Módulo 04

POTENCIAÇÃO e RADICIAÇÃO

4.1 Potenciação

Definições

4.1.1.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

4.1.2

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

4.1.3.

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

As regras do jogo

a) $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

Exemplo: • $3^2 \cdot 3^5 = \underbrace{3 \cdot 3}_{2\text{ vezes}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5\text{ vezes}} = 3^7$

• $3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5}$

b) $\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

Exemplo: • $(5 \cdot 3)^2 = (15)^2 = 225$

• $(5 \cdot 3)^2 = 5^2 \cdot 3^2 = 25 \cdot 9 = 225$

UNIVERSO NARRADO

c) $\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$

Exemplo: $\cdot\ (2^2)^3 = (4)^3 = 64$

$\cdot\ (2^2)^3 = 2^{2.3} = 2^6 = 64$

d) $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

Exemplo: $\cdot\ \left(\frac{12}{3}\right)^2 = (4)^2 = 16$

$\cdot\ \left(\frac{12}{3}\right)^2 = \frac{12^2}{3^2} = \frac{144}{9} = 16$

e)

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Exemplo:

- $\dfrac{5^3}{5^2} = \dfrac{5 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{5}} = 5$

- $\dfrac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5$

Exemplos

- $(-4)^2 = (-4)(-4) = +16$

- $-4^2 = -(4)(4) = -16$

- $(-3)^3 = \overbrace{(-3)\cdot(-3)}^{+9}\cdot(-3) = -27$

- $\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27}$

- $(-1)^{12} = +1$

- $(-1)^{33} = -1$

- $7^3 \cdot 7^{12} = 7^{3+12} = 7^{15}$

- $\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7^2}{3^2} = 49/9$

Consequências

(i) Elevar a zero

propriedade (a) :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$m = 0$: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n}$$

$$a^0 \cdot a^n = a^n$$

Conclusão : $\boxed{a^0 = 1}$ (desde que $a \neq 0$)

Exemplo:

- $7^0 = 1$
- $(-3)^0 = 1$
- $7{,}12^0 = 1$

(ii) Elevar a um expoente negativo

... algumas maneiras de pensar:

· PRIMEIRA ·

(Propriedade e :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\cancel{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \cancel{a^m} \cdot a^{-n}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Conclusão: $$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

• SEGUNDA •

Propriedade (a) :

$$a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$$

$m = -n$

$$a^{-n} \cdot a^{n} = a^{-n+n}$$

$$a^{-n} \cdot a^{n} = a^{0}$$

$$\boxed{a^{-n} \cdot a^{n} = 1}$$

$\div a^{n}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$$

Conclusão :

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}}$$

Exemplos:

- $7^{-1} = \frac{1}{7}$

- $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

- $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$

- $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = (5)^3 = 125$

- $(8^{-1})^{-2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = 8^2 = 64$

- $\frac{1}{3^{-1}} = 3^1$

UNIVERSO NARRADO

(iii) Elevar a expoente fracionário

propriedade (a) :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$m = n = \frac{1}{2}$

$$a^{1/2} \cdot a^{1/2} = a^{1/2 + 1/2}$$

$$a^{1/2} \cdot a^{1/2} = a^1$$

$$a^{1/2} \cdot a^{1/2} = a$$

$$\left(a^{1/2}\right)^2 = a$$

elevar a $1/2$ é uma operação (raiz quadrada) que é cancelada por elevar a 2.

Operações inversas!

Exemplos:

- $16^{1/2} = (4^2)^{1/2} = 4^{2 \cdot 1/2} = 4^1 = 4$

- $25^{1/2} = (5^2)^{1/2} = 5^1 = 5$

- $(49)^{-1/2} = \dfrac{1}{49^{1/2}} = \dfrac{1}{(7^2)^{1/2}} = \dfrac{1}{7}$

- $(8)^{1/3} = (2^3)^{1/3} = 2^{3 \cdot 1/3} = 2$

4.2 Radiciação

inverso da potenciação

Definição

4.2.1.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{1/n}}$$

A raiz n-ésima de "a" (representada por $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{1/n}$) é o número "b" tal que $b^n = a$.

Exemplos:

- $$\sqrt[2]{100} = (100)^{1/2} = (10^{2})^{1/2} = 10^{2\cdot\frac{1}{2}} = 10$$

- $$\sqrt[3]{8} = (2^3)^{1/3} = 2$$

- $$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = \left[(-2)^3\right]^{1/3} = -2$$

- $$\sqrt[4]{16} = (16)^{1/4} = (2^4)^{1/4} = 2$$

- $$\sqrt[17]{5^{17}} = (5^{17})^{1/17} = 5$$

- $$\sqrt{\pi^2} = (\pi^2)^{1/2} = \pi^1 = \pi$$

- $$\sqrt[5]{32} = (32)^{1/5} = (2^5)^{1/5} = 2$$

- $$\left(\sqrt[10]{32}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt[10]{32}} = \frac{1}{(2^5)^{1/10}} = \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

As regras do jogo

as "mesmas" da potenciação!

ALERTA

$$\boxed{\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \neq \sqrt[m+n]{a}}$$

Exemplo:

- $\sqrt[2]{64} \cdot \sqrt[3]{64} = \underbrace{8} \cdot \underbrace{4} = 32$

- $\sqrt[2]{64} \cdot \sqrt[3]{64} \neq \sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^6} \neq 32$

a) $\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$

Exemplo:

- $\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10$

- $\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$

UNIVERSO NARRADO

b) $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$

<u>Exemplo:</u> • $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

• $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

c) $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$

<u>Exemplo:</u> • $\sqrt{\frac{100}{4}} = \sqrt{25} = 5$

• $\sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$

UNIVERSO NARRADO

d) $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{(a^m)}}$

Exemplo:

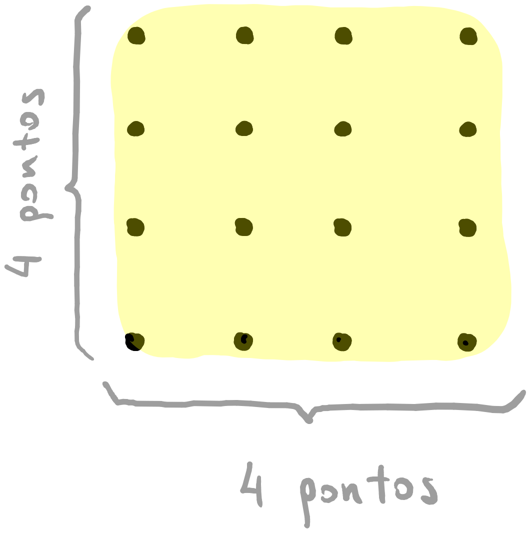
- $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = (2)^2 = 4$

- $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = \sqrt[3]{(8^2)} = \sqrt[3]{64}$

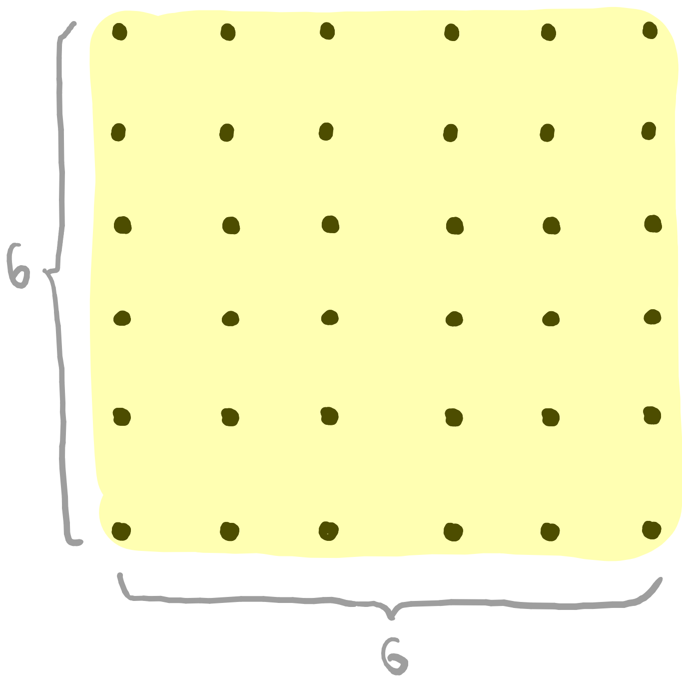
$= \sqrt[3]{4^3} = 4$

Interpretação Geométrica

(i) $\sqrt[2]{}$



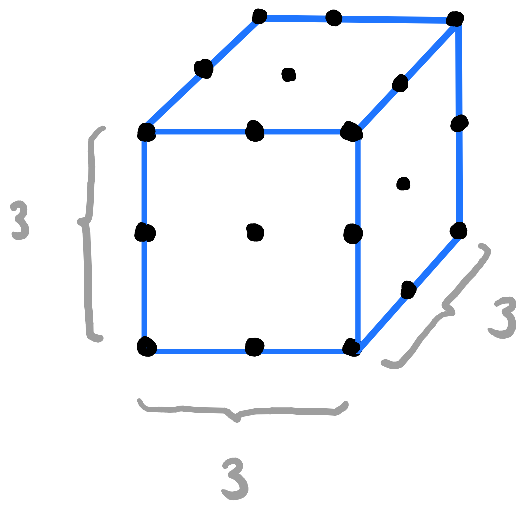
$\sqrt{16} = 4$



$\sqrt{36} = 6$

$\sqrt{A}$ = lado do quadrado de área A

(ii) $\sqrt[3]{}$



$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$\sqrt[3]{V}$ = aresta do cubo de volume V

Observação

módulo de "a"

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

para eliminar a ambiguidade

Exemplos

- $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = |5| = +5$
- $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = |2| = 2$
- $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$
- $\sqrt[3]{-8} = -2$
- $\sqrt[3]{-1} = -1$
- $\sqrt[3]{1} = 1$

UNIVERSO NARRADO

Exemplos

- $\sqrt{4 \cdot 3^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3^2} = 2 \cdot 3 = 6$

- $\sqrt[3]{12 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 2} = \sqrt[3]{(2 \cdot 3)^3} = 6$

- $\left(\sqrt{16 + 4 \cdot 44}\right)^3 = \left(\sqrt{4 \cdot 4 + 4 \cdot 44}\right)^3$

$$= \left(\sqrt{4(4 + 44)}\right)^3$$

$$= \left(\sqrt{4 \cdot 48}\right)^3 = \left(\sqrt{4 \cdot 4 \cdot 12}\right)^3$$

$$= \left(\sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3}\right)^3 = \left(\sqrt{2^6 \cdot 3}\right)^3$$

$$= \left(\underbrace{\sqrt{2^6}^{\,3}}_{2^9} \cdot \underbrace{\sqrt{3}^{\,3}}_{3\sqrt{3}}\right) = 2^9 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$$

Racionalização de frações

Sumir com o número irracional (raiz não exata) do denominador.

$$\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{1}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemplos

- $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

- $\frac{17}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{17\sqrt{3}}{3}$

- $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[\cancel{3}]{5^{\cancel{3}}}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

- $\frac{1}{\sqrt[5]{2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}} = \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[\cancel{5}]{2^{\cancel{5}}}} = \frac{\sqrt[5]{16}}{2}$

UNIVERSO NARRADO

- $$\frac{1}{(\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$(\sqrt{3})^2 - 1^2$$

$$\boxed{(a-b)(a+b) = a^2-b^2}$$

- $$\frac{2}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}\cdot\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$$

$$(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2$$

$$5 - 2$$

Exercício

Compare os números $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[5]{7}$

$$x = \sqrt[3]{5} = 5^{1/3} = 5^{\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}} = 5^{5/15}$$

$$y = \sqrt[5]{7} = 7^{1/5} = 7^{\frac{1\cdot 3}{5\cdot 3}} = 7^{3/15}$$

$$x = 5^{5/15} = \left(5^5\right)^{1/15} = \sqrt[15]{5^5} = \sqrt[15]{3125}$$

$$y = 7^{3/15} = \left(7^3\right)^{1/15} = \sqrt[15]{7^3} = \sqrt[15]{343}$$

Como $3125 > 343$

$$\sqrt[15]{3125} > \sqrt[15]{343}$$

$$x > y$$

4.3 Aplicação: Conversão de Unidades

4.3.1. Grandezas Simples

Nomenclatura:

- k : kilo ⟶ 10^3
- h : hecto ⟶ 10^2
- da : deca ⟶ 10^1

- d : deci ⟶ $10^{-1} = \frac{1}{10}$
- c : centi ⟶ $10^{-2} = \frac{1}{100}$
- m : mili ⟶ $10^{-3} = \frac{1}{1000}$

Exemplo:

metro (m)

$1\,km = 10^{3}\,m$

$1\,hm = 10^{2}\,m$

$1\,cm = 10^{-2}\,m$

$1\,mm = 10^{-3}\,m$

$1\,dm = 10^{-1}\,m$

grama (g)

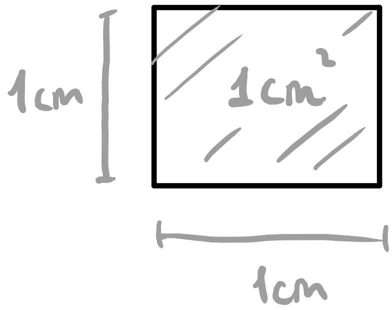
$1\,kg = 10^{3}\,g$

$1\,cg = 10^{-2}\,g$

$1\,mg = 10^{-3}\,g$

$1\,dg = 10^{-1}\,g$

Unidades quadráticas



(i) $1\ cm = 10^{-2}\ m$

$$(1\ cm)^2 = (10^{-2}\ m)^2$$

$$1^2\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2 \quad \therefore \quad \boxed{1\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2}$$

(ii) $1\ Km^2 \longrightarrow m^2 = ?$

$$1\ Km = 10^3\ m$$

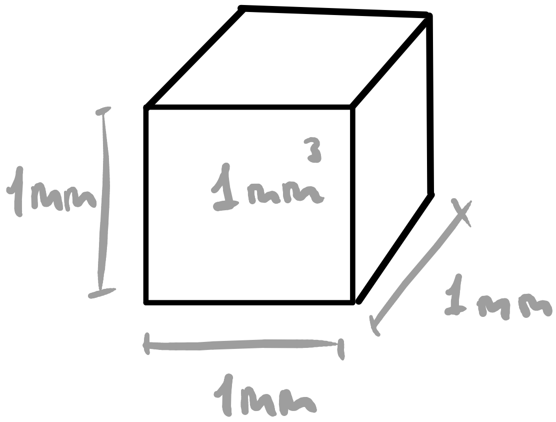
$$(1\ Km)^2 = (10^3\ m)^2$$

$$\boxed{1\ Km^2 = 10^6\ m^2}$$

Unidades cúbicas

Obs.: $1 m^3 = 10^3 L$

(ii) $1 mm^3 \longrightarrow m^3 = ?$



$1 mm = 10^{-3} m$

$(1 mm)^3 = (10^{-3} m)^3$

$$\boxed{1 mm^3 = 10^{-9} m^3}$$

Exemplos

- 12 L para mL

$1\,mL = 1 \cdot 10^{-3}\,L \quad \therefore \quad 1\,mL = 10^{-3}\,L$

$1\,L = 10^{3}\,mL \quad \therefore \quad \boxed{12\,L = 12 \cdot 10^{3}\,mL}$

- $4\,cm^3$ para m^3

$1\,cm = 10^{-2}\,m$

$(1\,cm)^3 = (10^{-2}\,m)^3$

$1\,cm^3 = 10^{-6}\,m^3$

$\boxed{4\,cm^3 = 4 \cdot 10^{-6}\,m^3}$

- $7\,m^2$ para mm^2

$1\,mm = 10^{-3}\,m$

$\times 10^{3}$

$10^{3}\,mm = 1\,m$

$(10^{3}\,mm)^2 = (1\,m)^2$

$10^{6}\,mm^2 = 1\,m^2$

$\boxed{7\,m^2 = 7 \cdot 10^{6}\,mm^2}$

4.3.2. Grandezas Compostas

Exemplos

(i) $$1\,\frac{m}{s} = \frac{1\cdot 10^{-3}\,km}{\frac{1h}{3600}} = 1\cdot 10^{-3}\cdot\frac{3600}{1}\cdot km/h$$

$$1h \rightarrow 60\cdot 60\ seg$$
$$1h = 3600\ seg$$
$$\frac{1h}{3600} = \frac{3600\ seg}{3600}$$
$$\frac{1h}{3600} = 1\ seg$$

$$\begin{tikzcd} 1\,m/s \arrow[r] \arrow[r, bend left=50, "\times 3{,}6"] & 3{,}6\,km/h \arrow[l, bend left=50, "\div 3{,}6"] \end{tikzcd}$$

(ii) $\dfrac{180 \, cm}{min} =$

$$= \frac{180 \cdot 10^{-2} \, m}{60 \, seg} = 3 \cdot 10^{-2} \, m/s$$

$$= \frac{3}{100} \, m/s$$

$$= 0{,}03 \, m/s$$

Resumo das operações

ADIÇÃO/ SUBTRAÇÃO

inversas

$+$ $\leftrightarrow$ $-$

Exemplo

7

$7 \cancel{+3} \cancel{-3} = 7$

MULTIPLICAÇÃO/ DIVISÃO

inversas

$\cdot$ $\leftrightarrow$ $\div$

Exemplo

7

$\dfrac{7 \cancel{\cdot 3}}{\cancel{3}} = 7$

POTENCIAÇÃO/ RADICIAÇÃO

inversas

$\boxed{}^{n}$ $\leftrightarrow$ $\boxed{}^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{\boxed{}}$

Exemplo

7

$\cancel{\sqrt[3]{\vphantom{7}}}\,7^{\cancel{3}} = 7$

$(7^{3})^{1/3} = 7^{1}$