AULA 1 - PROGRESSÃO ARITMÉTICA - PA

Define-se como progressão aritmética a toda sequência a_n, tal que:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$$

Podemos perceber, na forma acima, que a progressão aritmética (PA) representa o conjunto de sequência em que um termo é a soma do termo anterior por uma constante, denominada razão (a partir do segundo termo).

CLASSIFICAÇÃO

Dada a progressão aritmética (PA) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de razão r, essa sequência pode ser classificada em:

- Crescente, quando a razão r for positiva, ou seja, r > 0.
- Decrescente, quando a razão r for negativa, ou seja, r < 0.
- Constante, quando a razão r for nula, ou seja, r = 0.

TERMO GERAL

Na progressão aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ podemos perceber que, ao escrevermos os termos da sequência, a razão é somada (n −1) vezes até a chegada em a_n, usando tal fato podemos estabelecer que:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1).r}$$

PROPRIEDADE

Qualquer termo de uma PA pode ser obtido pela ***média aritmética*** entre dois termos equidistantes a ele. $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots a_{n-1}, a_n)$. Exemplo:

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{a_1 + a_5}{2} \ldots$$

REPRESENTAÇÃO ESPECIAL

- Progressão aritmética de 3 termos.
(x − r, x, x + r), PA de razão r.
- Progressão aritmética de 4 termos.
(x − 3r, x − r, x + r, x + 3r), PA de razão 2r.

SOMA DOS TERMOS

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$+$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \rightarrow \boxed{Sn = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

$$2S_n = n.(a_1 + a_n)$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 — **UFMG**

O valor de x, de modo que os números 3x – 1, x + 3 e x + 9 estejam, nessa ordem, em PA é

a) 1
b) 0
c) -1
d) –2

QUESTÃO 02 — **UCB**

Quantos termos tem a PA (5, 10, ..., 785)?

a) 157
b) 205
c) 138
d) 208

QUESTÃO 03 — **PUC-SP**

O número de múltiplos de 7 entre 1.000 e 10.000 é:

a) 1280
b) 1284
c) 1282
d) 1286
e) 1288

QUESTÃO 04 — **MACK**

Calcular a razão de uma P.A de 12 termos, cujos extremos são –28 e 60.

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

QUESTÃO 05 — **MACK**

Numa progressão aritmética de 100 termos, $a_3 = 10$ e $a_{98} = 90$, a soma de todos os termos é:

a) 10.000
b) 9.000
c) 4.500
d) 5.000
e) 7.500

QUESTÃO 06 — **UFPR**

A soma de todos os números inteiros de 1 a 100, divisíveis por 3, é igual a:

a) 1382
b) 1200
c) 1583
d) 1683
e) 1700

Curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

QUESTÃO 07 | **UECE**

A sequência 1, 5, 9, ..., p é uma progressão aritmética na qual p é o maior valor possível menor do que 2004. O termo médio desta sequência é divisível por:
a) 7, 11 e 13
b) 3, 5 e 13
c) 5, 7 e 11
d) 3, 5 e 7

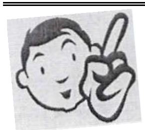
QUESTÃO 08 | **UECE**

Se na progressão aritmética crescente a_1, a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , ...,a_n ,... tivermos $a_5 = 5x - 17y$ e $a_{25} = 29x + 7y$, então a razão desta progressão e igual a:
a) 1,2x + y.
b) 1,2x + 2y.
c) 2x + 1,2y.
d) 1,2x + 1,2y.

QUESTÃO 09 | **USP**

Um atleta corre sempre 500 metros a mais do que no dia anterior. Sabendo-se que ao final de 15 dias ele correu um total de 67 500 metros, o número de metros percorridos no 3° dia foi
a) 1 000
b) 2 000
c) 1 500
d) 2 500

AULA 2 - PROGRESSÃO GEOMÉTRICA - PG



Define-se como progressão geométrica (PG) a toda sequência (an) , tal que:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = a \\ a_n = (a_{n-1})q \end{cases}$$

Podemos perceber, na forma acima, que a progressão geométrica (PG) representa o conjunto de sequências em que um termo é o produto do termo anterior por uma constante, denominada razão (a partir do segundo termo).

CLASSIFICAÇÃO

Dada a progressão geométrica (PG) (a_1, a_2, ... ,a_n) de razão q, essa sequência pode ser classificada em:
Crescente, quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.
Decrescente, quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$.
e q>1.

TERMO GERAL

Na progressão geométrica (a_1, a_2, ... ,a_n) perceber que, ao escrevermos os termos da sequência, a razão é multiplicada (n -1) vezes até a chegada em a_n, usando tal fato podemos estabelecer que:

$$\boxed{a_n = a_1 . q^{n-1}}$$

em que *q* representa a razão da Progressão Geométrica.

PROPRIEDADE

Qualquer termo de uma PA pode ser obtido pela ***média geométrica*** entre dois termos equidistantes a ele. (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,.....a_{n-1}, a_n). Exemplo:

$$a_3 = \sqrt{a_2 a_4} = \sqrt{a_1 a_5} = \ldots$$

REPRESENTAÇÃO ESPECIAL

- Progressão geométrica de 3 termos.

$$\left(\frac{x}{q}, \quad x, \quad xq \right)$$

- Progressão geométrica de 4 termos.

$$\left(\frac{x}{q^3}, \quad \frac{x}{q}, \quad xq, \quad xq^3 \right)$$

SOMA DOS TERMOS

- Se finita: $\boxed{S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$

- Se infinita: $\boxed{S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}}$

PRODUTO DOS TERMOS DE UMA PG

$$(P_n)^2 = (a_1 a_n)^2 \quad ou \quad P_n = (a_1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 | **UGF-RJ**

Em uma PG, o primeiro termo é 4 e o quinto termo é 324. A razão dessa PG. é:
a) 3
b) 4
c) 5
d) 2
e)1/2

QUESTÃO 02 | **UCB**

Qual o primeiro termo da PG crescente em que $a_3 = 24$ e $a_7 = 384$?
a) 2
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

QUESTÃO 03 **UFRJ**

Numa PG, $a_1 = 3$ e $a_3 = 12$, a soma dos oito primeiros termos positivos é:
a) 765
b) 500
c) 702
d) 740
e) Nenhuma.

QUESTÃO 04 **CESCEA-SP**

A soma dos termos de uma P.G infinita é 3. Sabendo-se que o primeiro termo é igual a 2, então o quarto termo dessa P.G é:
a) 2/27
b) 1/4
c) 2/3
d) 1/27
e) 3/8

QUESTÃO 05 **UECE**

A soma $S = 1 + \text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \text{sen}^6 x + \ldots$, com $|\text{senx}| \neq 1$, é igual a:
a) tg^2x
b) $cotg^2x$
c) sec^2x
d) $cosec^2x$

QUESTÃO 06 **UECE**

Tomando $p = 32 + 16 + 8 + 4 + \ldots$, o número $q = \sqrt[3]{p} - \sqrt[6]{p}$ é igual a:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

QUESTÃO 07 **UFC**

Sejam $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ uma Progressão Aritmética, de razão não nula, e $(b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots)$ uma Progressão Geométrica. Se $b_1 = a_1$, $b_2 = a_3$ e $b_3 = a_9$, então, a razão da Progressão Geométrica é:
a) 3
b) 5
c) 7
d) 9
e) 11

AULA 3 - MATRIZ

Uma matriz do tipo m x n (lê-se: m por n), m, n $\geq$ 1, é uma disposição tabular formada por m.n elementos dispostos em m linhas e n colunas.

As matrizes são representadas através de parênteses ( ), colchetes [ ] ou através de barras duplas || ||

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

Uma matriz genericamente é representada por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas.

Sendo assim, uma matriz Am x n algebricamente pode ser representada assim:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ com m e n} \in N^*$$

Por vezes a matriz vem em uma forma condensada com uma lei de forma a ser seguida. Veja o exemplo:
Construa a matriz A3x3 onde:

$$aij = \begin{cases} i + j, & se \quad i = j \\ i.j, & se \quad i < j \\ i^2 + j^2, & se \quad i > j \end{cases}$$

Sendo assim:
$a_{11} = 1 + 1 = 2$
$a_{12} = 1.2 = 2$
...
$a_{33} = 3 + 3 = 6$
Deste modo a matriz passa a ter a seguinte cara:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 10 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

TIPOS DE MATRIZ

Existem muitos tipos de matriz, nesse momento vamos nos prender a 4 tipos apenas.

- **Matriz Quadrada**: numero de linhas igual número de colunas.
- **Matriz Identidade (In)**: todos os elementos da DP iguais a 1 e os demais termos 0.
- **Matriz Transposta (A^t)**: quando as linhas viram colunas e as colunas linhas.
- **Matriz Simétrica**: a DP funciona como eixo de simetria dos elementos.

OBS:
Se a matriz é $m_x n$ sua transposta será $n_x m$
A matriz Identidade costuma ter sua ordem indicada por um só numero tendo em vista que n = m

OPERAÇÂO COM MATRIZ

As matrizes possuem 3 operações: igualdade, soma e multiplicação sendo esta a mais delicada.

- **Igualdade matricial**: duas matrizes só pedem ser igualadas se a ordem delas for a mesma e esta condição sendo feita podemos afirmar que A = B quando $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, ..., $a_{mxn} = b_{mxn}$
- **Soma Matricial**: duas matrizes so podem ser somadas se tiverem mesma ordem e esta condição sendo feita podemos afirmar que se A + B = C, então c11 = a11 + b11, c12 = a12 + b12, ... $c_{mxn} = a_{mxn} + b_{mxn}$.
- **Multiplicação Matricial**: duas matrizes só podem se multiplicadas se número de colunas da 1º for igual numero de linhas da 2º. Conclusão: $\boxed{A_{mxn}.B_{nxp} = C_{mxp}}$

Veja um exemplo de produto matricial.
Determine o produto de A.B onde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \; e \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Solução: O produto AxB é uma matriz obtida da seguinte forma:

$$AB = \begin{pmatrix} 3.(-1)+0.9 & 3(-3)+0.2 \\ 2(-1)+1.9 & 2(-3)+1.2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

PROPRIEDADES

1) A.(B.C) = (A.B).C
2) A.(B + C) = A.B + A.C
3) (B + C).A = B.A + C.A
4) A.I = I.A = A
5) AB $\neq$ BA

OBS
- Na multiplicação de matrizes geralmente A.B $\neq$ B.A. Se A.B = B.A dizemos que A e B se comutam.
- Na multiplicação de matrizes não vale a lei do anulamento, ou seja, podemos ter A.B = 0 mesmo com A $\neq$ 0 ou B $\neq$ 0.

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01	UEG

O valor de x.y de modo que a matriz A seja simétrica, é:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2y-1 \\ x+1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

a) 6
b) 12
c) 15
d) 14
e) 0

QUESTÃO 02	UFSC

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2x+1 & -3y & -1 \\ 0 & 4 & x+z \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 12 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Se $A = B^t$, o valor de x.y.z é:
a) 8
b) 18
c) 28
d) 38

QUESTÃO 03	*UFSC*

Dada a matriz A_{2x3}, o valor da expressão $2a_{23} + 3a_{22} - a_{21}$ é:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i + j, & i < j \\ 7, & i = j \\ i^2 + j, & i > j \end{cases}$$

a) 13
b) 23
c) 33
d) 43

QUESTÃO 04	CEUB

Determine o valor de $(x + y)^{0,5}$ de modo que $A = B^t$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2^y \\ 3+\log_2 x & 7 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 5 & 16 & 7 \end{pmatrix}$$

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10

QUESTÃO 05	UEMA

Calcule 5x + 2y, de modo que se tenha:

$$\begin{pmatrix} 5x-2 & 1 \\ 3y & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ y-2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

a) 0
b) 10
c) 11
d) 12

e) 13

QUESTÃO 06 **FCMSC**

Se A é uma matriz quadrada, define-se o TRAÇO de A como a soma dos elementos da diagonal principal de A. Nestas condições, o traço da matriz A = $(a_{ij})3 \times 3$, onde $a_{ij} = 2i - 3j$ é igual a:

a) 6
b) 4
c) -2
d) -4
e) -6

QUESTÃO 07 **UEL-PR**

Sobre as sentenças:
I - O produto de matrizes A_{3x2} . B_{2x1} é uma matriz 3x1.
II - O produto de matrizes A_{5x4} . B_{5x2} é uma matriz 4x2.
III - O produto de matrizes A_{2x3} . B_{3x2} é uma matriz quadrada 2 x 2.
É verdade que

a) somente I é falsa
b) somente II é falsa
c) somente III é falsa
d) somente I e III são falsas.
e) I, II e III são falsas

QUESTÃO 08 **UECE**

Os valores de x e y que satisfazem a equação matricial $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 4 \\ 2x & 6 \end{pmatrix}$ satisfazem, também, a relação:

a) $x^2 + y^2 = 2$
b) $x^2 + y^2 = 4$
c) $x^2 + y^2 = 8$
d) $x^2 + y^2 = 16$

QUESTÃO 09 **CFOE**

Sendo as matrizes abaixo e a matriz X – 2A + B = 0, a soma dos elementos da 1ª linha da matriz X é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) 7
b) 5
c) 4
d) 3

QUESTÃO 10 **CFOE**

O valor de k para o qual a equação matricial $X^2 - kX - Y = 0$, é igual a matriz identidade, sendo $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$ é:

a) –2
b) –1
c) 0
d) 1

QUESTÃO 11 **CFOE**

Sobre o produto de matrizes, analise as assertivas e assinale a alternativa que aponta a(s) correta(s).
I. Dadas duas matrizes Amxn e Bmxp, existe o produto A.B.
II. Dadas duas matrizes A e B de ordem n, sempre existe o produto A.B.
III. Se o produto de duas matrizes A e B é a matriz nula, então A ou B é a matriz nula.

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas I e III.
d) Apenas II e III.

QUESTÃO 12 **UFPA**

As matrizes A, B e C são do tipo r $_x$ s, t $_x$ u e 2 $_x$ w, respectivamente. Se a matriz (A−B).C é do tipo 3 $_x$ 4, então r + s + t + u + w é igual a:

a) 11
b) 12
c) 13
d) 14

QUESTÃO 13 **UCMG**

O valor de x, para que o produto das matrizes A e B seja uma matriz simétrica.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & x \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) 2
b) 1
c) -1
d) -2

AULA 4 - DETERMINANTE

Dada uma matriz quadrada de ordem **n**, podemos associar à ela, através de certas operações, um número real chamado **determinante da matriz**. Podemos simbolizar o determinante de uma matriz por duas barras verticais.

CÁLCULO DO DETERMINANTE

A forma de calcula o determinante de uma matriz vai depender do tipo da matriz e de sua ordem, portanto, quanto ao tipo de matriz, só existe determinante de matriz quadrada, já quanto a ordem veja os dois principais casos.

Matriz de ordem 2.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow DetA = ad - bc$$

Matriz de ordem 3.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$DetA = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

PROPRIEDADES DE DETERMINANTES

1ª PROPRIEDADE: Matriz singular (casos onde o determinante é nulo)

- Se uma matriz possui uma fila de elementos
- iguais a zero.
- Se uma matriz possui duas filas iguais.
- Se uma matriz possui duas filas proporcionais.
- Se uma fila de uma matriz for uma combinação linear de duas outras.

2ª PROPRIEDADE

Se multiplicarmos uma fila de uma matriz por um número **k**, o determinante da nova matriz fica multiplicado por **k**.

3ª PROPRIEDADE

Se trocarmos duas filas paralelas de uma matriz o determinante muda de sinal.

5ª PROPRIEDADE (TEOREMA DE BINET)

Se A e B são duas matrizes de ordem **n** o determinante do produto de A por B é o produto dos determinantes da matriz A pelo determinante da matriz B, ou seja:

$$\boxed{Det(AB) = DetA.DetB}$$

6ª PROPRIEDADE **(DetA = DetA^t)**

O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta.

OBS:
Da 2º propriedade podemos chegar a equação onde k é uma constante e n é a ordem da matriz A.

$$Det(kA) = k^n DetA$$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 **UFRGS**

Considere as seguintes afirmações.
I - O determinante de uma matriz não se altera, quando são trocadas, ordenadamente, as linhas pelas colunas.
II - O determinante de uma matriz com linhas proporcionais é nulo.
III - Multiplicando-se uma linha de uma matriz por um número real p,não nulo,o determinante da nova matriz fica dividido por p.
Quais são as verdadeiras?
a) I
b) II
c) I e II
d) II e III
e) todas são verdadeiras

QUESTÃO 02 **UNISUL**

O valor de um determinante é 48. Dividimos a 2ª linha por 8 e multiplicamos a 3ª coluna por 6, então o novo determinante valerá:
a) 56
b) 48
c) 36
d) 24

QUESTÃO 03 **UFC**

Sejam A e B matrizes 3 x 3 tais que detA = 3 e detB = 4. Então det(A x 2B) é igual a:
a) 32
b) 48
c) 64
d) 80
e) 96

QUESTÃO 04 **UFC**

Uma matriz é dita singular quando seu determinante é nulo. Então os valores de c que tornam singular a matriz abaixo são:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$$

a) 1 e 3
b) 0 e 9
c) –2 e 4
d) –3 e 5
e) –9 e –3

QUESTÃO 05	UECE

Se o determinante do produto das matrizes $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ é igual a – 1, então dois dos possíveis valores de x são números:

a) positivos
b) negativos
c) primos
d) irracionais

QUESTÃO 06	UECE

Se u, v e w são números reais, o determinante da matriz S é igual a:

a) 0
b) 1
c) u.v.w
d) u + v + w

$$S = \begin{bmatrix} u & 1 & u \\ 1 & v & 1 \\ w & 1 & w \end{bmatrix}$$

AULA 5 – MATRIZ INVERSA

Sejam A e B duas matrizes quadradas. Se A.B = B.A = I, dizemos que B é a matriz inversa de A e indicamos por A^{-1}.
Logo:

$$\boxed{A.A^{-1} = A^{-1}.A = In}$$

PROPRIEDADES DA INVERSA

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- $DetA^{-1} = \dfrac{1}{DetA}$

OBS:
- Uma matriz só possui inversa se o seu determinante for diferente de zero, sendo assim, chamada de inversível
- Uma matriz que não admite inversa é chamada de singular
- Se a matriz A é inversível, então, ela é quadrada
Se a matriz A é inversível, então, a sua inversa é única

CÁLCULO DA MATRIZ INVERSA

O processo de se obter a inversa de uma matriz muitas vezes é trabalhoso, pois recai na resolução de n sistemas de n equações e n incógnitas.

Vamos agora apresentar um processo que simplifica esse cálculo.

Teorema
Se A é uma matriz quadrada de ordem n e det A 0, então a inversa de A é:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} . \overline{A}}$$

Onde A representa a matriz adjunta.
Matriz Adjunta: É a matriz transposta da matriz dos cofatores de A.

Outra maneira seria, para uma matriz A sua inversa seria A^{-1} e resolver a equação:

$$A.A^{-1} = In$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01	UFSC

O maior elemento da inversa da matriz A é:

a) 2
b) 5/6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

c) 1/5
d) 1/6
e) 1/3

QUESTÃO 02	UFMT

Considere a matriz A abaixo. Sabendo que det A^{-1} = 0,25, então x:

a) 0
b) – 2
c) 2
d) 4
e) – 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ 1 & x+2 \end{pmatrix}$$

QUESTÃO 03	UEBA

Os valores de k para que a matriz A não admita inversa são:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$$

a) 0 e 3
b) 1 e – 1
c) 1 e 2
d) 1 e 3
e) 3 e – 1

QUESTÃO 04	UFRGS

A inversa da matriz $W = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ é:

a) $W^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $W^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

c) $W^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $W^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

e) $W^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

QUESTÃO 05

As raízes de uma equação do segundo grau coincidem com os determinantes de certa matriz A e de sua inversa. Se a parábola que representa essa equação tem como abscissa do vértice 0,05 e ainda DetA > DetA^{-1} então log(DetA) é:

a) 0,01
b) 0,1
c) 1
d) 10

AULA 6 - SISTEMA LINEAR

Denomina-se Sistema Linear todo conjunto de **m** equações lineares com **n** incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Se $b_1, b_2, \dots\dots, b_n = 0$ dizemos que o sistema é homogêneo.

SOLUÇÃO DE UM SISTEMA

Denomina-se solução de um sistema a sequência de números reais ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$) que satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema.

SISTEMAS EQUIVALENTES

Dois Sistemas são ditos equivalentes se e somente se:

- São Possíveis e admitem as mesmas soluções
- São Impossíveis.

CLASSIFICAÇÃO

Um Sistema Linear pode ser classificado de acordo com o número de soluções que ele apresenta. Sendo assim ele pode ser:

SISTEMA
- POSSÍVEL
  - INDETERMINADO $\Delta = 0$
  - DETERMINADO $\Delta \neq 0$
- IMPOSSÍVEL $\Delta = 0$

REGRA DE CRAMER

A Regra de Cramer consiste num método para resolvermos sistemas Lineares de **n** equações e **n** incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Para obtermos a solução para esse sistema vamos fazer alguns cálculos. Acompanhe:

DET S

Determinante associado à matriz formada pelos coeficientes das incógnitas.

$$\textbf{det S} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

DET Xi

Determinante associado à matriz obtida a partir de S, trocando a coluna dos coeficientes de Xi, pela coluna dos termos independentes do sistema.

$$\det X_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \det X_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det X_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

A solução do Sistema é dada por:

$$x_1 = \frac{\det X_1}{\det S} \qquad x_2 = \frac{\det X_2}{\det S} \;\ldots\ldots\; x_n = \frac{\det X_n}{\det S}$$

Veja que só é possível aplicar a Regra de Cramer em sistemas **n** $_x$ **n** em que det S ≠ 0. Esses sistemas são denominados **normais.**

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01

Dado o sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x + y - z = -4 \\ x + 3y - 2z = -4 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}$ os valores de x, y e z que constituem sua solução:

a) formam uma progressão geométrica
b) formam uma progressão aritmética
c) são iguais entre si
d) não existem
e) têm uma soma nula

QUESTÃO 02 UFSCar

Dado o sistema linear $\begin{cases} x + ay = z = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \end{cases}$

assinale a alternativa **correta**:

a) O sistema admite uma infinidade de soluções para qualquer **a** real.
b) O sistema não admite solução de **a** = 1.
c) O sistema admite uma única solução se **a** = 3.
d) O sistema admite somente a solução trivial.
e) O sistema admite uma única solução se **a** = 1.

QUESTÃO 03 FUVEST

O sistema linear

$$\begin{cases} x \log 2 + y \log 3 = a \\ x \log 4 + y \log 9 = a \end{cases}$$

a) tem solução única se a = 0
b) tem infinitas soluções se a = 2
c) não tem solução se a = 3
d) tem infinitas soluções se a = 4
e) tem solução única se a = 9

QUESTÃO 04

Três pessoas foram a uma lanchonete. A primeira tomou 2 (dois) guaranás e comeu 1 (um) pastel e pagou R$ 4,00. A segunda tomou 1 (um) guaraná e comeu 2(dois) pastéis e pagou R$ 5,00. A terceira tomou 2 (dois) guaranás e comeu
2(dois) pastéis e pagou R$ 7,00. Então, pelo menos, uma das pessoas não pagou o preço correto.

a)
b)
c)
d)
e)

QUESTÃO 05 UEPG-PR

O sistema linear $\begin{cases} ax + y + 3z = 3 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = b \end{cases}$

01. impossível para a ≠2 e b = 5
02. impossível para a = 2 e b ≠5
04. possível e determinado para a = 2 ∀ b ∈R
08. possível e indeterminado para a = 2 e b = 5
16. possível e determinado para a ≠ 2

QUESTÃO 06 UECE

O valor de h para que o sistema abaixo tenha a solução não nula é

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x + hy - 6z = 0 \end{cases}$$

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8

QUESTÃO 07 UECE

Para r ≠ 2, se x = p e y = q é a solução do sistema linear $\begin{cases} rx + 2y = 1 \\ 2x + ry = 1 \end{cases}$, então o valor de $p^2 - q^2$ é:

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 4.

QUESTÃO 08 | **UECE**

Em relação à equação matricial M.X = 0, em que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ a & 3 & a \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix},\ O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$ podemos afirmar corretamente que:

a) existirá sempre um número finito de soluções, quando $a^2 = 6$.
b) existirão infinitas soluções, quando $a^2 \neq 6$.
c) não existirá solução, quando $a^2 = 6$.
d) existirá uma única solução, quando $a^2 \neq 6$.

QUESTÃO 09 | **UECE**

Se x, y e z constitui a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \\ x + 4y + 5z = -4 \end{cases}$$ então o produto x. y. z é igual a:

a) – 4.
b) – 8.
c) – 2.
d) – 6.

QUESTÃO 10 | **CFOE**

Dado o sistema linear abaixo cuja solução é {(x, y, z)}, o valor de $(xyz)^3$ é igual a:

$$\begin{cases} 3x - 5y - 2z = 9 \\ -2x - 3y + z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) 27
b) – 27
c) 8
d) – 8

QUESTÃO 11

USP Se os números reais x,y, z e w são tais que x < y < z < w , determine o valor de x.y.z.w sabendo que:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 33 \\ x^2 + z^2 + w^2 = 78 \\ x^2 + y^2 + w^2 = 57 \\ y^2 + z^2 + w^2 = 78 \end{cases}$$

a) – 140
b) – 70
c) 0
d) 70
e) 140

QUESTÃO 12

A tabela mostra os pedidos de 4 clientes em uma lanchonete.
Se os clientes 1, 2 e 3 pagaram, respectivamente, R$ 11,10, R$ 10,00 e R$ 11,90 por seus pedidos, então o cliente 4 pagou R$:

a) 5,00.
b) 5,10.
c) 5,40.
d) 5,50.

Cliente	Pedidos
1	1 suco de laranja, 2 hambúrgueres e 3 porções de batata frita.
2	3 sucos de laranja, 1 hambúrguer e 2 porções de batata frita.
3	2 sucos de laranja, 3 hambúrgueres e 1 porção de batata frita.
4	1 suco de laranja, 1 hambúrguer e 1 porção de batata frita.

AULA 7 - FATORIAL

Dado um número natural, denomina-se fatorial de **n** e indica-se por **n!** a expressão:

n! = n.(n - 1) . (n - 2) . (n - 3). .... 3 . 2 . 1

Assim temos:
5! = 5. 4. 3. 2. 1 = 120
4! = 4. 3. 2. 1 = 24
3! = 3. 2. 1 = 6
2! = 2. 1 = 2

OBS:
1! = 0! = 1 (**conceito primitivo)**

Observação: Podemos desenvolver um fatorial até um fator conveniente. Veja:
8! = 8. 7. 6. 5. $\underline{4.\ 3.\ 2.\ 1}$ = 8. 7. 6. 5. 4!
6! = 6. $\underline{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}$ = 6. 5!
n ! = n. (n - 1).(n – 2) !

SIMBOLOGIAS

Existem alguns símbolos no estudo na Analise Combinatória que envolvem o fatorial. São eles:

- Permutação.
- Arranjo.
- Combinação.

Vamos assim ilustrar cada situação.

$$P_n = n!$$

$$C_{n,p} = C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

$$A_{n,p} = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 — **PUC**

O valor de D para $D = \dfrac{5!}{1!+2!+3!}$ é:

a) 10 < D < 11
b) 11 < D < 12
c) 12 < D < 13
d) 13 < D < 14
e) 14 < D < 15

QUESTÃO 02 — **MACK**

O valor de n em (n - 3)! = 720 é:

a) Múltiplo de 2
b) Múltiplo de 3
c) Primo
d) Impar e menor que 9
e) Par e maior que 8.

QUESTÃO 03 — **UEMA**

Assinale a alternativa onde n satisfaz a equação $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!} = 20$

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

QUESTÃO 04 — **UFPA**

Simplificando $\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}$ obtém-se:

a) $\dfrac{1}{n+2}$
b) $n+2$
c) $\dfrac{1}{n+1}$
d) n
e) $n+1$

QUESTÃO 05 — **CESGRANRIO**

Se $a_n = \dfrac{n!(n^2-1)}{(n+1)!}$, então a1984 é igual a:

a) $\dfrac{1}{1985}$
b) 1984
c) 1983
d) $\dfrac{1985}{1984^2-1}$
e) $\dfrac{1984^2-1}{1984}$

QUESTÃO 06 — **FATEC**

Seja $n \in$ N tal que $\begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7$ o valor de n é:

a) n = 6
b) n = 5
c) n = 4
d) n = 3
e) n.r.a

QUESTÃO 07 — **PUC**

A solução da equação $A_x^3 - 8C_x^2 = 0$ é:

a) 6
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

QUESTÃO 08 — **AFA**

Se a sequência ($C_{n,2}$, $A_{n,2}$; $12.P_2$) representa uma PG, assinale a alternativa que representa sua razão.

a) 8
b) 4
c) 2
d) 1

AULA 8 – PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (PFC)

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy.

Exemplo: Numa sala há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher ?
Sol. Observe que para formar um casal devemos tomar as decisões
d_1: escolha do homem
d_2: escolha da mulher
Como d_1 pode ser tomada de 3 maneiras e, depois disso, d_2 pode ser tomada de 4 maneiras, o número de maneiras de se formar um casal ,ou seja, de se tomar as decisões d_1 e d_2 é 3 x 4 = 12.

O princípio fundamental da contagem nos diz que sempre devemos multiplicar os números de opções entre as escolhas que podemos fazer. Veja:
Exemplo: Para montar um computador, temos 3 diferentes tipos de monitores, 4 tipos de teclados, 2 tipos de impressora e 3 tipos de "CPU". Quantos tipos distintos de computador podemos montar?
Sol. Para saber o numero de diferentes possibilidades de computadores que podem ser montados com essas peças, somente multiplicamos as opções: 3 x 4 x 2 x 3 = 72
Então, têm-se 72 possibilidades de configurações diferentes.

Um problema que ocorre é quando aparece a palavra "ou", como na questão:
Exemplo: Quantos pratos diferentes podem ser solicitados por um cliente de restaurante, tendo disponível 3 tipos de arroz, 2 de feijão, 3 de macarrão, 2 tipos de cervejas e 3 tipos de refrigerante, sendo que o cliente não pode pedir cerveja e refrigerante ao mesmo tempo, e que ele obrigatoriamente tenha de escolher uma opção de cada alimento?
Sol. A resolução é simples: 3 x 2 x 3 = 18 , somente pela comida. Como o cliente não pode pedir cerveja e refrigerantes juntos, não podemos multiplicar as opções de refrigerante pelas opções de cerveja. O que devemos fazer aqui é apenas somar essas possibilidades: (3 x 2 x 3) x (2 + 3) = 90
Resposta para o problema: existem 90 possibilidades de pratos que podem ser montados com as comidas e bebidas disponíveis.
Outro exemplo: No sistema brasileiro de placas de carro, cada placa é formada por três letras e quatro algarismos. Quantas placas onde o número formado pelos algarismos seja par, podem ser formadas?
Sol. Primeiro, temos de saber que existem 26 letras. Segundo, para que o numero formado seja par, teremos de limitar o ultimo algarismo à um numero par. Depois, basta multiplicar.
26 x 26 x 26 = 17.576 -> parte das letras
10 x 10 x 10 x 5 = 5.000 -> parte dos algarismos, note que na última casa temos apenas 5 possibilidades, pois queremos um número par (0 , 2 , 4 , 6 , 8).
Agora é só multiplicar as partes: 17.576 x 5.000 = 87.880.000
Resposta para a questão: existem 87.880.000 placas onde a parte dos algarismos formem um número par.

OBS
Quando no enunciado do Princípio Fundamental de Contagem escreve-se que a decisão d_2 pode ser tomada uma vez que a decisão d_1 já foi tomada, estão implícitas as idéias de independência e sucessividade entre as decisões

Note que o Princípio Fundamental de Contagem permite obter o número de casais homem-mulher sem a necessidade de enumeração de um por um dos casais
Podemos generalizar o Princípio Fundamental de Contagem para um acontecimento com n decisões. Vejamos.

Se um acontecimento ocorrer por várias decisões sucessivas e independentes, de modo que:
p_1 é o número de maneiras de tomar a decisão d_1
p_2 é o número de maneiras de tomar a decisão d_2
pn é o número de maneiras de tomar a enésima decisão, então
$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ é o número total de maneiras de o acontecimento ocorrer.

PERMUTAÇÃO

Agora devemos atentar que o PFC muito parece com a permutação. E da permutação temos a fórmula: $P_n = n!$
Porém, a permutação pode ter ou não repetição de elementos e a fórmula fica:

$$\boxed{P_n^{a,b,c,..} = \frac{n!}{a!b!c!\ldots}}$$

Onde:
n – total de letras da palavra.
a, b, c .... – número de vezes que cada letra aparece.
Exemplo: Quantos anagramas podemos formar com a palavra ARARA?
Sol. Veja que ARARA tem letras repetidas então teremos n = 5, a = 3 (nº de vezes que aparece A) e b = 2 (nº de vezes que aparece R).
Assim sendo:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!c!} \rightarrow 20$$

Outro caso, porem mais raro é a permutação circular que temos a seguinte fórmula:

$$\boxed{P_{CIRCULAR} = (n-1)!}$$

Onde n é o número de elementos que dispomos para posicioná-los em forma de círculo.

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 **UFRN**

Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são formados números inteiros de quatro algarismos distintos. Dentre eles, a quantidade de números divisíveis por 5 é:
a) 20
b) 30
c) 60
d) 120
e) 180

QUESTÃO 02 **UFC**

A quantidade de números inteiros, positivos e ímpares, formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, é igual a:
a) 320
b) 332
c) 348
d) 360
e) 384

QUESTÃO 03 **UFC**

O número de maneiras segundo as quais podemos dispor 3 homens e 3 mulheres em três bancos fixos, de tal forma que em cada banco fique um casal, sem levar em conta a posição do casal no banco, é:
a) 9
b) 18
c) 24
d) 32
e) 36

QUESTÃO 04 **MACK**

Se uma sala tem 8 portas, então o número de maneiras distintas de se entrar nela e sair da mesma por uma porta diferente é:
a) 8
b) 16
c) 40
d) 48
e) 56

QUESTÃO 05 **URFGS**

Cinco sinaleiros estão alinhados. Cada um tem três bandeiras: uma amarela, uma verde e uma vermelha. Os cinco sinaleiros levantam uma bandeira cada, ao mesmo tempo, transmitindo-se assim um sinal. Os números de sinais diferentes que se pode transmitir é:
a) 15
b) 125
c) 243
d) 525
e) 1 215

QUESTÃO 06 **FGV**

Um homem tem oportunidade de jogar no máximo 5 vezes na roleta. Em cada jogada ele ganha ou perde um cruzeiro. Começará com um cruzeiro e parará de jogar antes de cinco vezes, se perder todo seu dinheiro ou se ganhar três cruzeiros, isto é, se tiver quatro cruzeiros. O número de maneiras em que o jogo poderá se desenrolar é:
a) 5
b) 3
c) 11
d) 12
e) 10

QUESTÃO 07 **PUC**

Um carteiro vai do bairro A para o B e do B para o C, retornando depois para B e assim para A. Se de A para B ele dispõe de 5 ruas distintas e de B para C de 4 ruas distintas, de quantas maneiras o carteiro pode fazer o percurso ABCBA sem repetir as ruas?
a) 400
b) 200
c) 120
d) 60

QUESTÃO 08 **UFBA**

Palíndromos são palavras que lidas de trás para frente tem a mesma pronuncia. Exemplo, OVO, MIRIM, entre outras. Quantos palíndromos numéricos, de 5 dígitos, podemos formar com os algarismo decimais (sem repeti-los) obedecendo a condição de palíndromos?
a) 720
b) 30240
c) 1000
d) 648
e) 200

QUESTÃO 09 **UEPA**

Quantos anagramas podemos formar com a palavra BRASIL onde as vogais sempre ficam juntas?
a) 720
b) 240
c) 120
d) 48
e) 24

QUESTÃO 10 UFGO

Uma bandeira que contem 4 faixas horizontais deve ser pintada e para isso são dispostas 5 tintas diferentes. De quantas maneiras pode-se pintar essa bandeira de tal modo que duas faixas vizinhas não tenham a mesma cor?
a) 120
b) 560
c) 720
d) 960
e) 1280

QUESTÃO 11 AFA

Para um jogo de tabuleiro 4 crianças vão participar. Considerando a mesa onde será realizado o jogo, um formato circular, de quantas maneiras distintas essas 4 crianças podem ocupar os 4 lugares?
a) 24
b) 20
c) 6
d) 4

QUESTÃO 12 UEMG

Em uma estante existem 4 livros de matemática, 3 livros de português e 2 livros de química. De quantas maneiras podemos enfileiras esses livros de modo que os de mesma disciplina fiquem juntos?
a) 288
b) 9!
c) 580
d) 1024
e) 1728

AULA 9 - ARRANJO X COMBINAÇÃO

Aqui vai um dos maiores desafios na analise combinatória: diferenciar arranjo de combinação. Em todo livro, site, apostila entre outros meios de estudo, é disponibilizado que:

Denominamos **arranjos simples** de **n** elementos distintos tomados **p** a **p** às *sucessões* formadas de **p** termos distintos escolhidos entre os **n** elementos dados. O número de arranjos simples dos n elementos tomados p a p é dado por

$$\boxed{A_n^p = A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}.$$

E que:
Denominamos **combinações simples** de **n** elementos distintos tomados **p** a **p** aos *conjuntos* formados de **p** elementos distintos escolhidos entre os **n** elementos dados. O número de combinações simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$\boxed{C_n^p = C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}.$$

Vejamos agora uma dica infalível para essa possível dúvida. Bem, analise a situação, monte um grupo e troque a posição de dois elementos propositalmente e veja:

- Se Alterou o sentindo é Arranjo
- Se Continuou o sentido é Combinação.

Exemplo: De quantas maneiras podemos criar uma senha de 4 algarismos no banco sem repetir algarismos?
Sol. Monte uma qualquer, sei lá, 1278. Agora mude a posição de dois elementos: 2178. Esse valor agora altera o sentido? Se sim Arranjo. Daí teremos:

$$A_{10,4} = \frac{10!}{4!} \rightarrow 10.9.8.7.6$$

Exemplo: Numa gincana deve ser escolhidas 3 alunas das 7 no grupo para representar a escola. De quantas maneiras posso mandar essas alunas representando a escola?
Sol. As alunas são: A, B, C , D, E, F e G. Digamos que quem vai é A, B e C. Mude nesse grupo a posição de duas delas, assim B, A e C. Continuou o sentido do mesmo grupo? Se sim é combinação. Daí teremos:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{(4!)(3!)} \rightarrow 35$$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 FGV

As saladas de frutas de um restaurante são feitas misturando pelo menos duas frutas escolhidas entre: banana, laranja, maçã, abacaxi e melão. Quantos tipos diferentes de saladas de frutas podem ser feitos considerando apenas os tipos de frutas e não as quantidades?
a) 26
b) 24
c) 22
d) 30
e) 28

QUESTÃO 02 PUC

São distribuídos 8 pontos sobre uma circunferência. Quantos triângulos distintos podem ser formados tendo como vértices os 8 pontos citados?
a) 72
b) 60
c) 56
d) 36
e) 24

QUESTÃO 03 | **UFSE**

O técnico da seleção dispõe no banco de reserva 3 goleiros e 7 jogadores de linha. Quantas equipes de futsal (5 atletas) o técnico pode montar?
a) 21
b) 56
c) 85
d) 105
e) 120

QUESTÃO 04 | **UECE**

Um quarteto será montado na escolha entre 8 jovens para representar uma serenata. Se o organizador sabe que dois dos garotos são intrigados, quantos quartetos ele pode formar de modo a manter harmonia no grupo?
a) 70
b) 60
c) 50
d) 40

QUESTÃO 05 | **MACK**

Participaram do 5º campeonato de natação master 7 candidatos. De quantos modos distintos o pódium pode receber os 3 vencedores?
a) 210
b) 180
c) 165
d) 120
e) 80

QUESTÃO 06 | **ESPCEX**

Num determinado setor de um hospital, trabalham 4 médicos e 8 enfermeiras. O número de equipes distintas, constituídas cada uma de 1 médico e 3 enfermeiras, que podem ser formadas nesse setor é de:
a) 60
b) 224
c) 495
d) 1344
e) 11880

QUESTÃO 07 | **FUVEST**

Considere r e s duas retas paralelas onde em r existem 5 pontos e em s existem 4 pontos. Quantos quadriláteros podem ser formados unindo esses pontos?
a) 120
b) 80
c) 60
d) 52
e) 48

AULA 10 - PROBABILIDADE

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

Todo experimento que, repetido em condições idênticas, pode apresentar diferentes resultados recebe o nome de **experimento aleatório**. A variabilidade de resultados deve-se exclusivamente ao acaso.
Ex. O lançamento de uma moeda, a extração de uma bola de uma urna que contém bolas de diferentes cores.
O estudo das Probabilidades é o ramo da Matemática que nos permite quantificar a chance de ocorrência de um fenômeno aleatório.

ESPAÇO AMOSTRAL

O total de possibilidades de um experimento aleatório é expresso por um conjunto indicado pela letra C e denominado **espaço amostral**.
Qualquer subconjunto do espaço amostral Ω é denominado **evento**. Vejamos um exemplo. Considere o lançamento de um dado não viciado e observe o número mostrado na face de cima. Note que Ω = {1,2,3,4,5,6}. Desta forma, ocorrer um número par no lançamento do dado consiste num evento, pois {2,4,6} é subconjunto de Ω.

OBS
- Note que o evento também é um conjunto. Desta forma, quando Ω = E, dizemos que E é o **evento certo**, ou seja, a chance de ocorrer o evento E é igual a 100%.
- Lembrando que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, então quando E = ϕ, dizemos que E é um evento impossível de ocorrer
- Ao evento que ocorre se, e somente se, o evento E não ocorrer, dá-se o nome de **evento complementar**. Indica-se por E^C. Note que $E \cup E^C = \Omega$.

PROBABILIDADE EM ESPAÇO AMOSTRAL

Quando num espaço amostral Ω qualquer **subconjunto unitário** tem a mesma chance de ocorrer, dizemos que o espaço amostral é equiprovável.
Num espaço amostral equiprovável, definimos a <u>probabilidade de ocorrer um evento o quociente entre o número possibilidades favoráveis ao evento e o número de elementos do espaço amostral</u>.
Indicamos por p(E) a probabilidade de ocorrer o evento E. Assim sendo, temos:

$$P(E) = \frac{Favorável}{Total}$$

A probabilidade P(E) <u>de um evento</u> é sempre um valor limitado no intervalo: $\boxed{0 \le P(E) \le 1}$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 UFMS

Em uma urna existem 10 bolas sendo 4 pretas, 3 brancas e 3 vermelhas. Qual a probabilidade de retirarmos, sem reposição, 3 bolas da mesma cor?
a) 8/125
b) 18/125
c) 28/125
d) 38/125
e) 48/125

QUESTÃO 02 UEPE

Durante uma partida de sinuca a probabilidade que uma das bolas caia numa caçapa, após uma tacada, é de aproximadamente:
a) 15%
b) 16%
c) 17%
d) 18%
e) 19%

QUESTÃO 03

Lançando-se simultaneamente dois dados não viciados, a probabilidade de que suas faces superiores exibam soma igual a 7 ou 9 é:
a) 1/6
b) 4/9
c) 2/11
d) 5/18
e) 3/7

QUESTÃO 04

Considere todos os números de cinco algarismos distintos obtidos pela permutação dos algarismos 4, 5, 6, 7 e 8. Escolhendo-se um desses números, ao acaso, a probabilidade dele ser um número ímpar é:
a) 1
b) 1/2
c) 2/5
d) 1/4
e) 1/5

QUESTÃO 05

Uma urna tem 100 cartões numerados de 101 a 200. A probabilidade de se sortear um cartão dessa urna e o número nele marcado ter os três algarismos distintos entre si é de:
a) 17/25
b) 71/100
c) 18/25
d) 73/100
e) 37/50

QUESTÃO 06

Dois rapazes e duas moças ocupam ao acaso os quatro lugares de um banco. A probabilidade de não ficarem lado a lado duas pessoas do mesmo sexo é:
a) 1/3.
b) 2/3.
c) 1/2.
d) 3/4.
e) 1/4.

QUESTÃO 07

Dois dados não viciados são lançados. A probabilidade de obter-se a soma de seus pontos maior ou igual a 5 é:
a) 5/6
b) 13/18
c) 2/3
d) 5/12
e) 1/2

QUESTÃO 08

Escolhe-se, ao acaso, um número de três algarismos distintos tomados do conjunto {1; 2; 3; 4; 5}. A probabilidade de nesse número aparecer o algarismo 2 e não aparecer o algarismo 4 é:
a) 3/5
b) 4/5
c) 3/10
d) 5/10
e) 7/10

QUESTÃO 09

Em uma pesquisa realizada na EsPCEx com uma turma de 30 alunos, constatou-se que:
- 15 alunos conhecem a cidade do rio de Janeiro;
- 12 alunos conhecem a cidade de São Paulo;
- 9 alunos conhecem ambas as cidades.

Escolhendo-se ao acaso um aluno dessa turma, a probabilidade de que ele conheça a cidade do rio de Janeiro ou a cidade de São Paulo é:
a) 1/2
b) 2/3
c) 3/5
d) 3/10
e) 9/10

QUESTÃO 10

Num grupo de funcionários de uma empresa, há 4 rapazes e 6 moças e dois deles são sorteados para fazer uma viagem. É verdade que a probabilidade de que:
a) as duas pessoas sorteadas sejam moças é de 3/10
b) as duas pessoas sorteadas sejam rapazes é de 3/25
c) as duas pessoas sorteadas sejam do mesmo sexo é de 7/25

d) pelo menos uma pessoa sorteada seja do sexo masculino é de 8/15

QUESTÃO 11

A probabilidade de observarmos um número na face superior de um certo dado viciado é diretamente proporcional a esse número. Ao lançarmos esse dado, a probabilidade de ocorrer um número par é:
a) 1/2
b) 11/21
c) 4/7
d) 13/21
e) nda

QUESTÃO 12

Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 até 50. Sorteando-se uma bolinha qual a probabilidade de ser múltiplo de 8?

a) 3/25
b) 7/50
c) 1/10
d) 8/50
e) 1/5

QUESTÃO 13

Seja S o espaço amostral de um experimento aleatório e A um evento desse S. A probabilidade de ocorrer um evento A é dada por $P(A) = \frac{n-10}{4}$. Onde n é o número de elementos de A. Qual maior valor que n pose assumir?
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

QUESTÃO 14

Dois dados são lançados ao acaso. Qual a probabilidade de que a soma dos resultados obtidos seja 3 ou 6?
a) 7/18
b) 1/18
c) 7/36
d) 7/12
e) 4/9

QUESTÃO 15

Ao lançar um dado varias vezes, uma pessoa percebeu que a face 6 saia com o dobro de frequância da face 1. Qual a probabilidade de sair face 1 nesse dado?
a) 1/3
b) 2/3
c) 2/9
d) 1/9
e) 1/12

QUESTÃO 16

Em uma moeda viciada a probabilidade de ocorrer face cara corresponde ao quádruplo da probabilidade de ocorrer coroa. Desta forma responda:
i) Qual a probabilidade, em %, de lançar a moeda e sai cara?
ii) Qual a probabilidade de lançarmos a moeda duas vezes e sair, nesta ordem, cara e coroa.

QUESTÃO 17

Uma urna contem fichas circulares numeradas de 1 ate 9. são retiradas duas fichas sem reposição. Assinale a alternativa que informa o valor da probabilidade da segunda ficha ter valor superior a primeira.
a) 4/9
b) 5/3
c) 4/5
d) 5/8
e) 1/2

AULA 11 - ESTATÍSTICA

É muito comum em época de eleições os noticiários apontarem as intenções de voto da população. Você já pensou como são feitas pesquisas como essas? Certamente não é necessário entrevistar toda a população para se chegar a uma determinada conclusão sobre ela. Chegar a esse tipo de conclusão é objeto da estatística.

FREQUÊNCIA

O número de vezes que um valor da variável é citado apresenta a **frequência absoluta** daquele valor. A **frequência relativa** registra a frequência absoluta comparando-a com o total de citações. Desta forma, é comum expressarmos a frequência relativa em porcentagem.
Assim sendo, considerando n_i como sendo o número de vezes que uma variável é citada e n como sendo o total de citações, segue que a frequência relativa f_i é dada por:

$$\boxed{f_i = \frac{n_i}{n}}$$

TABELA DE DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA

A apresentação tabular é uma das modalidades mais utilizadas para a apresentação de dados estatísticos coletados na amostragem. Uma classificação metodológica usual para listarmos os dados encontrados na amostra, é verificar a natureza dos dados estatísticos.

Para representarmos **dados contínuos**, normalmente, separamos os objetos, em intervalos reais que conte-

nham um **rol da amostra**(sequência de dados numéricos dispostos em ordem crescente ou decrescente) . Cada intervalo real é denominado **classe**.
Com o objetivo de não permitir que um elemento pertença a mais de uma classe ou que não pertença a nenhuma delas, adotamos alguns critérios para a formação de classes:
a) se **a** e **b** são, respectivamente, o menor e o maior elemento da amostra, então o extremo inferior da primeira classe deve ser menor ou igual a **a** e o extremo superior da última classe, deve ser maior ou igual a **b**.
b) o extremo inferior de cada classe, a partir da segunda, deve ser igual ao extremo superior da classe imediatamente anterior.
c) os extremos de cada classe não devem ser elementos da amostra, exceção feita ao extremo inferior da primeira classe e ao superior da última.

Notação:
⊢—— **ou** ——⊣

Assim, temos:
10 ⊢—— 20, inclui o 10 e exclui o 20
20 ⊢—— 30, inclui o 20 e exclui o 30
30 ⊢—— 40, inclui o 30 e exclui o 40
40 ⊢—— 50, inclui o 40 e exclui o 50

OBS
Se **a** e **b** são os extremos de uma classe, com a < b, então o número **b** – **a** é a amplitude dessa classe

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

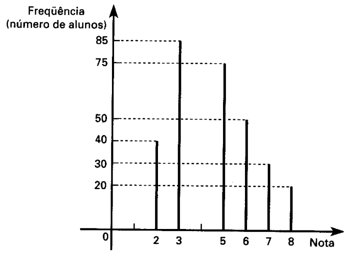
Já sabemos que uma distribuição de frequência pode ser representada graficamente. Tais gráficos dividem-se em duas categorias: **os de informação e os de análise**.
Os gráficos de informação têm como finalidade fornecer informações apenas quantitativas sobre a distribuição de frequência. Os de análise se destinam a estudos mais profundos, exigindo portanto maior precisão e rigor.
São gráficos de informação:
- Gráfico de barras.
- Gráfico por setores.
- Histograma.

Geralmente, usamos os gráficos de barras e por setores para representar dados discretos e histograma para representar gráficos contínuos. Veja.
Para se ter uma ideia do nível de ensino numa determinada região, escolheu-se uma amostra de trezentos alunos da primeira série colegial e aplicou-se uma prova. A tabela de distribuição de frequência abaixo mostra o resultado.

Classe (nota)	Frequência (número de alunos)
2,0	40
3,0	85
5,0	75
6,0	50
7,0	30
8,0	20

Assim, temos:

Gráfico de barras verticais ou barras horizontais.



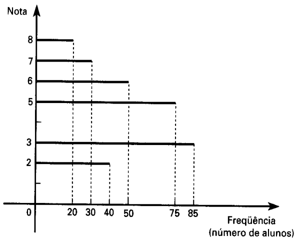
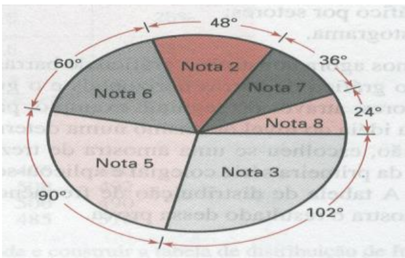
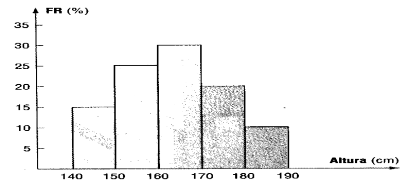


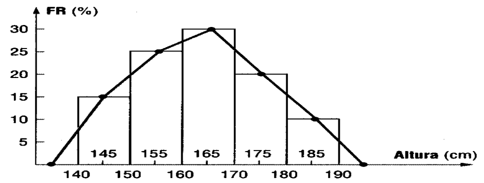
Gráfico por setores.



Dividimos o círculo em setores, com ângulos proporcionais às frequências das classes. Como o círculo representa um ângulo de 360º
 # Histograma com as classes relacionadas às frequências relativas.



Obs.: Os segmentos que ligam em sequência os pontos médios das bases superiores formam um gráfico de segmentos conhecido como **polígono de frequência**.



MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

1. Média aritmética

Definimos a média aritmética como sendo a razão entre a soma de todos os valores observados e o número total de observações. Assim sendo, considerando $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ os valores de **n** observações de determinada variável x, definimos a média aritmética pela fórmula:

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

2. Mediana

Considerando os **n** valores ordenados de uma variável **x**, a mediana é o valor central, ou seja, a mediana é o valor tal que o número de observações menores (ou iguais) a ela é igual ao número de observações maiores (ou iguais) a ela.

3. Moda

Moda de um conjunto de valores é a realização mais frequente entre os valores observados.

OBS
Pode ocorrer de um conjunto de valores ser amodal ou bimodal

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 **MACK**

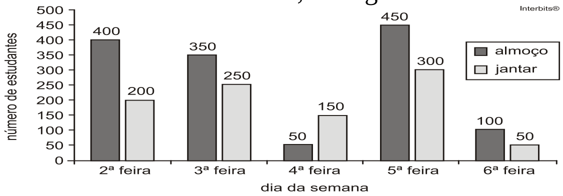
Uma prova era composta de 3 testes. O primeiro valia 1 ponto, o segundo valia 2 pontos e o terceiro 4 pontos, não sendo considerados acertos parciais. A tabela abaixo mostra a quantidade de alunos que obtiveram cada uma das notas possíveis:

Nota obtida	0	1	2	3	4	5	6	7
Nº de alunos	2	3	1	5	7	2	3	1

O número de alunos que acertaram o segundo teste foi:
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

QUESTÃO 02 **UFPR**

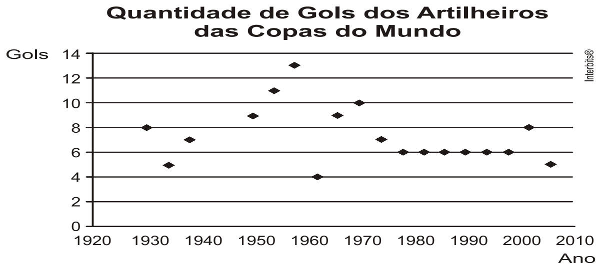
O gráfico a seguir mostra o número de usuários no restaurante universitário da UFPR Litoral atendidos durante uma determinada semana, de segunda a sexta-feira.



Os preços fixos praticados pelo restaurante são: almoço R$ 1,60 e jantar R$ 2,00. Qual foi o faturamento do restaurante nessa semana?
a) R$ 4.220,00.
b) R$ 10.800,00.
c) R$ 4.060,00.
d) R$ 5.000,00.
e) R$ 10.000,00.

QUESTÃO 03 **ENEM**

O gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1930 até a de 2006.



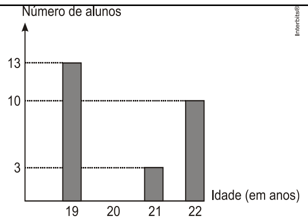
Disponível em: http://www.suapesquisa.com.
Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

A partir dos dados apresentados, qual a mediana das quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo?
a) 6 gols
b) 6,5 gols
c) 7gols
d) 7,3 gols
e) 8,5 gols

QUESTÃO 04 **UFPI**

A distribuição das idades dos alunos da turma do 5º período de um curso de agronomia está descrita no gráfico de barras abaixo. Esse gráfico está incompleto, pois nele não está representada a quantidade x de alunos com 20 anos de idade. Sabendo que ao considerarmos todos os alunos da turma (inclusive os que tenham 20 anos), a média aritmética das idades é 20,25. Então, o valor de x é tal que:

a) x é par.
b) x é divisível por 5.
c) x.
d) x é primo.



AGORA ALUNO VÁ À LUTA!!!