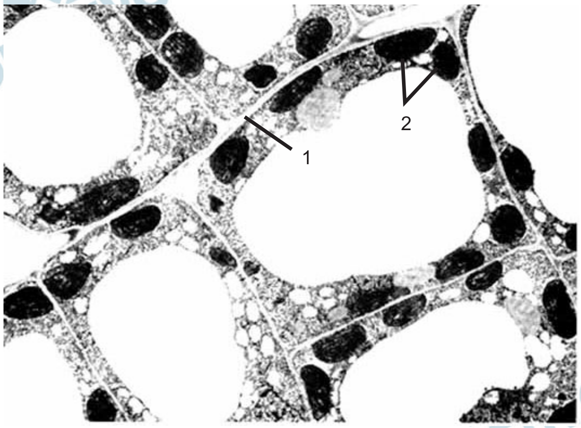
1

A figura apresenta uma imagem microscópica de células eucarióticas.



(J. Burgess, Carnegie Mellon University, mimp.mems.cmu.edu.)

a) A imagem mostra um conjunto de células animais ou vegetais? Justifique.

b) Dê o nome das estruturas apontadas em 1 e 2 e explique suas funções.

Resolução

a) Células vegetais uma vez que as células possuem parede celular (1) e plastídeos (cloroplasto) (2), além de um grande vacúolo central.

b) 1 – Parede celular com funções de proteção e sustentação mecânica.
2 – Cloroplasto – função de fotossíntese.

2

Os répteis foram o primeiro grupo de vertebrados a conquistar o ambiente terrestre de forma plena.

a) Os répteis modernos estão classificados em três principais ordens. Dê um exemplo de uma espécie pertencente a cada uma dessas ordens.

b) Explique quais foram as adaptações necessárias para que os répteis pudessem viver no ambiente terrestre.

Resolução

a) A tartaruga e o jabuti são répteis da ordem dos <u>Quelônios</u>.
O jacaré e o crocodilo são répteis da ordem dos <u>Crocodilianos</u>.
A cascavel e a jararaca são répteis da ordem dos <u>Esquamatas</u>, subordem dos Ofídeos.

b) A pele muito queratinizada; a presença de ovo com casca calcárea, âmnio, cório e alantoide; a fecundação interna; e a excreção de ácido úrico facilitaram a conquista no ambiente terrestre.

3

Copaifera langsdorffii é uma árvore de grande porte, amplamente distribuída pelo Brasil e conhecida popularmente como copaíba.

A dispersão das sementes da copaíba é feita por aves frugívoras.

a) Indique e explique objetivamente a relação ecológica que se estabelece entre a copaíba e as aves frugívoras.

b) Considerando que as sementes poderiam germinar ao redor da planta-mãe, por que a dispersão é importante para a espécie vegetal?

Resolução

a) A relação entre as árvores e as aves frugívoras é um caso de mutualismo, em que as duas espécies são favorecidas e a sobrevivência de ambas depende da interação entre elas.

b) A dispersão das sementes garante a ocupação e a exploração de novas áreas pelas plantas, evitando e reduzindo a competição intraespecífica.

4

Em carta enviada à revista científica *Science*, cientistas brasileiros afirmaram que as mudanças no Código Florestal Brasileiro, aprovadas por comissão especial da Câmara dos Deputados neste ano, poderão levar mais de 100 mil espécies à extinção, além de aumentar substancialmente as emissões de gás carbônico (CO_2) na atmosfera.

a) Qual o problema ambiental causado pelo aumento das emissões de gás carbônico e quais suas consequências?

b) Segundo os cientistas, a flexibilização no Código Florestal estimulará o desmatamento e reduzirá a restauração obrigatória de áreas nativas ilegalmente desmatadas. Explique como essas mudanças no código podem levar à extinção de espécies e ao aumento nas emissões de gás carbônico.

Resolução

a) O problema causado é o efeito estufa. Entre suas possíveis consequências temos o derretimento de geleiras, a elevação do nível do mar e a inundação de cidades litorâneas.

b) O desmatamento e a não obrigatoriedade de reflorestamento podem levar à extinção de espécies, porque diminui a biodiversidade. Podem provocar o aumento das emissões de gás carbônico porque, levando ao efeito estufa, estimulam a decomposição feita por micro-organismos do solo. Além disso, a redução da área verde, consequentemente, diminui a fixação do CO_2 atmosférico.

5

Analise a informação nutricional contida no rótulo de dois alimentos, considerando que um deles será totalmente ingerido por uma pessoa que sofre de hipertensão arterial.

ALIMENTO 1 Informação nutricional		
	Quantidade	%VD (*)
Valor energético	84 kcal = 353 kJ	4
Carboidratos	9,8 g	3
Proteínas	2,1 g	3
Gorduras totais	4,0 g	7
Gorduras saturadas	2,3 g	10
Gorduras trans	0 g	**
Fibra alimentar	1,2 g	5
Sódio	1 262 mg	53

* Valores diários com base em um dieta de 2 000 kcal ou 8 400 kJ. Seus valores diários podem ser maiores ou menores dependendo de suas necessidades energéticas. ** VD não estabelecido.

ALIMENTO 2 Informação nutricional		
	Quantidade	%VD (*)
Valor energético	79 kcal = 332 kJ	4
Carboidratos	13 g	4
Proteínas	1,2 g	2
Gorduras totais	2,6 g	5
Gorduras saturadas	1,4 g	6
Gorduras trans	0 g	**
Fibra alimentar	4,8 g	20
Sódio	612 mg	26

* Valores diários com base em um dieta de 2 000 kcal ou 8 400 kJ. Seus valores diários podem ser maiores ou menores dependendo de suas necessidades energéticas. ** VD não estabelecido.

a) Por qual dos dois alimentos um hipertenso deveria optar? Justifique.

b) Cite dois componentes do rótulo que podem influenciar no aumento da pressão arterial e explique de que forma exercem essa influência.

Resolução

a) **O indivíduo hipertenso deverá optar pelo alimento 2. O alimento 1 não é recomendável, pois contém maior quantidade de gorduras totais e de sódio.**

b) **Gorduras totais e sódio. As gorduras podem provocar o aparecimento de placas que obstruem as artérias. O sódio, em níveis elevados, aumenta o volume sanguíneo por alteração da pressão osmótica do sangue.**

6

Ligas metálicas são comuns no cotidiano e muito utilizadas nas indústrias automobilística, aeronáutica, eletrônica e na construção civil, entre outras. Uma liga metálica binária contendo 60% em massa de cobre foi submetida à análise para identificação de seus componentes. Uma amostra de 8,175 g da liga foi colocada em contato com excesso de solução de ácido clorídrico, produzindo 0,05 mol de gás hidrogênio. O que restou da liga foi separado e transferido para um recipiente contendo solução de ácido nítrico concentrado. As reações ocorridas são representadas nas equações, em que um dos componentes da liga é representado pela letra **M**.

$$M(s) + 2\,HCl(aq) \rightarrow MCl_2(aq) + H_2(g)$$

$$Cu\,(s) + 4\,HNO_3(aq) \rightarrow$$
$$\rightarrow Cu(NO_3)_2(aq) + 2\,NO_2\,(g) + 2H_2O\,(l)$$

a) Determine a variação do número de oxidação das espécies que sofrem oxidação e redução na reação com ácido nítrico.

b) Identifique o componente **M** da liga, apresentando os cálculos utilizados.

Resolução

a) $Cu(s) + 4HNO_3(aq) \longrightarrow Cu(NO_3)_2(aq) + 2NO_2(g) + 2H_2O(l)$

Cu: $0 \xrightarrow{\text{oxidação}} 2+$ $\quad |\Delta| = |+2 - 0| = 2$

N: $5+ \xrightarrow{\text{redução}} 4+$ $\quad |\Delta| = |4 - 5| = 1$

b) Cálculo da massa molar do metal M (40% do metal na liga):

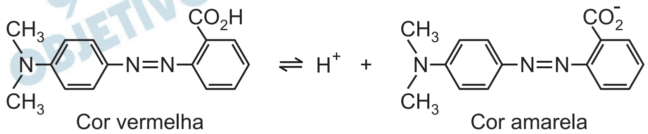
$$\textbf{1 mol de M(s)} \xrightarrow{\textbf{produz}} \textbf{1 mol de } \mathbf{H_2(g)}$$
$$\downarrow$$
$$\mathbf{0{,}40 \,.\, 8{,}175} \longleftarrow \mathbf{0{,}05mol}$$
$$\mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{1\ mol}$$

M = 65,4g/mol

Verificando-se na tabela periódica, deduz-se que o elemento M é o Zn (zinco). A liga metálica a que se refere o texto é o latão.

Para trabalhar com o tema "equilíbrio ácido-base", um professor de química realizou junto com seus alunos dois experimentos.

I. Em uma solução aquosa incolor de NaOH, adicionaram gotas do indicador representado na figura.



II. Uma solução aquosa incolor de NH_4Cl foi posta em contato, separadamente, com cada indicador relacionado na tabela. Após o teste, a solução apresentou a coloração amarela com os indicadores 1 e 2 e vermelha com o indicador 3.

Indicador	Cor em solução ácida	Faixa de pH de viragem	Cor em solução básica
1	Amarela	6,0 – 7,6	azul
2	Amarela	5,2 – 7,0	vermelha
3	Azul	3,0 – 5,0	vermelha

a) No experimento I, descreva o que ocorre com o equilíbrio químico e com a cor da solução do indicador, em decorrência da interação com a solução de NaOH.

b) Considerando o conceito de hidrólise, justifique o caráter ácido-base da solução testada no experimento II. Qual é a faixa de pH dessa solução?

Resolução

a) **O equilíbrio representado para o indicador apresenta caráter ácido pela presença de íons H^+.**

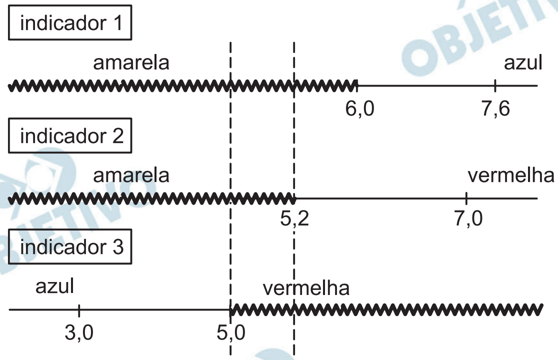
A dissociação do NaOH é dada pela equação:
$NaOH(s) \rightarrow Na^+(aq) + OH^-(aq)$

Conclui-se então que o equilíbrio do indicador é deslocado para direita, pois haverá a neutralização dos íons H^+ com íons OH^-, adquirindo cor amarela.
$H^+(aq) + OH^-(aq) \longrightarrow H_2O(l)$

b) **A hidrólise do NH_4Cl é dada pelo processo:**
- **dissociação do NH_4Cl**
  $NH_4Cl \longrightarrow NH_4^+(aq) + Cl^-(aq)$
- **hidrólise do íon NH_4^+**
  $NH_4^+ + H_2O \rightleftarrows NH_3 + H_3O^+$

A solução apresentará caráter ácido, pois o NH_4Cl é formado por um ácido forte (HCl) e base fraca (NH_4OH).

A faixa de pH pode ser determinada segundo o esquema:



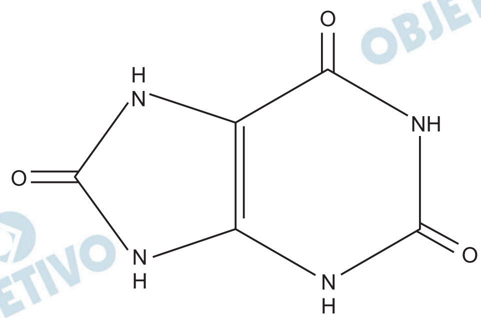
Portanto, a faixa está entre 5,0 e 5,2 (meio ácido).

8

O cálculo renal, ou pedra nos rins, é uma das doenças mais diagnosticadas por urologistas. A composição do cálculo pode ser determinada por análises químicas das pedras coletadas dos pacientes. Considere as análises de duas amostras de cálculo renal de diferentes pacientes.

Amostra I
Análise elementar por combustão.
Resultado: presença de ácido úrico no cálculo renal.

Amostra II
Decomposição térmica:
massa inicial da amostra: 8,00 mg
massa do resíduo sólido final: 4,40 mg
Resultado: presença de oxalato de cálcio, CaC_2O_4, no cálculo renal.



ácido úrico

a) Escreva a equação balanceada da reação de combustão completa do ácido úrico, onde os produtos de reação são água, gás nitrogênio (N_2) e gás carbônico (CO_2).

b) Determine o teor percentual, em massa, de oxalato de cálcio na amostra II do cálculo renal, sabendo-se que os gases liberados na análise são CO e CO_2, provenientes exclusivamente da decomposição térmica do CaC_2O_4.

Resolução

a) Combustão completa do ácido úrico:

$$C_5H_4N_4O_3 + \frac{9}{2}\ O_2 \longrightarrow 2\ H_2O + 2\ N_2 + 5\ CO_2$$

b) Cálculo da massa de gases liberados na decomposição térmica do CaC_2O_4:

m = 8,00 mg – 4,40 mg = 3,60 mg

A equação da decomposição do oxalato pode ser expressa por:

$$\begin{array}{ccccccc} CaC_2O_4(s) & \rightarrow & CaO(s) & + & CO(g) & + & CO_2(g) \\ 1\ mol & & & & 1\ mol & & 1\ mol \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 28g & & 44g \end{array}$$

128g ——————— total = 28g + 44g = = 72g de gases

x ——————— 3,60 mg

x = 6,40 mg de CaC_2O_4

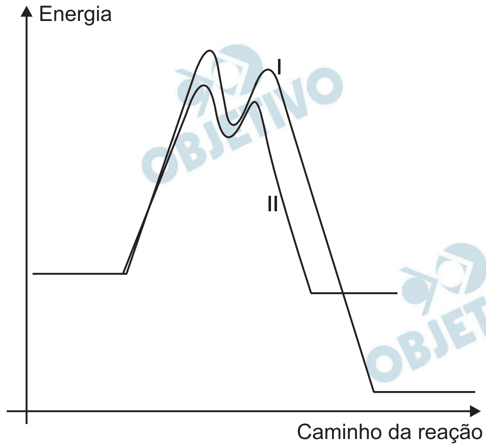
Teor porcentual de oxalato de cálcio na amostra do cálculo renal:

8,00 mg da amostra ———— 100%

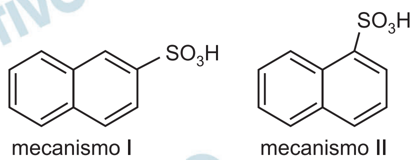
6,40 mg de CaC_2O_4 ———— y

y = 80% de CaC_2O_4 em massa

O naftaleno é um composto utilizado como matéria-prima na produção de diversos produtos químicos, como solventes, corantes e plásticos. É uma substância praticamente insolúvel em água, 3 mg/100 mL, e pouco solúvel em etanol, 7,7 g/100 mL. A reação de sulfonação do naftaleno pode ocorrer por dois diferentes mecanismos, a 160 ºC representado na curva I (mecanismo I) e a 80 ºC, representado na curva II (mecanismo II).



Os principais produtos de reação obtidos são:

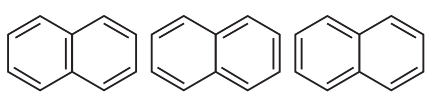


a) Represente as estruturas de ressonância do naftaleno. Explique as diferenças de solubilidade do naftaleno nos solventes relacionados.

b) Explique por que o mecanismo I ocorre em temperatura maior que o mecanismo II. Classifique as reações que ocorrem nas curvas I e II, quanto ao calor de reação.

Resolução

a)

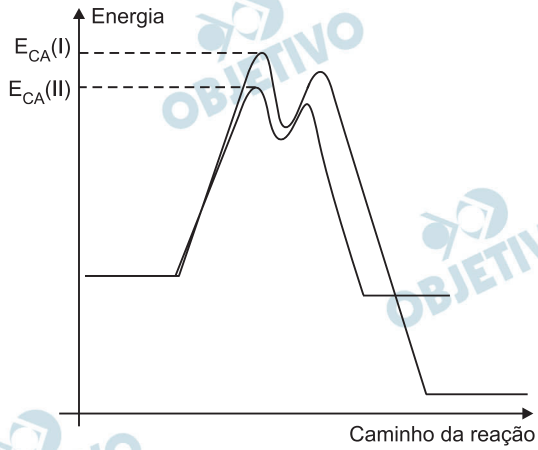


O naftaleno é uma molécula apolar.
A água é uma molécula polar.
O etanol é uma molécula polar (hidrofílica) com uma parte apolar (hidrofóbica):

$\mathbf{\underbrace{H_3C - CH_2}_{apolar} - \underbrace{O - H}_{polar}}$

Portanto, o naftaleno é praticamente insolúvel em água e pouco solúvel em etanol.

b) Para a reação ocorrer, os reagentes devem apresentar um conteúdo mínimo de energia para que os choques entre as moléculas sejam efetivos. Essa energia corresponde à energia do complexo ativado. Pelo mecanismo I, verificamos que a energia do complexo ativado é maior que pelo mecanismo II. Concluímos que, para atingir esse complexo ativado do mecanismo I, precisamos fornecer uma energia maior (maior temperatura: 160°C) e para o mecanismo II, precisamos fornecer uma energia menor (menor temperatura: 80°C).



Os dois processos correspondem a reações exotérmicas (liberam calor), pois a entalpia dos produtos é menor que a entalpia dos reagentes.

10

A Política Nacional dos Resíduos Sólidos foi sancionada pelo governo em agosto de 2010. É um avanço na área ambiental, já que a lei estabelece regras muito importantes, como o sistema de logística reversa. Nesse sistema, um pneu de automóvel, após a sua vida útil, deverá ser recolhido pelo fabricante, para que tenha um destino adequado. Um pneu pode ser obtido a partir do aquecimento da borracha, natural ou sintética, com enxofre na presença de um catalisador. A borracha sintética é obtida a partir da polimerização do buta-1,3-dieno.

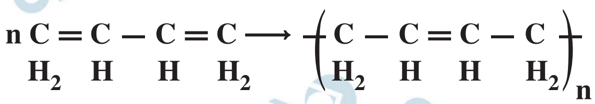
Na reação de 1 mol de moléculas de buta-1,3-dieno com 1 mol de moléculas de hidrogênio, sob condições experimentais adequadas, obtém-se como principal produto o but-2-eno.

a) Qual é o nome do processo que ocorre com o polímero durante a fabricação desse pneu? Quais modificações ocorrem nas cadeias do polímero da borracha após esse processo?

b) Escreva a equação da reação de hidrogenação descrita. Apresente os isômeros espaciais do but-2-eno.

Resolução

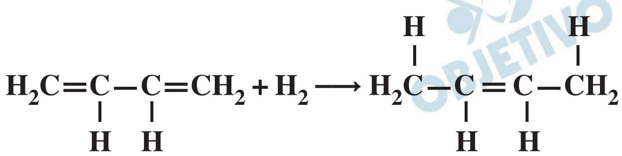
A reação de formação da borracha sintética pode ser representada pela equação:



buta-1,3-dieno **borracha sintética**

a) Para aumentar sua resistência à tração, faz-se o tratamento a quente com enxofre elementar. Este processo é chamado vulcanização, que cria pontes de enxofre entre as cadeias do polímero.

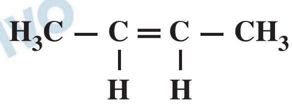
b)



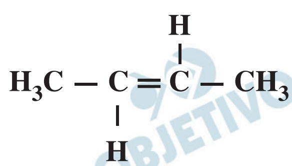
buta-1,3-dieno **but-2-eno**

O but-2-eno apresenta 2 isômeros geométricos:

Cis

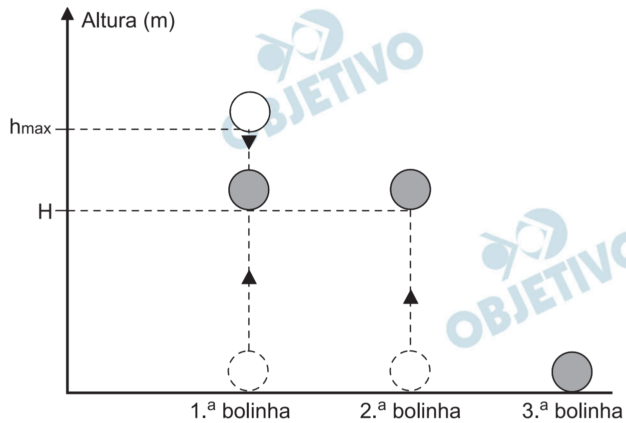


Trans



11

Três bolinhas idênticas, são lançadas na vertical, lado a lado e em sequência, a partir do solo horizontal, com a mesma velocidade inicial, de módulo igual a 15 m/s para cima. Um segundo após o lançamento da primeira, a segunda bolinha é lançada. A terceira bolinha é lançada no instante em que a primeira, ao retornar, toca o solo.



Considerando g = 10 m/s^2 e que os efeitos da resistência do ar ao movimento podem ser desprezados, determine

a) a altura máxima (h_{max}) atingida pela primeira bolinha e o instante de lançamento da terceira bolinha.

b) o instante e a altura H, indicada na figura, em que a primeira e a segunda bolinha se cruzam.

Resolução

a) 1) Aplicando-se a Equação de Torricelli para a 1ª bolinha, vem:

$$V^2 = V_0^2 + 2\,\gamma\,\Delta s \quad \uparrow (+)$$

$$0 = (15)^2 + 2\,(-10)\,h_{máx}$$

$$20h_{máx} = 225 \Rightarrow \boxed{h_{máx} = 11{,}25\text{m}}$$

2) O instante de lançamento da 3ª bolinha corresponde ao tempo de voo da primeira:

$$V = V_0 + \gamma\,t \quad \uparrow (+)$$

$$-15 = 15 - 10T$$

$$10T = 30 \Rightarrow \boxed{T = 3{,}0\text{s}}$$

b) 1) A equação horária h = f(t) é dada por:

$$h = h_0 + V_0 t + \frac{\gamma}{2} t^2$$

Para a 1ª bolinha:
$$h_1 = 15t - 5{,}0t^2 \text{ (SI)}$$

Para a 2ª bolinha:
$$h_2 = 15\,(t - 1{,}0) - 5{,}0\,(t - 1{,}0)^2 \text{ (SI)}$$

Para o encontro: $h_1 = h_2$

$$15t_E - 5{,}0\,t_E^2 = 15\,(t_E - 1{,}0) - 5{,}0\,(t_E - 1{,}0)^2$$

$$\div\,5:\ 3{,}0t_E - t_E^2 = 3{,}0\,(t_E - 1{,}0) - (t_E - 1{,}0)^2$$

$$3{,}0t_E - t_E^2 = 3{,}0t_E - 3{,}0 - t_E^2 + 2t_E - 1{,}0$$

$$2t_E = 4{,}0 \Rightarrow \boxed{t_E = 2{,}0s}$$

2) **Na equação de h_1:**

$$h_E = 15\,t_E - 5{,}0t_E^2$$

$$H = 15 \,.\, 2{,}0 - 5{,}0 \,.\, (2{,}0)^2\ (m)$$

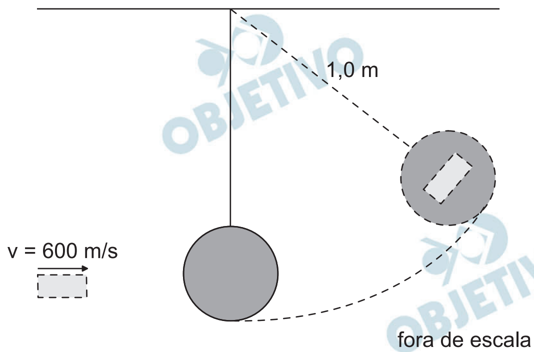
$$H = 30 - 20\ (m) \Rightarrow \boxed{H = 10m}$$

Respostas: a) $h_{máx} = 11{,}25m$ e $T = 3{,}0s$

b) $t_E = 2{,}0s$ e $H = 10m$

12

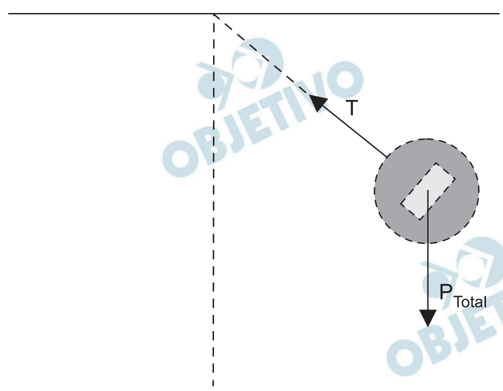
Uma pequena pedra de 10g é lançada por um dispositivo com velocidade horizontal de módulo igual a 600 m/s, incide sobre um pêndulo em repouso e nele se engasta, caracterizando uma colisão totalmente inelástica. O pêndulo tem 6,0 kg de massa e está pendurado por uma corda de massa desprezível e inextensível, de 1,0 m de comprimento. Ele pode girar sem atrito no plano vertical, em torno da extremidade fixa da corda, de modo que a energia mecânica seja conservada após a colisão.



Considerando $g = 10{,}0\ m/s^2$, calcule

a) a velocidade do pêndulo com a pedra engastada, imediatamente após a colisão.

b) a altura máxima atingida pelo pêndulo com a pedra engastada e a tensão T na corda neste instante.



Resolução

a) Conservação da quantidade de movimento total no ato da colisão:

$$Q_{depois} = Q_{antes}$$

$$(M + m)\, V_1 = mV$$

$$(6{,}0 + 10 \,.\, 10^{-3})\, V_1 = 10 \,.\, 10^{-3} \,.\, 600$$

$$6{,}01\, V_1 = 6{,}0 \Rightarrow \boxed{V_1 \cong 1{,}0 m/s}$$

b) 1) Conservação da energia mecânica após a colisão

$$E_{cin_{após}} = E_{pot_{máx}}$$

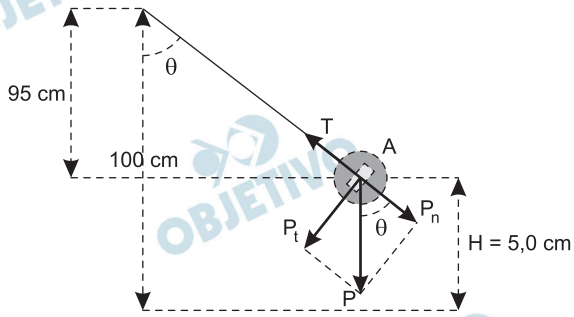
$$\frac{(M + m)\, V_1^2}{2} = (M + m)\, g\, H$$

$$H = \frac{V_1^2}{2g} = \frac{(1,0)^2}{2 \, . \, 10,0} \ \ (m)$$

$$H = 0,050m$$

$$\boxed{H = 5,0 \, . \, 10^{-2}m = 5,0cm}$$

2) $\cos \theta = \dfrac{95}{100} = 0,95$



Na posição A a velocidade é nula; a componente centrípeta da força resultante é nula e portanto:

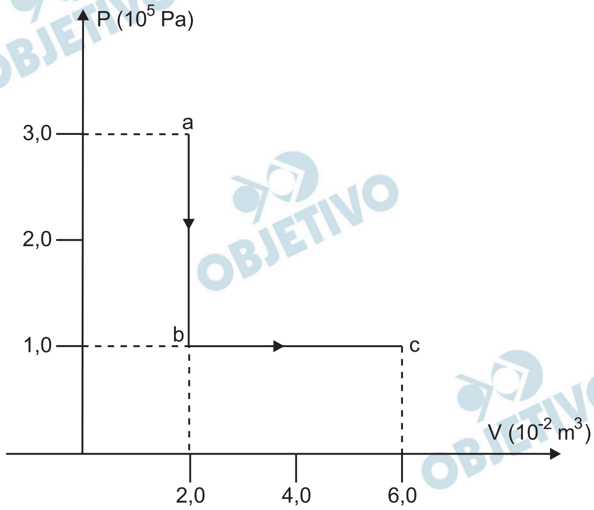
$T = P_n = P \cos \theta$

$T = 60,0 \, . \, 0,95 \ (N) \Rightarrow \boxed{T = 57,0N}$

Respostas: a) $V = 1,0m/s$
b) $H = 5,0cm$ e $T = 57,0N$

13

Em um trocador de calor fechado por paredes diatérmicas, inicialmente o gás monoatômico ideal é resfriado por um processo isocórico e depois tem seu volume expandido por um processo isobárico, como mostra o diagrama pressão *versus* volume.



a) Indique a variação da pressão e do volume no processo isocórico e no processo isobárico e determine a relação entre a temperatura inicial, no estado termodinâmico a, e final, no estado termodinâmico c, do gás monoatômico ideal.

b) Calcule a quantidade total de calor trocada em todo o processo termodinâmico abc.

Resolução

a) No processo isocórico (volume constante):

$$\Delta p_1 = p_b - p_a$$

$$\Delta p_1 = (1{,}0 \cdot 10^5 - 3{,}0 \cdot 10^5)\ \text{Pa}$$

$$\boxed{\Delta p_1 = -2{,}0 \cdot 10^5\ \text{Pa}}$$

$$\Delta V_1 = V_b - V_a$$

$$\boxed{\Delta V_1 = 0}$$

No processo isobárico (pressão constante):

$$\Delta p_2 = p_c - p_a$$

$$\boxed{\Delta p_2 = 0}$$

$$\Delta V_2 = V_c - V_b$$

$$\Delta V_2 = (6{,}0 \cdot 10^{-2} - 2{,}0 \cdot 10^{-2})\text{m}^3$$

$$\boxed{\Delta V_2 = 4{,}0 \cdot 10^{-2}\text{m}^3}$$

Aplicando-se a Lei Geral dos Gases, temos:

$$\frac{p_a V_a}{T_a} = \frac{p_c V_c}{T_c}$$

Assim:

$$\frac{3{,}0 \cdot 10^5 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-2}}{T_a} = \frac{1{,}0 \cdot 10^5 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-2}}{T_c}$$

$$\boxed{T_a = T_c}$$

b) Aplicando-se a equação da 1ª Lei da Termodinâmica, vem:
$Q = \tau + \Delta U$

1) Cálculo do trabalho (τ)

$\tau = \tau_{ab} + \tau_{bc}$

$\tau = [0 + 1{,}0 \cdot 10^5 \cdot (6{,}0 - 2{,}0) \cdot 10^{-2}]$ (J)

$\tau = 4{,}0 \cdot 10^3 J$

2) Cálculo de ΔU

$\Delta U = U_c - U_a$

como $U = \frac{3}{2}\, nRT$

e sabemos que $T_a = T_c$

então:

$U_a = U_c$

e $\Delta U = 0$

portanto:

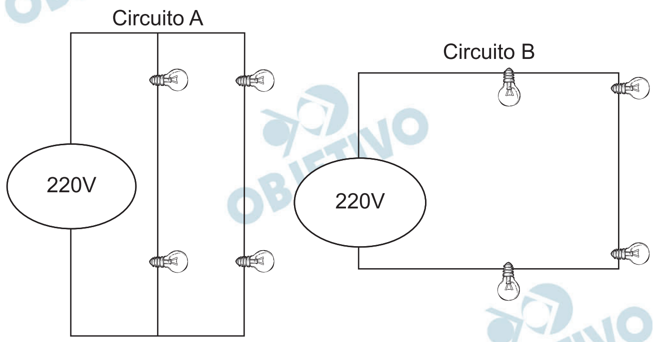
$Q = [4{,}0 \cdot 10^3 + 0)$ (J)

$$\boxed{Q = 4{,}0 \cdot 10^3 J}$$

Respostas: a) $-2{,}0 \cdot 10^5$ Pa e zero (isocórico)
zero e $4{,}0 \cdot 10^{-2} m^3$ (isobárico)
$T_a = T_c$
b) $4{,}0 \cdot 10^3 J$

14

Os circuitos elétricos A e B esquematizados, utilizam quatro lâmpadas incandescentes L idênticas, com especificações comerciais de 100 W e de 110 V, e uma fonte de tensão elétrica de 220 V. Os fios condutores, que participam dos dois circuitos elétricos, podem ser considerados ideais, isto é, têm suas resistências ôhmicas desprezíveis.



a) Qual o valor da resistência ôhmica de cada lâmpada e a resistência ôhmica equivalente de cada circuito elétrico?

b) Calcule a potência dissipada por uma lâmpada em cada circuito elétrico, A e B, para indicar o circuito no qual as lâmpadas apresentarão maior iluminação.

Resolução

a) A resistência elétrica de cada lâmpada pode ser determinada por:

$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$100 = \frac{(110)^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = 121\Omega}$$

Cálculo da resistência elétrica equivalente de cada circuito:

Circuito A

Temos dois ramos com resistência elétrica de 242Ω associados em paralelo, assim:

$$R_{eq_A} = \frac{242}{2}\ \Omega \Rightarrow \boxed{R_{eq_A} = 121\Omega}$$

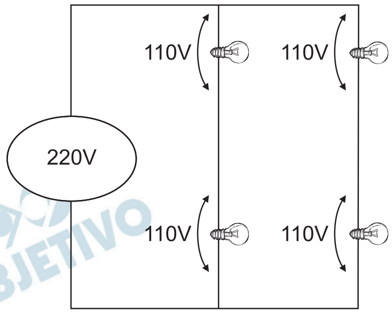
***Circuito B*:**

Todas as 4 lâmpadas estão associadas em série, assim:

$$R_{eq_B} = 121\Omega + 121\Omega + 121\Omega + 121\Omega$$

$$\boxed{R_{eq_B} = 484\Omega}$$

b) *Circuito A*



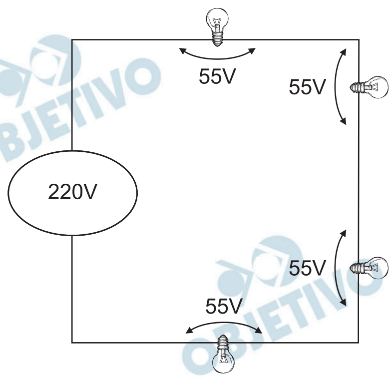
Para cada lâmpada do circuito A temos uma potência dissipada dada por:

$$P_A = \frac{U^2}{R} = \frac{(110)^2}{121} \text{ (W)}$$

$$\boxed{P_A = 100W}$$

No circuito A, as lâmpadas estão em funcionamento de acordo com seus dados nominais.

Circuito B



$$P_B = \frac{U^2}{R} = \frac{(55)^2}{121} \text{ (W)}$$

$$\boxed{P_B = 25W}$$

As lâmpadas do circuito A apresentam, portanto, maior brilho.

Respostas: a) $R = 121\Omega$

$R_{eq_A} = 121\Omega$

$R_{eq_B} = 484\Omega$

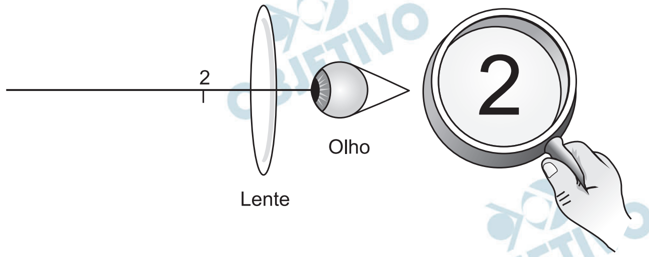
b) $P_A = 100W$

$P_B = 25W$

No circuito A a iluminação é maior

15

Uma lente convergente pode servir para formar uma imagem virtual, direita, maior e mais afastada do que o próprio objeto. Uma lente empregada dessa maneira é chamada lupa, e é utilizada para observar, com mais detalhes, pequenos objetos ou superfícies. Um perito criminal utiliza uma lupa de distância focal igual a 4,0 cm e fator de ampliação da imagem igual a 3,0 para analisar vestígios de adulteração de um dos números de série identificador, de 0,7 cm de altura, tipados em um motor de um automóvel.



a) A que distância do número tipado no motor o perito deve posicionar a lente para proceder sua análise nas condições descritas?

b) Em relação à lente, onde se forma a imagem do número analisado? Qual o tamanho da imagem obtida?

Resolução

a) A lupa deve produzir uma imagem virtual e direita.

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{-p'}{p}$$

$$3{,}0 = \frac{-p'}{p} \Rightarrow p' = -\,3{,}0p$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{4{,}0} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3{,}0p}$$

$$3{,}0p = 12{,}0 - 4{,}0$$

$$3{,}0p = 8{,}0 \Rightarrow p = \frac{8{,}0}{3{,}0}\,\text{cm} \qquad \boxed{p \cong 2{,}7\text{cm}}$$

A lente deve estar posicionada, aproximadamente, a 2,7 cm do motor.

b) Posição da imagem:

$$p' = 3{,}0p$$

$$p' = -3{,}0\ \frac{8{,}0}{3{,}0} \Rightarrow \boxed{p' = -8{,}0\text{cm}}$$

A imagem forma-se a 8,0 cm da lente.

$$\frac{y'}{y} = \frac{-p'}{p} \Rightarrow \frac{y'}{0{,}7} = \frac{3{,}0}{1} \Rightarrow \boxed{y' = 2{,}1\text{cm}}$$

A imagem terá 2,1cm de altura.

Respostas: a) $\frac{8{,}0}{3{,}0}$ **cm ≅ 2,7cm**

b) a 8,0cm da lente e de tamanho 2,1cm

16

A figura 1 representa um cabo de aço preso nas extremidades de duas hastes de mesma altura h em relação a uma plataforma horizontal. A representação dessa situação num sistema de eixos ortogonais supõe a plataforma de fixação das hastes sobre o eixo das abscissas; as bases das hastes como dois pontos, A e B; e considera o ponto O, origem do sistema, como o ponto médio entre essas duas bases (figura 2). O comportamento do cabo é descrito matematicamente pela função $f(x) = 2^x + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, com domínio [A, B].

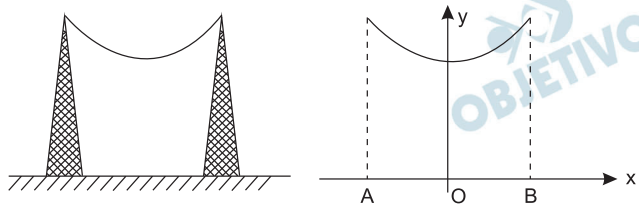


figura 1 figura 2

a) Nessas condições, qual a menor distância entre o cabo e a plataforma de apoio?

b) Considerando as hastes com 2,5 m de altura, qual deve ser a distância entre elas, se o comportamento do cabo seguir precisamente a função dada?

Resolução

1) $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2) $2^x + \dfrac{1}{2^x} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$, **pois**

$$2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2^x)^2 - 2 \,.\, (2^x) + 1}{2^x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

3) $f(x) = 2^x + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow f(x) = 2^x + \dfrac{1}{2^x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

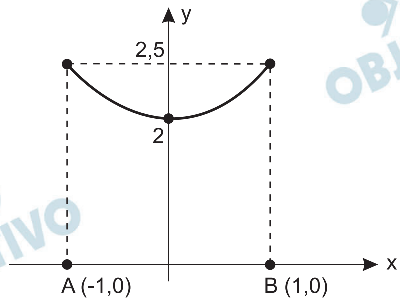
4) **Como f(0) = 2, o menor valor de f(x) é 2.**

5) $f(x) = 2^x + \dfrac{1}{2^x} = 2{,}5 \Rightarrow (2^x)^2 - 2{,}5 \,.\, 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(2^x)^2 - 5 \,.\, 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2 \text{ ou } 2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

6) Graficamente, temos:



7) A distância entre as hastes é 2.

Respostas: a) 2 b) 2

17

Progressão aritmética é uma sequência de números tal que a diferença entre cada um desses termos (a partir do segundo) e o seu antecessor é constante. Essa diferença constante é chamada “razão da progressão aritmética” e usualmente indicada por r.

a) Considere uma PA genérica finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de razão r, na qual n é par. Determine a fórmula da soma dos termos de índice par dessa PA, em função de a_1, n e r.

b) Qual a quantidade mínima de termos para que a soma dos termos da PA (– 224, – 220, – 216, ...) seja positiva?

Resolução

a) **Na P.A. $(a_1, a_2, a_3; a_4; \dots, a_n)$ de razão r e n par, tem-se:**

$a_2 = a_1 + r$

$a_4 = a_1 + 3r$

$a_6 = a_1 + 5r$

$\vdots$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

Sendo S, a soma dos termos de índice par dessa P.A., temos:

$$S = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_n =$$

$$= a_1 + r + a_1 + 3r + a_1 + 5r + \dots + a_1 + (n-1) \cdot r =$$

$$= \underbrace{(a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1)}_{\frac{n}{2} \text{ vezes}} + r[1 + 3 + 5 + \dots + (n-1)] =$$

$$= \frac{n}{2} \cdot a_1 + r \frac{(1 + n - 1)}{2} \cdot \frac{n}{2} =$$

$$= \frac{n}{2} \cdot a_1 + \frac{r\,n^2}{4}$$

Dessa forma, $S = \dfrac{n}{4}(2a_1 + rn)$

b) Na P.A. (–224, –220, –216, …) tem-se $a_1 = -224$, $r = -220 - (-224) = 4$ e $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = 4n - 228$

A soma S dos *n* primeiros termos dessa P.A. é

$$S = \frac{(-224 + 4n - 228)\,n}{2} = 2n^2 - 226n$$

Assim, $2n^2 - 226\,n > 0 \Rightarrow n > 113$ pois $n \in \mathbb{N}$. Portanto, devemos somar no mínimo 114 termos dessa P.A. para que a soma de seus termos seja positiva.

Respostas: a) $\frac{n}{4}(2a_1 + rn)$

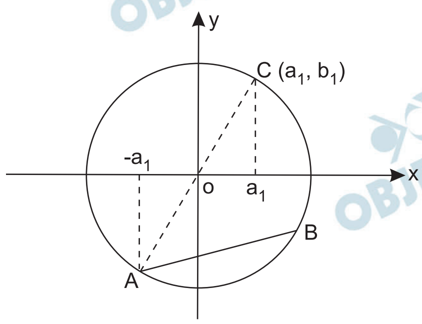
b) no mínimo 114 termos

18

Considere $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ números reais estritamente positivos, tais que os pontos (a_1, b_1), (a_2, b_2) e (a_3, b_3) pertençam à reta $y = 2x$.

a) Sabendo-se que $Q(x) = \dfrac{a_1x^2 + a_2x + a_3}{b_1x^2 + b_2x + b_3}$ (com $b_1x^2 + b_2x + b_3 \neq 0$) independe de x, pede-se determinar seu valor.

b) Na figura, se os pontos A, B e C são vértices de um triângulo isósceles e o segmento $\overline{AC}$ é um dos diâmetros da circunferência convenientemente centrada na origem do sistema ortogonal, pede-se determinar a medida do segmento AB em função de a_1.



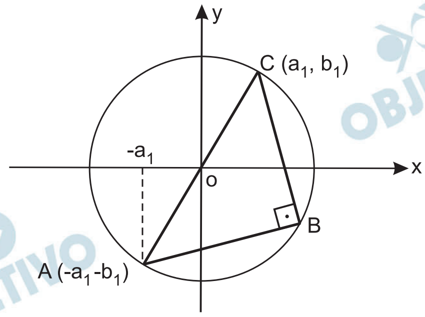
Resolução

De acordo com o enunciado, temos:
$b_1 = 2a_1$, $b_2 = 2a_2$ e $b_3 = 2a_3$.

a) $$Q(x) = \frac{a_1x^2 + a_2x + a_3}{b_1x^2 + b_2x + b_3} =$$

$$= \frac{a_1x^2 + a_2x + a_3}{2a_1x^2 + 2a_2x + 2a_3} = \frac{a_1x^2 + a_2x + a_3}{2(a_1x^2 + a_2x + a_3)} = \frac{1}{2}$$

b)



I) O ponto A pertence à reta $\overleftrightarrow{OC}$ e, portanto, $A(-a_1; -b_1)$

II) $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} =$

$= \sqrt{(2a_1)^2 + (2b_1)^2} = \sqrt{4(a_1)^2 + 4(b_1)^2} =$

$= \sqrt{4(a_1)^2 + 4 \cdot (2a_1)^2} = 2a_1\sqrt{5}$

III) O triângulo ABC é retângulo em B e isósceles e, portanto, AB = CB
Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$(AB)^2 + (CB)^2 = (AC)^2 \Rightarrow$

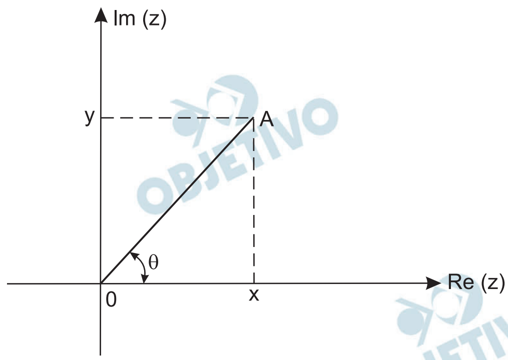
$\Rightarrow (AB)^2 + (AB)^2 = (2a_1\sqrt{5})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot (AB)^2 = 20(a_1)^2 \Rightarrow AB = a_1\sqrt{10}$

Respostas: a) $\dfrac{1}{2}$ **b)** $a_1\sqrt{10}$

19

No plano de Argand-Gauss (figura), o ponto A é chamado afixo do número complexo z = x + yi, cujo módulo (indicado por |z|) é a medida do segmento $\overline{OA}$ e cujo argumento (indicado por θ) é o menor ângulo formado com $\overline{OA}$, no sentido anti-horário, a partir do eixo Re (z). O número complexo z = i é chamado "unidade imaginária".



a) Determinar os números reais x tais que $z = (x + 2i)^4$ é um número real.

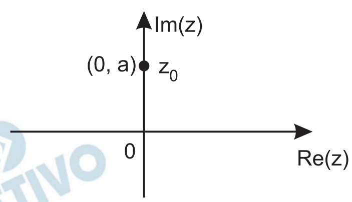
b) Se uma das raízes quartas de um número complexo z é o complexo z_0, cujo afixo é o ponto (0, a), a > 0, determine $|z|$.

Resolução

a) $z = (x + 2i)^4 = [(x + 2i)^2]^2 = (x^2 + 4xi - 4)^2 =$
$= x^4 - 16x^2 + 16 + 8x^3i - 8x^2 - 32xi =$
$= (x^4 - 24x^2 + 16) + (8x^3 - 32x)i$
z é um número real $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 8x^3 - 32x = 0 \Leftrightarrow 8x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0$ **ou** $x = 2$ **ou** $x = -2$

b) **se o afixo de** z_0 **é o ponto (0; a), a > 0, então**

$$z_0 = a\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$



Então $z = z_0^{\,4} = a^4 \cdot \left[\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{2}\right)\right] =$

$= a^4(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = a^4$. **Portanto,** $|z| = a^4$.

Respostas: a) 0, 2 e – 2 b) a^4

20

Para testar a durabilidade de uma bateria elétrica foram construídos dois pequenos aparatos móveis, A e B, que desenvolvem, respectivamente, as velocidades constantes de 30 cm/s e 20 cm/s. Cada um dos aparatos é inicialmente posicionado em uma das duas extremidades de uma pista retilínea e horizontal de 9 m de comprimento, e correm em sentido contrário, um em direção ao outro, cada um em sua faixa. Ao chegarem à extremidade oposta, retornam ao início, num fluxo contínuo de idas e vindas, programado para durar 1 hora e 30 minutos. O tempo gasto pelos aparatos para virarem-se, em cada extremidade da pista, e iniciarem o retorno rumo à extremidade oposta, é desprezível e, portanto, desconsiderado para o desenvolvimento do experimento.

a) Depois de quantos segundos os aparatos A e B vão se encontrar, pela primeira vez, na mesma extremidade da pista?

b) Determine quantas vezes, durante toda a experiência, os aparatos A e B se cruzam.

Resolução

a) **À velocidade de 30cm/s o aparato A leva**

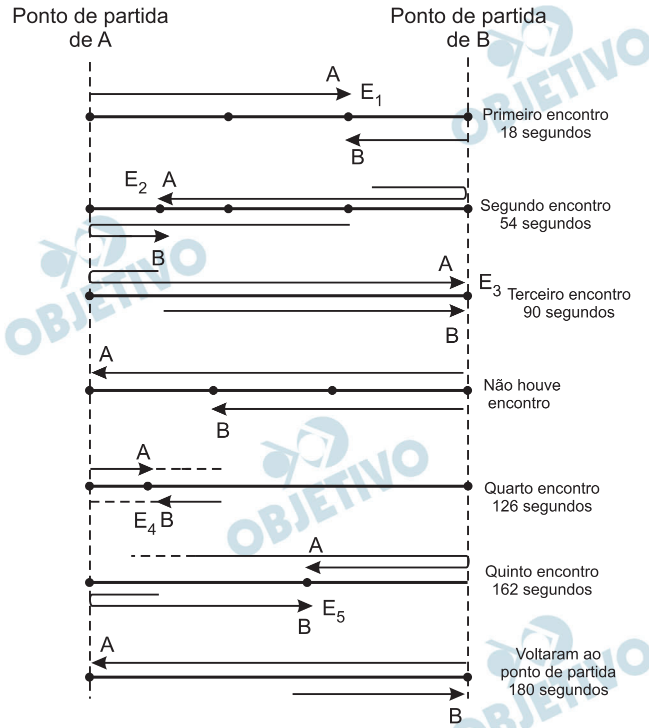
$$\frac{9\text{ m}}{30\text{ cm/s}} = 30\text{s}$$ **para percorrer a pista inteira e 60s para percorrê-la ida e volta.**

À velocidade de 20cm/s o aparato B leva

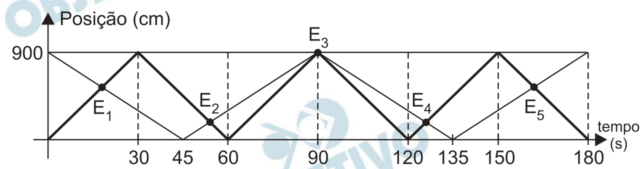
$$\frac{9\text{ m}}{20\text{ cm/s}} = 45\text{s}$$ **para percorrer a pista inteira e 90s para percorrê-la ida e volta.**

Observe que enquanto A percorre a pista inteira B percorre apenas $\frac{2}{3}$ da pista.

b) **Os aparatos A e B estarão pela primeira vez, nas mesmas extremidades de que partiram depois de transcorrido um tempo, em segundos, equivalente ao mmc (90; 60) = 180, porém encontrar-se-ão numa mesma extremidade após 90 segundos. (Vide figura). Durante estes 180s o aparato A percorre a pista 6 vezes e cruza 5 vezes com B, conforme mostra a figura.**



Assim, a cada 180 segundos ocorrem 5 encontros. Outra forma de se perceber estes encontros é construir o gráfico da posição (em relação ao ponto de partida de A) em função do tempo, no intervalo inicial de 180s.



Em 1h e 30min = 5400s essa sequência repete-se

$$\frac{5400\text{s}}{180\text{s}} = 30 \text{ vezes e, portanto, eles se cruzam}$$

5 . 30 = 150 vezes.

Respostas: a) 90s b) 150 vezes