1 = \frac{2 \cdot m \cdot g}{3} + \frac{\mu \cdot g \cdot h^2}{2} \left(\frac{h}{3} - a\right)$; $F_2 = \frac{m \cdot g}{3} - \frac{\mu \cdot g \cdot h^3}{6}$
36) a) $F = V_B g \left[\rho_B \left(\frac{R}{r} - 3\mu\right) + \left(\text{sen } \alpha - \frac{\mu}{2} \cos \alpha\right) (\rho_B - \rho_L)\right]$ b) $F = \rho_B V_B g \left[\frac{R}{r} + \mu(3 + 0,85 \cos \alpha) + \text{sen } \alpha\right]$ c) $F = \rho_B V_B g \left[\mu(5,8 + 0,75 \cos \alpha) + \text{sen } \alpha + \frac{R}{r} \left(3 \frac{R}{r} \mu + 1\right)\right]$
37) a) $T_{BD} = 10 \rho g$ b) $N = 6 \rho g$
38) a) $\gamma = 2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ b) $v = 20\sqrt{5} \text{ m/s}$
39) E
40) B
41) A
42) D
43) D
44) B
45) C
46) C
47) E
48) C
49) C
50) C
51) 0,2 cm
52) a) Altura: 3 l; Largura: 2l; Comprimento (direção de a): l b) $\frac{9l^3 g}{a}$
53) $h = \frac{\sqrt{m \cdot (m + 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot H) - m}}{\rho \cdot \pi \cdot R^2}$
54) $m = L \cdot \pi \cdot R^2 \cdot (\sigma - \rho)$
55) E
56) C
57) B



58) A

59) D

60) D

61) B

62) D

63) D

64) B

65) E

66) C

67) E

68) E

69) D

70) A

71) D

72) E

73) C

74) $\omega = 5\sqrt{3} \text{ rad/s}$

75) a) $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ b) $F = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot a$



ESCLARECENDO!

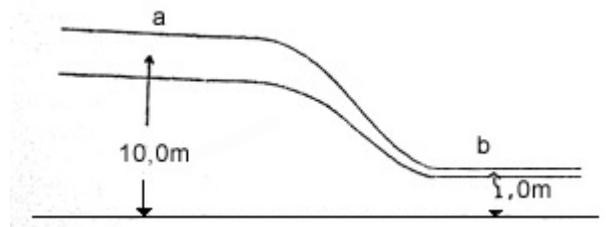


6. Lista de questões comentadas

1. (ITA – 1983)

Álcool, cuja densidade de massa é de $0,80 \text{ g/cm}^3$ está passando através de um tubo como mostra a figura. A secção reta do tubo em a é 2 vezes maior do que em b . Em a a velocidade é de $v_a = 5 \text{ m/s}$, a altura $H_a = 10 \text{ m}$ e a pressão $P_a = 7,0 \times 10^3 \text{ N/m}^2$. Se a altura em b é $H_b = 1 \text{ m}$ a velocidade e a pressão b são:

- a) $0,10 \text{ m/s}$ e $7,9 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$
- b) 10 m/s e $4 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$
- c) $0,10 \text{ m/s}$ e $4,9 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$
- d) 10 m/s e $4,9 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$
- e) 10 m/s e $7,9 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$



Comentário:

Pela equação da continuidade, podemos determinar a velocidade do escoamento em b :

$$v_a \cdot A_a = v_b \cdot A_b \Rightarrow 5 \cdot 2A_b = v_b \cdot A_b$$
$$v_b = 10 \text{ m/s}$$

Pela equação de Bernoulli, temos:

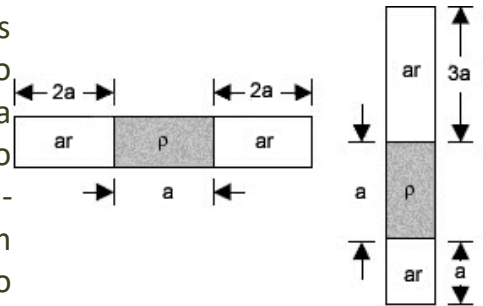
$$p_a + \frac{\rho \cdot v_a^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_a = p_b + \frac{\rho \cdot v_b^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_b$$
$$7 \cdot 10^3 + \frac{0,8 \cdot 10^3 \cdot 25}{2} + 0,8 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10 = p_b + \frac{0,8 \cdot 10^3 \cdot 100}{2} + 0,8 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 1$$
$$9,7 \cdot 10^4 = p_b + 4,8 \cdot 10^4$$
$$p_b = 4,9 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$$

Gabarito: D

2. (ITA - 1986)



Um tubo capilar de comprimento “5a” é fechado em ambas as extremidades. E contém ar seco que preenche o espaço no tubo não ocupado por uma coluna de mercúrio de massa específica ρ e comprimento “a”. Quando o tubo está na posição horizontal, as colunas de ar seco medem “2 a” cada. Levando-se lentamente o tubo à posição vertical as colunas de ar têm comprimentos “a” e “3 a”. Nessas condições, a pressão no tubo capilar quando em posição horizontal é:



- a) $3g \rho a/4$
- b) $2g \rho a/5$
- c) $2g \rho a/3$
- d) $4g \rho a/3$
- e) $4g \rho a/5$

Comentários:

Ao afirmar que o tubo é levantado lentamente, pode-se considerar que ocorreu um processo isotérmico de expansão para o ar acima do mercúrio e uma contração isotérmica para o ar abaixo do mercúrio. Assim, chamando de P_i a pressão inicial com o tubo deitado e de S a área de seção:

$$\begin{cases} P_i \cdot 2a \cdot S = P_{f_1} \cdot a \cdot S \\ P_i \cdot 2a \cdot S = P_{f_2} \cdot 3a \cdot S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{f_1} = 2P_i \\ P_{f_2} = P_i \cdot \frac{2}{3} \end{cases}$$

A diferença de pressão entre os dois bolsões de ar é responsável por sustentar o mercúrio. Portanto:

$$F_{\Delta\text{pressão}} = P_{\text{mercúrio}} \Rightarrow (P_{f_1} - P_{f_2}) \cdot S = \rho \cdot g \cdot a \cdot S$$

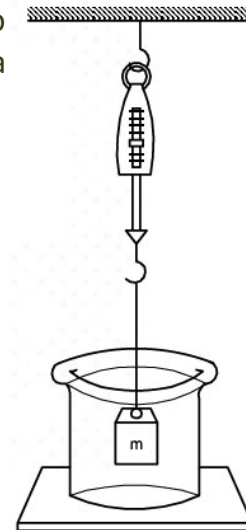
$$P_i \left(\frac{4}{3}\right) = \rho \cdot g \cdot a \Rightarrow \boxed{P_i = \frac{3 \cdot \rho \cdot g \cdot a}{4}}$$

Gabarito: A

3. (ITA – 1987)

Um bloco de urânio de peso 10N está suspenso a um dinamômetro e submerso em mercúrio de massa específica $13,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, conforme a figura. A leitura no dinamômetro é 2,9N. Então, a massa específica do urânio é:

- a) $5,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
- b) $24 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
- c) $19 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
- d) $14 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
- e) $2,0 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$



Comentários:

A medição do dinamômetro é igual ao peso do bloco menos o empuxo sofrido.

$$F_{\text{dinamômetro}} = P - \rho_{\text{liq}} \cdot V_{\text{submerso}} \cdot g$$

$$2,9 = 10 - 13,6 \cdot 10^3 \cdot V_{\text{submerso}} \cdot g$$

$$V_{\text{submerso}} = \frac{7,1}{13,6 \cdot 10^3 \cdot g}$$

Sabe-se, portanto, o volume submerso e a massa. Portanto, calcula-se a densidade:

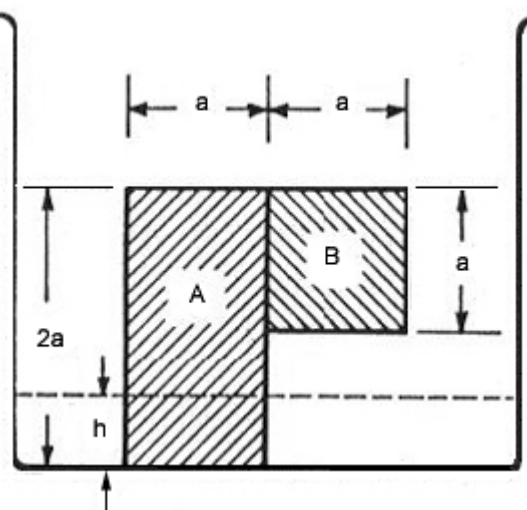
$$\rho_{\text{Urânio}} = \frac{\frac{P}{g}}{V_{\text{submerso}}} = \frac{10 \cdot 13,6 \cdot 10^3 \cdot g}{g \cdot 7,1} = 19,15 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Gabarito: C

4. (ITA - 1988)

Dois blocos, A e B, homogêneos e de massa específica $3,5 \text{ g/cm}^3$ e $6,5 \text{ g/cm}^3$, respectivamente, foram colados um no outro e o conjunto resultante foi colocado no fundo (rugoso) de um recipiente, como mostra a figura. O bloco A tem o formato de um paralelepípedo retangular de altura $2a$, largura a e espessura a . O bloco B tem o formato de um cubo de aresta a . Coloca-se, cuidadosamente, água no recipiente até uma altura h , de modo que o sistema constituído pelos blocos A e B permaneça em equilíbrio, isto é, não tombe. O valor máximo de h é:

- a) 0
- b) $0,25 a$
- c) $0,5 a$



- d) 0,75 a
- e) a

Comentários:

Devido à presença do bloco B “à direita” do bloco A, deduz-se que o conjunto tombará no sentido horário. Dessa forma, calcula-se o momento em relação ao canto inferior direito de A. Assim, na iminência do tombamento:

$$M_{P_A} + M_{P_B} + M_{E_A} = 0$$

Em que:

- M_{P_A} é o momento por conta do peso do bloco A;
- M_{P_B} é o momento por conta do peso do bloco B;
- M_{E_A} é o momento por conta do empuxo sobre o bloco A.

Vale ressaltar que embora a superfície seja rugosa (há atrito), o braço de alavanca deste em relação ao polo adotado é nulo. Da mesma forma, a força normal na iminência do tombamento atuará sobre o polo, portanto o braço de alavanca também será nulo.

Fazendo-se os momentos em torno do canto inferior direito:

$$P_A \cdot \frac{a}{2} - P_B \cdot \frac{a}{2} - E_A \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$P_A = \rho_A \cdot V_A = \rho_A \cdot 2a^3$$

$$P_B = \rho_B \cdot V_B = \rho_B \cdot a^3$$

$$E_A = \rho_{\text{água}} \cdot V_{\text{Submerso}} = \rho_{\text{água}} \cdot h \cdot a^2$$

Substituindo tudo no equilíbrio de momentos:

$$\rho_A \cdot 2a^3 \cdot \frac{a}{2} - \rho_B \cdot a^3 \cdot \frac{a}{2} - \rho_{\text{água}} \cdot h \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$3,5 \cdot a - \frac{6,5 \cdot a}{2} - 1 \cdot \frac{h}{2} = 0$$

$$0,25a = \frac{h}{2}$$

$$\boxed{h = 0,5a}$$

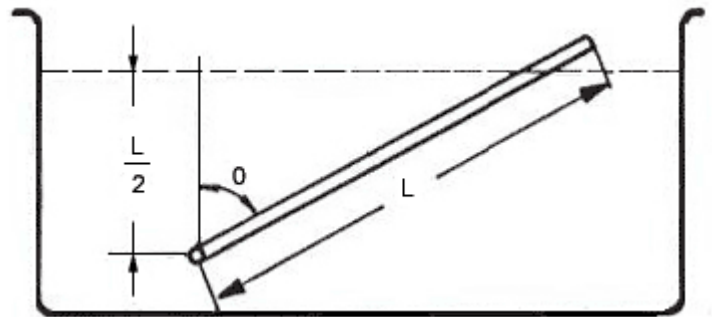
Gabarito: C

5. (ITA - 1988)

Uma haste homogênea e uniforme de comprimento L, seção reta de área A, e massa específica ρ é livre de girar em torno de um eixo horizontal fixo num ponto P localizado a uma distância $d = L/2$ abaixo da superfície de um líquido de massa específica 2ρ . Na situação de equilíbrio estável, a haste forma com a vertical um ângulo igual a:

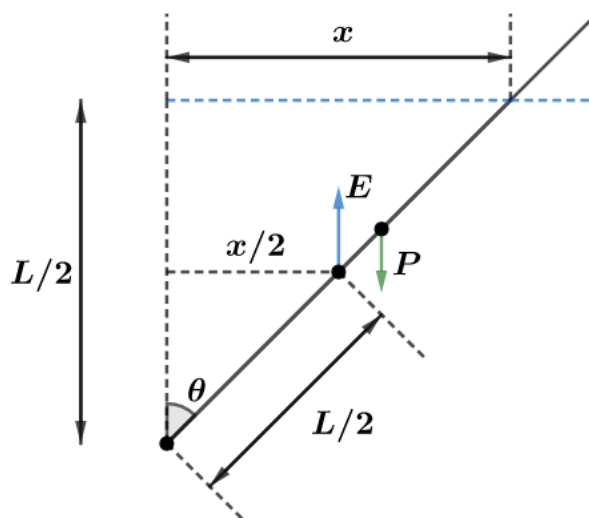


- a) 45°
- b) 60°
- c) 30°
- d) 75°
- e) 15°



Comentários:

Deve-se lembrar que o empuxo atua sobre o centro geométrico do volume submerso (centro de carena). Portanto, o braço de alavanca para o empuxo é de:



$$\frac{x}{\frac{L}{2}} = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{L}{4} \cdot \operatorname{tg} \theta$$

O braço de alavanca da força peso é:

$$y = \frac{L}{2} \cdot \operatorname{sen} \theta$$

Fazendo-se o equilíbrio rotacional em torno do ponto de fixação:

$$E \cdot \frac{x}{2} = P \cdot y \Rightarrow 2\rho \cdot \frac{L}{2 \cos \theta} \cdot A \cdot \frac{L}{4} \cdot \operatorname{tg} \theta = \rho \cdot L \cdot A \cdot \frac{L}{2} \cdot \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta}{4 \cos \theta} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

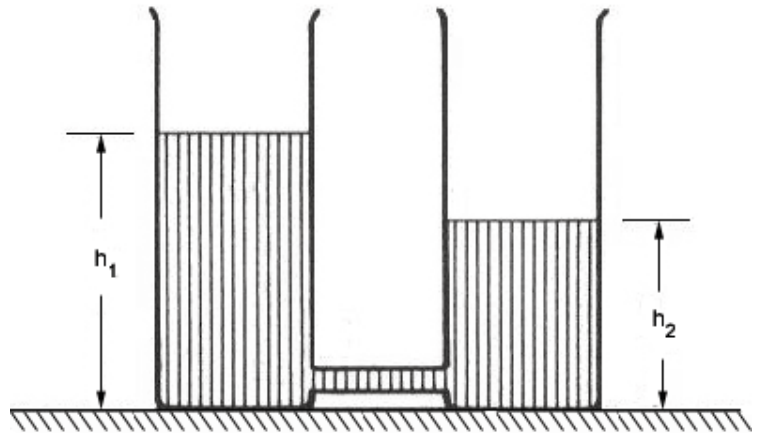
Gabarito: A

6. (ITA - 1988)

Dois baldes cilíndricos idênticos, com as suas bases apoiadas na mesma superfície plana, contém água até as alturas h_1 e h_2 , respectivamente. A área de cada base é A . Faz-se a conexão

entre as bases dos dois baldes com o auxílio de uma fina mangueira. Denotando a aceleração da gravidade por g e a massa específica da água por ρ , o trabalho realizado pela gravidade no processo de equalização dos níveis será:

- a) $\rho Ag(h_1 - h_2)/4$
- b) $\rho Ag(h_1 - h_2)/2$
- c) *nulo*
- d) $\rho Ag(h_1 + h_2)/4$
- e) $\rho Ag(h_1 - h_2)/2$



Comentários:

Calculando-se a energia inicial do sistema tem-se:

$$E_{P_{1,i}} + E_{P_{2,i}} = E_i$$

Em que:

- E_{P_1} e E_{P_2} são as energias potenciais dos balde 1 e 2, respectivamente;
- E_i é a energia mecânica inicial.

$$E_i = \rho \cdot g \cdot A \cdot h_1 \cdot \frac{h_1}{2} + \rho \cdot g \cdot A \cdot h_2 \cdot \frac{h_2}{2}$$

$$E_i = \rho \cdot g \cdot A \cdot \left(\frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{2} \right)$$

Calculando-se a energia final:

$$E_f = E_{P_{1,f}} + E_{P_{2,f}}$$

$$E_f = \rho \cdot g \cdot 2A \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot \frac{h_1 + h_2}{4}$$

$$E_f = \rho \cdot g \cdot A \cdot \frac{(h_1 + h_2)^2}{4}$$

$$\tau = -(\Delta E_p)$$

$$\tau = -\rho \cdot g \cdot A \cdot \left(\frac{h_1^2 + 2 \cdot h_1 \cdot h_2 + h_2^2}{4} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{2} \right)$$

$$\tau = -\rho \cdot g \cdot A \cdot \left(\frac{-h_1^2 + 2 \cdot h_1 \cdot h_2 - h_2^2}{4} \right)$$

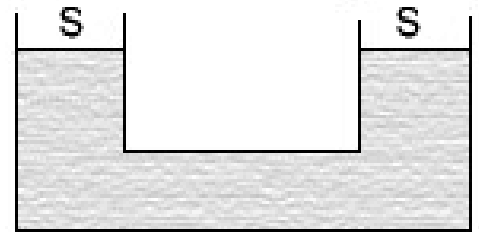
$$\tau = \rho \cdot g \cdot A \cdot \frac{(h_1 - h_2)^2}{4}$$

Gabarito: não há alternativa correta.

7. (ITA - 1993)

Os dois vasos comunicantes da figura abaixo são abertos, têm seções retas iguais a S e contêm um líquido de massa específica ρ . Introduce-se no vaso esquerdo um cilindro maciço e homogêneo de massa M , seção $S' < S$ e menos denso que o líquido. O cilindro é introduzido e abandonado de modo que no equilíbrio seu eixo permaneça vertical. Podemos afirmar que no equilíbrio o nível de ambos os vasos sobe:

- a) $M/[\rho(S - S')]$
- b) $M/[\rho(2S - S')]$
- c) $M/[2\rho(2S - S')]$
- d) $2M/[2\rho(2S - S')]$
- e) $M/[2\rho S]$



Comentário:

Para achar a altura que o líquido sobe, devemos calcular o volume que o objeto introduzido desloca. Esse volume é achado pelo equilíbrio entre a força peso e a força de empuxo:

$$P = E \Rightarrow Mg = \rho \cdot V_{submerso} \cdot g$$

$$V_{submerso} = \frac{M}{\rho}$$

Esse volume que o corpo desloca irá subir igualmente em ambos os tubos. Isto é:

$$V_{submerso} = A \cdot h \Rightarrow \frac{M}{\rho} = 2S \cdot h$$

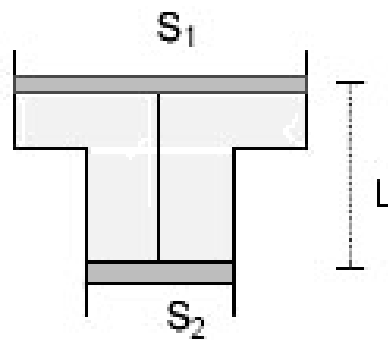
$$\boxed{h = \frac{M}{2\rho \cdot S}}$$

Observação: um erro muito comum é considerar que o líquido irá subir somente numa seção $(2S - S')$. Isso está errado, pois ao fazer-se tal consideração, considera-se que ao inserir o corpo, ele desloca um volume ao seu redor e no outro tubo, sem “subir” junto com a água. Nesse caso, o volume submerso aumentaria e o sistema não estaria em equilíbrio.

Gabarito: E

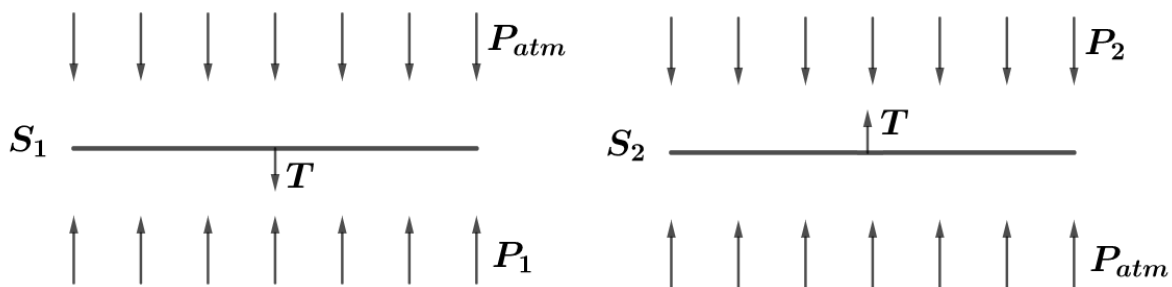
8. (ITA - 1993)

Um recipiente, cujas seções retas dos êmbolos valem S_1 e S_2 , está cheio de um líquido de densidade ρ , como mostra a figura. Os êmbolos estão unidos entre si por um arame fino de comprimento l . Os extremos do recipiente estão abertos. Despreze o peso dos êmbolos, do arame e quaisquer atritos. Quanto vale a tensão T no arame?



Comentários:

Analisando o equilíbrio das placas, temos:



Para a placa superior (S_1), tem-se:

$$P_{atm} \cdot S_1 + T - p_1 \cdot S_1 = 0 \Rightarrow P_{atm} = p_1 - \frac{T}{S_1}$$

Para a placa inferior (S_2), podemos escrever que:

$$p_2 \cdot S_2 = P_{atm} \cdot S_2 + T$$

Substituindo P_{atm} , vem:

$$p_2 \cdot S_2 = \left(p_1 - \frac{T}{S_1}\right) \cdot S_2 + T \Rightarrow T \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right) = S_2(p_2 - p_1)$$

Pela Lei de Stevin:

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot L$$

Então:

$$T = \frac{S_2 \cdot \rho \cdot g \cdot L}{\left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)} \Rightarrow \boxed{T = \frac{\rho g L S_1 S_2}{S_1 - S_2}}$$

Gabarito: $T = \frac{\rho g L S_1 S_2}{S_1 - S_2}$

9. (ITA - 1997)

Um anel, que parece ser de ouro maciço, tem massa de 28,5 g. O anel desloca 3 cm³ de água quando submerso. Considere as seguintes afirmações:

I- O anel é de ouro maciço.

II- O anel é oco e o volume da cavidade $1,5 \text{ cm}^3$.

III- O anel é oco e o volume da cavidade $3,0 \text{ cm}^3$.

IV- O anel é feito de material cuja massa específica é a metade da do ouro.

Das afirmativas mencionadas:

a) Apenas I é falsa.

b) Apenas III é falsa.

c) Apenas I e III são falsas.

d) Apenas II e IV são falsas.

e) Qualquer uma pode ser correta.

Comentários:

Na prova era dada a densidade do ouro $\rho_{Au} = 19,0 \text{ g/cm}^3$. Calculando-se a densidade do anel:

$$d = \frac{m}{v} = \frac{28,5}{3} = 9,5 \text{ g/cm}^3$$

Para essa densidade existem duas possibilidades.

-O material não é ouro e o anel é maciço, sendo assim a densidade do material é $9,5 \text{ g/cm}^3$, ou seja, metade da do ouro.

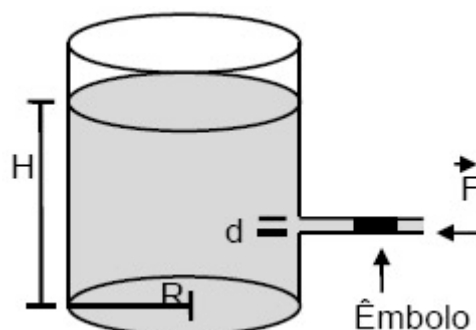
-O anel é de ouro, mas não é maciço, portanto, sendo $28,5 \text{ g}$ a massa do anel, teria-se somente $1,5 \text{ cm}^3$ de ouro. Portanto, um oco de $1,5 \text{ cm}^3$.

Portanto, as opções falsas são I e III.

Gabarito: C

10. (ITA - 1997)

Um recipiente de raio R e eixo vertical contém álcool até uma altura H . Ele possui, à meia altura da coluna de álcool, um tubo de eixo horizontal cujo diâmetro d é pequeno comparado a altura da coluna de álcool, como mostra a figura. O tubo é vedado por um êmbolo que impede a saída de álcool, mas que pode deslizar sem atrito através do tubo. Sendo p a massa específica do álcool, qual é a magnitude da força F necessária para manter o êmbolo sua posição?



Comentários:

Para que o êmbolo se mantenha em posição deve haver equilíbrio das forças.

$$F + P_{atm} \cdot A = \left(P_{atm} + \rho \cdot g \cdot \frac{H}{2} \right) \cdot A$$

$$F = \rho \cdot g \cdot \frac{H}{2} \cdot \left(\pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right)$$

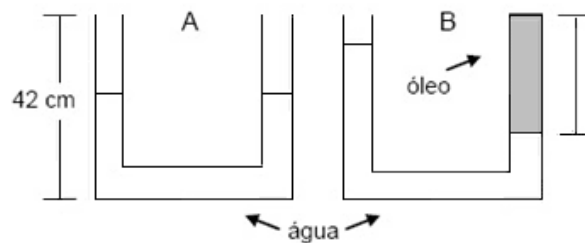
$$F = \rho \cdot g \cdot \frac{H}{2} \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{\rho \cdot g \cdot H \cdot \pi \cdot d^2}{8}$$

Gabarito: $F = \rho g H \pi d^2 / 8$

11. (ITA - 1997)

Um vaso comunicante em forma de U possui duas colunas da mesma altura $h = 42,0$ cm, preenchidas com água até a metade. Em seguida, adiciona-se óleo de massa específica igual a $0,80$ g/cm³ a uma das colunas até a coluna estar totalmente preenchida, conforme a figura B. A coluna de óleo terá comprimento de:

- a) 14,0 cm
- b) 16,8 cm.
- c) 28,0 cm
- d) 35,0 cm.
- e) 37,8 cm.



Comentários:

Considera-se que a coluna de água do lado esquerdo sobe uma altura x . Pela conservação do volume, significa que o lado direito desceu x . Portanto, a altura da coluna de óleo será $21 + x$ e a diferença entre as alturas de coluna de água é de $2x$.

Pelo equilíbrio das pressões:

$$\rho_{\text{água}} \cdot g \cdot 2x = \rho_{\text{óleo}} \cdot g \cdot (x + 21) \Rightarrow 1 \cdot 2x = 0,8 \cdot (x + 21)$$

$$1,2x = 16,8 \Rightarrow \boxed{x = 14 \text{ cm}}$$

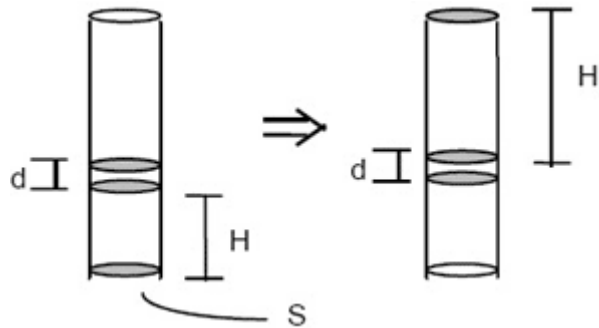
Sendo a altura da coluna de óleo $21 + x$, tem-se que a altura é de 35 cm.

Gabarito: D

12. (ITA - 1997)

Um tubo vertical de seção S , fechado em uma extremidade, contém um gás, separado da atmosfera por um êmbolo de espessura d e massa específica ρ . O gás, suposto perfeito, está à

temperatura ambiente e ocupa um volume $V = SH$ (veja figura). Virando o tubo tal que a abertura fique voltada para baixo, o êmbolo desce e o gás ocupa um novo volume, $V = SH'$. Denotando a pressão atmosférica por P_0 , qual é a nova altura H ?



Comentário:

A pressão inicial do gás é:

$$P_i = P_0 + \frac{\rho \cdot g \cdot S \cdot d}{S}$$

A pressão final do gás é:

$$P_f = P_0 - \frac{\rho \cdot g \cdot S \cdot d}{S}$$

Considerando que houve uma transformação isotérmica entre a situação final e inicial,

$$P_i \cdot V = P_f \cdot V'$$

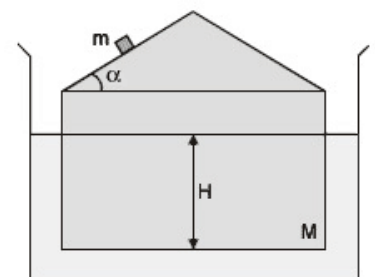
$$(P_0 + \rho \cdot g \cdot d)S \cdot H = (P_0 - \rho \cdot g \cdot d) \cdot SH'$$

$$H' = H \frac{P_0 + \rho \cdot g \cdot d}{P_0 - \rho \cdot g \cdot d}$$

Gabarito: $H \frac{P_0 + \rho g d}{P_0 - \rho g d}$

13. (ITA - 2005)

Um pequeno objeto de massa m desliza sem atrito sobre um bloco de massa M com o formato de uma casa (veja figura). A área da base do bloco é S e o ângulo que o plano superior do bloco forma com a horizontal é α . O bloco flutua em um líquido de densidade ρ , permanecendo, por hipótese, na vertical durante todo o experimento. Após o objeto deixar o plano e o bloco voltar à posição de equilíbrio, o decréscimo da altura submersa do bloco é igual a:



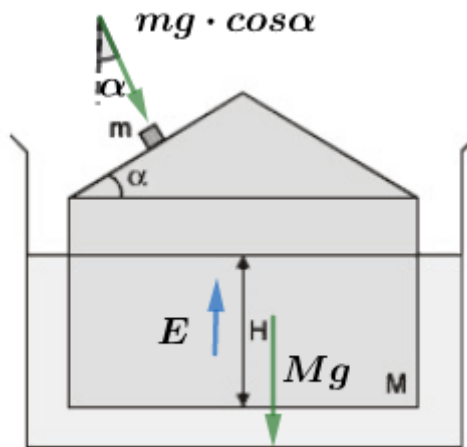
a) $m \cdot \text{sen}^2 \alpha / S \rho$

b) $m \cdot \text{cos}^2 \alpha / S \rho$

- c) $m \cdot \cos\alpha / S\rho$
- d) $m/S\rho$
- e) $m + M/S\rho$

Comentários:

Analisando a dinâmica do bloco m :



Portanto, as forças verticais que o bloco m impõe sobre o bloco M são:

$$F_{vert} = m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$F_{vert} = m \cdot g \cdot \cos^2\alpha$$

Após a queda do bloco m , pelo equilíbrio do bloco M :

$$F_{vert} = \Delta E_{empuxo}$$

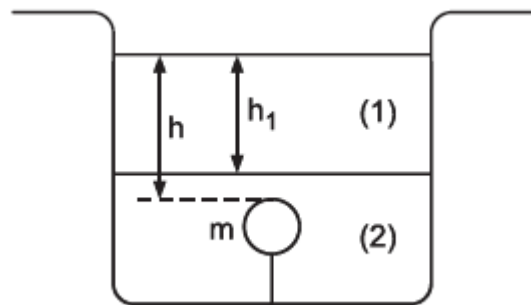
$$m \cdot g \cdot \cos^2\alpha = \rho \cdot S \cdot \Delta h \cdot g$$

$$\Delta h = \frac{m \cdot \cos^2\alpha}{S \cdot \rho}$$

Gabarito: B

14. (ITA – 2007)

A figura mostra uma bolinha de massa $m = 10 \text{ g}$ presa por um fio que a mantém totalmente submersa no líquido (2), cuja densidade é cinco vezes a densidade do líquido (1), imiscível, que se encontra acima. A bolinha tem a mesma densidade do líquido (1) e sua extremidade superior se encontra a uma profundidade h em relação à superfície livre. Rompido o fio, a extremidade superior da bolinha corta a superfície livre do líquido (1) com velocidade de $8,0 \text{ m/s}$. Considere aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$, $h_1 = 20 \text{ cm}$, e despreze qualquer resistência ao movimento de ascensão da bolinha, bem como o efeito da aceleração sofrida pela mesma ao atravessar a interface dos líquidos. Determine a profundidade h .



Comentários:

Rompido o fio que segurava a bolinha, a força resultante sobre ela é dada por:

$$F_R = E - P \Rightarrow F_R = \rho_2 \cdot g \cdot V - \rho_1 \cdot g \cdot V = 4\rho_1 \cdot g \cdot V$$

Pela Segunda Lei de Newton:

$$4\rho_1 \cdot g \cdot V = \rho_1 \cdot V \cdot a \Rightarrow a = 4g = 40 \text{ m/s}^2$$

Pela equação de Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S \Rightarrow 64 = 0 + 80 \cdot \Delta S \Rightarrow \Delta S = 0,8 \text{ m}$$

Somando-se a altura h_1 , temos:

$$\boxed{h = 1 \text{ m}}$$

gabarito: h = 1,0 m

15. (ITA-2009)

Uma balsa tem o formato de um prisma reto de comprimento L e seção transversal como vista na figura. Quando sem carga, ela submerge parcialmente até a uma profundidade h_0 . Sendo ρ a massa específica da água e g a aceleração da gravidade, e supondo seja mantido o equilíbrio hidrostático, determine a carga P que a balsa suporta quando submersa a uma profundidade h_1 .



Comentários:

Chamando de M a massa da balsa:

$$Peso = Empuxo \Rightarrow M \cdot g = \rho \cdot g \cdot h_0 \cdot h_0 \cdot tg \frac{\theta}{2} \cdot L \Rightarrow M = \rho \cdot g \cdot h_0^2 \cdot L \cdot tg \frac{\theta}{2}$$

Adicionando-se uma carga P:

$$\text{Peso total} = \text{Empuxo} \Rightarrow M \cdot g + P = \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot h_1 \cdot \text{tg} \frac{\theta}{2} \cdot L$$

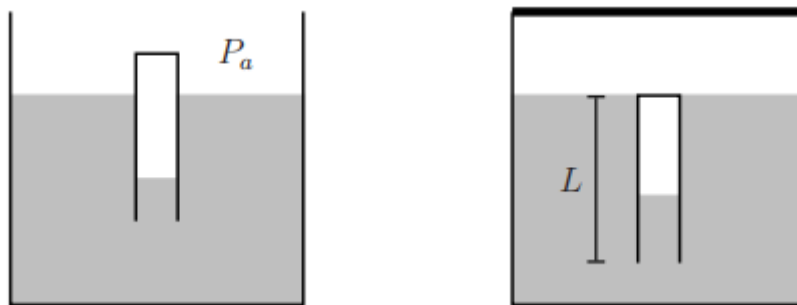
Substituindo o M calculado anteriormente:

$$P = \rho \cdot g \cdot L(h_1^2 - h_0^2) \cdot \text{tg} \frac{\theta}{2}$$

Gabarito: $\rho g L(h_1^2 - h_0^2) \cdot \left(\text{tg} \frac{\theta}{2}\right)$

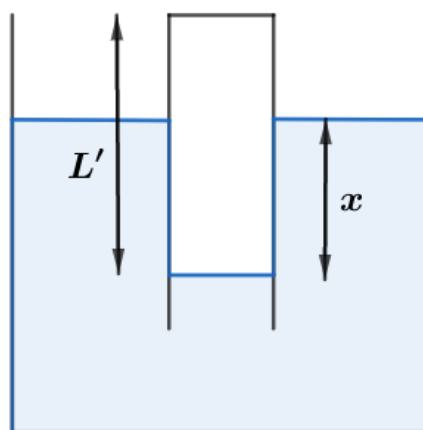
16. (ITA-2009)

Para ilustrar os princípios de Arquimedes e de Pascal, Descartes emborcou na água um tubo de ensaio de massa m , comprimento L e área da seção transversal A . Sendo g a aceleração da gravidade, ρ a massa específica da água, e desprezando variações de temperatura no processo, calcule:



- a) o comprimento da coluna de ar no tubo, estando o tanque aberto sob pressão atmosférica P_a .
- b) e, o comprimento da coluna de ar no tubo, de modo que a pressão no interior do tanque fechado possibilite uma posição de equilíbrio em que o topo do tubo se situe no nível da água (ver figura).

Comentários:



- a) Pelo equilíbrio do tubo:

$$E = P \Rightarrow \rho \cdot V_{\text{submerso}} \cdot g = m \cdot g$$

$$\rho \cdot x \cdot A = m \Rightarrow x = \frac{m}{\rho \cdot A}$$

Considerando uma transformação isotérmica de gás ideal:

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2 \Rightarrow P_a \cdot L \cdot A = (P_a + \rho \cdot g \cdot x) \cdot A \cdot L'$$

$$L' = \frac{P_a \cdot L}{P_a + \rho \cdot g \cdot \frac{m}{\rho \cdot A}} \Rightarrow \boxed{L' = \frac{P_a \cdot L \cdot A}{P_a \cdot A + mg}}$$

b) Como o item anterior, pelo equilíbrio do tubo:

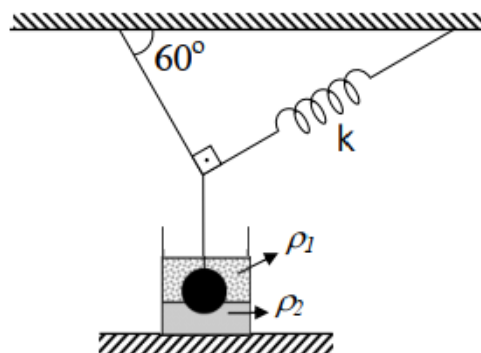
$$E = P \Rightarrow \rho \cdot V_{sub} \cdot g = mg$$

$$\rho \cdot L \cdot y = m \Rightarrow \boxed{y = \frac{m}{\rho \cdot A}}$$

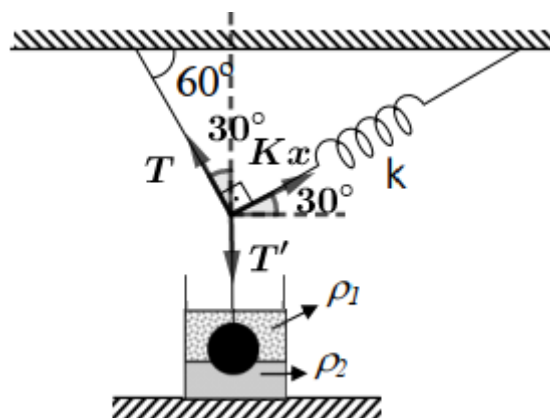
Gabarito: a) $L' = \frac{P_a \cdot L \cdot A}{P_a \cdot A + mg}$ b) $y = \frac{m}{\rho \cdot A}$

17. (ITA-2010)

Uma esfera maciça de massa específica ρ e volume V está imersa entre dois líquidos, cujas massas específicas são ρ_1 e ρ_2 , respectivamente, estando suspensa por uma corda e uma mola de constante elástica k , conforme mostra a figura. No equilíbrio, 70% do volume da esfera está no líquido 1 e 30% no líquido 2. Sendo g a aceleração da gravidade, determine a força de tração na corda.



Comentários:



Pelo equilíbrio do nó:

$$\begin{cases} T \cdot \cos 30^\circ + k \cdot x \cdot \sin 30^\circ = T' \\ T \cdot \sin 30^\circ = k \cdot x \cdot \cos 30^\circ \end{cases}$$

Da segunda equação:

$$k \cdot x = T \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$$

Substituindo na primeira:

$$T \cdot \cos 30^\circ + T \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 30^\circ}{\cos 30^\circ} = T' \Rightarrow T = T' \cdot \cos 30^\circ$$

Pelo equilíbrio da esfera:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 + T' &= P \\ (\rho_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot V_2) \cdot g - \rho \cdot V \cdot g &= -T' \\ T' &= V(\rho - 0,7 \cdot \rho_1 - 0,3 \cdot \rho_2)g \end{aligned}$$

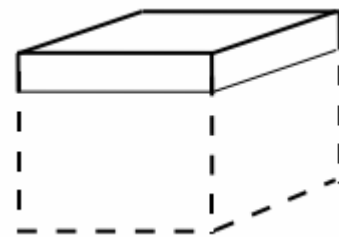
Mas, sabe-se que:

$$T = T' \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow T = V(\rho - 0,7 \cdot \rho_1 - 0,3 \cdot \rho_2)g \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: $T = Vg(\rho - 0,7\rho_1 - 0,3\rho_2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

18. (ITA – 2011)

Um cubo maciço homogêneo com $4,0 \text{ cm}$ de aresta flutua na água tranquila de uma lagoa, de modo a manter 70% da área total da sua superfície em contato com a água, conforme mostra a figura. A seguir, uma pequena rã se acomoda no centro da face superior do cubo e este se afunda mais $0,50 \text{ cm}$ na água. Assinale a opção com os valores aproximados da densidade do cubo e da massa da rã, respectivamente.



- a) $0,20 \text{ g/cm}^3$ e $6,4 \text{ g}$
- b) $0,70 \text{ g/cm}^3$ e $6,4 \text{ g}$
- c) $0,70 \text{ g/cm}^3$ e $8,0 \text{ g}$
- d) $0,80 \text{ g/cm}^3$ e $6,4 \text{ g}$
- e) $0,80 \text{ g/cm}^3$ e $8,0 \text{ g}$

Comentários:

Primeiro, calcula-se o volume submerso inicial. Para isso utiliza-se a informação do problema:

$$\begin{aligned} A_{\text{submersa}} &= 0,7 \cdot A_{\text{total}} \\ a^2 + x \cdot a \cdot 4 &= 0,7 \cdot a^2 \cdot 6 \end{aligned}$$

Em que:

- a é a aresta do cubo;
- x é a parte da aresta submersa.



Assim:

$$3,2 \cdot a^2 = 4 \cdot a \cdot x \Rightarrow x = 0,8 \cdot a$$

Pelo equilíbrio do cubo, portanto:

$$E = P$$

$$\rho_{\text{água}} \cdot V_{\text{submerso}} \cdot g = \rho_{\text{cubo}} \cdot V \cdot g$$

$$1 \cdot 0,8 \cdot V = \rho_{\text{cubo}} \cdot V$$

$$\rho_{\text{cubo}} = 0,8 \text{ g/cm}^3$$

O peso da rã é compensado pelo novo volume submerso. Portanto:

$$V_{\text{submerso,novo}} = a^2 \cdot 0,5 = 8 \text{ cm}^3$$

$$E_{\text{novo}} = P_{\text{rã}}$$

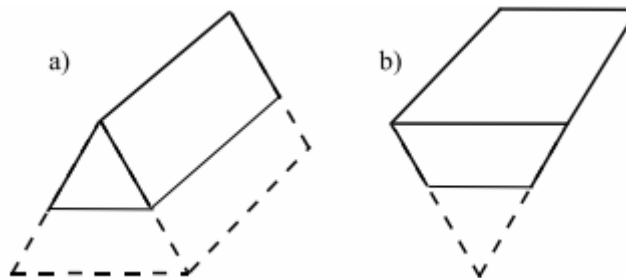
Adotando o SI:

$$0,8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{1}{1000} = m \cdot 10 \Rightarrow \boxed{m = 6,4 \text{ g}}$$

Gabarito: D

19. (ITA – 2011)

Um bloco, com distribuição homogênea de massa, tem o formato de um prisma regular cuja seção transversal é um triângulo equilátero. Tendo $0,5 \text{ g/cm}^3$ de densidade, tal bloco poderá flutuar na água em qualquer das posições mostradas na figura. Qual das duas posições será a mais estável? Justifique sua resposta. Lembrar que o baricentro do triângulo se encontra a $2/3$ da distância entre um vértice e seu lado oposto.



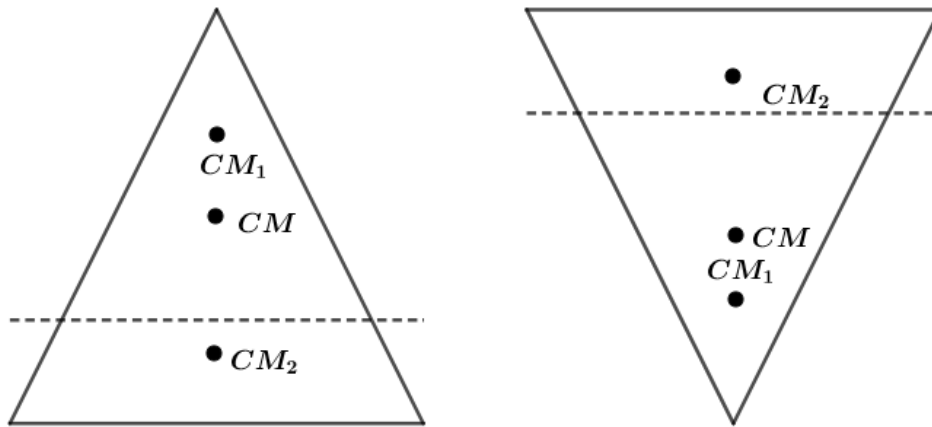
Comentários:

Primeiramente, analisemos onde estão localizados os centros de carena e de massa no prisma em cada situação. Para ambas as situações, pelo equilíbrio translacional, temos:

$$P = E \Rightarrow \rho_{\text{Bloco}} \cdot V \cdot g = \rho_{\text{liq}} \cdot V_{\text{submerso}} \cdot g$$

$$0,5 \cdot V = 1 \cdot V_{\text{submerso}} \Rightarrow V_{\text{submerso}} = \frac{V}{2}$$

Considerando que cada pedaço do prisma tem seu CM (centro de massa) representado da seguinte forma:



Portanto, equacionando o centro de massa do triângulo:

$$CM = \frac{CM_1 \cdot A_1 + CM_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2}$$

Mas, $A_1 = A_2$ sempre, contanto que o corpo esteja em equilíbrio translacional. Portanto:

$$2 \cdot CM = CM_1 + CM_2$$

$$CM - CM_1 = CM_2 - CM$$

$$|CM - CM_1| = |CM - CM_2|$$

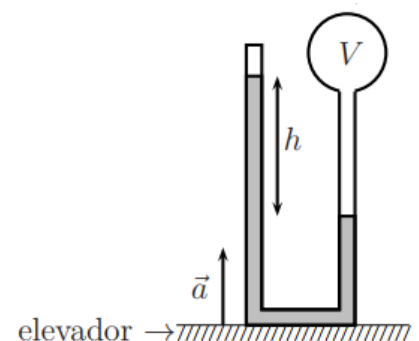
Repare que para esta relação não foi necessário considerar o fato de ser um prisma e um triângulo (caso a base esteja paralela à superfície da água!), portanto esta relação é sempre verdadeira, contanto que o corpo esteja em equilíbrio translacional.

Sendo assim, a relação entre o braço de alavanca das forças de empuxo e peso é sempre igual em ambos os casos, e os módulos das forças também. Ou seja, a análise de estabilidade de uma situação é válida para a outra. Repare que isto ocorreu somente pois a densidade do líquido é o dobro da densidade do bloco.

Gabarito: vide comentários

20. (ITA – 2012)

No interior de um elevador encontra-se um tubo de vidro fino, em forma de U, contendo um líquido sob vácuo na extremidade vedada, sendo a outra conectada a um recipiente de volume V com ar mantido à temperatura constante. Com o elevador em repouso, verifica-se uma altura h de 10 cm entre os níveis do líquido em ambos os braços do tubo. Com o elevador subindo com aceleração constante \vec{a} (ver figura), os níveis do líquido sofrem um deslocamento de altura de 1,0 cm. Pode-se dizer então que a aceleração do elevador é igual a



- a) -1,1 m/s².
- b) -0,91 m/s².

- c) 0,91 m/s².
- d) 1,1 m/s².
- e) 2,5 m/s².

Comentários:

Pelo equilíbrio de pressões na situação inicial:

$$P_0 + \rho \cdot g \cdot h = P_1$$

Em que:

- P_0 é a pressão acima do líquido no braço esquerdo;
- P_1 é a pressão acima do líquido no braço direito (pressão do gás);
- ρ é a densidade do líquido;
- g é a gravidade local;
- h é a diferença de altura entre os braços.

Como há vácuo no braço esquerdo:

$$P_0 = 0 \Rightarrow P_1 = \rho \cdot g \cdot h = 10 \cdot \rho \cdot g$$

Fazendo-se o novo equilíbrio de pressões:

$$P_0 + \rho \cdot g' \cdot h' = P_1'$$

Considerando que:

- a variação do volume V é indiferente (por falta de informações acerca da seção transversal);
- que o vácuo se mantém;
- $h' = h - 2\Delta h$, visto que uma coluna desce Δh e a outra sobe Δh .

$$\rho \cdot (g + a) \cdot 8 = P_1 \Rightarrow \rho \cdot (g + a) \cdot 8 = 10 \cdot \rho \cdot g$$

$$8 \cdot a = 2 \cdot g \Rightarrow a = \frac{g}{4} = 2,5 \text{ m/s}^2$$

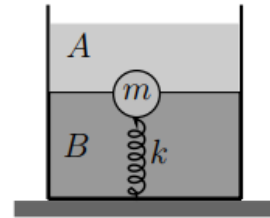
Gabarito: E

21. (ITA – 2013)

Um recipiente contém dois líquidos homogêneos e imiscíveis, A e B, com densidades respectivas ρ_A e ρ_B . Uma esfera sólida, maciça e homogênea, de massa $m = 5 \text{ kg}$, permanece em equilíbrio sob ação de uma mola de constante elástica $k = 800 \text{ N/m}$, com metade de seu volume imerso em cada um dos líquidos, respectivamente, conforme a figura. Sendo $\rho_A = 4\rho$ e $\rho_B = 6\rho$, em que ρ é a densidade da esfera, pode-se afirmar que a deformação da mola é de



- a) 0 m.
- b) 9/16 m.
- c) 3/8 m.
- d) 1/4 m.
- e) 1/8 m.



Comentários:

Pelo equilíbrio do corpo:

$$E_1 + E_2 = m \cdot g + k \cdot x \Rightarrow \rho_A \cdot V_A \cdot g + \rho_B \cdot V_B \cdot g = \rho \cdot V \cdot g + k \cdot x$$

Mas:

$$\begin{cases} V_A = 0,5 \cdot V \\ V_B = 0,5 \cdot V \end{cases}$$

Logo:

$$4 \cdot \rho \cdot \frac{V}{2} \cdot g + 6 \cdot \rho \cdot \frac{V}{2} \cdot g = \rho \cdot V \cdot g + k \cdot x \Rightarrow 4 \cdot \rho \cdot V \cdot g = k \cdot x$$

Mas:

$$\rho \cdot V = m = 5 \text{ kg} \Rightarrow 4 \cdot \rho \cdot V \cdot g = kx$$

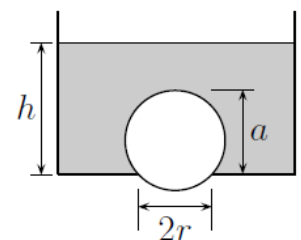
$$20 \cdot 10 = 800 \cdot x \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4} \text{ m}}$$

Gabarito: D

22. (ITA – 2014)

Uma esfera de massa m tampa um buraco circular de raio r no fundo de um recipiente cheio de água de massa específica ρ . Baixando-se lentamente o nível da água, num dado momento a esfera se desprende do fundo do recipiente. Assinale a alternativa que expressa a altura h do nível de água para que isto aconteça, sabendo que o topo da esfera, a uma altura a do fundo do recipiente, permanece sempre coberto de água.

- a) $m/\rho\pi a^2$
- b) $m/\rho\pi r^2$
- c) $a(3r^2 + a^2)/(6r^2)$
- d) $a/2 - m/\rho\pi r^2$
- e) $a(3r^2 + a^2)/(6r^2) - m/\rho\pi r^2$



Comentários:

Fazendo-se o equilíbrio de forças sobre a esfera, quando ela se desprende, tem-se:

$$E + F_{P_{atm}} = P$$

Em que:

- E é o empuxo sofrido pela esfera;
- P é o peso da esfera;
- $F_{P_{atm}}$ é a força por conta da pressão atmosférica sobre a esfera.

Entretanto, não são dadas informações acerca da P_{atm} , portanto esta será desconsiderada. Além disso, pode-se simplificar o cálculo do empuxo. Caso a esfera estivesse inteiramente submersa, o empuxo seria de $\rho \cdot V_{submerso} \cdot g$. No entanto, por conta da não atuação da pressão da água sobre a calota inferior, deve-se descontar esta parcela. Caso houvesse água atuando sobre a parcela, seria de:

$$F = \rho \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot r^2$$

Portanto, o empuxo é de:

$$E = \rho \cdot V_{submerso} \cdot g - \rho \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot r^2$$

Assim:

$$\rho \cdot V_{submerso} \cdot g - \rho \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot r^2 = mg$$

O volume da calota é dado por:

$$V_{submerso} = V_{calota} = \frac{\pi \cdot a}{6} \cdot (3 \cdot r^2 + a^2)$$

Portanto:

$$h = \frac{\frac{\pi \cdot a}{6} \cdot (3 \cdot r^2 + a^2)}{\pi \cdot r^2} - \frac{m}{\rho \cdot \pi \cdot r^2}$$
$$h = \frac{a \cdot (3 \cdot r^2 + a^2)}{6 \cdot r^2} - \frac{m}{\rho \cdot \pi \cdot r^2}$$

Gabarito: E

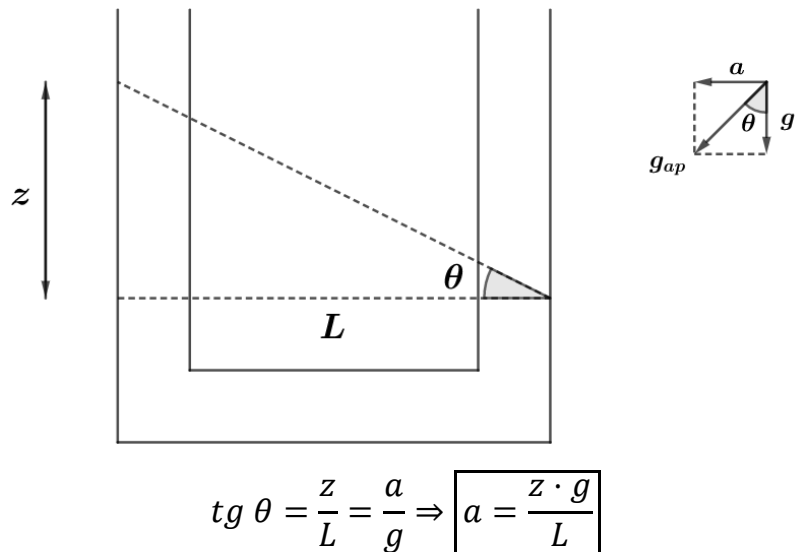
23. (ITA – 2015)

Um tubo em forma de U de seção transversal uniforme, parcialmente cheio até uma altura h com um determinado líquido, é posto num veículo que viaja com aceleração horizontal, o que resulta numa diferença de altura z do líquido entre os braços do tubo interdistantes de um comprimento L . Sendo desprezível o diâmetro do tubo em relação à L , a aceleração do veículo é dada por

- a) $\frac{2zg}{L}$ b) $\frac{(h-z)g}{L}$ c) $\frac{(h+z)g}{L}$ d) $\frac{2gh}{L}$ e) $\frac{zg}{L}$

Comentários:



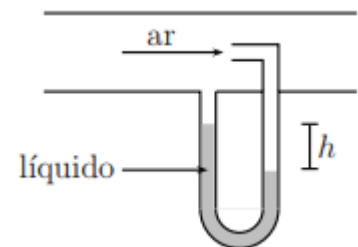


Gabarito: E

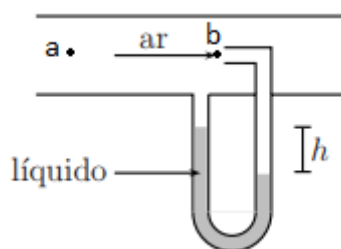
24. (ITA – 2016)

Um estudante usa um tubo de Pitot esquematizado na figura para medir a velocidade do ar em um túnel de vento. A densidade do ar é igual a $1,2 \text{ kg/m}^3$ e a densidade do líquido é $1,2 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$, sendo $h = 10 \text{ cm}$. Nessas condições a velocidade do ar é aproximadamente igual a

- a) 1,4 m/s
- b) 14 m/s
- c) $1,4 \cdot 10^2 \text{ m/s}$
- d) $1,4 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
- e) $1,4 \cdot 10^4 \text{ m/s}$



Comentários:



Pela equação de Bernoulli:

$$p_a + \frac{\rho_{ar} \cdot v^2}{2} = p_b$$

Pela Lei de Stevin:

$$p_b - p_a = \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow \rho \cdot g \cdot h = \frac{\rho_{ar} \cdot v^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho \cdot g \cdot h}{\rho_{ar}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,2 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 0,1}{1,2}} \cong 1,4 \cdot 10^2 \text{ m/s}$$

Gabarito: C

25. (ITA – 2016)

Balão com gás Hélio inicialmente a 27°C de temperatura e pressão de $1,0 \text{ atm}$, as mesmas do ar externo, sobe até o topo de uma montanha, quando o gás se resfria a -23°C e sua pressão reduz-se a $0,33$ de atm , também as mesmas do ar externo. Considerando invariável a aceleração da gravidade na subida, a razão entre as forças de empuxo que atuam no balão nestas duas posições é

- a) 0,33. b) 0,40. c) 1,0. d) 2,5. e) 3,0.

Comentários:

Pela equação de Clapeyron:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow V = \frac{n \cdot R \cdot T}{P}$$

Trabalhando-se mais um pouco:

$$\frac{n}{V} = \frac{P}{R \cdot T} \Rightarrow \frac{\frac{m}{M}}{V} = \frac{P}{R \cdot T}$$
$$\frac{m}{V} = d = \frac{P \cdot M}{R \cdot T}$$

Portanto, com as expressões pra d e V :

$$E = d \cdot V \cdot g = \frac{P \cdot M}{R \cdot T} \cdot \frac{n \cdot R \cdot T}{P} \cdot g = M \cdot n \cdot g$$

Mas, M , n e g são considerados constantes (não tem informações suficientes pra calcular uma possível diferença nas gravidades locais entre as duas posições). Portanto, o empuxo não varia com a altura.

Gabarito: C

26. (ITA – 2016)

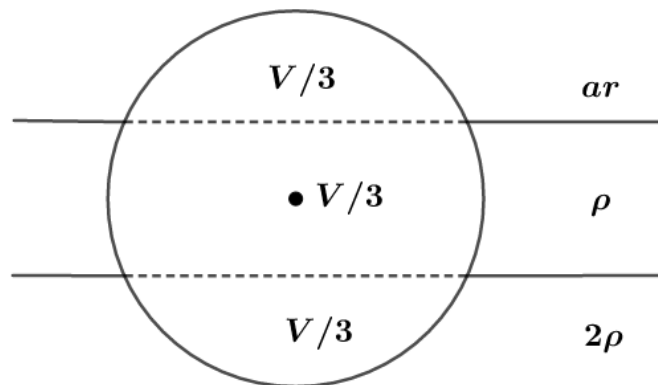
Um corpo flutua estavelmente em um tanque contendo dois líquidos imiscíveis, um com o dobro da densidade do outro, de tal forma que as interfaces líquido/líquido e líquido/ar dividem o volume do corpo exatamente em três partes iguais. Sendo completamente removido o líquido mais leve, qual proporção do volume do corpo permanece imerso no líquido restante?

- a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$



- c) $\frac{3}{4}$
- d) $\frac{2}{5}$
- e) $\frac{3}{5}$

Comentários:



Pelo equilíbrio de forças na situação inicial:

$$P = E_1 + E_2 \Rightarrow P = \rho \cdot \frac{V}{3} \cdot g + 2\rho \cdot \frac{V}{3} \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$$

Retirando-se o líquido mais leve e fazendo-se novamente o equilíbrio:

$$P = E \Rightarrow \rho \cdot V \cdot g = 2 \cdot \rho \cdot V_{submerso} \cdot g$$

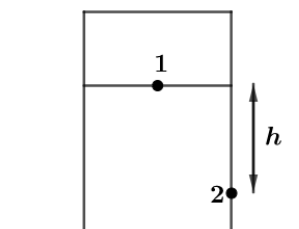
$$\frac{V_{submerso}}{V} = \frac{1}{2}$$

Gabarito: A

27. (ITA-2016)

Um cilindro vertical de seção reta de área A_1 , fechado, contendo gás e água é posto sobre um carrinho que pode se movimentar horizontalmente sem atrito. A uma profundidade h do cilindro, há um pequeno orifício de área A_2 por onde escoa a água. Num certo instante a pressão do gás é p , a massa de água, M_a e a massa restante do sistema, M . Determine a aceleração do carrinho nesse instante mencionado em função dos parâmetros dados. Justifique as aproximações eventualmente realizadas.

Comentários:



Pela equação de Bernoulli:

$$p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = p_{atm} + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2}$$

Para relacionar v_1 e v_2 , utiliza-se a equação da continuidade:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot v_2$$

(Notar que se optou por achar v_1 em função de v_2 pois mais para frente precisaremos fazer a conservação da quantidade de movimento. Para isso necessitaremos de v_2).

Substituindo:

$$p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \cdot v_2^2 = p_{atm} + \rho \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

$$\frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right) = p - p_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$$

$$v_2^2 = \frac{2 \cdot (p - p_{atm} + \rho \cdot g \cdot h)}{\rho \cdot \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}$$

Agora, pela conservação da quantidade de movimento:

$$(M + M_a) \cdot dv = dm \cdot v_2$$

$$(M + M_a) \cdot dv = (\rho \cdot A_2 \cdot v_2 \cdot dt) \cdot v_2$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\rho \cdot A_2 \cdot v_2^2}{M + M_a} = \frac{\rho \cdot A_2 \cdot \frac{2 \cdot (p - p_{atm} + \rho \cdot g \cdot h)}{\rho \cdot \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}}{M + M_a}$$

Como $\frac{dv}{dt}$ é a aceleração:

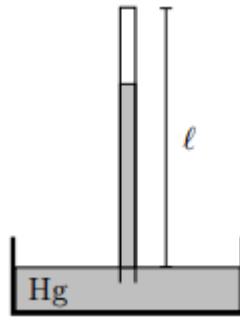
$$a = \frac{2 \cdot A_2 \cdot (p - p_{atm} + \rho \cdot g \cdot h)}{(M + M_a) \cdot \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}$$

$$\text{Gabarito: } a = \frac{2A_2}{M+M_a} \cdot \left(\frac{p-p_{atm}+\rho \cdot g \cdot h}{1-\frac{A_2^2}{A_1^2}}\right)$$

28. (ITA – 2017)

Em equilíbrio, o tubo emborcado da figura contém mercúrio e ar aprisionado. Com a pressão atmosférica de 760 mm de Hg a uma temperatura de 27°C, a altura da coluna de mercúrio é de 750 mm. Se a pressão atmosférica cai a 740 mm de Hg a uma temperatura de 2°C, a coluna de mercúrio é de 735 mm. Determine o comprimento l aparente do tubo.





Comentários:

Pela Lei de Stevin, na situação inicial:

$$p_{gás,1} + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_{atm,1} \Rightarrow p_{gás,1} + 750 = 760$$

$$p_{gás,1} = 10 \text{ mmHg}$$

Na situação final:

$$p_{gás,2} + \rho \cdot g \cdot h_2 = p_{atm,2} \Rightarrow p_{gás,2} + 735 = 740$$

$$p_{gás,2} = 5 \text{ mmHg}$$

Considerando-se que houve uma transformação gasosa ideal:

$$\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{10 \cdot (l - 750) \cdot A}{300} = \frac{5 \cdot (l - 735) \cdot A}{275}$$

Em que:

- l é o comprimento aparente;
- A é a área de seção do tubo.

$$30l - 30 \cdot 735 = 55l - 55 \cdot 750$$

$$25l = 55 \cdot 750 - 30 \cdot 735$$

$$l = 11 \cdot 150 - 6 \cdot 147$$

$$l = 1650 - 882$$

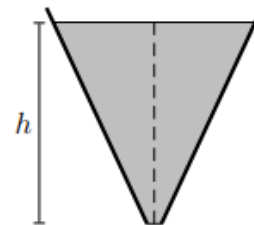
$$\boxed{l = 768 \text{ mm}}$$

Gabarito: $l = 768 \text{ mm}$

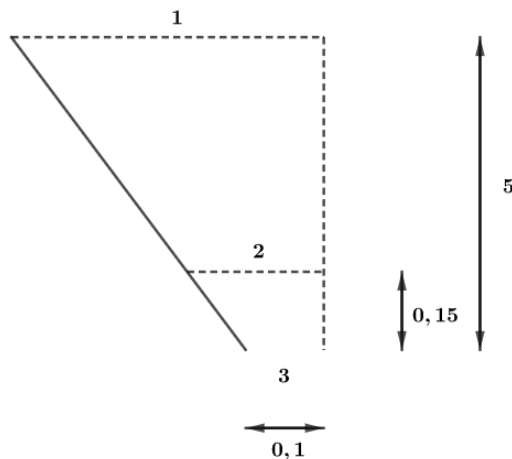
29. (ITA – 2018)

Na figura, o tanque em forma de tronco de cone, com $10,0 \text{ cm}$ de raio da base, contém água até o nível de altura $h = 500 \text{ cm}$, com 100 cm de raio da superfície livre. Removendo-se a tampa da base, a água começa a escoar e, nesse instante, a pressão no nível a $15,0 \text{ cm}$ de altura é de

- a) 100 kPa.
- b) 102 kPa.
- c) 129 kPa.
- d) 149 kPa.
- e) 150 kPa.



Comentários:



Como há escoamento, utiliza-se a equação de Bernoulli entre os pontos 1 e 3:

$$p_1 + \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_3 + \rho \cdot \frac{v_3^2}{2}$$

Mas:

$$p_1 = p_3 = p_{atm}$$

Logo:

$$(v_3^2 - v_1^2) = 2 \cdot g \cdot h_1$$

Pela equação da continuidade:

$$A_1 \cdot v_1 = A_3 \cdot v_3 \Rightarrow v_1 = \frac{A_3}{A_1} \cdot v_3 = 10^{-2} \cdot v_3$$

Substituindo:

$$v_3^2 - v_1^2 \cong v_3^2 = 2 \cdot g \cdot h_1 \Rightarrow v_3 = 10 \text{ m/s}$$

Aplicando equação de Bernoulli entre os pontos 2 e 3:

$$p_3 + \rho \cdot \frac{v_3^2}{2} = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \rho \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

$$\rho \cdot \left(\frac{v_3^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} - g \cdot h_2 \right) + p_3 = p_2$$

Para relacionar as velocidades pela equação da continuidade é necessário relacionar as áreas. Pela semelhança de triângulos na figura, temos:

$$\frac{1 - 0,1}{5} = \frac{x - 0,1}{0,15} \Rightarrow x = 0,127 \text{ m}$$

Agora, pela equação da continuidade:

$$A_2 \cdot v_2 = A_3 \cdot v_3 \Rightarrow \pi \cdot \frac{r_2^2}{2} \cdot v_2 = \pi \cdot \frac{r_3^2}{2} \cdot v_3 \Rightarrow (0,127)^2 \cdot v_2 = (0,1)^2 \cdot v_3$$

$$v_2 = 10 \cdot \left(\frac{0,1}{0,127}\right)^2 \cong 6,2 \text{ m/s}$$

Substituindo em Bernoulli:

$$10^3 \cdot \left(50 - \frac{(6,2)^2}{2} - 10 \cdot 0,127\right) + 10^5 = p_2 \Rightarrow p_2 = 29,51 \cdot 10^3 + 10^5 \cong 129 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

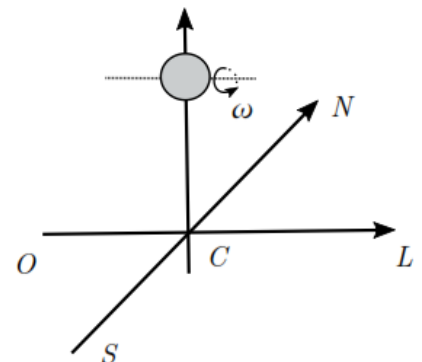
$$p_2 = 129 \text{ kPa}$$

Gabarito: C

30. (ITA – 2019)

Uma bola é deixada cair conforme mostra a figura. Inicialmente, ela gira com velocidade angular ω no sentido anti-horário para quem a observa do Leste, sendo nula a velocidade do seu centro de massa. Durante a queda, o eixo de rotação da bola permanece sempre paralelo à direção oeste-leste. Considerando o efeito do ar sobre o movimento de queda da bola, são feitas as seguintes afirmações:

- I. A bola está sujeita apenas a forças verticais e, portanto, cairá verticalmente.
- II. A bola adquire quantidade de movimento para o norte (N) ou para o oeste (O).
- III. A bola adquire quantidade de movimento para o leste (L) ou para o sul (S).
- IV. Quanto maior for a velocidade angular ω da bola, mais ela se afastará do ponto C .



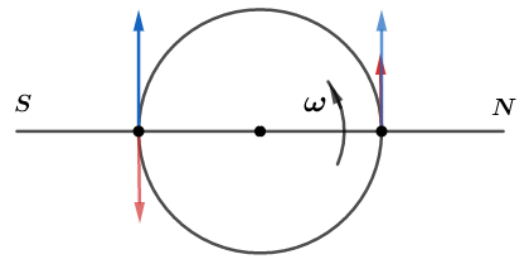
Está(ão) correta(s) apenas

- a) I. b) II e IV. c) III e IV. d) III. e) II.

Comentários:

Boa questão que cobra do candidato o conhecimento do chamado Efeito Magnus.

Considere a figura ao lado, em que os vetores azuis representam a velocidade do ar sobre a bola, repare que ambos são dirigidos para cima, ao passo que os a velocidade provocada pela rotação da bola, expressa pela equação $V = \omega \cdot R$, tem sentidos diferentes a depender do lado da bola a ser analisado. Repare que no lado mais próximo ao norte a velocidade resultante terá módulo maior se comparado ao lado mais próximo ao sul. Sabe-se que quanto maior a velocidade menor é a pressão do ar e, portanto, a pressão do ar é maior no lado mais próximo ao sul. Isso provoca uma força com direção sobre o eixo horizontal, e com sentido sul para norte. A força ocasiona uma aceleração que faz com que a bola adquira movimento para norte.



I. FALSO. O Efeito Magnus demonstra que existem forças horizontais, portanto, não se pode falar em uma queda meramente vertical.

II. VERDADEIRO. Conforme demonstrado na figura, a bola adquire movimento para norte, ou para oeste, dependendo do referencial adotado.

III. FALSO. Vide resolução e demonstrações que apontam movimento para norte ou oeste.

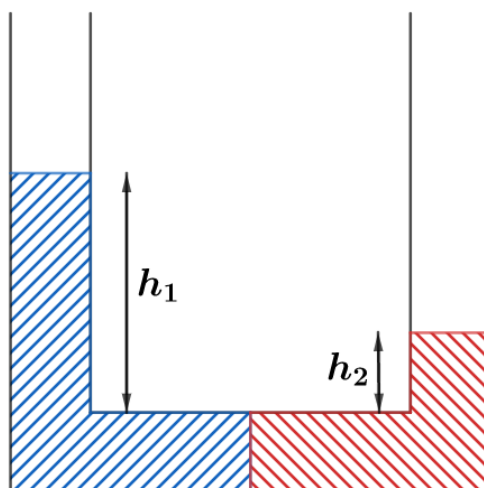
IV. VERDADEIRO. Quanto maior a velocidade angular, maior será a diferença entre as velocidades nos pontos mais próximos ao sul e ao norte, ocasionando maior diferença de pressão e uma maior força, que causará um maior deslocamento horizontal da bola do ponto C.

Gabarito: B

31. (IME)

Dois líquidos imiscíveis em um tubo em U (seção constante) tem as densidades na relação de dez para um: o menos denso tem a superfície livre 10 cm acima da separação dos líquidos. Qual a diferença de nível entre as superfícies livres nos dois ramos do tubo?

Comentários:



Pela lei de Stevin:

$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 + p_{atm} = \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + p_{atm}$$



Mas:

$$h_1 = 10$$

E:

$$\rho_2 = 10\rho_1$$

Logo:

$$\rho_1 \cdot g \cdot 10 = 10\rho_1 \cdot g \cdot h_2$$

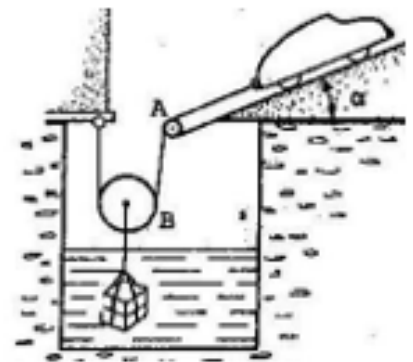
$$h_2 = 1\text{cm}$$

Logo, a diferença de nível entre as superfícies livres é de 9 cm.

Gabarito: 9 cm

32. (IME – 1982)

O automóvel de massa m_1 , representado na figura, está subindo a rampa de inclinação com uma aceleração constante. Preso ao automóvel existe um cabo de massa desprezível o qual passa por uma roldana fixa A e por uma roldana móvel B , ambas de massa desprezível, tendo finalmente a outra extremidade fixa em D . Ao eixo da roldana móvel, cujos fios são paralelos, está presa uma caixa cúbica de volume V e massa m_2 imersa em um líquido de massa específica ρ . Sabendo-se que o automóvel, partindo do repouso, percorreu um espaço “ e ” em um intervalo de tempo t e que a caixa permaneceu inteiramente submersa neste período, calcular a força desenvolvida pelo conjunto motor do automóvel. Desprezar a resistência oferecida pelo líquido ao deslocamento da caixa.



Comentários:

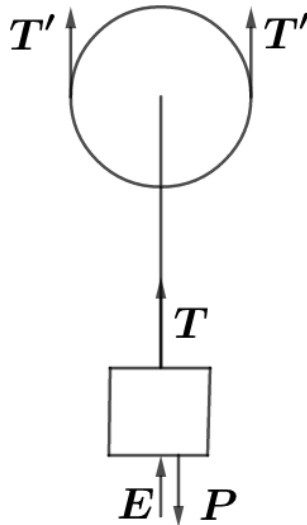
Pela equação horária:

$$e = \frac{a}{2} \cdot t^2 \Rightarrow a = 2 \cdot e \cdot \frac{1}{t^2}$$

Sabendo-se a aceleração desenvolvida pelo carro, é necessário relacionar todas as forças do problema de modo a obter a resultante e aplicar a segunda lei de Newton.

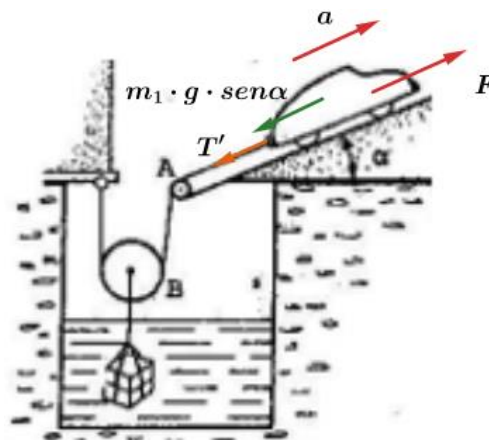
O bloco suspenso na polia móvel está representado a seguir:





$$\begin{cases} T' = \frac{T}{2} \\ T + E = P \end{cases} \Rightarrow T = m_2 \cdot g - \rho \cdot V \cdot g \Rightarrow T' = \frac{T}{2}$$

O carro está representado a seguir:



$$F - m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \alpha - T' = m_1 \cdot a$$

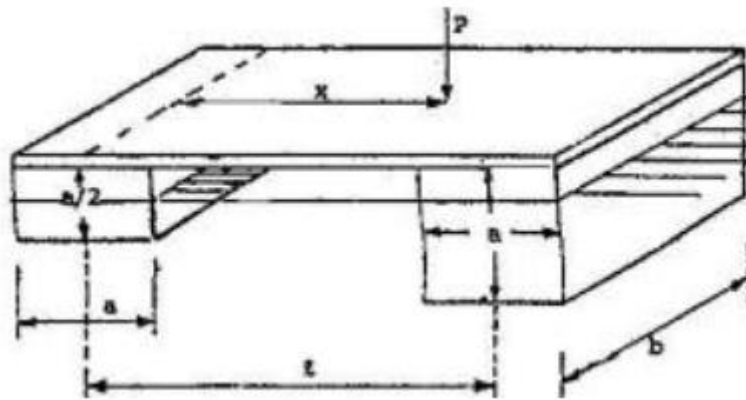
$$F = \frac{m_1 \cdot 2 \cdot e}{t^2} + m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \alpha + \frac{m_2 \cdot g}{2} - \frac{\rho \cdot V \cdot g}{2}$$

Gabarito: $m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \alpha + \frac{2 \cdot m_1 \cdot e}{t^2} + \frac{m_2 \cdot g}{2} - \frac{\rho \cdot V \cdot g}{2}$

33. (IME – 1982)

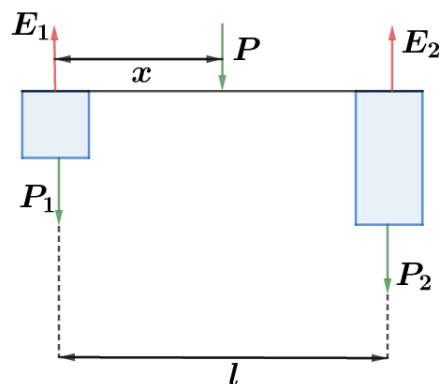
O flutuador da figura é constituído de duas vigas de madeira de comprimento b e seções $(a \times a)$ e $(a \times \frac{a}{2})$ distantes l de centro a centro. Sobre as vigas existe uma plataforma de peso desprezível. Determinar, em função de a, b, l, P e γ a posição da carga x para que a plataforma permaneça na horizontal.

Dados:



- γ = peso específico da água.
- Densidade da madeira em relação à água = 0,80.

Comentários:



Pelo equilíbrio translacional da plataforma:

$$P + P_1 + P_2 = E_1 + E_2$$

Sendo que:

$$P_1 = \frac{a^2}{2} \cdot b \cdot \gamma \cdot 0,8 \Rightarrow P_2 = a^2 \cdot b \cdot \gamma \cdot 0,8$$

$$E_1 = a \cdot \left(h - \frac{a}{2} \right) \cdot b \cdot \gamma \Rightarrow E_2 = a \cdot h \cdot b \cdot \gamma$$

Substituindo:

$$P + \frac{2 \cdot a^2 \cdot b \cdot \gamma}{5} + \frac{4 \cdot a^2 \cdot b \cdot \gamma}{5} = a \cdot b \cdot \gamma \cdot 2h - \frac{a^2 \cdot b \cdot \gamma}{2}$$

$$2h = \frac{P}{a \cdot b \cdot \gamma} + \frac{17}{10} \cdot a \Rightarrow \boxed{h = \frac{P}{2 \cdot a \cdot b \cdot \gamma} + \frac{17 \cdot a}{20}}$$

Pelo equilíbrio rotacional com polo no centro da viga menor:

$$P \cdot x + P_2 \cdot l = E_2 \cdot l$$

Mas:

$$P_2 = a^2 \cdot b \cdot \gamma \cdot 0,8$$

$$E_2 = a \cdot b \cdot \gamma \cdot \left(\frac{P}{2 \cdot a \cdot b \cdot \gamma} + \frac{17 \cdot a}{20} \right) = \frac{P}{2} + \frac{17 \cdot a^2 \cdot b \cdot \gamma}{20}$$

Assim:

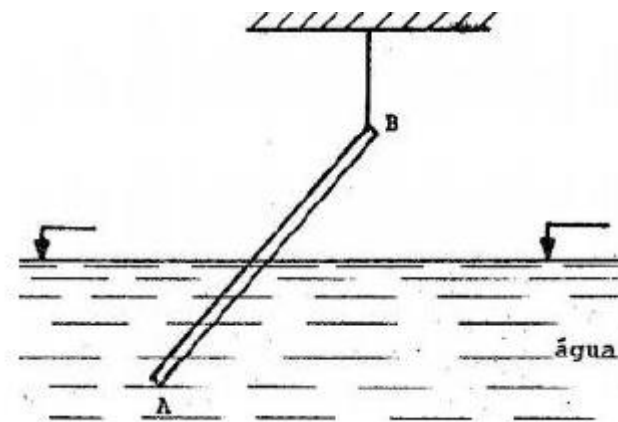
$$P \cdot x = l \cdot \left(\frac{P}{2} + \frac{17 \cdot a^2 \cdot b \cdot \gamma}{20} - \frac{4 \cdot a^2 \cdot b \cdot \gamma}{5} \right)$$

$$x = \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{a \cdot b \cdot \gamma}{10P} + 1 \right)$$

Gabarito: $x = \frac{l}{2} \cdot \left(1 + \frac{\gamma a^2 b}{10P} \right)$

34. (IME – 1986)

Uma barra uniforme e delgada AB de 3,6 m de comprimento, pesando 120 N, é segura na extremidade B por um cabo, possuindo na extremidade A um peso de chumbo de 60N. A barra flutua, em água, com metade do seu comprimento submerso, como é mostrado na figura abaixo.



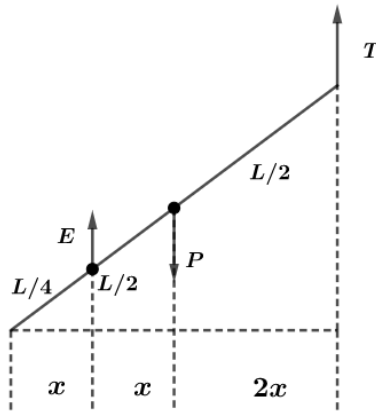
Desprezando empuxo sobre o chumbo, calcule:

- O valor da força de tração no cabo.
- O volume total da barra.

Dados:

- $g = 10 \text{ m/s}^2$ - aceleração da gravidade;
- $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ - massa específica da água.

Comentários:



Pelo equilíbrio rotacional com o centro da parte submersa da haste tem-se:

$$x \cdot P_{chumbo} + T \cdot 3x = P_{barra} \cdot x \Rightarrow 60 + 3 \cdot T = 120 \Rightarrow \boxed{T = 20 \text{ N}}$$

Agora, fazendo-se o equilíbrio translacional do corpo:

$$T + E = P_{barra} + P_{chumbo} \Rightarrow 20 + E = 180$$

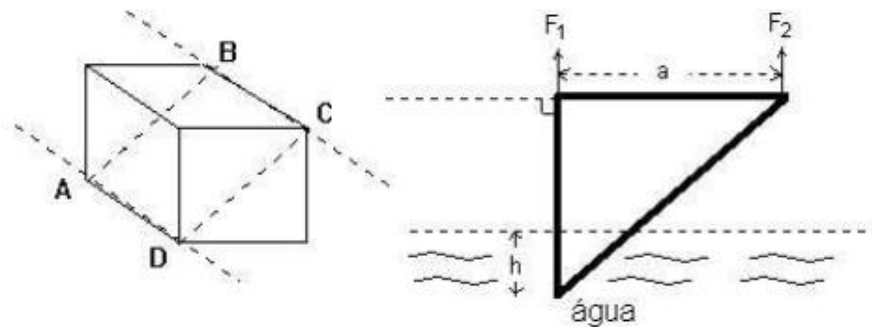
$$E = 160 \text{ N} = \rho \cdot V_{submerso} \cdot g \Rightarrow 160 = 10^3 \cdot \frac{V_{barra}}{2} \cdot 10$$

$$\boxed{V_{barra} = 320 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}$$

Gabarito: a) 20 N b) 0,032 m³

35. (IME – 1999)

Um objeto de massa m é construído ao seccionar-se ao meio um cubo de aresta a pelo plano que passa pelos seus vértices $ABCD$, como mostrado nas figuras abaixo. O objeto é parcialmente imerso em água, mas mantido em equilíbrio por duas forças F_1 e F_2 . Determine:



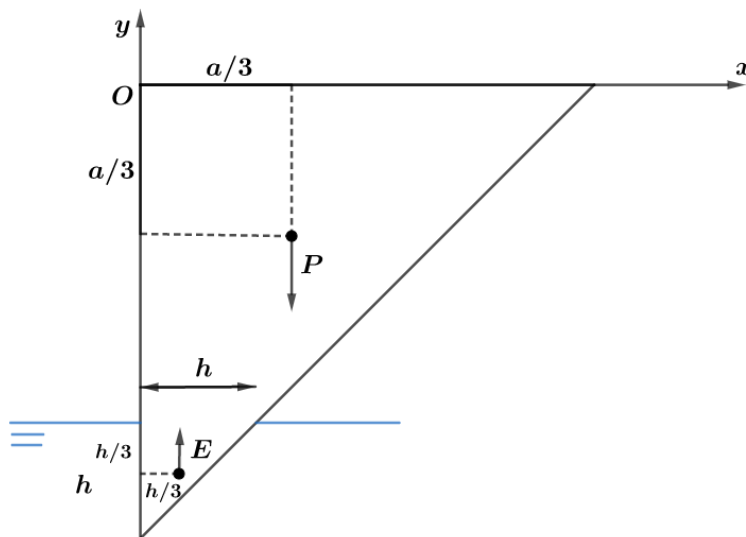
- o módulo do empuxo que age sobre o objeto;
- os pontos de aplicação do empuxo e do peso que agem sobre o objeto;
- os módulos e os pontos de aplicação das forças verticais F_1 e F_2 capazes de equilibrar o objeto.

Dados:

- aceleração da gravidade (g);
- massa específica da água (μ);

- profundidade de imersão (h);
- a massa m é uniformemente distribuída pelo volume do objeto.

Comentários:



$$E = \mu \cdot V_{\text{submerso}} \cdot g \Rightarrow E = \mu \cdot \frac{h^2}{2} \cdot a \cdot g$$

Para achar os pontos de aplicação é necessário lembrar que as forças peso e empuxo atuam no centro de gravidade do corpo (coincide com o centro geométrico no caso de corpo homogêneo) e no centro geométrico da parcela submersa do corpo, respectivamente.

Assim, tomando O como origem:

$$P_{\text{peso}} = \left(\frac{a}{3}; -\frac{a}{3}\right) \text{ e } P_{\text{empuxo}} = \left(\frac{h}{3}; -a + \frac{2h}{3}\right)$$

Pelo equilíbrio translacional:

$$F_1 + F_2 + E = P = m \cdot g + \frac{\mu \cdot a \cdot g \cdot h^2}{2}$$

Pelo equilíbrio rotacional em torno de O:

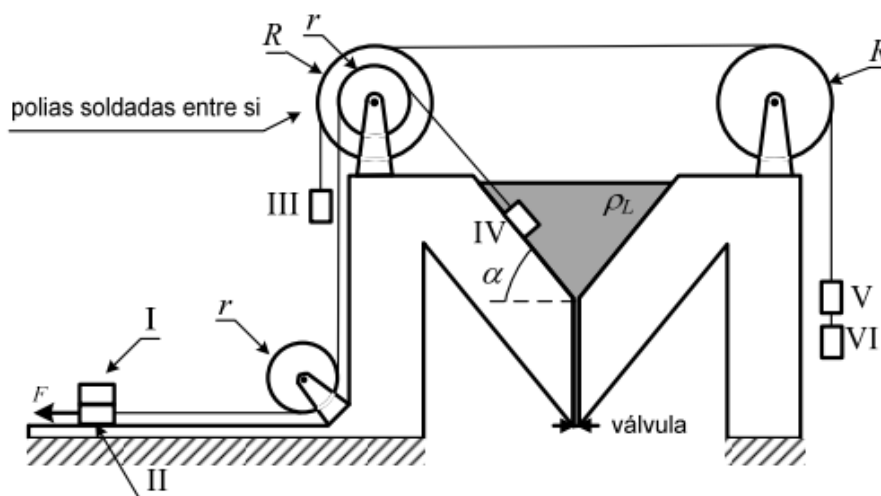
$$F_2 \cdot a + E \cdot \frac{h}{3} = P \cdot \frac{a}{3} \Rightarrow F_2 = \frac{mg}{3} - \frac{\mu \cdot a \cdot g \cdot h^2}{2} \cdot \frac{h}{3 \cdot a} \Rightarrow \boxed{F_2 = \frac{mg}{3} - \frac{\mu \cdot g \cdot h^3}{6}}$$

Substituindo no equilíbrio translacional:

$$\boxed{F_1 = \frac{2 \cdot m \cdot g}{3} + \frac{\mu \cdot g \cdot h^2}{2} \left(\frac{h}{3} - a\right)}$$

Gabarito: a) $\frac{\mu \cdot h^2 \cdot a \cdot g}{2}$ b) O é a origem: $P = \left(\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$ $E = \left(\frac{h}{3}; -a + \frac{2h}{3}\right)$ c) $F_1 = \frac{2 \cdot m \cdot g}{3} + \frac{\mu \cdot g \cdot h^2}{2} \left(\frac{h}{3} - a\right)$; $F_2 = \frac{m \cdot g}{3} - \frac{\mu \cdot g \cdot h^3}{6}$

36. (IME – 2016)



Seis blocos idênticos, identificados conforme a figura, encontram-se interligados por um sistema de cordas e polias ideais, inicialmente em equilíbrio estático sob ação de uma força F , paralela ao plano de deslizamento do bloco II e sentido representado na figura. Considere que: o conjunto de polias de raios r e R são solidárias entre si; não existe deslizamento entre os cabos e as polias; e existe atrito entre os blocos I e II e entre os blocos II e IV com as suas respectivas superfícies de contato. Determine:

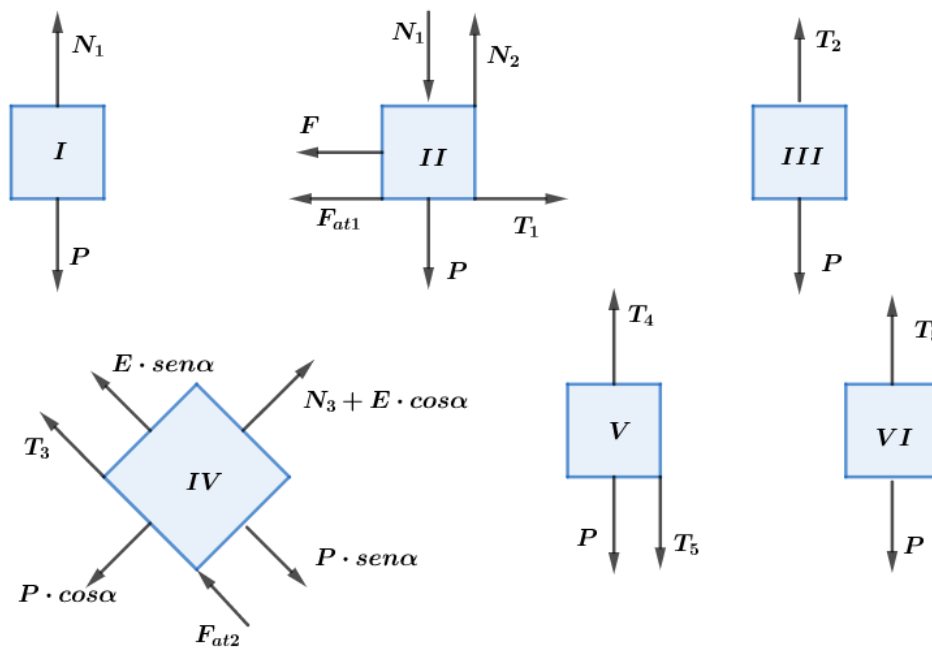
- o menor valor do módulo da força F para que o sistema permaneça em equilíbrio estático;
- o maior valor do módulo da força F para que o sistema permaneça em equilíbrio estático quando a válvula for aberta e o líquido totalmente escoado;
- o maior valor do módulo da força F para que não haja deslizamento entre os blocos I e II, admitindo que a válvula tenha sido aberta, o tanque esvaziado e a força F aumentado de modo que o sistema tenha entrado em movimento.

Dados:

- aceleração da gravidade: g ;
- massa específica de cada bloco: ρ_B ;
- volume de cada bloco: V_B ;
- massa específica do líquido: ρ_L ;
- coeficiente de atrito entre os blocos I e II: μ ;
- coeficiente de atrito estático entre o bloco II e o solo: $1,5 \mu$;
- coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco II e o solo: $1,4 \mu$;
- coeficiente de atrito estático entre o bloco IV e a superfície com líquido: $0,5 \mu$;
- coeficiente de atrito estático entre o bloco IV e a superfície sem líquido: $0,85 \mu$;
- coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco IV e a superfície sem líquido: $0,75 \mu$;
- ângulo entre a superfície de contato do bloco IV e a horizontal: α .

Comentários:

Analisando cada bloco separadamente:



a) Fazendo-se os equilíbrios:

$$\begin{aligned}
 I: N_1 &= P \\
 II: \begin{cases} N_2 = N_1 + P \\ F = T_1 - F_{at1} \end{cases} \\
 III: T_2 &= P \\
 IV: \begin{cases} T_3 = P \cdot \text{sen } \alpha - E \cdot \text{sen } \alpha - F_{at2} \\ N_3 = P \cdot \text{cos } \alpha - E \cdot \text{cos } \alpha \end{cases} \\
 V: T_4 &= P + T_5 \\
 VI: T_5 &= P
 \end{aligned}$$

E, pelo equilíbrio da polia:

$$T_1 \cdot r + T_2 \cdot R = T_3 \cdot r + T_4 \cdot R$$

Com VI em V:

$$T_4 = 2 \cdot P$$

Com IV(y) em IV(x):

$$T_3 = P \cdot \text{sen } \alpha - E \cdot \text{sen } \alpha - 0,5 \cdot \mu \cdot (P \cdot \text{cos } \alpha - E \cdot \text{cos } \alpha)$$

Com I, II(x) e II(y):

$$F = T_1 - 1,5 \cdot \mu \cdot 2 \cdot P$$

Pelo equilíbrio da roldana:

$$T_1 = \frac{(P \cdot \text{sen } \alpha - E \cdot \text{sen } \alpha - 0,5 \cdot \mu \cdot (P \cdot \text{cos } \alpha - E \cdot \text{cos } \alpha)) \cdot r + 2P \cdot R - P \cdot R}{r}$$

Substituindo os valores e variáveis:

$$T_1 = \frac{V_B \cdot g \cdot r \cdot (\rho_B \cdot \text{sen } \alpha - \rho_L \cdot \text{sen } \alpha - 0,5 \cdot \mu(\rho_B \cdot \cos \alpha - \rho_L \cdot \cos \alpha)) + \rho_B \cdot V_B \cdot g \cdot R}{r}$$

$$T_1 = V_B \cdot g \cdot (\rho_B - \rho_L) \left(\text{sen } \alpha - \frac{\mu}{2} \cdot \cos \alpha \right) + \rho_B \cdot V_B \cdot g \cdot \frac{R}{r}$$

Substituindo na expressão de F:

$$F = V_B \cdot g \left[\rho_B \left(\frac{R}{r} - 3 \cdot \mu \right) + (\rho_B - \rho_L) \left(\text{sen } \alpha - \frac{\mu}{2} \cdot \cos \alpha \right) \right]$$

b) Quando a válvula for totalmente aberta, as únicas equações que são alteradas são as do bloco IV. As novas equações de equilíbrio do bloco IV encontram-se abaixo (basta adotar $E = 0$ e mudar-se o sentido da força de atrito, visto que se deseja a força F máxima):

$$IV: \begin{cases} T_3 = P \cdot \text{sen } \alpha + F_{at_2} \\ N_3 = P \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

A equação de equilíbrio do bloco I também se altera pois agora deseja-se a força máxima. Portanto:

$$I: F = T_1 + F_{at_1} = T_1 + 3 \cdot \mu \cdot P$$

Assim, mantém-se que:

$$T_4 = 2 \cdot P$$

$$T_2 = P$$

Com IV(x) e IV(y) novos, tem-se:

$$T_3 = P \cdot \text{sen } \alpha + 0,85 \cdot \mu \cdot P \cdot \cos \alpha$$

Pelo equilíbrio das roldanas solidárias:

$$T_1 = \frac{P \cdot (\text{sen } \alpha + 0,85 \cdot \mu \cdot \cos \alpha) \cdot r + 2 \cdot P \cdot R - P \cdot R}{r}$$

$$T_1 = \rho_B \cdot V_B \cdot g \cdot (\text{sen } \alpha - 0,85 \cdot \mu \cdot \cos \alpha) + \rho_B \cdot V_B \cdot g \cdot \frac{R}{r}$$

Substituindo na nova expressão de I:

$$F = \rho_B \cdot V_B \cdot g \cdot \left[\frac{R}{r} + \mu(3 + 0,85 \cdot \cos \alpha) + \text{sen } \alpha \right]$$

c) Com o sistema em movimento, as equações se alteram significativamente. Primeiramente os blocos I e II:

$$I: \begin{cases} N_1 = P \\ m \cdot a = \mu \cdot N \end{cases}$$

$$II: \begin{cases} N_2 = N_1 + P \\ F - F_{at_1} - \mu \cdot N_1 - T_1 = m \cdot a \end{cases}$$

Com I e II:

$$a = \mu \cdot g$$

$$F = 1,4 \cdot \mu \cdot 2P + \mu \cdot P + \mu \cdot P + T_1$$

$$F = 4,8 \cdot \mu \cdot P + T_1$$



A aceleração dos blocos I e II é igual à do bloco IV, visto que o fio é inextensível. Logo, as equações do bloco IV ficam:

$$IV: \begin{cases} T_3 - P \cdot \operatorname{sen} \alpha - F_{at_2} = m \cdot a \\ N_3 = P \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

Daqui, tira-se:

$$T_3 = m \cdot g \cdot \operatorname{sen} \alpha + m \cdot \mu \cdot g + 0,75 \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$T_3 = m \cdot g \cdot (\operatorname{sen} \alpha + \mu \cdot (1 + 0,75 \cdot \cos \alpha))$$

Devido as roldanas solidárias, a aceleração angular de ambas deve ser igual. Assim:

$$\frac{a}{r} = \frac{a'}{R} \Rightarrow a' = \mu \cdot g \cdot \frac{R}{r}$$

Utilizando esta informação para o equilíbrio do bloco III:

$$III: P - T_2 = m \cdot a'$$

De onde tira-se que:

$$T_2 = m \cdot g - m \cdot \mu \cdot g \cdot \frac{R}{r} = m \cdot g \cdot \left(1 - \mu \cdot \frac{R}{r}\right)$$

Para o equilíbrio do bloco VI:

$$VI: T_5 - P = m \cdot a'$$

Logo:

$$T_5 = m \cdot g \cdot \left(1 + \mu \cdot \frac{R}{r}\right)$$

Finalmente, o equilíbrio do bloco V fica:

$$T_4 - (P + T_5) = m \cdot a' \Rightarrow T_4 = 2 \cdot m \cdot g \cdot \left(1 + \mu \cdot \frac{R}{r}\right)$$

Como as polias têm massa desprezível, o momento resultante sobre elas é nulo (pois o momento de inércia é nulo):

$$T_1 \cdot r + T_2 \cdot R = T_3 \cdot r + T_4 \cdot R$$

Substituindo:

$$T_1 = \frac{m \cdot g \cdot (\operatorname{sen} \alpha + \mu \cdot (1 + 0,75 \cdot \cos \alpha)) \cdot r + 2 \cdot m \cdot g \cdot \left(1 + \mu \cdot \frac{R}{r}\right) \cdot R - m \cdot g \cdot \left(1 - \mu \cdot \frac{R}{r}\right) \cdot R}{r}$$

Assim:

$$T_1 = m \cdot g \cdot (\operatorname{sen} \alpha + \mu(1 + 0,75 \cdot \cos \alpha)) + \frac{R}{r} \cdot m \cdot g \cdot \left(1 + 3 \cdot \mu \cdot \frac{R}{r}\right)$$

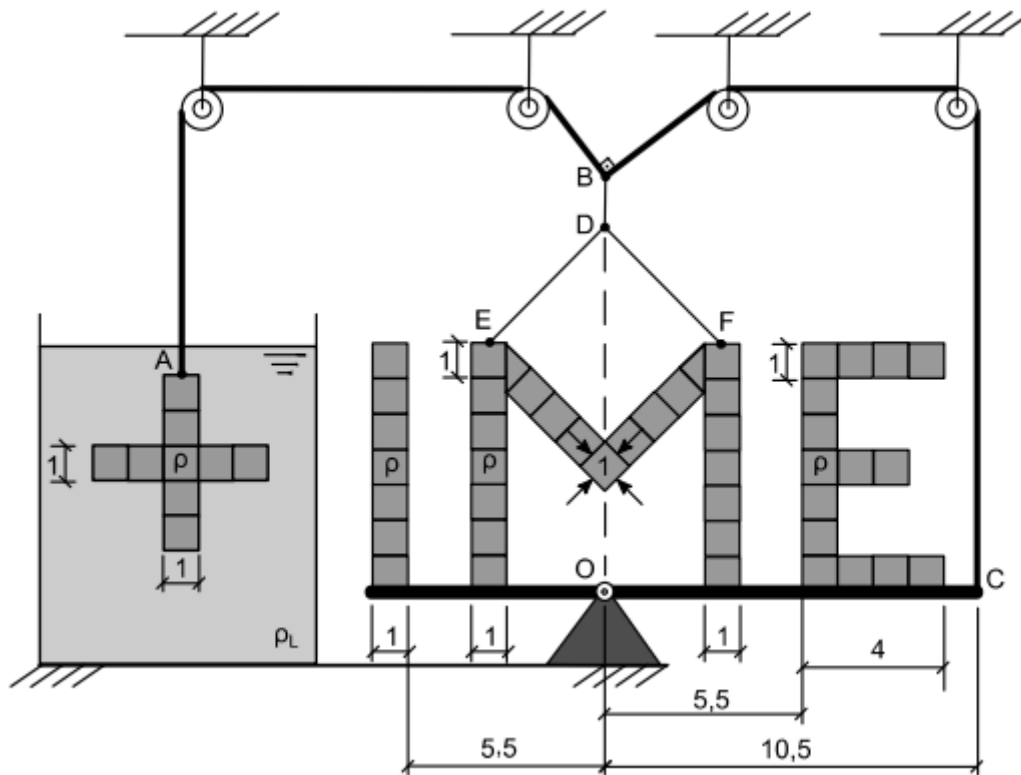
Finalmente, substituindo na expressão para F:

$$F = \rho_B V_B g \left[\mu(5,8 + 0,75 \cos \alpha) + \operatorname{sen} \alpha + \frac{R}{r} \left(3 \frac{R}{r} \mu + 1 \right) \right]$$



Gabarito: a) $F = V_{BG} \left[\rho_B \left(\frac{R}{r} - 3\mu \right) + \left(\text{sen} \alpha - \frac{\mu}{2} \cos \alpha \right) (\rho_B - \rho_L) \right]$ b) $F = \rho_B V_{BG} \left[\frac{R}{r} + \mu(3 + 0,85 \cos \alpha) + \text{sen} \alpha \right]$ c) $F = \rho_B V_{BG} \left[\mu(5,8 + 0,75 \cos \alpha) + \text{sen} \alpha + \frac{R}{r} \left(3 \frac{R}{r} \mu + 1 \right) \right]$

37. (IME – 2017)



O sistema apresentado na figura encontra-se em equilíbrio estático, sendo composto por quatro corpos homogêneos, com seção reta na forma “+ I M E”. O corpo “+” está totalmente imerso em um líquido e sustentado pela extremidade A de um fio flexível ABC, de peso desprezível, que passa sem atrito por polias fixas ideais. Sabe-se que, no ponto B, o fio forma um ângulo de 90° e sustenta parcialmente o peso do corpo “M”. Finalmente, na extremidade C, o fio é fixado a uma plataforma rígida de peso desprezível e ponto de apoio O, onde os corpos “I M E” estão apoiados. Diante do exposto, determine:

- a intensidade da força de tração no fio BD;
- a intensidade da força de cada base do corpo “M” sobre a plataforma.

Observação:

- dimensão das cotas dos corpos “+ I M E” na figura em unidade de comprimento (u.c.);
- considere fios e polias ideais; e
- existem dois meios cubos compondo a letra “M”

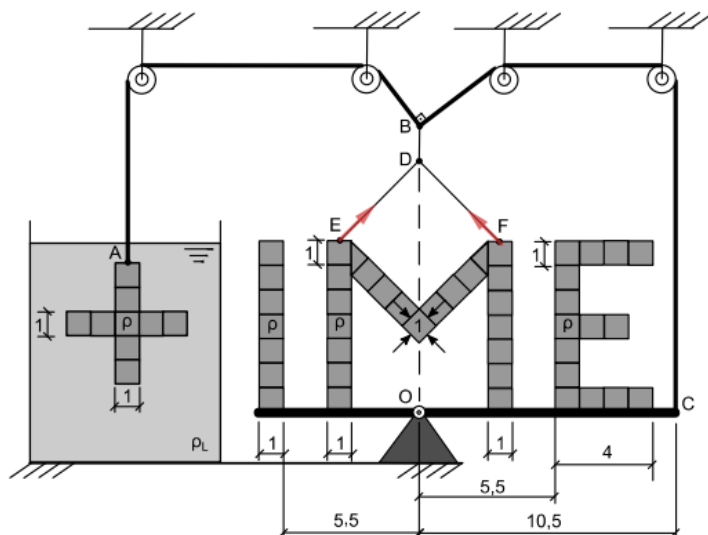
Dados:

- aceleração da gravidade: g;

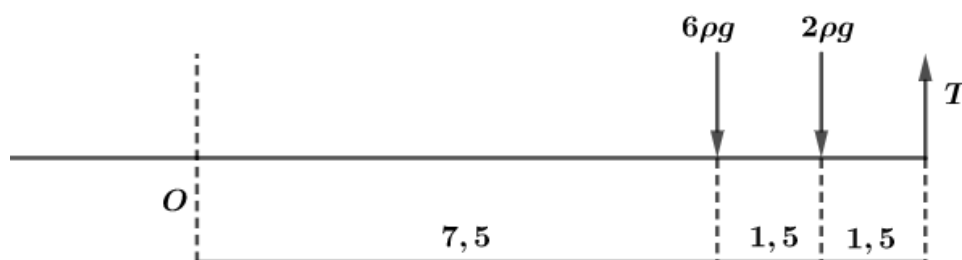
- massa específica dos corpos “+ I M E”: ρ ;
- massa específica do líquido: $\rho_L = \rho/9$;
- espessura dos corpos “+ I M E”: 1 u.c.; e
- comprimento dos fios $DE = DF$.

Comentários:

Em questões trabalhosas como esta, onde houver a presença de rótulas ou barras apoiadas em um ponto e em equilíbrio rotacional, é importante que o aluno busque simetrias do problema e na distribuição de cargas de modo a minimizar seu trabalho. Nesta questão por exemplo, pode-se observar algumas simetrias representadas abaixo:



Notar que os quadrados pintados têm um simétrico em relação ao eixo vertical que passa por O (a altura dos quadrados não interessa, somente a carga e a distância horizontal já que as forças aplicadas são todas verticais). Assim, tem-se que:



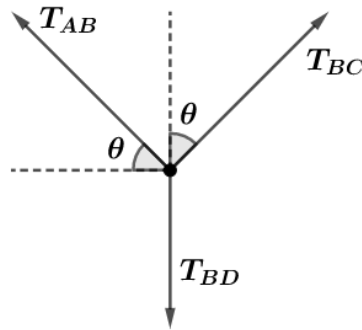
$$7,5 \cdot 6 \cdot \rho \cdot g + 9 \cdot 2 \cdot \rho \cdot g = T_{BC} \cdot 10,5$$

$$T_{BC} = \frac{63}{10,5} \cdot \rho \cdot g = 6 \cdot \rho \cdot g$$

Agora, analisando-se o equilíbrio translacional do corpo “+”:

$$P = E + T_{AB} \Rightarrow 9 \cdot \rho \cdot g = 9 \cdot \rho_L \cdot g + T_{AB}$$

$$T_{AB} = 9 \cdot g \cdot \left(\rho - \frac{\rho}{9} \right) \Rightarrow T_{AB} = 8 \cdot \rho \cdot g$$



Pelo equilíbrio translacional do nó B:

$$T_{AB} \cdot \cos \theta = T_{BC} \cdot \sin \theta \Rightarrow \frac{8}{6} = \operatorname{tg} \theta$$

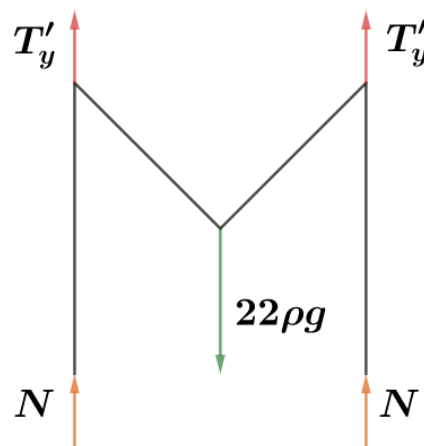
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5} \text{ e } \cos \theta = \frac{3}{5}$$

Logo:

$$T_{AB} \cdot \sin \theta + T_{BC} \cdot \cos \theta = T_{BD} \Rightarrow 8 \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{4}{5} + 6 \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{3}{5} = T_{BD}$$

$$T_{BD} = 10 \cdot \rho \cdot g$$

Finalmente, pelo equilíbrio do corpo M:



$$22 \cdot \rho \cdot g - 2 \cdot T'_y = 2 \cdot N$$

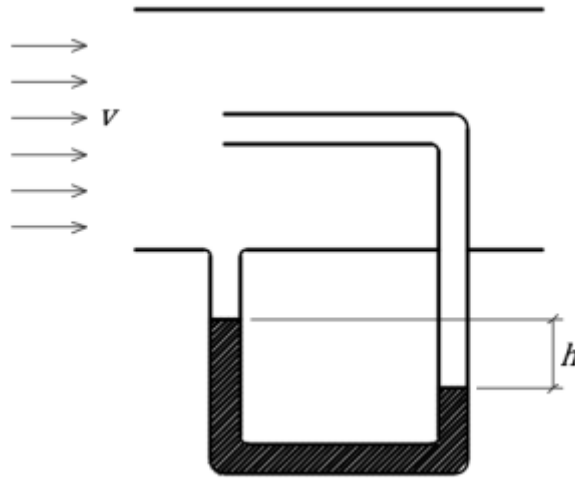
Mas, pelo equilíbrio do nó D:

$$2 \cdot T'_y = T_{BD} \Rightarrow 22 \cdot \rho \cdot g - 10 \cdot \rho \cdot g = 2 \cdot N$$

$$N = 6 \cdot \rho \cdot g$$

Gabarito: a) $T_{BD} = 10 \rho g$ b) $N = 6 \rho g$

38. (IME – 2018)



A figura acima mostra esquematicamente um tipo de experimento realizado em um túnel de vento com um tubo de Pitot, utilizado para medir a velocidade v do ar que escoa no túnel de vento. Para isso, a diferença de nível h entre as colunas do líquido é registrada. Em um dia frio, o experimento foi realizado e foi obtido o valor de $10,00 \text{ cm}$ para a diferença de nível h . Em um dia quente, o experimento foi repetido e foi obtido o valor de $10,05 \text{ cm}$ para a diferença de nível h . Determine:

- o valor do coeficiente de dilatação volumétrica do líquido no interior do tubo, sabendo que a variação de temperatura entre o dia quente e o dia frio foi de 25 K ;
- a velocidade do ar v .

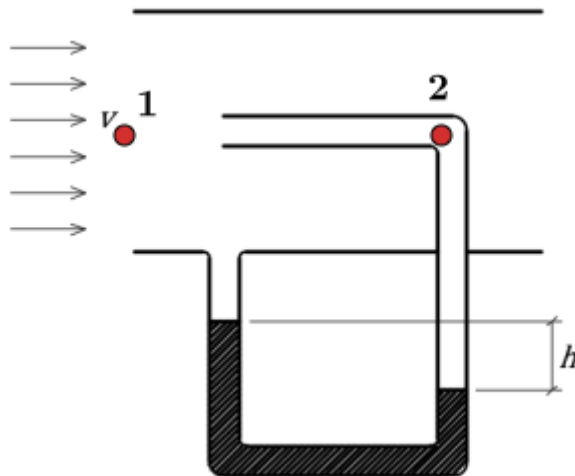
Dados:

- a massa específica do líquido é 1.000 vezes maior que a massa específica do ar no dia frio; e
- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Considerações:

- a velocidade do ar no túnel de vento foi a mesma nos dois experimentos;
- a massa específica do ar foi a mesma nos dois experimentos;
- a aceleração da gravidade foi a mesma nos dois experimentos; e
- despreze a dilatação térmica da estrutura do tubo de Pitot.

Comentários:



Pela equação de Bernoulli:

$$p_1 + \rho_{ar} \cdot \frac{v^2}{2} = p_2$$

Mas:

$$p_2 - p_1 = \rho_{liq} \cdot g \cdot h$$

Substituindo:

$$\rho_{ar} \cdot \frac{v^2}{2} = \rho_{liq} \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{\rho_{ar} \cdot v^2}{2 \cdot g \cdot \rho_{liq}}$$

Comparando as alturas medidas entre os dois dias:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_{liq_2}}{\rho_{liq_1}} = \frac{\frac{m_{liq_2}}{V_2}}{\frac{m_{liq_1}}{V_1}} = \frac{V_1}{V_2} = 1,005$$

Mas:

$$V_1 = V_2 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T) \Rightarrow 1,005 = 1 + \gamma \cdot 25$$

$$\gamma = 2 \cdot 10^{-4} K^{-1}$$

Como:

$$v^2 = 2 \cdot \frac{\rho_{liq}}{\rho_{ar}} \cdot g \cdot h$$

Então:

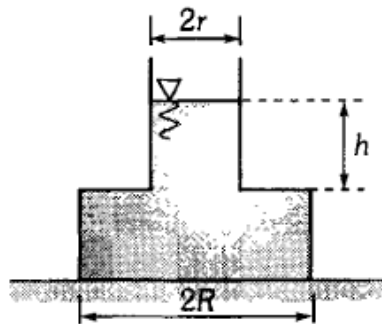
$$v = \sqrt{2 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 0,1} \Rightarrow \boxed{v = 20\sqrt{5} \text{ m/s}}$$

Gabarito: a) $\gamma = 2 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ b) $v = 20\sqrt{5} \text{ m/s}$

39.



Um recipiente sem base, de peso P e de paredes cilíndricas encontra-se sobre uma mesa. As bordas do recipiente estão bem ajustadas a mesa. O recipiente começa a ser enchido com água até uma altura h , quando praticamente perde o contato com a mesa. Determine a densidade do líquido.



- a) $\frac{P}{2gh\pi(R^2-r^2)}$
- b) $\frac{2P}{gh\pi(R^2-r^2)}$
- c) $\frac{P}{gh\pi R^2}$
- d) $\frac{P}{gh\pi r^2}$
- e) $\frac{P}{gh\pi(R^2-r^2)}$

Comentários:

Após ultrapassar o desnível das paredes do recipiente, o aumento da coluna d'água gera um aumento da pressão causada pelo líquido sobre as paredes internas do recipiente. Essa pressão é de:

$$p_{int} = p_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$$

Enquanto a pressão externa é considerada como a atmosférica. Portanto, a força gerada por conta dessa diferença de pressão é de:

$$F = \rho \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

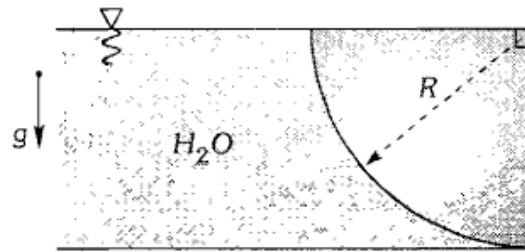
Quando o recipiente levanta:

$$F = P \Rightarrow \rho = \frac{P}{g \cdot h \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2)}$$

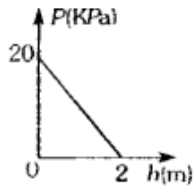
Gabarito: E

40.

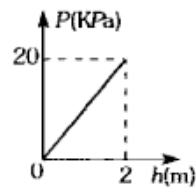
Determine o gráfico que corresponde a pressão hidrostática na superfície do cilindro em função da profundidade h . ($R = 2 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$).



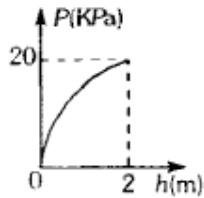
a)



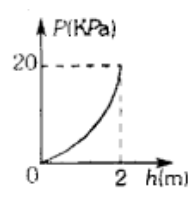
b)



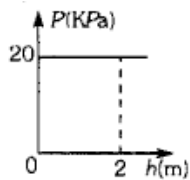
c)



d)



e)



Comentários:

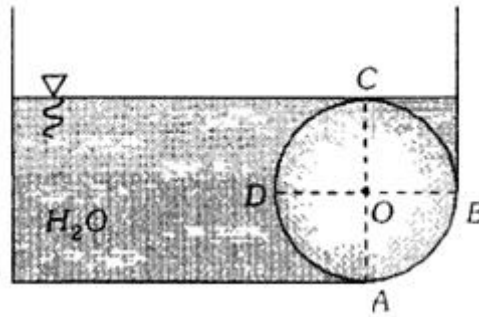
A pressão depende apenas da profundidade, ela não é afetada pela direção da superfície. Portanto, o comportamento deve-se manter linear crescente com a profundidade, seguindo a Lei de Stevin.

Gabarito: B

41.

O cilindro de raio R e geratriz L cobre completamente o buraco AB , impedindo que haja passagem de água. Em relação a força hidrostática, assinale a alternativa incorreta.





- a) $\frac{3}{2}\rho_{\text{água}}gR^2L$, na direção horizontal
 b) $0,5\rho_{\text{água}}gR^2L$, na direção vertical sobre a superfície BC
 c) $\rho_{\text{água}}gR^2L$, na direção vertical sobre o volume ADC
 d) $0,5\rho_{\text{água}}gR^2L$, na direção vertical para baixo
 e) $2\rho_{\text{água}}gR^2L$ horizontal sobre BC

Comentários:

Para cálculo da força horizontal, podemos analisar a pressão exercida somente sobre a seção AC. Para isso, a área afetada é a área da seção AC, e a pressão utilizada para cálculo será a média da máxima e mínima.

Neste caso, para o lado esquerdo do cilindro:

$$\rho_{max} = \rho \cdot g \cdot 2R$$

$$\rho_{min} = 0$$

$$\rho_{médio} = \rho \cdot g \cdot R$$

$$A_{seção} = 2 \cdot R \cdot L$$

A força horizontal sobre o lado esquerdo é de:

$$\boxed{F_{xADC} = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L}$$

Para o lado direito:

$$F_{BC} = \left(\frac{0 + \rho \cdot g \cdot R}{2} \right) \cdot R \cdot L$$

$$\boxed{F_{xBC} = \frac{\rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L}{2}}$$

Para o cálculo das forças verticais:

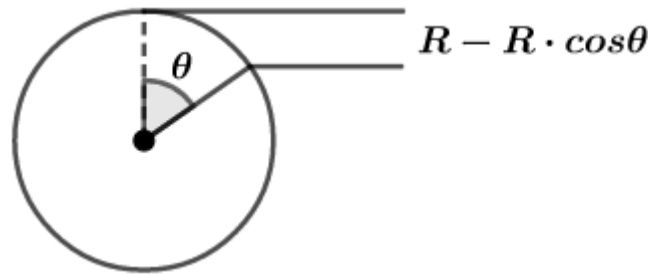
- ADC é considerado completamente submerso, portanto, basta calcular o empuxo daquele volume. (A força está para cima)

$$\boxed{F_{yADC} = \rho \cdot \frac{\pi \cdot R^2 \cdot L}{2} \cdot g}$$

Resta descobrir a força vertical hidrostática sobre BC. Pode-se calculá-lo pela integral abaixo:

$$F_{BC} = \int P \cdot dA$$

No caso, P é a pressão sobre a área infinitesimal. É necessário colocar tudo em função de uma só variável. Fazemos isso com θ representado abaixo:



Portanto:

$$P(\theta) = \rho \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos \theta)$$

A área é dada por:

$$dA(\theta) = R \cdot d\theta \cdot L$$

Como deseja-se somente a componente vertical:

$$F_{y_{BC}} = \int P \cdot dA \cdot \cos \theta$$

$$F_{y_{BC}} = \int \rho \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos \theta) \cdot R \cdot L \cdot \cos \theta \cdot d\theta$$

$$F_{y_{BC}} = \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta - \cos^2 \theta) \cdot d\theta$$

$$F_{y_{BC}} = \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L \cdot \left(\left(\sin \theta - \frac{\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$\boxed{F_{y_{BC}} = \rho \cdot g \cdot R^2 \cdot L \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)}$$

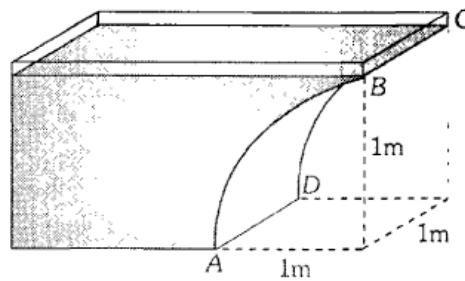
OBS: De outra maneira, pode-se calcular a força vertical em BC como sendo a força causada pelo peso da água acima da face. Portanto:

$$F_{y_{BC}} = \rho \cdot g \cdot L \cdot \left(R^2 - \frac{\pi R^2}{4} \right)$$

Gabarito: A

42.

O recipiente mostrado abaixo está cheio de água. Determine a força horizontal que exerce a água sobre a superfície ABCD (parte de um cilindro) ($g = 10 \text{ m/s}^2$).



- a) 2000 N b) 3000 N c) 4000 N d) 5000 N e) 7850 N

Comentários:

A força horizontal será:

$$F_x = P_{\text{médio}} \cdot A_{\text{perpendicular}} \Rightarrow F_x = \frac{\rho \cdot g \cdot 1 + 0}{2} \cdot 1$$
$$F_x = \frac{10^4}{2} = 5000N$$

Gabarito: D

43.

Uma bolha de ar se desprende do fundo de um lago. Ao chegar à superfície seu volume havia triplicado. Determine a profundidade do lago.

- a) 5 m b) 10 m c) 15 m d) 20 m e) 25 m

Comentários:

Considerando que ocorre uma transformação isotérmica de um gás ideal:

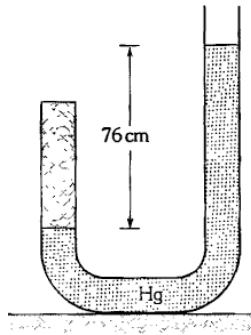
$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2 \quad P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot 3 \cdot V_1$$
$$P_2 = \frac{P_1}{3}$$

Sabe-se que cada 10m de água equivale à 1 atm e que a pressão final (P_2) é de 1 atm. Portanto, P_1 é de 3 atm, e a profundidade seria de 20 m.

Gabarito: D

44.

A coluna de ar mostrada na figura tem 18 cm. Que comprimento adicional de mercúrio deve-se colocar para que o volume de ar se reduza de 1/3?

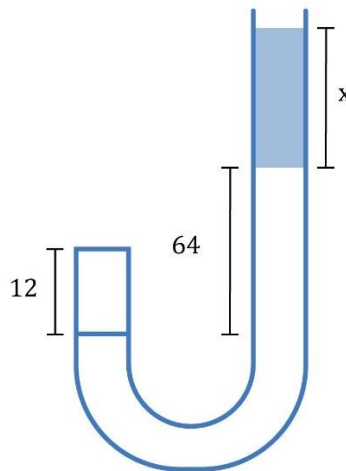


- a) 100 cm b) 88 cm c) 76 cm d) 60 cm e) 48 cm

Comentários:

Transformação isotérmica implica que se o volume cai para $\frac{2}{3}$ do original, a pressão aumenta em $\frac{3}{2}$.

A situação final está representada a seguir:



Em que x é a altura de mercúrio adicionada. Pelo equilíbrio de pressões:

$$P_{gas} = 64cmHg + x + P_{atm}$$

Mas, sabendo-se que a pressão inicial é de $2atm$ ($76mmHg$ + pressão atmosférica):

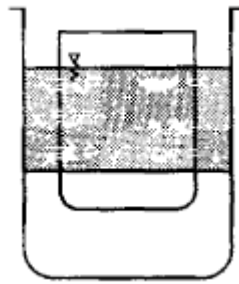
$$P_{gás} = 2 \cdot 76 \cdot \frac{3}{2} = 228 cmHg \Rightarrow 228 = 64 + x + 76$$

$$x = 88 cm$$

Gabarito: B

45.

Um cilindro flutua parcialmente submerso em água e azeite, tal como mostra a figura abaixo. Se adicionamos mais azeite ao recipiente

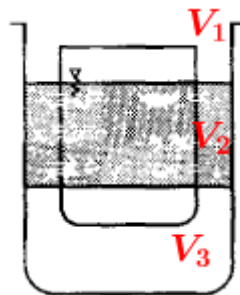


- a) o volume submerso em água aumenta.
- b) o volume submerso em água não varia.
- c) o volume submerso em água diminui.
- d) o volume submerso em água diminui, mas rapidamente aumenta.
- e) não é possível prever.

Comentários:

Ao se acrescentar mais azeite, a altura da fase de azeite aumentará. Como neste problema o corpo está parcialmente submerso (parte ainda está exposto ao ar), ao se aumentar a altura da fase de azeite (menos denso que a água), o corpo como um todo estará mais submerso (visto que uma parte dele passará a estar submersa no azeite), no entanto, seu volume submerso em água diminui, pois um volume maior estará submerso em azeite.

O empuxo necessário fornecido pela água diminui, portanto o volume submerso em água diminui. Visualmente:



O empuxo causado pelos volumes 2 e 3 em conjunto se mantém (= ao peso). O empuxo causado por V_2 aumenta, portanto o causado pelo V_3 diminui, ou seja, V_3 diminui.

Gabarito: C

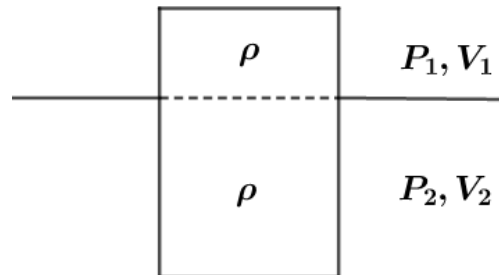
46.

Na superfície de separação de dois líquidos com densidades ρ_1 e ρ_2 flutua um objeto de densidade ρ ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). A altura do objeto vale h . Determine a profundidade submersa no segundo líquido.

- a) $\frac{\rho_1}{\rho_2} h$

- b) $\frac{\rho - \rho_1}{2\rho_1 - \rho_2} h$
 c) $\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} h$
 d) $\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_1} h$
 e) $\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho} h$

Comentários:



Pelo equilíbrio:

$$P = E_1 + E_2 \Rightarrow \rho \cdot V \cdot g = \rho_1 \cdot V_1 \cdot g + \rho_2 \cdot V_2 \cdot g$$

Mas:

$$V = V_1 + V_2$$

E, chamando de A a seção transversal do cilindro:

$$\frac{V}{A} = h \Rightarrow \frac{V_1}{A} = h_1 \Rightarrow \frac{V_2}{A} = h_2$$

Logo:

$$h = h_1 + h_2 \Rightarrow h_1 = h - h_2$$

Assim:

$$\begin{aligned} \rho \cdot h_1 + \rho \cdot h_2 &= \rho_1 \cdot h_1 + \rho_2 \cdot h_2 \\ \rho \cdot h - \rho \cdot h_2 + \rho \cdot h_2 &= \rho_1 \cdot h - \rho_1 \cdot h_2 + \rho_2 \cdot h_2 \\ (\rho - \rho_1) \cdot h &= (\rho_2 - \rho_1) \cdot h_2 \end{aligned}$$

$$h_2 = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot h$$

Gabarito: C

47.

Um cubo de estanho ($\rho_{Sn} = 7,3 \text{ g/cm}^3$) de 16 cm de aresta, flutua em mercúrio ($\rho_{Hg} = 13,6 \text{ g/cm}^3$). Se sobre o mercúrio coloca-se água; qual é a mínima espessura de água colocada para que cubra a face superior do cubo?

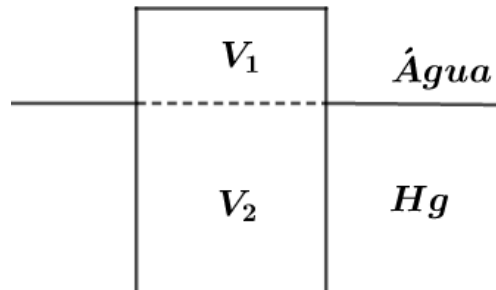
- a) 2 cm
 b) 3 cm



- c) 4 cm
- d) 6 cm
- e) 8 cm

Comentários:

Tem-se a seguinte situação:



$$P = E_1 + E_2 \Rightarrow 7,3 \cdot 16^3 = 1 \cdot 16^2 \cdot h_1 + 13,6 \cdot 16^2 \cdot h_2$$

Mas:

$$h_1 + h_2 = 16 \Rightarrow h_2 = 16 - h_1$$

Assim:

$$7,3 \cdot 16 = h_1 + 13,6 \cdot (16 - h_1)$$

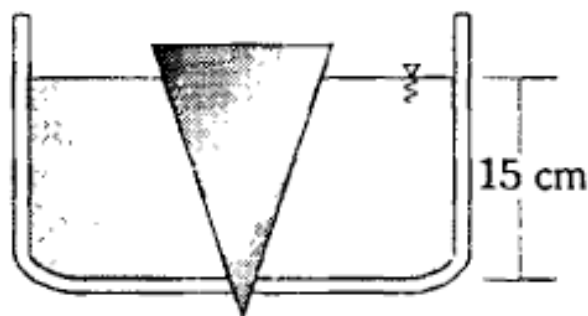
$$16 \cdot (13,6 - 7,3) = 12,6 \cdot h_1$$

$$\boxed{h_1 = 8 \text{ cm}}$$

Gabarito: E

48.

Um orifício de 400 cm^2 de área situado no fundo do recipiente que contém água é tampado por um cone. Se a altura do cone é 60 cm e sua base tem área 1600 cm^2 , qual é força hidrostática resultante que atua sobre o cone?

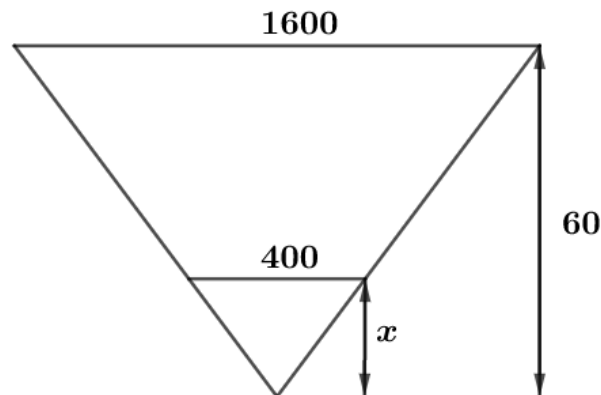


- a) 15 N
- b) 25 N
- c) 35 N
- d) 45 N
- e) 60 N

Comentários:

Há duas formas de se resolver o problema. A primeira é considerar que o volume submerso é somente aquele que não está diretamente sobre o buraco:

$$E = \rho \cdot V_s \cdot g$$



E, por semelhança, acha-se que:

$$\frac{x}{60} = \sqrt{\frac{400}{1600}} \Rightarrow x = 60 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30 \text{ cm}$$

Portanto, tem-se um tronco de cone com altura de 15 cm submerso. Sua base menor é de 400 cm², sua base maior de:

$$\left(\frac{45}{60}\right)^2 = \frac{A_{maior}}{1600} \Rightarrow A_{maior} = 1600 \cdot \frac{9}{16} = 900 \text{ cm}^2$$

Mas, é importante lembrar que se deseja apenas a porção que não está diretamente sobre o orifício. Portanto, na realidade utilizar-se-á um tronco de cone com um orifício cilíndrico de base 400 cm² e altura 15 cm.

O volume do tronco de cone é:

$$V_{tronco} = \frac{900 \cdot 45}{3} - \frac{400 \cdot 30}{3} = 9500 \text{ cm}^3$$

O volume do cilindro é de:

$$V_{cilindro} = 400 \cdot 15 = 6000 \text{ cm}^3$$

Assim:

$$V_{submerso} = 3500 \text{ cm}^3$$

Portanto:

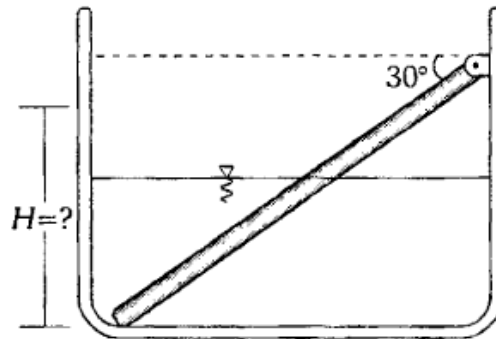
$$E = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 3500 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$E = 35 \text{ N}$$

Gabarito: C

49.

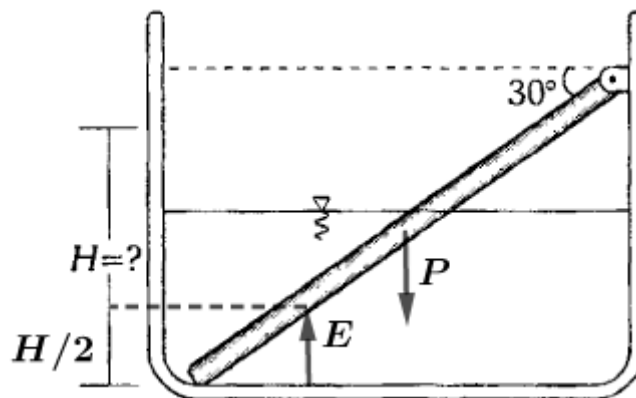
Uma barra homogênea de 10 m de comprimento e 960 kg/m^3 de densidade se encontra parcialmente submersa em água, com sua extremidade livre apoiada no fundo do recipiente. Calcule a altura mínima de água para que a barra perca o contato com o fundo do recipiente.



- a) 1 m
- b) 2 m
- c) 4 m
- d) 5 m
- e) 6 m

Comentários:

Na iminência da barra perder o contato:



Calculando o equilíbrio rotacional em torno da fixação da barra:

$$M_P = M_E$$

$$P \cdot 10 \cdot \frac{\cos 30^\circ}{2} = E \cdot \left(10 \cdot \cos 30^\circ - \frac{H}{2 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} \right)$$

Mas:

$$P = 10 \cdot 960 \cdot A \cdot 10 = 9,6 \cdot 10^4 \cdot A$$

$$E = 1000 \cdot A \cdot 2H \cdot 10 = 2 \cdot 10^4 \cdot A \cdot H$$

Em que A é a área de seção transversal da barra.

Substituindo:

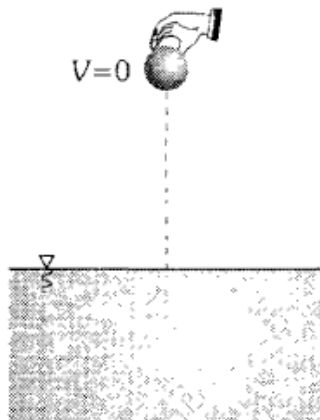
$$9,6 \cdot 10^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 2 \cdot 10^4 \cdot H \left(5 \cdot \sqrt{3} - H \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$
$$2,4 \cdot 10 = H \cdot (10 - H)$$
$$H^2 - 10H + 24 = 0$$
$$H = 6 \text{ m ou } H = 4 \text{ m}$$

Como $H = 4 \text{ m}$ ocorre primeiro, este é o caso a ser considerado.

Gabarito: C

50.

Uma esfera de 3 kg e densidade 3000 kg/m^3 é solta sobre um lago. Se considerarmos que a densidade da água varia de acordo com a equação $\rho = (1000 + 2h) \text{ kg/m}^3$ ($h = \text{profundidade}$), determine o trabalho realizado pela força de empuxo até a esfera alcançar sua velocidade máxima. O lago é muito profundo e não apresenta viscosidade. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



- a) 5 kJ
- b) 10 kJ
- c) 15 kJ
- d) 20 kJ
- e) 25 kJ

Comentários:

A velocidade máxima ocorre quando:

$$E = P \Rightarrow \rho_{\text{água}} \cdot V \cdot g = \rho_{\text{esf}} \cdot V \cdot g$$
$$1000 + 2h = 3000 \Rightarrow h = 1000 \text{ m}$$

Agora, para calcular o trabalho do empuxo, se a força fosse constante:

$$\tau = F \cdot d$$

Como a força varia linearmente com a profundidade, pode-se tomar a força média dada por:

$$F_{m\u00e9dia} = \frac{F_{M\u00e1x} + F_{M\u00edn}}{2} = \frac{3000 \cdot V_s \cdot 10 + 0}{2} = 15000 \cdot V_s$$

Em que, podemos calcular V_s como:

$$V_s = \frac{3}{3000} = 10^{-3}$$

Portanto:

$$F_{m\u00e9dia} = 15 N$$

Assim, o trabalho fica:

$$\tau = 15 \cdot 1000 = 15 kJ$$

Gabarito: C

51.

Dentro de um bloco de gelo h\u00e1 uma moeda de 20 g e densidade $2 g/cm^3$. Calcule o desn\u00edvel da \u00e1gua quando o bloco de gelo derreter. A \u00e1rea do fundo do recipiente \u00e9 $50 cm^2$.



Coment\u00e1rios:

No equil\u00edbrio do gelo sem as moedas, 90% dele estaria submerso. Ao se acrescentar as moedas ao problema, pode-se considerar que se-colocou um pequeno volume com o dobro da densidade da \u00e1gua.

Se a densidade fosse igual \u00e0 da \u00e1gua o gelo n\u00e3o iria mudar em nada sua posi\u00e7\u00e3o. No entanto, como ele apresenta o dobro da densidade da \u00e1gua, o volume que ele ocupa V , implica que o gelo dever\u00e1 submergir tamb\u00e9m V (al\u00e9m do V submerso da moeda) de modo a manter seu equil\u00edbrio.

$$\begin{aligned} m_{gelo} \cdot g &= \rho \cdot V_{gelo_{submerso}} \cdot g \\ (m_{gelo} + m_{moeda}) \cdot g &= \rho \cdot V_{novo_{submerso}} \cdot g \\ \rho \cdot V_{gelo_{submerso}} + m_{moeda} &= \rho \cdot V_{novo_{submerso}} \\ m_{moeda} &= \rho \cdot (V_{novo_{submerso}} - V_{gelo_{submerso}}) \\ \rho_{moeda} \cdot V &= \rho_{\u00e1gua} \cdot (\Delta V) \\ \Delta V &= 2V \end{aligned}$$

Portanto, ao invés de ter 10% de seu volume para fora da água, agora tem-se 10% menos $2V$. Normalmente, quando o gelo derrete o volume mantém-se constante. No entanto, esta vez deverá haver um decréscimo de $2V$. No nosso caso:

$$V = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}^3$$

Portanto, o desnível que surge é de:

$$h = \frac{10}{50} = 0,2 \text{ cm}$$

Gabarito: 0,2 cm

52.

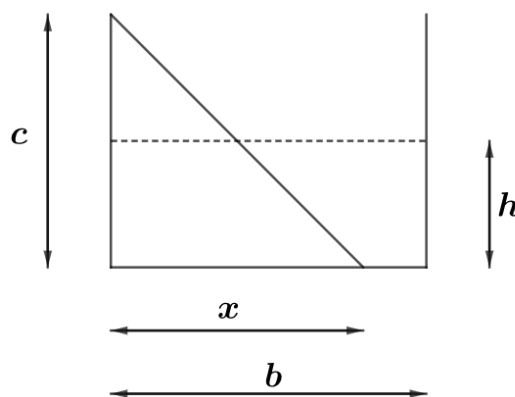
Um tanque de dimensões $(3l \times 2l \times l)$ deve ser utilizado para transportar água em um caminhão que desenvolve uma aceleração de $a \text{ m/s}^2$. A parte superior do tanque sempre deve estar destampada.

- Como devemos posicionar o tanque para que transporte a máxima quantidade de água sem vazamento?
- Calcule o volume máximo de água transportado nas condições do item (a).

Comentários:

Adotando nomes para as dimensões do tanque de b , c e d , considere que:

- A dimensão b está paralelo à aceleração do caminhão;
- A dimensão c é a altura do tanque;
- A dimensão d é a largura do tanque;
- h é a altura da água no tanque quando em repouso.



A linha tracejada indica a posição quando a aceleração é nula, a linha cheia representa a situação com aceleração a .

Portanto, quando acelerado:

$$\frac{c}{x} = \frac{a}{g} \Rightarrow x = c \cdot \frac{g}{a}$$

Como o volume acelerado ou não é o mesmo:

$$c \cdot x \cdot \frac{1}{2} = b \cdot h \Rightarrow x = 2 \cdot b \cdot \frac{h}{c}$$
$$2 \cdot b \cdot \frac{h}{c} = c \cdot \frac{g}{a} \Rightarrow h = c^2 \cdot \frac{g}{2a \cdot b}$$

Portanto, como deseja-se transportar o máximo volume, devemos maximizar $h \cdot b \cdot d$. Para isso:

$$V = h \cdot b \cdot d = \frac{c^2 \cdot g \cdot d}{2 \cdot a}$$

Assim:

- Altura = $3l$

- Largura = $2l$.

- Comprimento paralelo à aceleração = l ;

O volume transportado neste caso seria de:

$$V = \frac{c^2 \cdot g \cdot d}{2 \cdot a} = \frac{9 \cdot l^2 \cdot g \cdot 2 \cdot l}{2 \cdot a} = \frac{9 \cdot l^3 \cdot g}{a}$$

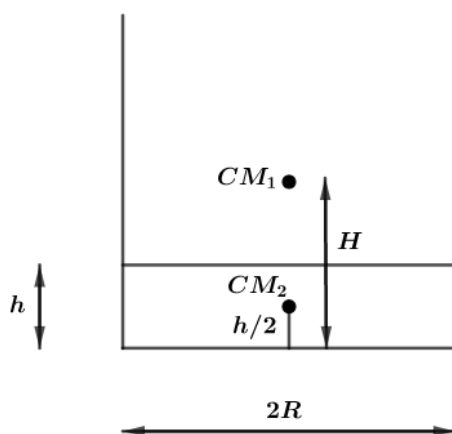
Gabarito: a) Altura: 3 l; Largura: 2l; Comprimento (direção de a): l b) $\frac{9l^3g}{a}$

53.

Um recipiente cilíndrico de massa m , raio R e parede de espessura desprezível tem o seu centro de gravidade a uma distância H da base. Qual a altura h do nível da água (densidade ρ) para a qual deve ser preenchido o recipiente, de tal forma que ele fique o mais estável possível.

Comentários:

Para tornar o recipiente mais estável, deve-se abaixar o seu centro de massa.



Conforme acrescenta-se água, o centro de massa abaixa, pois está adicionando-se massa abaixo do centro de massa. O ponto de mínimo ocorrerá quando o centro de massa do sistema for

coincidente com o topo da linha d'água, pois, a partir desse ponto, qualquer acréscimo de mais água estará acima do centro de massa do sistema. Portanto:

$$h = CM_{\text{sistema}}$$

Mas, sabe-se também que:

$$CM_{\text{sistema}} = \frac{CM_1 \cdot m_1 + CM_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

Assim:

$$h = \frac{H \cdot m + \frac{h}{2} \cdot m_2}{(m + m_2)}$$

Portanto, o mínimo ocorre quando:

$$h \cdot m + h \cdot m_2 = H \cdot m + \frac{h}{2} \cdot m_2 \Rightarrow h \cdot \left(m + \frac{m_2}{2}\right) = H \cdot m$$

Mas:

$$\begin{aligned} m_2 &= \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h \\ h \cdot \left(m + \frac{\rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h}{2}\right) &= H \cdot m \\ h^2 \cdot \left(\frac{\rho \cdot \pi \cdot R^2}{2}\right) + h \cdot m - H \cdot m &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo:

$$h = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4 \cdot H \cdot m \cdot \frac{\rho \cdot \pi \cdot R^2}{2}}}{\rho \cdot \pi \cdot R^2}$$

Como h deve ser positivo:

$$h = \frac{\sqrt{m \cdot (m + 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho \cdot H)} - m}{\rho \cdot \pi \cdot R^2}$$

Gabarito: $h = \frac{\sqrt{m(m+2\pi R^2 \rho H)} - m}{\pi R^2 \rho}$

54.

Um cilindro de madeira de comprimento L , raio R e densidade ρ tem uma pequena peça metálica de massa m (volume desprezível) fixada em umas das suas extremidades. Determine o menor valor possível de m , em função dos parâmetros fornecidos, que faz com que o cilindro flutue verticalmente em equilíbrio estável em um líquido de densidade σ .

Comentários:

Para que o equilíbrio seja estável, considera-se que o centro do volume submerso (onde atua o empuxo) esteja acima da gravidade.



O centro de gravidade do bloco pode ser calculado pela média ponderada dos centros de massa com a massa como peso, de cada parte que compõe o sistema. Assim:

$$CG = \frac{\frac{L}{2} \cdot \rho \cdot L \cdot \pi \cdot R^2 + 0 \cdot m}{\rho \cdot L \cdot \pi \cdot R^2 + m}$$

Em que h é a altura do tronco que está submerso. Pode ser calculado pelo equilíbrio do sistema:

$$P = E \Rightarrow \rho \cdot L \cdot \pi \cdot R^2 \cdot g = \sigma \cdot h \cdot \pi \cdot R^2 \cdot g$$

$$h = \frac{\rho}{\sigma} \cdot L$$

Portanto, o equilíbrio é estável para $\frac{h}{2} \geq CG$, sendo o mínimo o ponto de igualdade.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{\sigma} \cdot L = \frac{L^2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^2}{2 \cdot (\rho \cdot L \cdot \pi \cdot R^2 + m)} \Rightarrow \rho \cdot L \cdot \pi \cdot R^2 + m = \sigma \cdot L \cdot \pi \cdot R^2$$

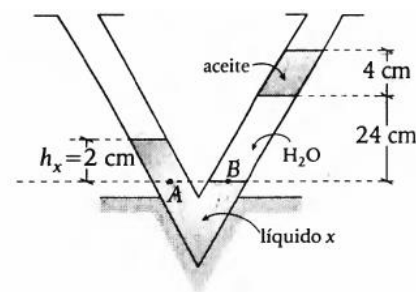
$$\boxed{m = L \cdot \pi \cdot R^2 \cdot (\sigma - \rho)}$$

Gabarito: $\pi R^2 L (\sigma - \rho)$

55.

Sabendo que as densidades da água e do azeite são 1 g/cm^3 e $0,8 \text{ g/cm}^3$ respectivamente, determine a densidade do líquido x que se encontra em repouso.

- a) $8,4 \text{ g/cm}^3$
- b) $8,7 \text{ g/cm}^3$
- c) $9,2 \text{ g/cm}^3$
- d) $10,5 \text{ g/cm}^3$
- e) $13,6 \text{ g/cm}^3$



Comentários:

Pelo equilíbrio de pressão entre as superfícies à mesma altura do líquido x :

$$\rho_x \cdot g \cdot 2 = \rho_{\text{água}} \cdot g \cdot 24 + \rho_{\text{azeite}} \cdot g \cdot 4$$

$$\rho_x = \frac{24 + 3,2}{2} = 13,6 \text{ g/cm}^3$$

Gabarito: E

56.

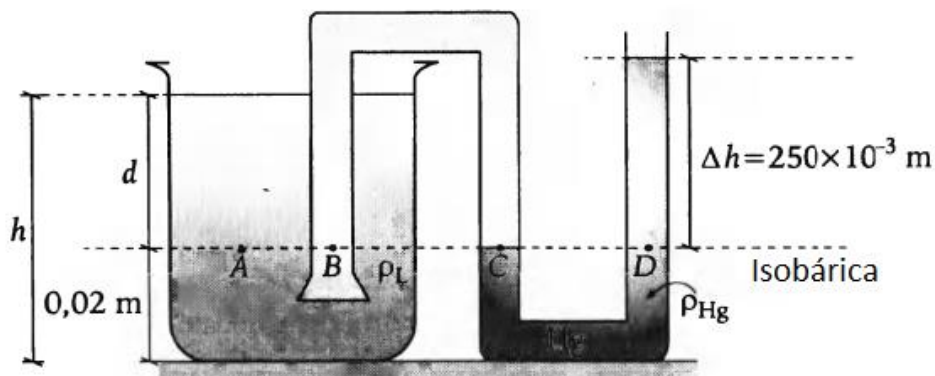
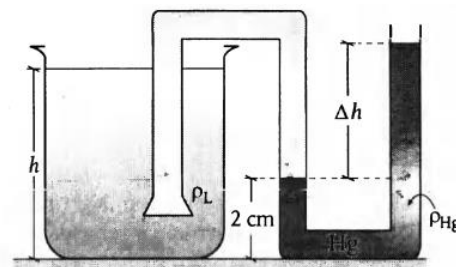
Determine a altura h do líquido contido no recipiente da figura abaixo, se mediante um tubo em S percebe-se que a diferença dos níveis de mercúrio é $\Delta h = 250 \text{ mm}$. Considere $\rho_L = 860 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_{HG} = 13,6 \text{ g/cm}^3$.



- a) 4,85 m
- b) 4,13 m
- c) 3,97 m
- d) 3,62 m
- e) 2,86 m

Comentários:

Nota-se que os líquidos apresentam uma isóbara em comum:



$$P_A = P_B = P_C = P_D$$

Logo:

$$P_A = P_D \Rightarrow P_{atm} + \rho_L \cdot g \cdot (h - 2) = P_{atm} + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h$$

$$860 \cdot (h - 2) = 13600 \cdot 25$$

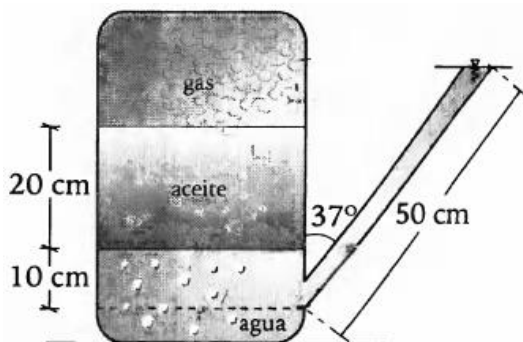
$$\boxed{h \cong 397,35 \text{ cm}}$$

Gabarito: C

57.

O sistema mostrado na figura abaixo está em repouso. Determine a pressão do gás. Dado:

$$\rho_{\text{água}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \rho_{\text{azeite}} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; P_{atm} = 10^5 \text{ Pa.}$$

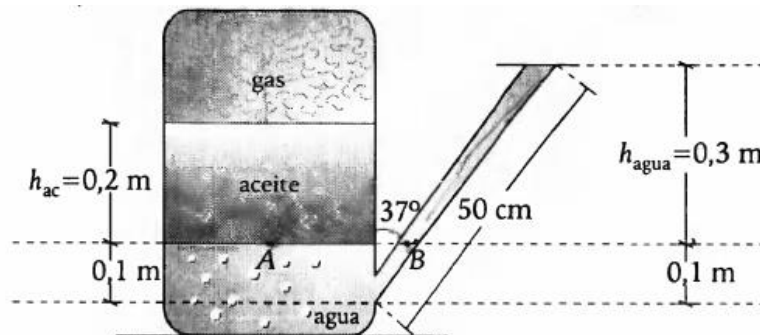


- a) 240 kPa



- b) 101,4 kPa
- c) 1,4 kPa
- d) 0,14 kPa
- e) 105,4 kPa

Comentários:



Pela isobárica na superfície água-azeite:

$$\begin{aligned} \rho_{Az} \cdot g \cdot h_{Az} + P_{gás} &= \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_{H_2O} + P_{atm} \\ 800 \cdot 10 \cdot 0,2 + P_{gás} &= 1000 \cdot 10 \cdot 0,3 + 10^5 \\ P_{gás} &= 103 \cdot 10^3 - 1,6 \cdot 10^3 \\ P_{gás} &= 101,4 \cdot 10^3 Pa = 101,4 kPa \end{aligned}$$

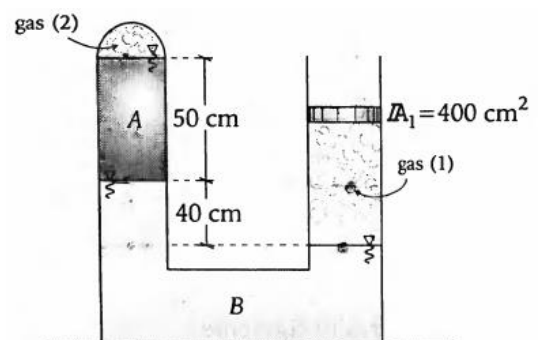
Gabarito: B

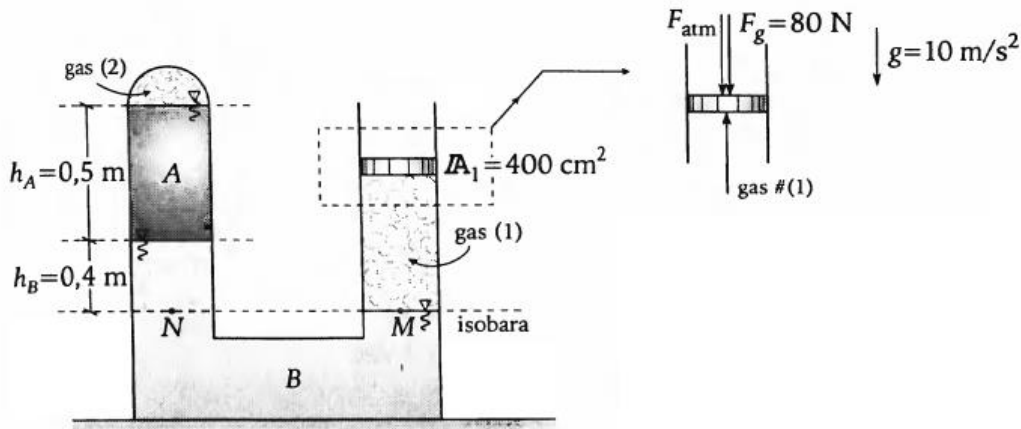
58.

O embolo que fecha o tubo tem massa de 8 kg e se encontra em equilíbrio, como mostrado na figura abaixo. Que pressão suporta o gás 2, se as densidades dos líquidos A e B são 2 g/cm^3 e 3 g/cm^3 respectivamente? Dado: $P_{atm} = 10^5$.

- a) 80 kPa
- b) 70 kPa
- c) 800 kPa
- d) 90 kPa
- e) 8 kPa

Comentários:





Primeiramente, calcula-se a pressão do gás (1). Isso se faz pelo equilíbrio do êmbolo:

$$P + P_{atm} \cdot A = P_{gás(1)} \cdot A$$

$$80 + 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = P_{gás(1)} \cdot 4 \cdot 10^{-2}$$

$$P_{gás(1)} = 10^5 + 2000 = 102 \cdot 10^3$$

Olhando para a superfície isobárica da interface água-gás (1):

$$P_{gás(1)} = \rho_B \cdot h_B \cdot g + \rho_A \cdot h_A \cdot g + P_{gás(2)}$$

$$102 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-1} \cdot 10 + 2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-1} \cdot 10 + P_{gás(2)}$$

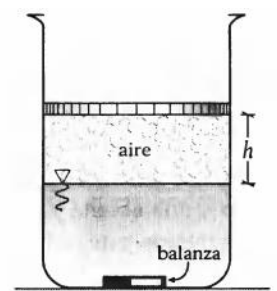
$$P_{gás(2)} = 102 \cdot 10^3 - 12 \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^3 = 80 \cdot 10^3 = 80 \text{ kPa}$$

Gabarito: A

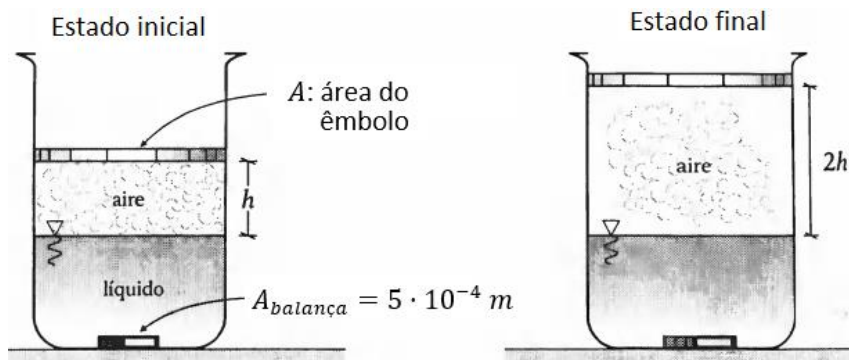
59.

No sistema em repouso a pequena balança de área 5 cm^2 indica 15 N . Se o êmbolo é erguido uma altura h a balança indica 5 N . Determine a pressão inicial do ar encerrado.

- a) 10 kPa
- b) 20 kPa
- c) 30 kPa
- d) 40 kPa
- e) 50 kPa



Comentários:



A balança mede inicialmente:

$$F_{b_1} = (\rho \cdot g \cdot h + P_1) \cdot 5 \cdot 10^{-4}$$

Após erguer o êmbolo:

$$F_{b_2} = (\rho \cdot g \cdot h + P_2) \cdot 5 \cdot 10^{-4}$$

$$F_{b_1} - F_{b_2} = (P_1 - P_2) \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 10$$

$$(P_1 - P_2) = 2 \cdot 10^4$$

Considerando-se uma transformação isotérmica do gás:

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$$

Em que cada volume é dado por:

$$V_i = A \cdot h_i$$

E A é a área do êmbolo. Portanto:

$$P_1 \cdot A \cdot h_1 = P_2 \cdot A \cdot h_2 \Rightarrow P_1 \cdot h = P_2 \cdot 2h \Rightarrow P_2 = \frac{P_1}{2}$$

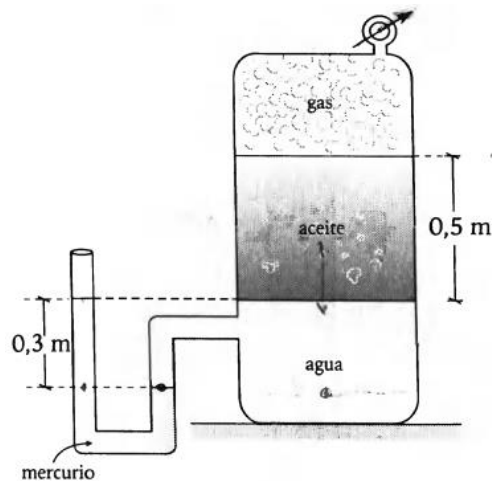
Assim:

$$\frac{P_1}{2} = 2 \cdot 10^4 \Rightarrow \boxed{P_1 = 40 \text{ kPa}}$$

Gabarito: D

60.

A figura abaixo mostra um sistema em repouso. Qual é a indicação do manômetro? Considere $\rho_{\text{azeite}} = 0,8 \text{ g/cm}^3$; $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ g/cm}^3$.

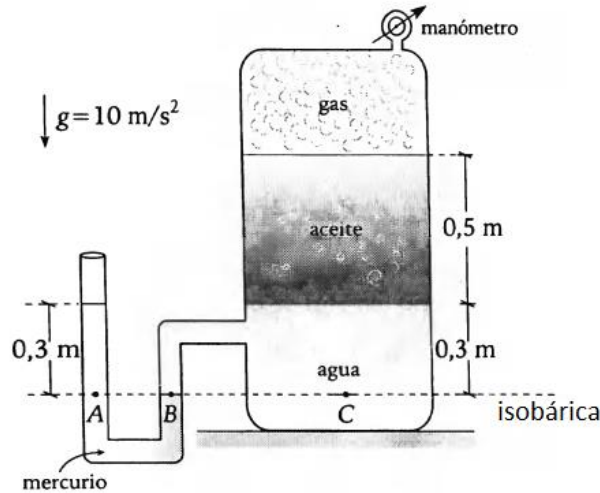


- a) 38,8 b) 36,8 c) 34,8 d) 33,8 e) 32,8

Comentários:

Analisando a isobárica do mercúrio-água:





$$\rho_{Hg} \cdot h_{Hg} \cdot g + P_{atm} = \rho_{\text{agua}} \cdot h_{\text{agua}} \cdot g + \rho_{Az} \cdot h_{Az} \cdot g + P$$

$$13,6 \cdot 10^3 \cdot 0,3 \cdot 10 + 10^5 = 10^3 \cdot 0,3 \cdot 10 + 0,8 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10 + P$$

$$P = 10^5 + 4,08 \cdot 10^4 - 0,3 \cdot 10^4 - 0,4 \cdot 10^4$$

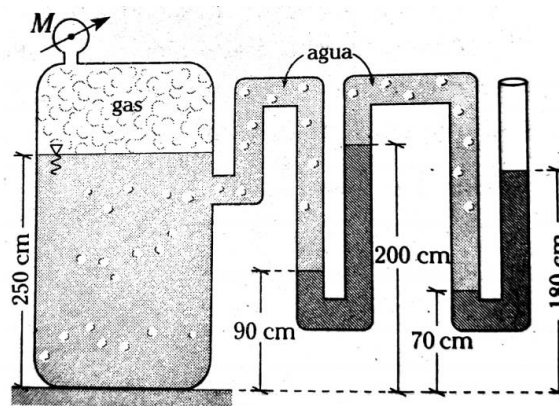
$$P = 13,38 \cdot 10^4 = 133,8 \text{ kPa}$$

O manômetro mede diferença de pressão, portanto ele indica 33,8 kPa

Gabarito: D

61.

A partir do sistema que contém água e mercúrio em repouso, qual é a leitura do manômetro (em 10^5 Pa)? $\rho_{Hg} = 13,6 \text{ g/cm}^3$.

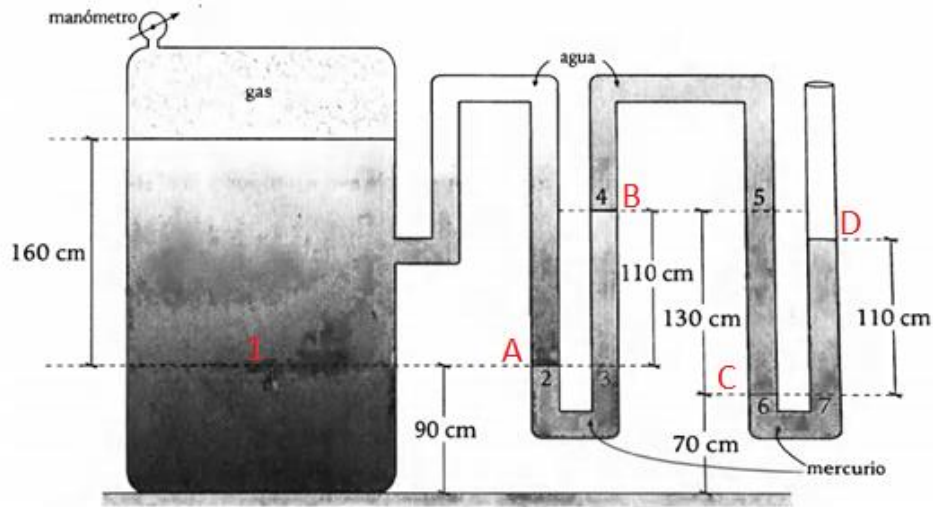


- a) 1,7 b) 2,7 c) 3,2 d) 3,8 e) 27

Comentários:

Nomeando:

- A primeira interface água-mercúrio de A, a seguinte de B, e a última de C;
- A interface mercúrio e atmosfera de D;
- A pressão do gás P.



Tem-se:

$$P_A = P_1$$

$$P_A = P + 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10$$

$$P_A = P_B + 13,6 \cdot 10^3 \cdot 1,1 \cdot 10$$

$$P_C = P_B + 10^3 \cdot 1,3 \cdot 10$$

$$P_C = P_D + 13,6 \cdot 10^3 \cdot 1,1 \cdot 10 = P_{atm} + 13,6 \cdot 10^3 \cdot 1,1 \cdot 10$$

Logo:

$$P_C = 249,6 \text{ kPa}$$

$$P_B = 236,6 \text{ kPa}$$

$$P_A = 386,2 \text{ kPa}$$

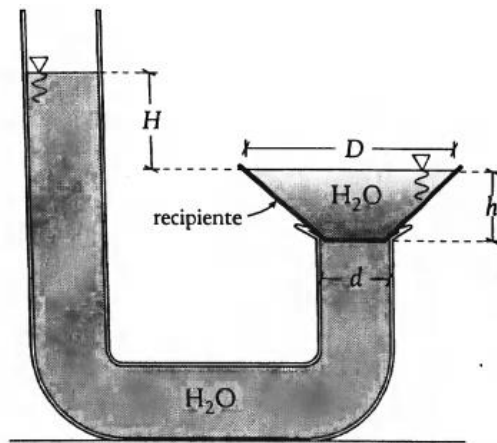
$$P = 370,2 \text{ kPa} = 3,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

A leitura manométrica, portanto, é de $2,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Gabarito: B

62.

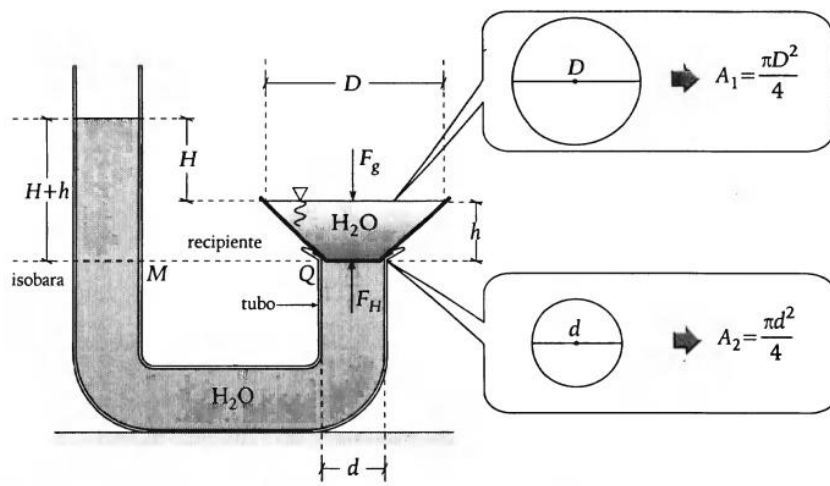
Na figura abaixo, o recipiente de massa desprezível está em repouso, se o sistema é livre de atrito determine H/h , se $D/d = 4$.



- a) 2,5
- b) 3,75
- c) 4
- d) 6
- e) 4,25

Comentários:

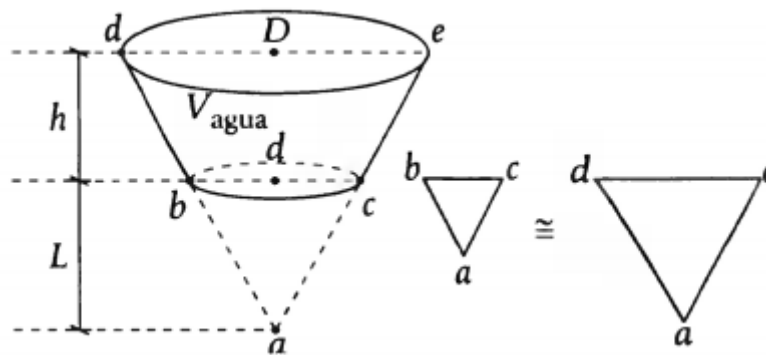
O recipiente sofre ação de duas forças horizontais. São elas a força por conta da pressão da água abaixo do recipiente e a massa da água dentro do recipiente. Estando o recipiente em equilíbrio, ocorre a igualdade das forças



$$F = P \Rightarrow \rho_{\text{água}} \cdot (H + h) \cdot g \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} = \rho_{\text{água}} \cdot V_{\text{recipiente}} \cdot g$$

$$\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot (H + h) = V_{\text{recipiente}}$$

O recipiente é um tronco de cone. A fórmula do volume de um tronco de cone é:



$$V_{tronco} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + r \cdot R + r^2)$$

No nosso caso:

$$V_{recipiente} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \left(\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right) \cdot \left(\frac{d}{2}\right) + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right)$$

Mas:

$$D = 4d$$

Logo:

$$V_{recipiente} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \left(4 \cdot d^2 + d^2 + \frac{d^2}{4} \right) \Rightarrow V_{recipiente} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \left(\frac{21d^2}{4} \right)$$

Substituindo na equação de equilíbrio:

$$\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot (H + h) = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \frac{21 \cdot d^2}{4} \Rightarrow H + h = 7h$$

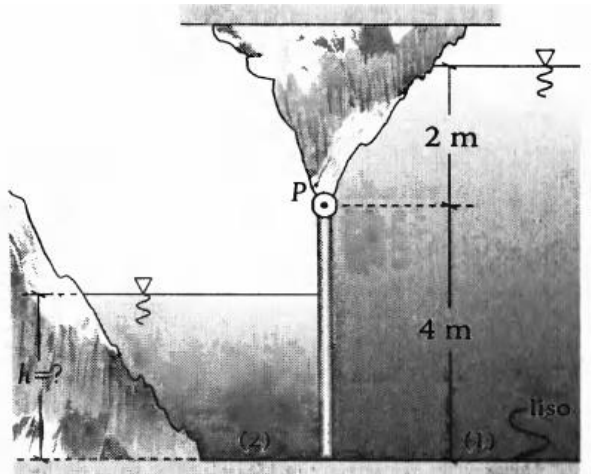
$$H = 6h \Rightarrow \boxed{\frac{H}{h} = 6}$$

Gabarito: D

63.

Uma comporta está separando dois líquidos na posição vertical, como é mostrado na figura abaixo. Determine a que altura se encontra o nível do líquido (2), de tal maneira que a comporta não se abra. Considere $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{28}{5}$.

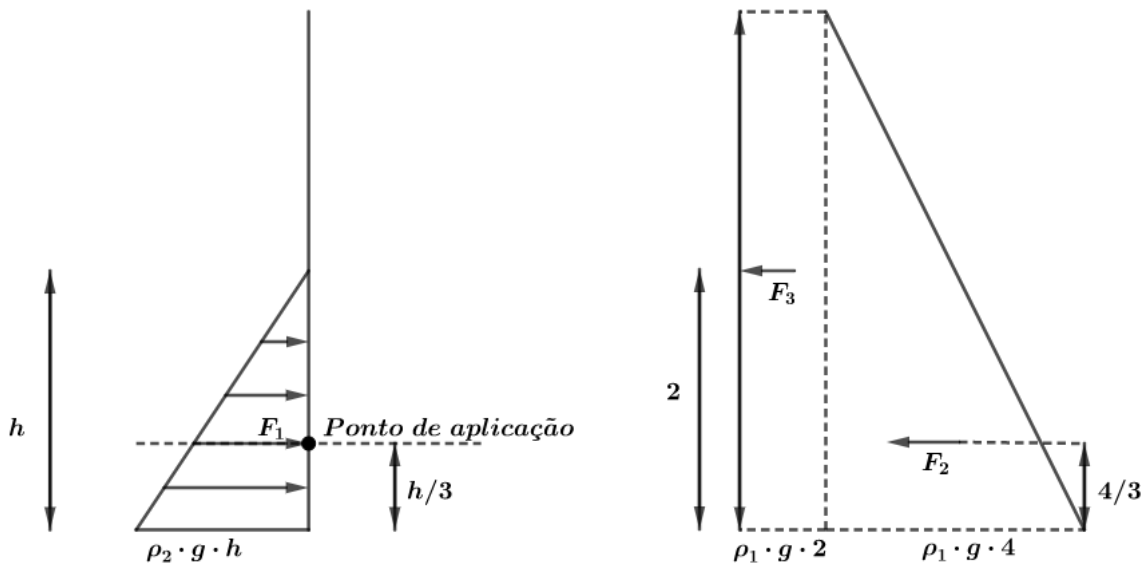




- a) 4,8 m
- b) 4 m
- c) 3 m
- d) 2 m
- e) 1 m

Comentários:

A comporta está em equilíbrio rotacional. Para achar o ponto de aplicação das forças por conta da pressão:



Para o lado do líquido 2, a pressão cresce linearmente, formando um triângulo. Portanto o centro de pressão está sobre o CG da figura, ou seja, $\frac{h}{3}$ acima do fundo. Para o centro de pressão do líquido 1, quebra-se o trapézio formado pela pressão em um retângulo e um triângulo, trabalhando com uma soma de forças, cada uma atuando sobre o CG de sua respectiva figura. Dessa forma, aplicando-se a pressão média sobre os pontos marcados:

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho_2 \cdot g \cdot h \cdot A_1$$

$$F_2 = \rho_1 \cdot g \cdot \frac{0 + 4}{2} = \rho_1 \cdot g \cdot 2 \cdot A_2$$

$$F_3 = \rho_1 \cdot g \cdot 2 \cdot A_3$$

Em que A_1, A_2 e A_3 são as áreas da comporta atingidas pelas pressões 1, 2 e 3. Pelo equilíbrio rotacional da placa:

$$F_1 \cdot \left(4 - \frac{h}{3}\right) = F_2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right) + F_3 \cdot (2)$$

E, com:

$$\rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{28}{5}$$

E:

$$A_1 = h \cdot L \Rightarrow A_2 = A_3 = 4 \cdot L$$

Assim, substituindo:

$$\frac{14}{5} \cdot \rho_1 \cdot g \cdot h \cdot h \cdot L \cdot \left(4 - \frac{h}{3}\right) = \rho_1 \cdot g \cdot 2 \cdot 4 \cdot L \cdot \frac{8}{3} + \rho_1 \cdot g \cdot 2 \cdot 4 \cdot L \cdot 2$$

$$\frac{56h^2}{5} - \frac{14 \cdot h^3}{15} = \frac{64}{3} + 16$$

$$14 \cdot h^3 - 168 \cdot h^2 + 560 = 0$$

$$h^3 - 12 \cdot h^2 + 40 = 0$$

Por exploração $h = 2$ é raiz. (Pode-se aplicar teorema das raízes racionais, chutes, ou aplicar as opções da questão). Portanto, fatorando:

$$(h - 2)(h^2 - 10 \cdot h - 20) = 0$$

As outras raízes são:

$$h = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 80}}{2} = 5 \pm 3\sqrt{5}$$

Uma delas é negativa portanto não convém, a outra é maior que o permitido pelo problema ($h \leq 4$)

Gabarito: D

64.

Em uma piscina de águas tranquilas um jovem de 75 kg flutua de tal maneira que apenas seu nariz está fora da água. Determine o volume desse jovem, em litros.

- a) 65
- b) 75
- c) 7,5
- d) 6,5



e) 750

Comentários:

Pelo equilíbrio:

$$P = E \Rightarrow 750 = 1000 \cdot V_{submerso} \cdot 10$$

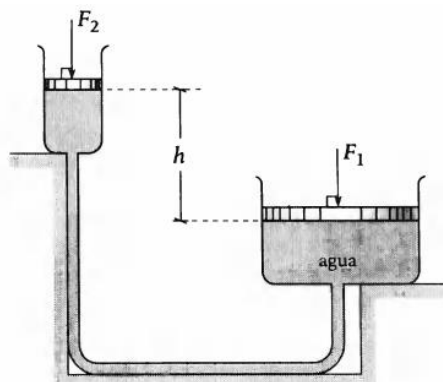
$$V_{submerso} = 75 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 75 \text{ L}$$

Gabarito: B

65.

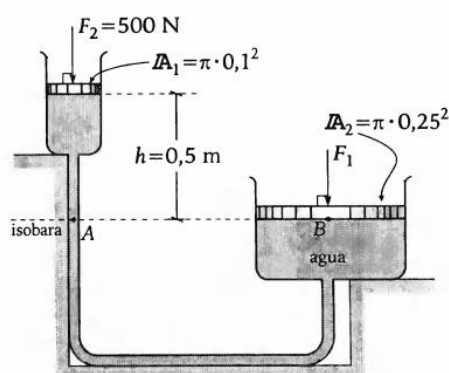
Dois cilindros estão unidos mediante a um tubo como mostra a figura abaixo. Sendo que $D_1 = 50 \text{ cm}$, $D_2 = 20 \text{ cm}$, (D é o diâmetro).

O cilindro menor está situado mais acima a uma altura $h = 0,5 \text{ m}$ do cilindro de maior diâmetro. Determine o módulo da força F_1 para manter o equilíbrio do sistema se $F_2 = 500 \text{ N}$. Despreze as massas dos êmbolos.



- a) 6,378 kN b) 6,105 kN c) 5,734 kN d) 5,084 kN e) 4,106 kN

Comentários:



Traçando-se uma isobárica rente ao êmbolo sob ação de F_1 :

$$\frac{F_2}{A_2} + P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h = \frac{F_1}{A_1} + P_{atm}$$

$$\frac{500}{\pi \cdot 10^{-2}} + 1000 \cdot 10 \cdot 0,5 = \frac{F_1}{\pi \cdot \frac{1}{16}}$$



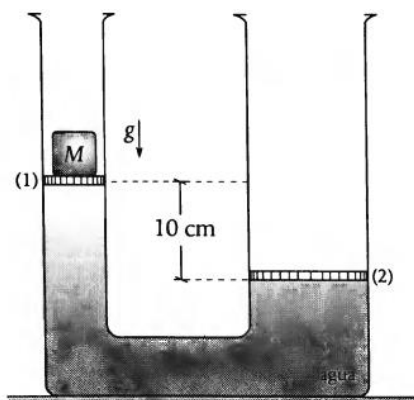
$$F_1 = \frac{5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot \frac{\pi}{16}}{\pi} = 4106 \text{ N}$$

$$F_1 = 4,106 \text{ kN}$$

Gabarito: E

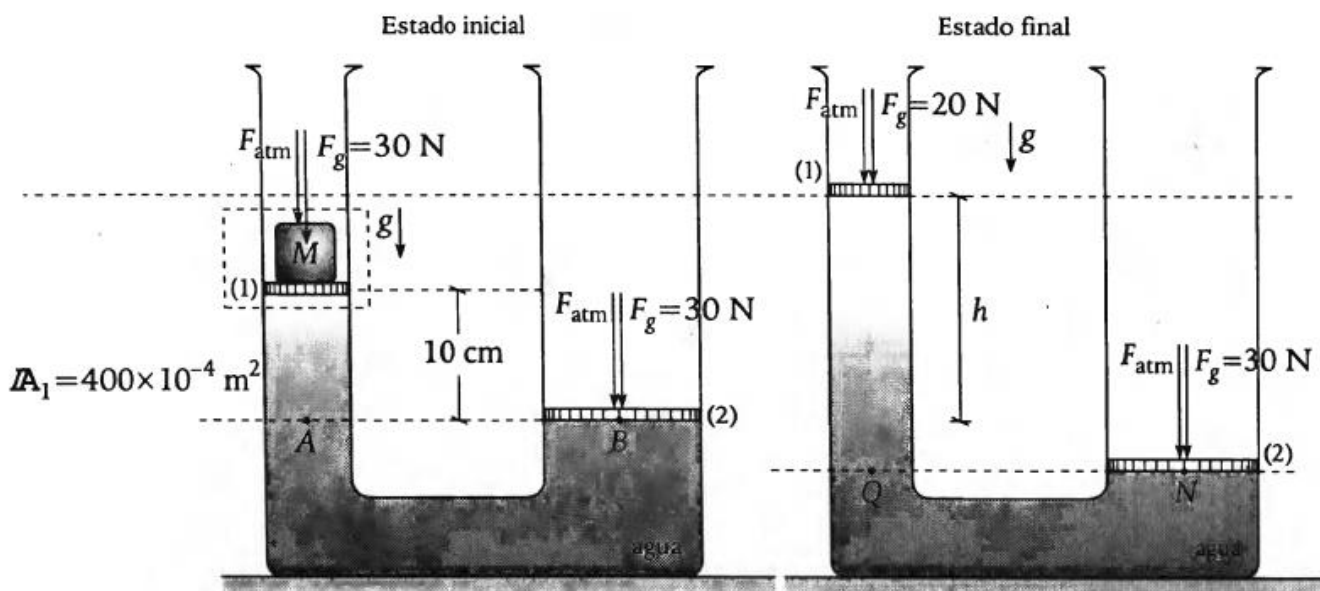
66.

O sistema mostrado a seguir está em equilíbrio; qual será a nova separação dos êmbolos se o bloco é retirado lentamente? Considere $M_1 = 2 \text{ kg}$; $M_2 = 3 \text{ kg}$; $M = 1 \text{ kg}$ e $A_1 = 400 \text{ cm}^2$.



- a) 7,5 cm
- b) 6,24 cm
- c) 12,5 cm
- d) 1,66 cm
- e) 1,33 cm

Comentários:



No estado inicial, traçando-se uma isobárica rente ao êmbolo 2:

$$P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h + \frac{(M + M_1) \cdot g}{A_1} = P_{atm} + \frac{M_2 \cdot g}{A_2} \Rightarrow 1000 \cdot 0,1 + \frac{3}{4 \cdot 10^{-2}} = \frac{3}{A_2}$$

$$75 + 100 = \frac{3}{A_2} \Rightarrow A_2 = \frac{3}{175}$$

Após retirar-se a massa:

$$P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h' + \frac{M_1 \cdot g}{A_1} = P_{atm} + \frac{M_2 \cdot g}{A_2} \Rightarrow 1000 \cdot h' + \frac{2}{4 \cdot 10^{-2}} = \frac{3}{3} \cdot 175$$

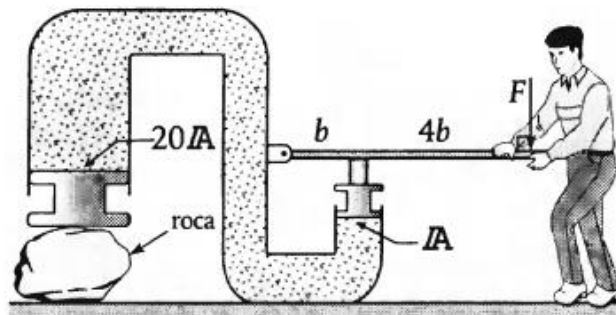
$$1000 \cdot h' = 175 - 50 \Rightarrow h' = \frac{125}{1000} \text{ m}$$

$$h' = 12,5 \text{ cm}$$

Gabarito: C

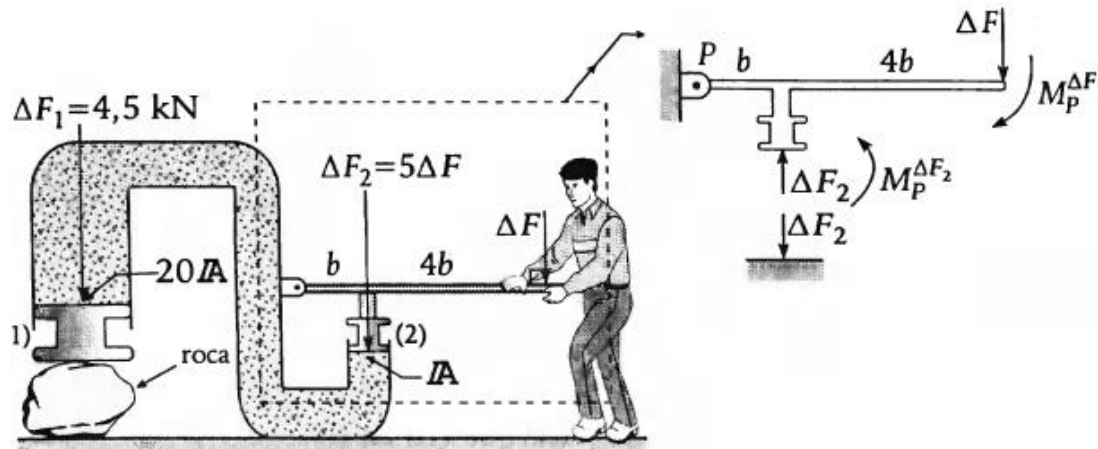
67.

A figura abaixo mostra um esquema simplificado para triturar rochas. Se a rocha indicada está suportando 3 kN e como o máximo que ela pode resistir, antes de quebrar, é 7,5 kN, em quanto deve variar o modulo da força que exerce o jovem para quebrar a rocha?



- a) 15 N
- b) 20 N
- c) 25 N
- d) 40 N
- e) 45 N

Comentários:



Como a questão pede a variação da força, resolveremos o problema baseado na variação de força. Portanto, chamemos de ΔF_1 a variação de força sobre a rocha ($= 4,5 \text{ kN}$).

Como trata-se do mesmo líquido em toda a extensão do tubo, a variação de pressão implicada pela variação de força se transmite igualmente até o homem.

O homem deve aplicar essa variação de pressão utilizando sua alavanca através da variação de força ΔF_2 no contato com o êmbolo. Sendo assim, as contas se iniciam pela rocha.

$$\frac{\Delta F_1}{A_1} = \Delta P \Rightarrow \Delta P = \frac{4,5}{20}$$

$$\Delta P = \frac{\Delta F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{4,5}{20} = \frac{\Delta F_2}{1}$$

$$\Delta F_2 = \frac{4,5}{20}$$

Como a força é aplicada por uma alavanca, chamando de ΔF_3 a diferença de força aplicada pelo homem, tem-se:

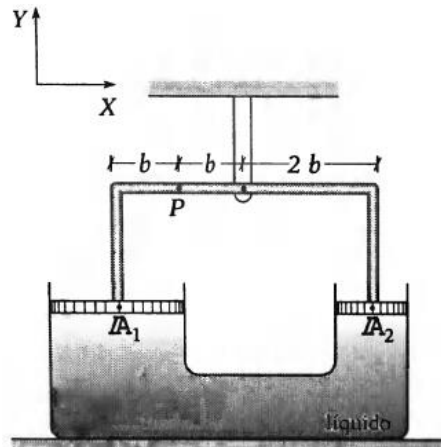
$$\Delta F_2 \cdot b = \Delta F_3 \cdot 5b \Rightarrow \frac{4,5}{20} \cdot b = \Delta F_3 \cdot 5b$$

$$\Delta F_3 = \frac{0,9}{20} \text{ kN} = 45 \text{ N}$$

Gabarito: E

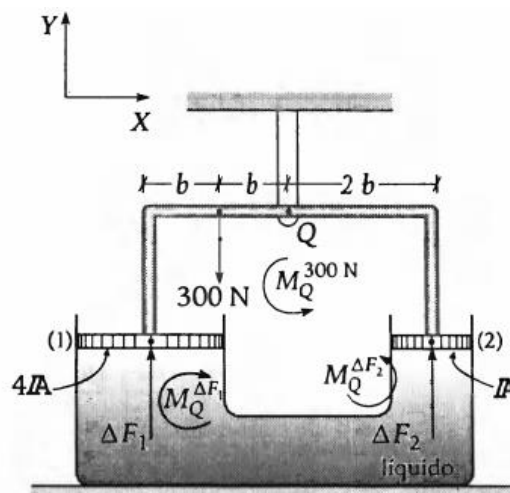
68.

O sistema mostrado, as barras e os êmbolos são de massa desprezível. Se sobre o ponto P começa a atuar uma força $\vec{F} = 100(4\hat{i} - 3\hat{j}) \text{ N}$, determine a mudança no valor da força que o líquido exerce sobre cada embolo ($A_1 = 4A_2$).



- a) 25 N; 100 N
- b) 40 N; 160 N
- c) 35 N; 150 N
- d) 30 N; 120 N
- e) 50 N; 200 N

Comentários:



A força F aplicada gera momento apenas com sua componente vertical. O acréscimo da força F é equilibrado pela variação de forças que o líquido aplica sobre A_1 e A_2 . Como no tubo há somente um líquido, a variação de pressão sobre as faces é idêntica. Portanto:

$$\frac{\Delta F_1}{A_1} = \frac{\Delta F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{\Delta F_1}{4A_2} = \frac{\Delta F_2}{A_2}$$

$$\Delta F_1 = 4 \cdot \Delta F_2$$

Estas variações de forças equilibram o momento gerado por F . Sendo assim:

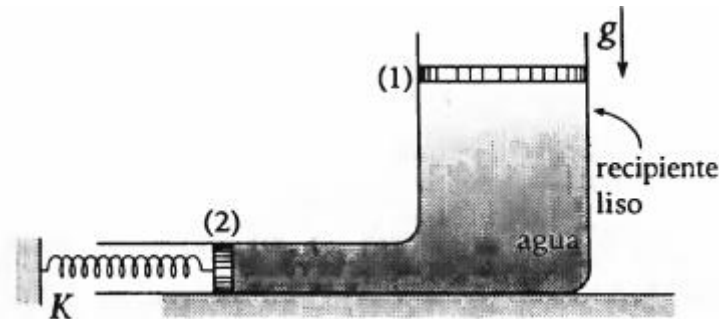
$$\Delta F_1 \cdot 2b - F_y \cdot b - \Delta F_2 \cdot 2b = 0 \Rightarrow 8 \cdot \Delta F_2 - 300 - 2 \cdot \Delta F_2 = 0$$

$$\Delta F_2 = 50 \text{ N e } \Delta F_1 = 200 \text{ N}$$

Gabarito: E

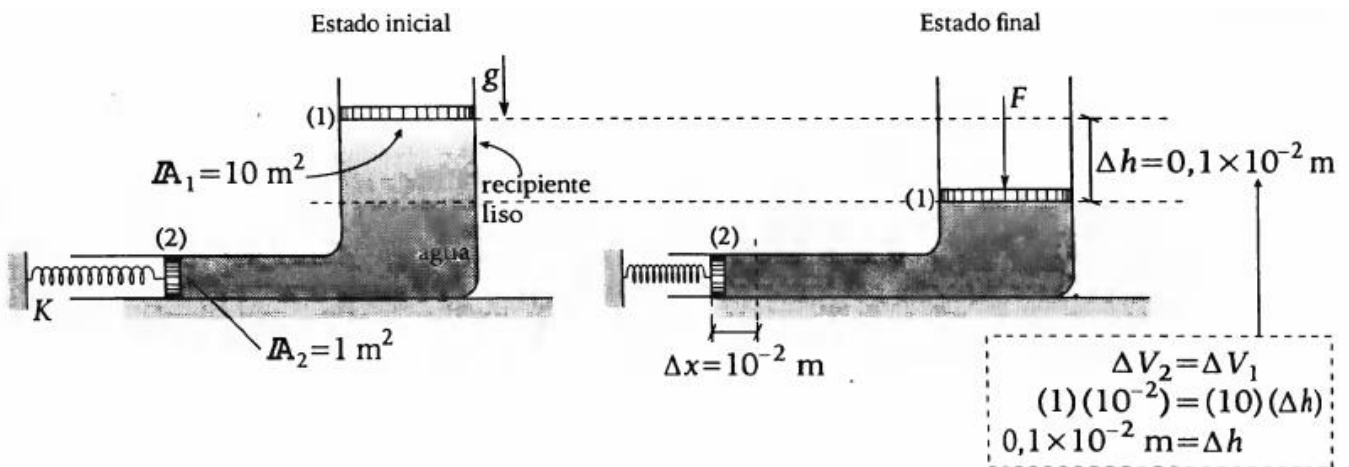
69.

O sistema mostrado a seguir está em repouso. Que valor deve ter a força vertical exercida sobre o êmbolo (1) para que a mola se comprima 1 cm a mais. Considere $A_1 = 10 \cdot A_2 = 10 \text{ m}^2$ e $K = 10 \text{ N/m}$.



- a) 1 N b) 50,5 N c) 100 N d) 101 N e) 110 N

Comentários:



Se a mola se comprime em mais 1 cm, o êmbolo 1 deve descer de Δh mantendo o volume do tubo. Logo:

$$0,01 \cdot A_2 = \Delta h \cdot A_1 \Rightarrow \Delta h = 10^{-3}$$

Na situação inicial, o equilíbrio do êmbolo 2 é:

$$k \cdot \Delta x_1 = \rho \cdot g \cdot h$$

Após a aplicação da força

$$k \cdot \Delta x_2 = \rho \cdot g \cdot (h - \Delta h) + \frac{F_y}{A_1}$$

A questão afirma que $\Delta x_2 - \Delta x_1 = 1 \text{ cm}$. Subtraindo as equações:

$$k \cdot (\Delta x_2 - \Delta x_1) = -\rho \cdot g \cdot \Delta h + \frac{F_y}{A_1} \Rightarrow 10 \cdot 10^{-2} = -10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} + \frac{F_y}{10}$$

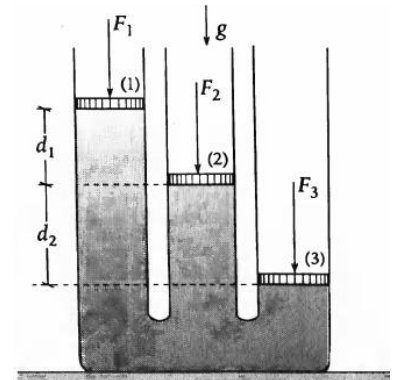
$$10^{-1} + 10 = \frac{F_y}{10} \Rightarrow F_y = 101 \text{ N}$$

Gabarito: D

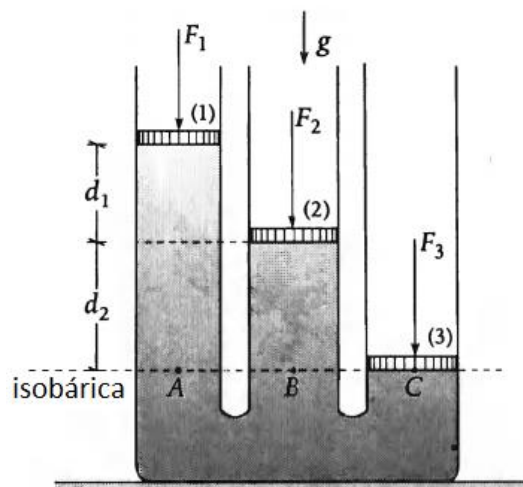
70.

Três êmbolos de massa desprezíveis e de área A_1 , A_2 e A_3 , respectivamente, descansam sobre a superfície de um líquido de densidade ρ . Determine d_1 e d_2 . Despreze todos os atritos.

- a) $\frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_1}{A_1} \right); \frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_3}{A_3} - \frac{F_2}{A_2} \right)$
 b) $\frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_3}{A_3} \right); \frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_1}{A_1} \right)$
 c) $\frac{1}{\rho g} (F_1 + F_2); \frac{1}{\rho g} (F_2 + F_3)$
 d) $\frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_1}{A_1} - \frac{F_2}{A_2} \right); \frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_3}{A_3} - \frac{F_2}{A_2} \right)$
 e) $\frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_3}{A_3} + \frac{F_1}{A_1} \right); \frac{1}{\rho g} \left(\frac{F_3}{A_3} - \frac{F_2}{A_2} \right)$



Comentários:



Traçando-se uma isobárica rente ao êmbolo 3:

$$\frac{F_3}{A_3} + P_{atm} = \frac{F_2}{A_2} + P_{atm} + \rho \cdot g \cdot d_2 = \frac{F_1}{A_1} + P_{atm} + \rho \cdot g \cdot (d_1 + d_2)$$

Pela primeira igualdade:

$$\frac{F_3}{A_3} = \frac{F_2}{A_2} + \rho \cdot g \cdot d_2 \Rightarrow d_2 = \frac{1}{\rho \cdot g} \cdot \left(\frac{F_3}{A_3} - \frac{F_2}{A_2} \right)$$

Pela segunda igualdade:

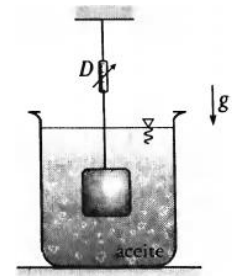
$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} + \rho \cdot g \cdot d_1 \Rightarrow d_1 = \frac{1}{\rho \cdot g} \cdot \left(\frac{F_2}{A_2} - \frac{F_1}{A_1} \right)$$

Gabarito: A

71.

Ao se retirar o recipiente com azeite a indicação do dinamômetro aumenta em 24 N. Se o bloco é introduzido em outro recipiente que contém um líquido de densidade $2,5 \text{ g/cm}^3$; quanto indicará o dinamômetro? Considere $\rho_{\text{bloco}} = 2,9 \text{ g/cm}^3$.

- a) 16 N
- b) 18 N
- c) 20 N
- d) 12 N
- e) 15 N



Comentários:

Pela afirmação a respeito da indicação do dinamômetro, conclui-se que o empuxo exercido pelo azeite era de 24 N. Portanto:

$$\rho_{\text{Azeite}} \cdot V \cdot g = 24$$

Considerando:

$$\rho_{\text{Azeite}} = 0,8 \text{ g/cm}^3$$

Tem-se que:

$$800 \cdot V \cdot 10 = 24 \Rightarrow V = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Portanto, a massa do bloco é:

$$m = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 2900 = 8,7 \text{ kg}$$

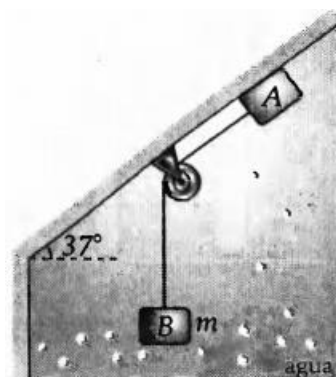
Portanto, a indicação do dinamômetro após submergir em outro líquido fica:

$$T = P - E \Rightarrow T = 87 - 3 \cdot 10^{-3} \cdot 2500 = 12 \text{ N}$$

Gabarito: D

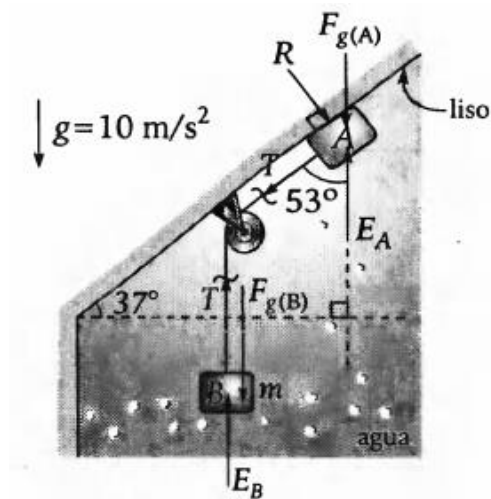
72.

O sistema mostrado se encontra em equilíbrio e os blocos são de mesma massa. Determine o módulo da reação da superfície lisa inclinada sobre o bloco A. Considere $M = 1 \text{ kg}$; $V_B = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$.



- a) 2 N b) 3 N c) $2\sqrt{5}$ N d) 5 N e) 8 N

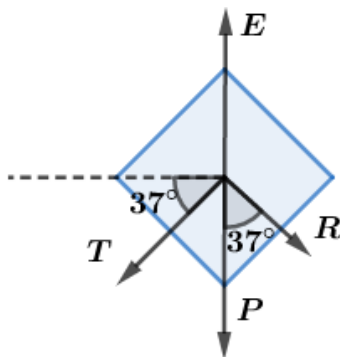
Comentários:



Analisando o bloco B:

$$P = E + T \Rightarrow 10 = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 \cdot 10 + T \Rightarrow T = 6 \text{ N}$$

No bloco A, tem-se a seguinte situação:



$$\begin{cases} T \cdot \cos 37^\circ = R \cdot \sin 37^\circ \\ P + T \cdot \sin 37^\circ + R \cdot \cos 37^\circ = E \end{cases}$$

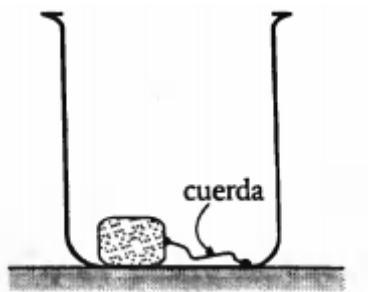
Como se pede somente a reação, a primeira equação é suficiente:

$$R = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8 \text{ N}$$

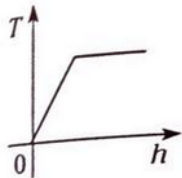
Gabarito: E

73.

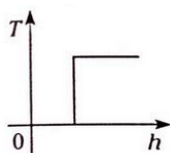
Um bloco de isopor descansa no fundo de um recipiente vazio fixo a uma corda como é mostrado na figura abaixo. Se começamos a encher o recipiente de água, qual é o gráfico que melhor representa o comportamento da tensão (T) em relação à altura da água (h)?



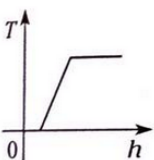
a)



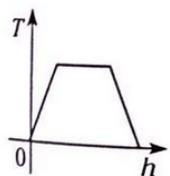
b)



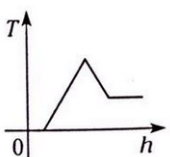
c)



d)



e)



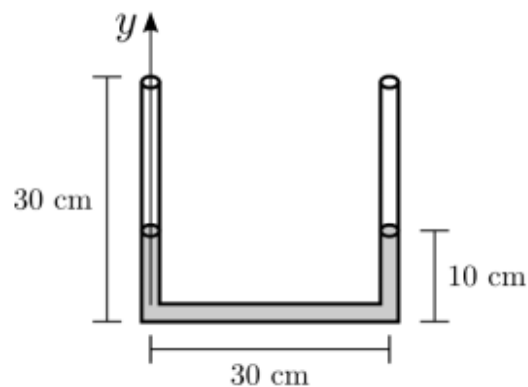
Comentários:

A tensão é nula até que o empuxo além de superar o peso, tenha altura de água suficiente para tracionar o fio. Então o empuxo aumenta até que o bloco fica completamente submerso (linearmente com a altura da coluna d'água que está diretamente relacionado à quantidade do corpo que está submerso), finalmente após o corpo submergir completo, não ocorre mais variação da tração.

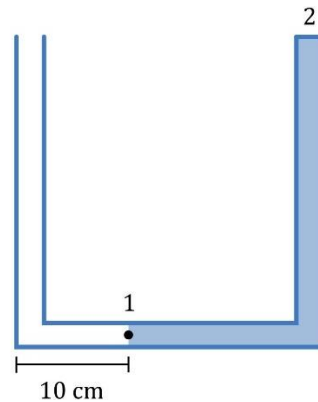
Gabarito: C

74. (OBF 3ª fase 2017)

A figura abaixo ilustra um tubo fino de extremidades abertas em forma de U, em repouso, e que contém água até o nível $H = 10 \text{ cm}$. Acionando um motor é possível fazer com que o tudo gire com velocidade angular constante ω ; em torno do eixo vertical y centrado no ramo esquerdo do tubo. Para que valor de ω a água está no limite de escapar do tubo? Use em suas considerações o fato de que a pressão de equilíbrio de líquidos que estão dentro de recipientes em rotação uniforme varia com a distância r ao eixo de rotação de acordo com expressão $p = p_c + \frac{1}{2}\rho\omega^2r^2$ onde p_c é a pressão do líquido sobre o eixo e ρ é a densidade do líquido.



Comentários:



De acordo com a fórmula dada no enunciado, no caso limite, a diferença de pressão entre os dois pontos da figura é de:

$$\Delta P = \left(p_c + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_2^2 \right) - \left(p_c + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r_1^2 \right)$$

Mas, pela Lei de Stevin:

$$\Delta P = \rho \cdot g \cdot h$$

Igualando as expressões:

$$g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot (r_2^2 - r_1^2) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{r_2^2 - r_1^2}}$$

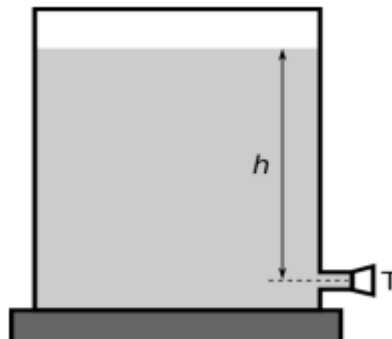
Substituindo os valores do problema:

$$\omega = \sqrt{\frac{20 \cdot 0,3}{0,09 - 0,01}} \Rightarrow \omega = 5\sqrt{3} \text{ rad/s}$$

Gabarito: $\omega = 5\sqrt{3} \text{ rad/s}$

75. (OBF – 2016)

Um recipiente contendo água possui uma pequena abertura de área de seção transversal localizada a uma profundidade h e que está inicialmente bloqueada por um tampão T , conforme figura abaixo. Movendo-se e segurando-se o tampão a uma pequena distância Δx para a direita, a água esguicha pela abertura, atinge o tampão, colide inelasticamente e escorre verticalmente para baixo. Determine (a) a velocidade com que a água sai pela abertura e (b) a força exercida pela água no tampão em termos de a , h , g e densidade da água. Ao expressar seus resultados, além das grandezas dadas, use g para aceleração da gravidade e ρ para a densidade da água.



Comentários:

Pela equação de Bernoulli entre a superfície da água e o orifício:

$$p_1 + \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h = p_2 + \rho \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

Em que o índice 1 se refere ao topo d'água no recipiente e o índice 2 refere-se à saída no orifício.

Mas:

$$A_1 \gg A_2$$

Portanto, pela equação da continuidade:

$$v_1 \ll v_2$$

E, devido à falta de informações no enunciado, assume-se que não há P_{atm} , logo:

$$p_1 = p_2$$

Assim:

$$\rho \cdot g \cdot h = \rho \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

A força sobre o tampão pode ser calculada pelo teorema do impulso.

$$F \cdot \Delta t = \Delta m \cdot v$$

$$F \cdot \Delta t = (a \cdot v \cdot \Delta t \cdot \rho) \cdot v$$

$$F = a \cdot \rho \cdot v^2 = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot a$$

Obs: Existe controvérsia quanto ao cálculo da velocidade (Bernoulli considera fluxo laminar, enquanto a outra solução, por dinâmica, também têm seus erros). O que difere é a letra a) no cálculo da velocidade. A força exercida em ambos os casos é $\rho \cdot a \cdot v^2$ variando apenas a velocidade entre os dois métodos.

Gabarito: a) $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ b) $F = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot a$



7. Considerações finais


Chegamos ao final da nossa aula. Relembre os principais conceitos estudados nessa aula e tenha no sangue o teorema do Stevin, as propriedades do empuxo, as definições de centro de carena, bem como as condições de equilíbrio de um corpo dentro de um líquido.

Estude com calma hidrodinâmica, já que ele é um assunto não tão comum em ensino médio brasileiro. O ITA e O IME já cobraram questões onde o aluno precisa utilizar a equação de Bernoulli e a equação da continuidade.

Fique atento aos conceitos de pressão absoluta e de pressão manométrica, já que podem existir questões que mesclam essas definições e você pode perder ponto na prova por besteira.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @proftoniburgatto



8. Referências bibliográficas

- [1] Pandey, DC. Understanding Physics.
- [2] Sharma, B.M. Physics for IIT-JEE – Mechanics II. 1. Ed. Cengage Learning's.
- [3] H. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica 2: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor, 4a edição, Editora Edgard Blücher, 2002.
- [4] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 3. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 357p.
- [5] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 2. 16ª ed. Saraiva, 1993. 512p.



9. Versão de aula

Versão de Aula	Data da última atualização
1.0	21/08/2019
1.1	30/08/2019

