Cálculo da energia cinética de um gás ideal

Vamos considerar um recipiente cúbico cujas arestas medem *a* (fig. 1), dentro do qual há *N* moléculas idênticas de um gás ideal. Para calcular a pressão desse gás, vamos escolher uma das faces do cubo (por exemplo, a face BCDE) e tentar calcular o módulo da força normal exercida pelas moléculas do gás sobre essa face, lembrando que:

$$\text{pressão} = \frac{\text{força}}{\text{área}}$$

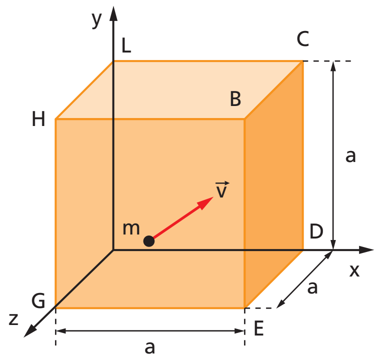

Figura 1.

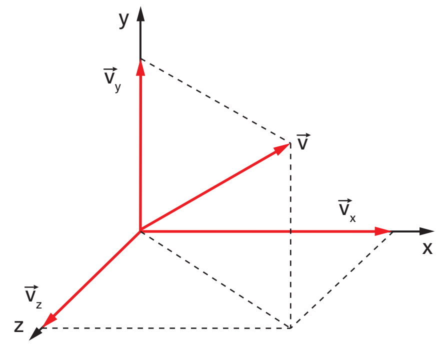

Figura 2.

Tomemos uma molécula de massa *m* e velocidade $\vec{v}$, cujas componentes são $\vec{v}_x$ $\vec{v}_y$ e $\vec{v}_z$ em relação aos eixos triortogonais (fig. 2). Da Geometria sabemos que:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Vamos supor que essa molécula colida com a face BCDE. Como o gás é ideal, a colisão é elástica; assim, a quantidade de movimento da molécula não tem seu módulo alterado (podendo, porém, alterar sua direção ou sentido).

Na figura 3 fazemos a representação simplificada de um dos possíveis choques com a face BCDE (a componente $\vec{v}_z$ não aparece no desenho). A componente $\vec{v}_x$, que é perpendicular à face, tem seu sentido invertido, mas as componentes $\vec{v}_y$ e $\vec{v}_z$ não sofrem alteração; assim, podemos calcular a variação da quantidade de movimento sofrida pela molécula, usando apenas a componente $\vec{v}_x$. Sendo $\vec{Q}_{x_i}$ a quantidade de movimento da molécula antes da colisão (fig. 4) e $\vec{Q}_{x_f}$ a quantidade de movimento após a colisão (na direção *x*), temos:

$$\vec{Q}_{x_i} = m\vec{v}_x \text{ e } \vec{Q}_{x_f} = -m\vec{v}_x$$

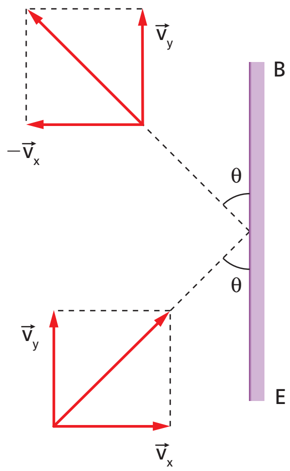

Figura 3.

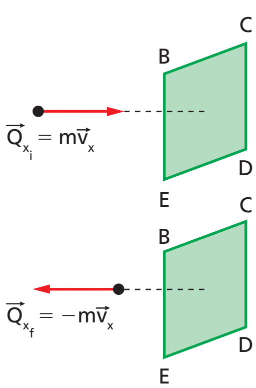

Figura 4.

Assim, a variação da quantidade de movimento da molécula é:

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_{x_f} - \vec{Q}_{x_i} = -m\vec{v}_x - m\vec{v}_x = -2m\vec{v}_x \quad (1)$$

Suponhamos que a mesma molécula atinja a face oposta (GHLO) sem colidir com nenhuma outra molécula; nessa face ela terá o seu sentido novamente invertido e voltará a colidir com BCDE. O intervalo de tempo gasto na viagem de ida e volta será:

$$\Delta t = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}} = \frac{2a}{v_x} \quad (2)$$

Aplicando-se o Teorema do Impulso, o módulo da força $\vec{F}_1$ exercida por essa molécula sobre a face BCDE é dado por:

$$\left|\vec{F}_1\right| = \frac{\left|\Delta\vec{Q}\right|}{\Delta t} \quad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3):

$$\left|\vec{F}_1\right| = \frac{\left|\Delta\vec{Q}\right|}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\frac{2a}{v_x}} = \frac{mv_x^2}{a}$$

Para obter o módulo da força total $\vec{F}$ exercida sobre a face do cubo, devemos somar as contribuições de todas as *N* moléculas:

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{m}{a}(v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + \ldots + v_{x_N}^2)$$

Multiplicando por *N* o numerador e o denominador do membro direito da equação acima, o valor de $\left|\vec{F}\right|$ não se altera:

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{N \cdot m}{a}\left(\frac{v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + \ldots + v_{x_N}^2}{N}\right) \quad (4)$$

O termo entre parênteses é o **valor médio** de v_x^2 para todas as partículas. Indicando esse valor médio por $\overline{v_x^2}$, a equação (4) torna-se:

$$\left|\vec{F}\right| = N \cdot m \cdot \frac{\overline{v_x^2}}{a} \quad (5)$$

Lembremos agora que $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Como o número de moléculas é muito grande e elas se movem ao acaso, os valores médios de v_x^2 v_y^2 e v_z^2 devem ser iguais:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

Assim:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3 \cdot \overline{v_x^2} \Rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$$

Substituindo em (5):

$$|\vec{F}| = \frac{N \cdot m}{a} \cdot \frac{1}{3}\overline{v^2} = \frac{N \cdot m\overline{v^2}}{3a}$$

Como a área da face do cubo é a^2, a pressão sobre essa face será:

$$p = \frac{|\vec{F}|}{a^2} = \frac{\dfrac{N \cdot m \quad \overline{v^2}}{3a}}{a^2} = \frac{N \cdot m\overline{v^2}}{3a^3}$$

Mas a^3 é o volume V do cubo. Assim:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{N \cdot m}{V} \cdot \overline{v^2} \quad (6)$$

onde $N \cdot m$ é a massa total do gás. Sendo d a densidade do gás, temos: $d = \frac{N \cdot m}{V}$. Desse modo, a equação (6) pode ser escrita:

$$p = \frac{1}{3} \cdot d \cdot \overline{v^2} \quad (7)$$

Assim, medindo as grandezas macroscópicas **pressão** e **densidade**, por meio da equação (7), podemos obter o valor de $\overline{v^2}$.

Da equação (6), obtemos:

$$pV = \frac{N \cdot m}{3}\overline{v^2} \quad (8)$$

Por outro lado, a equação de Clapeyron nos dá:

$$pV = n \cdot RT \quad (9)$$

De (8) e (9), obtemos:

$$\frac{N \cdot m}{3}\overline{v^2} = nRT \quad \text{ou} \quad \frac{Nm\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}nRT$$

Mas $\frac{Nm\overline{v^2}}{2}$ é a energia cinética de translação total do gás; assim:

$$E_C = \frac{3}{2}nRT \quad (10) \qquad \text{ou} \qquad E_C = \frac{3}{2}pV \quad (11)$$