Estratégia Militares

EXTENSIVO 2021.2

MATEMÁTICA PARA EEAR

GEOMETRIA ANALÍTICA II

Prof. Victor So

AULA 07

30 DE OUTUBRO DE 2020

Sumário

APRESENTAÇÃO

Nesta aula, estudaremos os problemas envolvendo equação da circunferência.

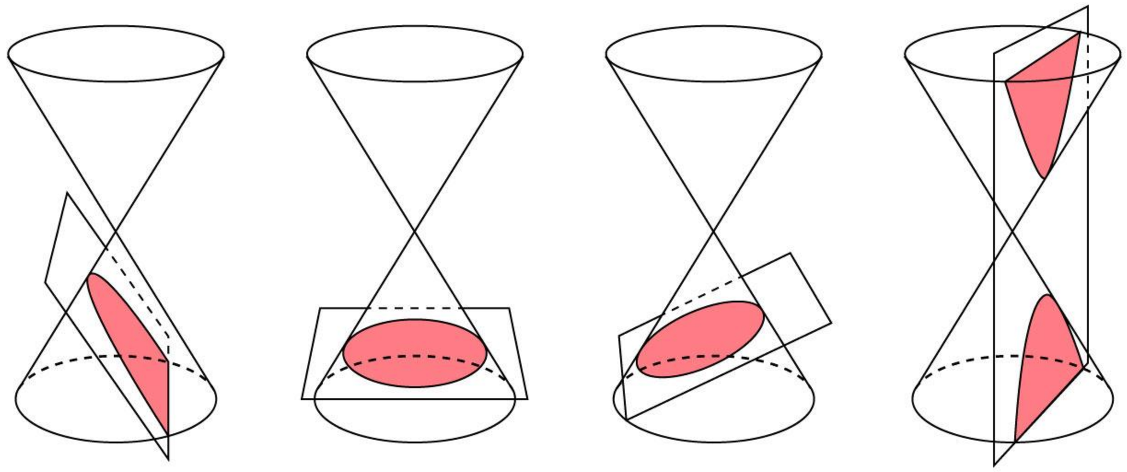
Se você já é experiente no assunto, pule para a lista de exercícios e tente resolver todas as questões. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões, entre em contato no fórum de dúvidas ou se preferir:

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

1. CÔNICAS

Vamos iniciar o estudo das cônicas. Essas figuras são lugares geométricos obtidos pela intersecção de um plano com cones retos duplos opostos pelo vértice. Vejas as figuras abaixo:



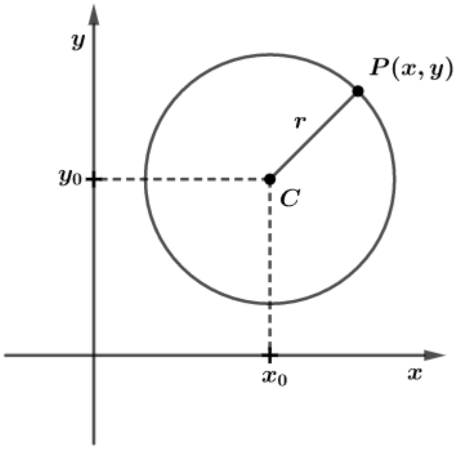
Perceba que a **elipse** é formada pela intersecção de um plano inclinado em relação às bases dos cones. Se esse plano for paralelo às bases, obtemos a figura de uma **circunferência**, e esse é um caso particular de elipse. Se o plano for paralelo à geratriz de um dos cones, obtemos uma **parábola** (dessa forma não formamos uma elipse). Por fim, a **hipérbole** é obtida passando-se um plano paralelo ao eixo de simetria dos cones. Além desses, temos as cônicas degeneradas: um ponto (elipse degenerada), uma reta (parábola degenerada), para de retas (hipérbole degenerada) ou o conjunto vazio.

Estudaremos a equação da circunferência.

1.1. CIRCUNFERÊNCIA

A circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto fixo. Esse ponto é chamado de centro da circunferência.

Seja λ a circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e r o seu raio. Se $P \in \lambda$, então, pela definição desse L.G., temos



$$\boxed{P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r}$$

Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer de λ, podemos aplicar a fórmula da distância entre dois pontos:

$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos a **equação reduzida da circunferência**:

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

Desenvolvendo-se a equação reduzida, obtemos a **equação geral da circunferência**:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0}$$

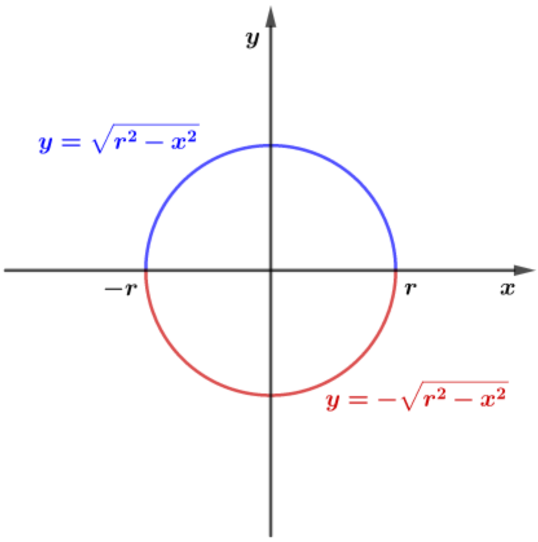
Usando a equação da circunferência, podemos escrever duas equações de semicircunferências. Vamos tomar a circunferência centrada na origem.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Isolando y:

$$y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Representando as curvas no gráfico, temos:



1.1.1. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

Dados um ponto $P(x_1, y_1)$ e uma circunferência $\lambda: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, para saber a posição relativa do ponto em relação à λ, basta substituir as coordenadas de P na expressão $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ e analisar o número encontrado com o raio ao quadrado. Desse modo:

- $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < r^2 \rightarrow P \text{ é } interior \text{ à } \lambda$
- $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2 \rightarrow P \in \lambda$
- $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 > r^2 \rightarrow P \text{ é } exterior \text{ à } \lambda$

Exemplo:

Seja a circunferência $\lambda: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$, qual a posição relativa do ponto $P(0, 3)$ em relação à λ?

Substituindo as coordenadas de P na circunferência:

$$(0 - 2)^2 + (3 - 1)^2 = 4 + 4 = 8 < 9$$

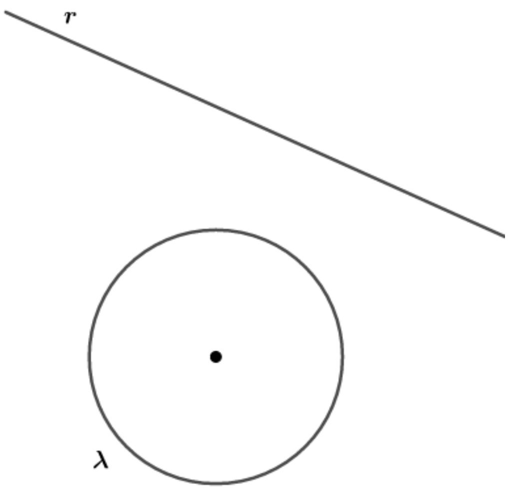
Assim, o ponto é interior à circunferência.

1.1.2. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS E CIRCUNFERÊNCIA

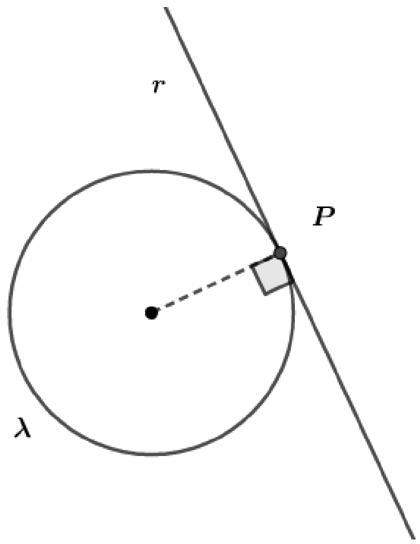
Dadas as equações de uma reta $r: ax + by + c = 0$ e de uma circunferência $\lambda: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, para saber a posição relativa da reta em relação à λ, basta isolar uma das variáveis da reta $(x \; ou \; y)$ na equação da circunferência e verificar o valor do discriminante da equação.

Assim:

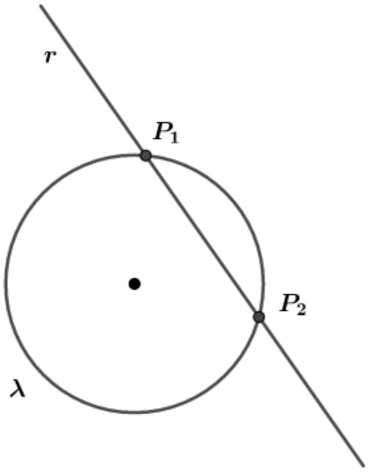
- $r \cap \lambda = \emptyset \Leftrightarrow \Delta < 0$ (r é $exterior$)



- $r \cap \lambda = \{P\} \Leftrightarrow \Delta = 0$ (r é $tangente$)



- $r \cap \lambda = \{P_1, P_2\} \Leftrightarrow \Delta > 0$ (r é $secante$)



Exemplo:

Qual a posição relativa da reta r: $2x + y - 1 = 0$ em relação à λ: $(x-1)^2 + y^2 = 9$?

Da reta r, temos $y = 1 - 2x$. Substituindo na equação de λ:

$$(x-1)^2 + (1-2x)^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 1 - 4x + 4x^2 = 9$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 6x - 7 = 0$$

Analisando o discriminante dessa equação, temos:

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 5 \cdot (-7) = 176 > 0$$

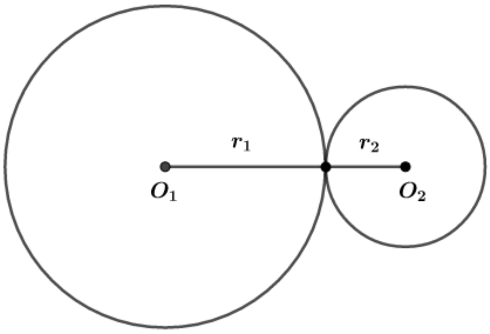
Portanto, temos duas soluções, logo, a reta intercepta a circunferência em dois pontos. Assim, r é secante à λ.

1.1.3. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

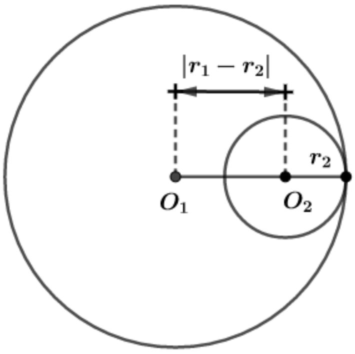
Dadas as circunferências λ_1: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$ e λ_2: $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$, para analisar a posição relativa entre as circunferências, devemos calcular a distância entre seus centros e fazer as seguintes comparações:

Seja O_1 o centro da circunferência λ_1 e O_2 o centro da circunferência λ_2.

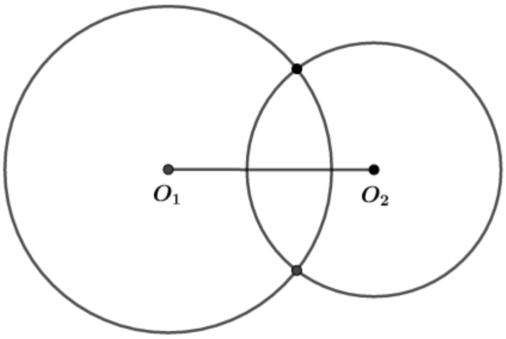
- $O_1O_2 = r_1 + r_2$ $(\lambda_1\ e\ \lambda_2\ \text{são tangentes externamente})$



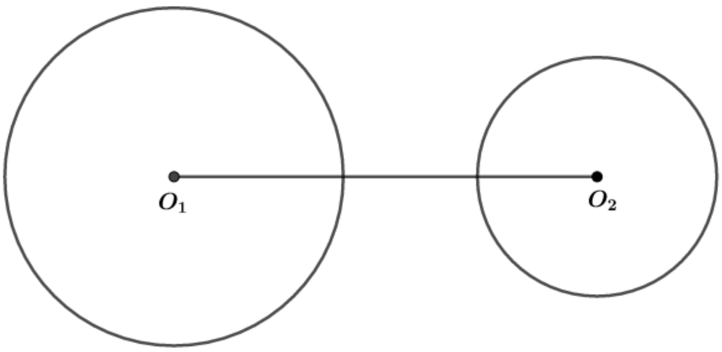
- $O_1O_2 = |r_1 - r_2|$ $(\lambda_1$ *e* λ_2 *são tangentes internamente*$)$



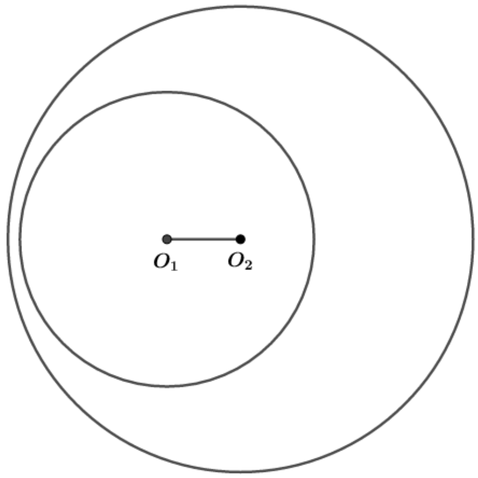
- $|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$ $(\lambda_1$ *e* λ_2 *são secantes*$)$



- $O_1O_2 > r_1 + r_2$ (*as duas circunferências são externas uma à outra*)

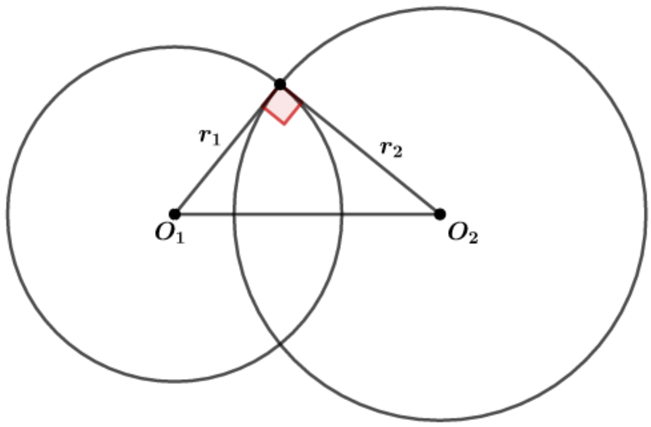


- $O_1O_2 < |r_1 - r_2|$ (*uma das circunferências é interna à outra*)



Quando duas circunferências satisfazem a seguinte relação:

$$O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2 \ (condição\ de\ ortogonalidade)$$



Dizemos que as circunferências são ortogonais entre si. Note que os pontos de intersecção das circunferências formam retas tangentes que passam pelo centro das circunferências.

1.2. PROBLEMAS DE TANGÊNCIA

Com o que aprendemos até aqui, já conseguimos resolver diversos problemas de Geometria Analítica. Uma questão muito recorrente nas provas é sobre reta tangente às cônicas. Para resolver esse problema, devemos nos lembrar que, se a reta é tangente, o ponto de intersecção dela com a cônica é apenas um ponto. Dessa forma, vejamos como procedemos com um exemplo.

Seja a equação de cônica dada por $\lambda: x^2 + y^2 = 1$. Determine a equação da reta tangente à circunferência no ponto $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Resolução:

Dado que temos o ponto da reta tangente, podemos escrever a seguinte relação para a equação da reta tangente r:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = mx + y_0 - mx_0$$

Substituindo as coordenadas do ponto P na reta:

$$y = mx + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{m\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{r: y = mx + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - m)}$$

Agora, temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} \lambda: x^2 + y^2 = 1 \\ r: y = mx + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - m) \end{cases}$$

Fazendo a intersecção de r com λ, devemos encontrar apenas um ponto. Desse modo:

$$x^2 + \left(mx + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - m)\right)^2 = 1$$

Desenvolvendo e simplificando, encontramos:

$$(1 + m^2)x^2 + \sqrt{2}(1 - m)mx + \frac{m^2 - 2m - 1}{2} = 0$$

Essa é uma equação do segundo grau em x, para termos apenas uma solução, devemos ter $\Delta = 0$, logo:

$$\Delta = \left(\sqrt{2}(1 - m)m\right)^2 - 4 \cdot (1 + m^2) \cdot \left(\frac{m^2 - 2m - 1}{2}\right) = 0$$

Fazendo as contas e simplificando, obtemos:

$$(m+1)^2 = 0 \Rightarrow m = -1$$

Substituindo esse valor na equação da reta:

$$y = (-1)x + \frac{\sqrt{2}}{2}\big(1-(-1)\big) \Rightarrow y = -x + \sqrt{2}$$

Portanto, a equação da reta tangente à circunferência no ponto $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é

$$\boxed{r: y = -x + \sqrt{2}}$$

2. LISTA DE QUESTÕES

1. (EEAR/2018)

Se $A(x,y)$ pertence ao conjunto dos pontos do plano cartesiano que distam d do ponto $C(x_0, y_0)$, sendo $d > 2$, então

a) $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + d^2 = 0$

b) $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = d^2$

c) $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 2d$

d) $y - y_0 = d(x-x_0)$

2. (EEAR/2017)

As posições dos pontos $A(1,7)$ e $B(7,1)$ em relação à circunferência de equação $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 16$ são, respectivamente,

a) Interna e interna

b) Interna e externa

c) Externa e interna

d) Externa e externa

3. (EEAR/2017)

Seja $(x-1)^2+(y-6)^2=25$ a equação reduzida de uma circunferência de centro $C(a,b)$ e raio R. Assim, $a+b+R$ é igual a

a) 18

b) 15

c) 12

d) 9

4. (EEAR/2016)

Para que uma circunferência $\lambda: x^2+y^2-mx-4y-c=0$ tenha centro $C(1,2)$ e raio $R=5$, os valores de $m\ e\ de\ c$ são respectivamente

a) -1 e -10

b) -2 e 25

c) 1 e -20

d) 2 e 20

5. (EEAR/2015)

Seja O o centro da circunferência $\alpha: (x-1)^2+(y-3)^2=9$. O ponto $P(3,2)$ é

a) Interior a α, estando mais próximo de α que de O

b) Interior a α, estando mais próximo de O do que de α

c) Pertencente a α

d) Exterior a α

6. (EEAR/2014)

Se $C(a,b)$ e r são, respectivamente, o centro e o raio da circunferência de equação $(x-2)^2+(y+1)^2=16$, o valor de $a+b+r$ é

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

7. (EEAR/2011)

A parábola $y = x^2$ intercepta a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{2}$ nos pontos

a) $(-1, 1)\ e\ (2, 4)$

b) $(-1, 1)\ e\ (1, 1)$

c) $(-2, 4)\ e\ (2, 4)$

d) $(-2, 4)\ e\ (1, 1)$

8. (EEAR/2011)

Dados os pontos $B(1, 2)$ e $C(0, 1)$ e uma circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$, é correto afirmar que

a) B é interior a $\lambda\ e\ C$ é exterior a λ

b) B é exterior a λ e C é interior a λ

c) $B\ e\ C$ são exteriores a λ

d) $B\ e\ C$ são interiores a λ

9. (EEAR/2010)

Considere a circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$ e uma reta r secante a ela. Uma possível distância entre r e o centro da circunferência é

a) 5,67

b) 4,63

c) 3,58

d) 2,93

10. (EEAR/2009)

Se o ponto $Q(2, 1)$ pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$, então o valor de k é

a) 6

b) 3

c) -7

d) -10

11. (EEAR/2007)

Para que a reta de equação $y = \sqrt{3}x + n$ seja tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, o valor de n deve ser

a) -3 ou 3

b) -2 ou 2

c) -3 ou 3

d) -4 ou 4

12. (EEAR/2007)

Se a distância entre uma reta t e o centro da circunferência $(\lambda:)\ x^2 + (y-2)^2 = 16$ é $\sqrt{17}$, então $t\ e\ \lambda$ são

a) Secantes

b) Tangentes

c) Exteriores

d) Interiores

13. (EEAR/2006)

Se uma circunferência tem centro $C(1, 0)$ e raio 1 e outra tem equação $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$, então essas circunferências são

a) Secantes

b) Externas

c) Tangentes internas

d) Tangentes externas

14. (EEAR/2006)

Se a circunferência de equação $x^2 + by^2 + cx + dy + k = 0$ tem centro $C(1, -3)$ e raio $\sqrt{3}$, então $b + c + d + k$ é igual a:

a) 12

b) 11

c) 10

d) 9

15. (EEAR/2005)

O raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 1 = 0$ é igual a

a) 5

b) 4

c) 6

d) 7

16. (EEAR/2004)

Uma circunferência tem centro $(4, 3)$ e passa pela origem. A equação da dessa circunferência é

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 25$

d) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

17. (EEAR/2003)

A equação da circunferência em que os pontos $M(-3, 2)$ e $N(5, 4)$ são extremos de um diâmetro é

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 - 17 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 7 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 5 = 0$

18. (EEAR/2003)

Uma corda é determinada pela reta $x - y = 0$ sobre a circunferência $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 16$. A área da menor região determinada por essa corda e o círculo é

a) $4\pi - 8$

b) $4\pi - 16$

c) $4\pi - 2$

d) $4\pi - 4$

19. (EEAR/2003)

O maior valor inteiro de k para que a equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$ represente uma circunferência é

a) 14

b) 13

c) 12

d) 10

20. (EEAR/2003)

Sendo $C(3, -2)$ o centro de uma circunferência de raio igual a 4, então sua equação normal ou geral é

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 3 = 0$

21. (EEAR/2002)

Dadas a reta de equação $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x = 0$. A área do triângulo determinado pelo centro da circunferência e os pontos de intersecção entre a reta e ela, em unidades de área, é igual a

a) $\sqrt{3}$

b) 3

c) $3\sqrt{3}$

d) 6

22. (EEAR/2002)

No plano cartesiano, os pontos $A(1,0)$ e $B(0,2)$ são de uma mesma circunferência. Se o centro dessa circunferência é ponto da reta $y = 3 - x$, então suas coordenadas são

a) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $(1,2)$

c) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

d) $(0,3)$

23. (EEAR/2002)

A distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ à bissetriz do $II^{\underline{o}}$ e $IV^{\underline{o}}$ quadrantes, vale

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{3}/2$

c) $\sqrt{7}/2$

d) $7\sqrt{2}/2$

24. (EEAR/2002)

Seja uma circunferência com centro sobre a reta $y = 3x$. Se a circunferência é tangente à reta $y = x$ na ordenada 4, então as coordenadas do centro da circunferência são

a) $(4,12)$

b) $(2,6)$

c) $(3,9)$

d) $(5,15)$

25. (EEAR/2001)

Considere as circunferências que passam pelos pontos $(0,0)$ e $(2,0)$ e que são tangentes à reta $y = x + 2$ as coordenadas dos centros dessas circunferências são

a) $(1,1)$ e $(1,-7)$

b) $(1,1)$ e $(-7,1)$

c) $(1, -7)\ e\ (1, 7)$

d) $(1, -7)\ e\ (-1, 7)$

26. (EEAR/2001)

No sistema de coordenadas cartesianas, a equação $x^2 + y^2 = ax + by$, onde $a\ e\ b$ são números reais não nulos, representa uma circunferência de raio

a) $\sqrt{a^2 + b^2}/2$

b) $\sqrt{a^2 + b^2}$

c) $(a + b)/2$

d) $a + b$

27. (EEAR/2001)

A circunferência $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ e a reta $x - 3y - 2 = 0$ possuem ___ ponto(s) em comum

a) 2

b) 1

c) Infinitos

d) Nenhum

28. (EEAR/2000)

A posição dos pontos $P(3, 2)\ e\ Q(1, 1)$ em relação à circunferência $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ é:

a) P é interior e Q exterior

b) P é exterior e Q é interior

c) P e Q são interiores

d) P e Q são exteriores

29. (ESA/2016)

A equação da circunferência de centro $(1, 2)$ e raio 3 é:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 14 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 14 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 14 = 0$

30. (ESA/2014)

Em um sistema de coordenadas cartesianas no plano, considere os pontos $O(0,0)$ e $A(8,0)$. A equação do conjunto dos pontos $P(x,y)$ desse plano sabendo que a distância de O a P é o triplo da distância de P a A, é uma

a) Circunferência de centro $(9,0)$ e raio 3

b) Elipse de focos $(6,0)$ e $(12,0)$, e eixo menor 6

c) Hipérbole de focos $(3,0)$ e $(15,0)$, e eixo real 6

d) Parábola de vértice $(9,3)$, que intercepta o eixo das abscissas nos pontos $(6,0)$ e $(12,0)$

e) Reta que passa pelos pontos $(6,0)$ e $(9,3)$

31. (ESA/2013)

Dada a equação da circunferência é: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, sendo as coordenadas do centro e r a medida do raio, identifique a equação geral da circunferência de centro $(2,3)$ e raio igual a 5

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 - 4xy - 12 = 0$

c) $x^2 - 4x = -16$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

e) $y^2 - 6y = -9$

32. (ESA/2011)

A reta $y = mx + 2$ é tangente à circunferência de equação $(x-4)^2 + y^2 = 4$. A soma dos possíveis valores de m é:

a) 0

b) 4/3

c) -4/3

c) -3/4

e) 2

33. (ESA/2008)

As equações $(x+1)^2+(y-4)^2=64\ e\ (x-4)^2+(y+8)^2=25$ representam duas circunferências cuja posição relativa no plano permite afirmar que são

a) Interiores (sem ponto de intersecção)

b) Tangentes interiores

c) Secantes

d) Tangentes exteriores

e) Exteriores (sem ponto de intersecção)

34. (ESPCEX/2011)

Uma circunferência tem centro no eixo das abscissas, passa pelo ponto $(4,4)$ e não intercepta o eixo das ordenadas. Se a área do círculo definido por essa circunferência é 17π, a abscissa de seu centro é

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

35. (ESPCEX/2016)

Seja C a circunferência de equação $x^2+y^2+2x+4y+2=0$. Considere em C a corda MN cujo ponto médio é $P(-1,-1)$. O comprimento de MN (em unidade de comprimento) é igual a

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{3}$

e) 2

36. (ESPCEX/2015)

Considere a circunferência que passa pelos pontos $(0,0)$, $(0,6)$ e $(4,0)$ em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Sabendo que os pontos $(0,6)$ e $(4,0)$ pertencem a uma reta que passa pelo centro dessa circunferência, uma das retas tangentes a essa circunferência, que passa pelo ponto $(3,-2)$, tem por equação

a) $3x-2y-13=0$

b) $2x-3y-12=0$

c) $2x-y-8=0$

d) $x-5y-13=0$

e) $8x+3y-18=0$

37. (ESPCEX/2013)

Sejam dados a circunferência $\lambda: x^2+y^2+4x+10y+25=0$ e o ponto P, que é simétrico de $(-1,1)$ em relação ao eixo das abscissas. Determine a equação da circunferência concêntrica a λ e que passa pelo ponto P

a) $\lambda: x^2+y^2+4x+10y+16=0$

b) $\lambda: x^2+y^2+4x+10y+12=0$

c) $\lambda: x^2-y^2+4x-5y+16=0$

d) $\lambda: x^2+y^2-4x-5y+12=0$

e) $\lambda: x^2-y^2-4x-10y-17=0$

38. (ESPCEX/2012)

Considere a circunferência $(\lambda)x^2+y^2-4x=0$ e o ponto $P(1,\sqrt{3})$. Se a reta t é tangente a λ no ponto P, então a abscissa do ponto de intersecção de t com o eixo horizontal do sistema de coordenadas cartesianas é

a) -2

b) $2+\sqrt{3}$

c) 3

d) $3+\sqrt{3}$

e) $3+3\sqrt{3}$

2.1. GABARITO

GABARITO

1. b
2. c
3. c
4. d
5. a
6. b
7. b
8. d
9. d
10. c
11. d
12. c
13. d
14. a
15. a
16. d
17. c
18. a
19. c
20. b
21. a
22. c
23. d
24. b
25. a
26. a
27. d
28. b
29. b
30. a
31. d
32. c
33. d
34. c
35. c
36. a
37. b
38. a

3. LISTA DE QUESTÕES COMENTADAS

1. (EEAR/2018)

Se $A(x,y)$ pertence ao conjunto dos pontos do plano cartesiano que distam d do ponto $C(x_0,y_0)$, sendo $d>2$, então

a) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+d^2=0$

b) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=d^2$

c) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=2d$

d) $y-y_0=d(x-x_0)$

Comentários

Do estudo da geometria analítica, temos que a distância entre um ponto $A(x,y)$ desse conjunto e o ponto C é dada por:

$$AC=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Mas $AC = d$, logo:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = d^2$$

Gabarito: "b".

---

2. (EEAR/2017)

As posições dos pontos $A(1,7)$ e $B(7,1)$ em relação à circunferência de equação $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 16$ são, respectivamente,

a) Interna e interna

b) Interna e externa

c) Externa e interna

d) Externa e externa

Comentários

Para avaliar a posição dos pontos em relação à circunferência devemos identificar o raio e o centro dessa circunferência.

Observando a equação, temos:

$$C = (6,2)$$

$$r = 4$$

Veja que:

$$AC = \sqrt{(1-6)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

Como $AC > r$, então A é exterior à circunferência.

$$BC = \sqrt{(7-6)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Como $BC < 4$, então B é interior à circunferência.

Gabarito: "c".

---

3. (EEAR/2017)

Seja $(x-1)^2 + (y-6)^2 = 25$ a equação reduzida de uma circunferência de centro $C(a,b)$ e raio R. Assim, $a + b + R$ é igual a

a) 18

b) 15

c) 12

d) 9

Comentários

Observando a equação:

$$C = (1,6)$$

E:

$$R = 5$$

Portanto:

$$a + b + R = 1 + 6 + 5 = 12$$

Gabarito: “c”.

---

4. (EEAR/2016)

Para que uma circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - mx - 4y - c = 0$ tenha centro $C(1,2)$ e raio $R = 5$, os valores de $m\ e\ de\ c$ são respectivamente

a) -1 e -10

b) -2 e 25

c) 1 e -20

d) 2 e 20

Comentários

Completando os quadrados:

$$x^2 - 2 \cdot \frac{m}{2} x + \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{4} + y^2 - 2 \cdot 2y + 4 - 4 - c = 0$$

Ou seja:

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + (y-2)^2 - \frac{m^2}{4} - 4 - c = 0$$

A coordenada x do centro é 1, logo:

$$\frac{m}{2} = 1 \Rightarrow m = 2$$

Como o raio é 5, temos que:

$$\frac{2^2}{4}+4+c=25 \Rightarrow c=20$$

Gabarito: “d”.

---

5. **(EEAR/2015)**

Seja $\boldsymbol{O}$ o centro da circunferência $\boldsymbol{\alpha}$: $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^2+(\boldsymbol{y}-\mathbf{3})^2=\mathbf{9}$. O ponto $\boldsymbol{P}(\mathbf{3},\mathbf{2})$ é

a) Interior a α, estando mais próximo de α que de O

b) Interior a α, estando mais próximo de O do que de α

c) Pertencente a α

d) Exterior a α

Comentários

Observando a equação, veja que ela possui raio 3 e centro $O(1,3)$. A distância de P ao centro é:

$$PO=\sqrt{(3-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

Como $\sqrt{5}<3$, o ponto é interior à circunferência.

Veja ainda que $\sqrt{5}>3/2$, isso significa que P está mais próximo de α que de O.

Gabarito: “a”.

---

6. **(EEAR/2014)**

Se $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ e $\boldsymbol{r}$ são, respectivamente, o centro e o raio da circunferência de equação $(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^2+(\boldsymbol{y}+\mathbf{1})^2=\mathbf{16}$, o valor de $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{r}$ é

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

Comentários

Observando a equação, temos:

$$C(2,-1)\ e\ r=\sqrt{16}=4$$

Do que segue que:

$$a+b+r=2-1+4=5$$

Gabarito: “b”.

---

7. (EEAR/2011)

A parábola $y = x^2$ intercepta a circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{2}$ nos pontos

a) $(-1,1)\ e\ (2,4)$

b) $(-1,1)\ e\ (1,1)$

c) $(-2,4)\ e\ (2,4)$

d) $(-2,4)\ e\ (1,1)$

Comentários

A circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{2}$ possui equação:

$$x^2 + y^2 = 2$$

Substituindo o x^2 da parábola:

$$y + y^2 = 2$$

Resolvendo para y:

$$y = 1\ ou\ y = -2$$

Veja que $y = x^2 \geq 0$, do que segue que $y = 1$. Disso, temos que $|x| = 1$, isto é, $x = \pm 1$.

Os pontos são, portanto: $(1,1)\ e\ (-1,1)$.

Gabarito: "b".

---

8. (EEAR/2011)

Dados os pontos $B(1,2)$ e $C(0,1)$ e uma circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$, é correto afirmar que

a) B é interior a $\lambda\ e\ C$ é exterior a λ

b) B é exterior a λ e C é interior a λ

c) $B\ e\ C$ são exteriores a λ

d) $B\ e\ C$ são interiores a λ

Comentários

Primeiramente precisamos completar os quadrados na equação da circunferência:

$$x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + y^2 - 4 = 0$$

Ou seja:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$$

Veja que ela possui centro $O(3/2,0)$ e raio $5/2$.

Vamos calcular as distâncias de $B\ e\ O$ a λ:

$$BO=\sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+(2-0)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$BO<\frac{5}{2}$$

Logo, B é interior a λ.

Distância entre $C\ e\ O$:

$$CO=\sqrt{\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+(1-0)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

Veja que $CO<5/2$, do que temos que C é interior a λ.

Gabarito: "d".

---

9. (EEAR/2010)

Considere a circunferência de equação $(x-2)^2+(y-4)^2=9$ e uma reta r secante a ela. Uma possível distância entre r e o centro da circunferência é

a) 5,67

b) 4,63

c) 3,58

d) 2,93

Comentários

Uma condição necessária para que uma reta seja secante à circunferência é que a distância do centro dessa circunferência à reta seja menor que o raio.

O raio da circunferência vale $\sqrt{9}=3$, do que temos que, dentre as alternativas, a única distância possível é $2{,}93$.

Gabarito: "d".

---

10. (EEAR/2009)

Se o ponto $Q(2,1)$ pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$, então o valor de k é

a) 6

b) 3

c) -7

d) -10

Comentários

Se Q pertence à circunferência, então temos que:

$$2^2 + 1^2 + 4 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + k = 0 \Rightarrow k = -7$$

Gabarito: "c".

---

11. (EEAR/2007)

Para que a reta de equação $y = \sqrt{3}x + n$ seja tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, o valor de n deve ser

a) -3 ou 3

b) -2 ou 2

c) -3 ou 3

d) -4 ou 4

Comentários

Para que haja a tangência, a distância da reta ao centro da circunferência deve ser igual ao raio:

$$2 = \left|\frac{\sqrt{3} \cdot 0 - 0 + n}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}}\right| = \left|\frac{n}{2}\right| \Rightarrow n = \pm 4$$

Gabarito: "d".

---

12. (EEAR/2007)

Se a distância entre uma reta t e o centro da circunferência $(\lambda:)\ x^2 + (y-2)^2 = 16$ é $\sqrt{17}$, então $t\ e\ \lambda$ são

a) Secantes

b) Tangentes

c) Exteriores

d) Interiores

Comentários

O raio dessa circunferência vale $\sqrt{16} = 4$. Como $\sqrt{17} > 4$, isto é, a distância da reta ao centro da circunferência é maior que o raio, a reta deve ser exterior à circunferência.

Gabarito: “c”.

---

13. (EEAR/2006)

Se uma circunferência tem centro $\boldsymbol{C(1,0)}$ e raio 1 e outra tem equação $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0}$, então essas circunferências são

a) Secantes

b) Externas

c) Tangentes internas

d) Tangentes externas

Comentários

Completando os quadrados da segunda circunferência:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2 \cdot 4y + 16 - 16 + 8 = 0$$

Ou seja:

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$$

O centro da segunda circunferência é $C_1(1,4)$. A distância entre os centros dessas circunferências vale:

$$CC_1 = \sqrt{(1-1)^2 + (0-4)^2} = 4$$

O raio da primeira vale 1 e o raio da segunda vale $\sqrt{9} = 3$, a soma dos raios é 4, que é igual à distância entre os centros. Disso, temos que as circunferências são tangentes externas.

Gabarito: “d”.

---

14. (EEAR/2006)

Se a circunferência de equação $\boldsymbol{x^2 + by^2 + cx + dy + k = 0}$ tem centro $\boldsymbol{C(1,-3)}$ e raio $\boldsymbol{\sqrt{3}}$, então $\boldsymbol{b + c + d + k}$ é igual a:

a) 12

b) 11

c) 10

d) 9

Comentários

Como a equação é uma circunferência, os coeficientes de x^2 e y^2 devem ser iguais:

$$1 = b$$

Completando os quadrados da equação da circunferência:

$$x^2 + 2\frac{c}{2}x + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} + y^2 + 2\frac{d}{2}y + \frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{4} + k = 0$$

Ou seja:

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} - k$$

As coordenadas do centro são $(1, -3)$, então:

$$-\frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = -2$$

$$-\frac{d}{2} = -3 \Rightarrow d = 6$$

Além disso:

$$\frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} - k = \sqrt{3}^2 \Rightarrow \frac{4}{4} + \frac{36}{4} - k = 3 \Rightarrow k = 7$$

Por fim:

$$b + c + d + k = 1 - 2 + 6 + 7 = 12$$

Gabarito: “a”.

---

15. (EEAR/2005)

O raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 1 = 0$ é igual a

a) 5

b) 4

c) 6

d) 7

Comentários

Para identificar o raio, precisamos escrever a equação em sua forma reduzida:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 2 \cdot 5y + 25 - 25 + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 25$$

Logo, o raio vale:

$$\sqrt{25} = 5$$

Gabarito: "a".

---

16. (EEAR/2004)

Uma circunferência tem centro $(4, 3)$ e passa pela origem. A equação da dessa circunferência é

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 25$

d) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

Comentários

Sua equação reduzida é:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

Além disso, como ela passa pela origem:

$$(0-4)^2 + (0-3)^2 = r^2 \Rightarrow r = 5$$

Do que segue que:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$$

Gabarito: "d".

---

17. (EEAR/2003)

A equação da circunferência em que os pontos $M(-3, 2)$ e $N(5, 4)$ são extremos de um diâmetro é

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 - 17 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 7 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 5 = 0$

Comentários

Como são extremos de um diâmetro, temos duas informações que determinam a circunferência:

1ª: o ponto médio de MN é o centro da circunferência:

$$C = \frac{M+N}{2} = \frac{(-3,2)+(5,4)}{2} = \frac{(2,6)}{2} = (1,3)$$

2ª: a metade da distância entre eles é o raio:

$$MN = \sqrt{(-3-5)^2+(2-4)^2} = 2\sqrt{17}$$

Do que temos que $r = \sqrt{17}$.

Por fim, a equação da circunferência:

$$(x-1)^2+(y-3)^2 = 17 \Rightarrow x^2+y^2-2x-6y-7=0$$

Gabarito: "c".

---

18. (EEAR/2003)

Uma corda é determinada pela reta $x - y = 0$ sobre a circunferência $(x-2)^2+(y+2)^2 = 16$. A área da menor região determinada por essa corda e o círculo é

a) $4\pi - 8$

b) $4\pi - 16$

c) $4\pi - 2$

d) $4\pi - 4$

Comentários

O primeiro passo é encontrar os pontos de intersecção entre a circunferência e a reta. Da equação da reta, temos:

$$x = y$$

Assim:

$$(x-2)^2+(x+2)^2 = 16 \Rightarrow 2x^2+8 = 16 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

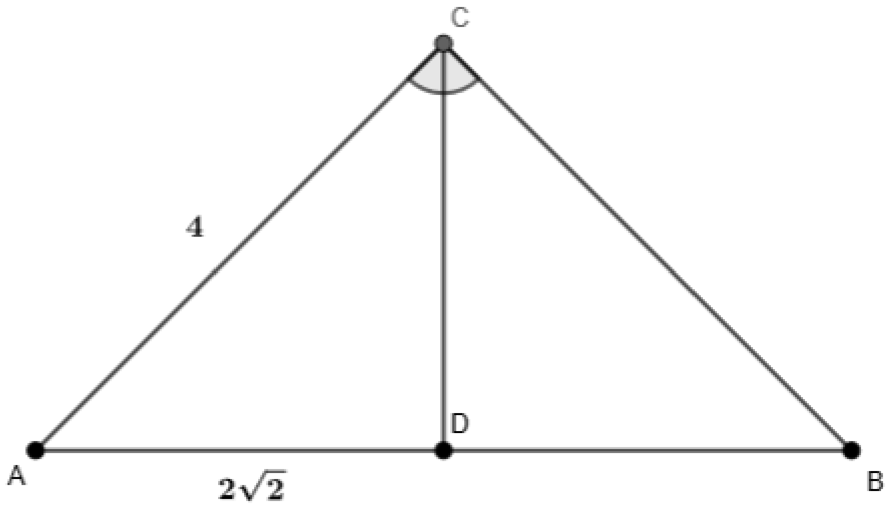
Assim os pontos de intersecção são:

$$A(2,2)\ e\ B(-2,-2)$$

A distância entre $A\ e\ B$:

$$AB = \sqrt{\big(2-(-2)\big)^2+\big(2-(-2)\big)^2} = 4\sqrt{2}$$

A reta determina uma corda de tamanho $4\sqrt{2}$ em uma circunferência de raio 4, disso temos o triângulo ABC, onde C é o centro da circunferência:



Observe, na figura acima, que $sen\left(A\hat{C}D\right)=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow A\hat{C}D=45°\Rightarrow A\hat{C}B=90°$. A área procurada corresponde à área do setor circular subtraída da área do triângulo ABC:

$$\acute{A}rea\ do\ setor=\frac{90}{360}\cdot\pi\cdot 4^2=4\pi$$

$$\acute{A}rea\ do\ tri\hat{a}ngulo\ ABC=\frac{4\cdot 4}{2}=8$$

Ou seja:

$$4\pi-8$$

Gabarito: "a".

---

19. (EEAR/2003)

O maior valor inteiro de k para que a equação $x^2+y^2+4x-6y+k=0$ represente uma circunferência é

a) 14

b) 13

c) 12

d) 10

Comentários

O primeiro passo é completar os quadrados:

$$x^2 + 2 \cdot 2x + 4 - 4 + y^2 - 2 \cdot 3y + 9 - 9 + k = 0$$

Ou seja:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13 - k$$

Para que essa equação possa representar a equação de uma circunferência, temos que $13 - k = r^2 > 0 \Rightarrow k < 13$.

Assim, o maior valor inteiro para k é $k = 12$.

Gabarito: "c".

---

20. (EEAR/2003)

Sendo $C(3, -2)$ o centro de uma circunferência de raio igual a 4, então sua equação normal ou geral é

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 3 = 0$

Comentários

A partir dos dados fornecidos, temos que sua equação reduzida é:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$$

Desenvolvendo as potências:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

Gabarito: "b".

---

21. (EEAR/2002)

Dadas a reta de equação $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x = 0$. A área do triângulo determinado pelo centro da circunferência e os pontos de intersecção entre a reta e ela, em unidades de área, é igual a

a) $\sqrt{3}$

b) 3

c) $3\sqrt{3}$

d) 6

Comentários

O primeiro passo é encontrar os pontos de intersecção. Para isso, da equação da reta, temos:

$$y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 x^2 = \frac{x^2}{3}$$

Assim:

$$x^2 + \frac{x^2}{3} - 4x = 0 \Rightarrow \frac{4x^2}{3} - 4x = 0 \Rightarrow 4x\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 0$$

Ou seja:

$$x = 0 \; ou \; x = 3$$

Do que segue que:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0 = 0 \; ou \; y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = \sqrt{3}$$

Os pontos são: $(0,0) \; ou \; (3, \sqrt{3})$.

Para encontrarmos o centro devemos completar os quadrados:

$$x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$

O centro é, portanto, $(2,0)$. Do estudo da geometria analítica, temos que a área de um triângulo dados seus vértices, é:

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|-2\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$$

Gabarito: “a”.

---

22. (EEAR/2002)

No plano cartesiano, os pontos $A(1, 0)$ e $B(0, 2)$ são de uma mesma circunferência. Se o centro dessa circunferência é ponto da reta $y = 3 - x$, então suas coordenadas são

a) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $(1, 2)$

c) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

d) $(0, 3)$

Comentários

Seja $C(x, y)$ o centro dessa circunferência. Como ele pertence à reta, temos:

$$y = 3 - x$$

Logo:

$$C(x, 3 - x)$$

Se $A\ e\ B$ são pontos dessa circunferência, temos que:

$$AC = BC$$

Isto é:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (3-x-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (3-x-2)^2}$$

$$(x-1)^2 + (3-x)^2 = x^2 + (1-x)^2 \Rightarrow 9 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Assim, suas coordenadas são:

$$C\left(\frac{3}{2}, 3 - \frac{3}{2}\right) = C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Gabarito: "c".

---

23. (EEAR/2002)

A distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ à bissetriz do $II^{º}\ e\ IV^{º}$ quadrantes, vale

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{3}/2$

c) $\sqrt{7}/2$

d) $7\sqrt{2}/2$

Comentários

A bissetriz do IIº e IVº quadrantes é a reta:

$$y = -x \Rightarrow y + x = 0$$

Para encontrar o centro da circunferência devemos completar os quadrados na equação geral:

$$x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 + y^2 - 2 \cdot 4y + 16 - 16 + 21 = 0$$

Ou seja:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$$

O seu centro é o ponto $(3,4)$. Do que segue que:

$$d = \left|\frac{3+4}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Gabarito: "d".

---

24. (EEAR/2002)

Seja uma circunferência com centro sobre a reta $y = 3x$. Se a circunferência é tangente à reta $y = x$ na ordenada 4, então as coordenadas do centro da circunferência são

a) $(\mathbf{4}, \mathbf{12})$

b) $(\mathbf{2}, \mathbf{6})$

c) $(\mathbf{3}, \mathbf{9})$

d) $(\mathbf{5}, \mathbf{15})$

Comentários

Se ela é tangente à reta $y = x$ na ordenada 4, a abscissa do ponto de tangência é:

$$x = 4$$

Assim:

$$P(4,4)$$

É o ponto de tangência.

A reta perpendicular à reta $y = x$ no ponto P encontra a reta $y = 3x$ no centro da circunferência, pela tangência.

Como o coeficiente angular de $y = x$ é 1, o coeficiente angular da perpendicular é -1 e ela é do tipo:

$$y = -x + b$$

Como ela passa por P:

$$4 = -4 + b \Rightarrow b = 8$$

E a reta é:

$$y = -x + 8$$

Fazendo a intersecção com a reta $y = 3x$:

$$3x = -x + 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 6$$

Por fim, a coordenada do centro é:

$$(2,6)$$

Gabarito: "b".

---

25. (EEAR/2001)

Considere as circunferências que passam pelos pontos $(0,0)$ e $(2,0)$ e que são tangentes à reta $y = x + 2$ as coordenadas dos centros dessas circunferências são

a) $(1,1)\ e\ (1,-7)$

b) $(1,1)\ e\ (-7,1)$

c) $(1,-7)\ e\ (1,7)$

d) $(1,-7)\ e\ (-1,7)$

Comentários

Seja $C(a,b)$ o centro dessa circunferência. Sua equação reduzida é:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Como os pontos $(0,0)\ e\ (2,0)$ pertencem a essa circunferência, temos:

$$a^2 + b^2 = r^2$$

$$(2-a)^2 + b^2 = r^2$$

Subtraindo membro a membro, temos:

$$a^2 - (2-a)^2 = 0 \Rightarrow 2(2a-2) = 0 \Rightarrow a = 1$$

Disso, temos que:

$$1 + b^2 = r^2$$

Como ela é tangente à reta $y = x + 2$, a seguinte equação:

$$(x-1)^2 + (x+2-b)^2 = 1 + b^2$$

Possui discriminante nulo, já que há somente um ponto de intersecção. Logo:

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + 4 + b^2 + 2(2x - bx - 2b) = 1 + b^2$$

O ainda:

$$2x^2 + 2(1-b)x + 4(1-b) = 0$$

$$\Delta = 4(1-b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4(1-b) = 0 \Rightarrow 4(1-b)(1-b-8) = 0$$

Disso, temos que:

$$b = 1 \; ou \; b = -7$$

As circunferências possuem centros:

$$(1,1) \; e \; (1,-7)$$

Gabarito: "a".

---

26. (EEAR/2001)

No sistema de coordenadas cartesianas, a equação $x^2 + y^2 = ax + by$, onde a e b são números reais não nulos, representa uma circunferência de raio

a) $\sqrt{a^2 + b^2}/2$

b) $\sqrt{a^2 + b^2}$

c) $(a + b)/2$

d) $a + b$

Comentários

O primeiro passo é completar o quadrado:

$$x^2 + 2\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + y^2 + 2\frac{b}{2}y + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

Disso, temos:

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Gabarito: "a".

---

27. (EEAR/2001)

A circunferência $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ e a reta $x - 3y - 2 = 0$ possuem ___ ponto(s) em comum

a) 2

b) 1

c) Infinitos

d) Nenhum

Comentários

Seu centro é $(-2,1)$ e seu raio é $r = 1$. A distância do centro à reta:

$$d = \left|\frac{-2 - 3 \cdot 1 - 2}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\frac{-7}{\sqrt{10}}\right| = \frac{7}{\sqrt{10}}$$

Veja que $\frac{7}{\sqrt{10}} > 1$, ou seja, a reta é externa à circunferência, de modo que não há ponto de intersecção.

Gabarito: “d”.

---

28. (EEAR/2000)

A posição dos pontos $P(3, 2)$ e $Q(1, 1)$ em relação à circunferência $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ é:

a) P é interior e Q exterior

b) P é exterior e Q é interior

c) P e Q são interiores

d) P e Q são exteriores

Comentários

O centro dessa circunferência é o ponto $O(1,1)$ e seu raio $\sqrt{4} = 2$.

A distância dos pontos dados ao centro:

$$OP = \sqrt{(1-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$OQ = \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2} = 0$$

Como $\sqrt{5} > 2$, P é exterior à circunferência. $Q = O$, logo, é interior à circunferência.

Gabarito: “b”.

---

29. (ESA/2016)

A equação da circunferência de centro $(1, 2)$ e raio 3 é:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 14 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 14 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 14 = 0$

Comentário

A sua equação reduzida é:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=9$$

Desenvolvendo os quadrados:

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4=9 \Rightarrow x^2+y^2-2x-4y-4=0$$

Gabarito: "b".

---

30. (ESA/2014)

Em um sistema de coordenadas cartesianas no plano, considere os pontos $O(0,0)$ e $A(8,0)$. A equação do conjunto dos pontos $P(x,y)$ desse plano sabendo que a distância de O a P é o triplo da distância de P a A, é uma

a) Circunferência de centro $(9,0)$ e raio 3

b) Elipse de focos $(6,0)$ e $(12,0)$, e eixo menor 6

c) Hipérbole de focos $(3,0)$ e $(15,0)$, e eixo real 6

d) Parábola de vértice $(9,3)$, que intercepta o eixo das abscissas nos pontos $(6,0)$ e $(12,0)$

e) Reta que passa pelos pontos $(6,0)$ e $(9,3)$

Comentário

Temos que:

$$OP=3AP \Rightarrow OP^2=9AP^2$$

Logo:

$$(x-0)^2+(y-0)^2=9[(x-8)^2+(y-0)^2] \Rightarrow x^2+y^2=9x^2-9\cdot 16x+9\cdot 64+9y^2$$

Ou seja:

$$8x^2+8y^2-9\cdot 16x+9\cdot 64=0 \Rightarrow x^2+y^2-18x+72=0$$

Completando o quadrado de x:

$$(x-9)^2+y^2=9$$

Que corresponde a uma circunferência de centro (9,0) e raio $\sqrt{9}=3$.

Gabarito: "a".

---

31. (ESA/2013)

Dada a equação da circunferência é: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, sendo as coordenadas do centro e r a medida do raio, identifique a equação geral da circunferência de centro $(2,3)$ e raio igual a 5

a) $x^2+y^2=25$

b) $x^2 + y^2 - 4xy - 12 = 0$

c) $x^2 - 4x = -16$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

e) $y^2 - 6y = -9$

Comentário

A equação reduzida pode ser expressa por:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Desenvolvendo os quadrados:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

Gabarito: "d".

---

32. (ESA/2011)

A reta $y = mx + 2$ é tangente à circunferência de equação $(x-4)^2 + y^2 = 4$. A soma dos possíveis valores de m é:

a) 0

b) 4/3

c) -4/3

d) -3/4

e) 2

Comentário

O centro dessa equação é o ponto $(4,0)$ e o seu raio é $\sqrt{4} = 2$. Para que a reta seja tangente à circunferência, a distância entre ela e o centro da circunferência deve ser igual ao raio:

$$2 = \left|\frac{m \cdot 4 - 0 + 2}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}\right| \Rightarrow 4(m^2+1) = (4m+2)^2 \Rightarrow 4m^2 + 4 = 16m^2 + 16m + 4$$

Ou seja:

$$12m^2 + 16m = 0 \Rightarrow 4m(3m+4) = 0 \Rightarrow m = 0 \; ou \; m = -\frac{4}{3}$$

A soma dos valores é:

$$0 + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

Gabarito: “c”.

---

33. (ESA/2008)

As equações $(x+1)^2+(y-4)^2=64$ e $(x-4)^2+(y+8)^2=25$ representam duas circunferências cuja posição relativa no plano permite afirmar que são

a) Interiores (sem ponto de intersecção)

b) Tangentes interiores

c) Secantes

d) Tangentes exteriores

e) Exteriores (sem ponto de intersecção)

Comentário

Os seus centros são os pontos $(-1,4)$ e $(4,-8)$. A distância entre eles é dada por:

$$\sqrt{(-1-4)^2+(4-(-8))^2}=\sqrt{25+144}=13$$

Os seus raios são $\sqrt{64}=8$ e $\sqrt{25}=5$. Como a distância entre os centros é igual à soma dos raios:

$$8+5=13$$

Elas são tangentes externas.

Gabarito: “d”.

---

34. (ESPCEX/2011)

Uma circunferência tem centro no eixo das abscissas, passa pelo ponto $(4,4)$ e não intercepta o eixo das ordenadas. Se a área do círculo definido por essa circunferência é 17π, a abscissa de seu centro é

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

Comentário

A área de uma circunferência, em função de seu raio, é dada por:

$$\pi r^2=17\pi \Rightarrow r^2=17$$

Como seu centro está sobre o eixo das abscissas, suas coordenadas são do tipo:

$$C(a, 0)$$

A sua equação reduzida é dada por:

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2 = 17$$

Como ela passa por $(4,4)$:

$$(4-a)^2 + 4^2 = 17 \Rightarrow (a-4)^2 = 1 \Rightarrow a = 5 \; ou \; a = 3$$

Como seu raio é $\sqrt{17}$, para que ele não intercepte o eixo das abscissas, a distância do centro ao eixo y maior que o raio:

$$a > \sqrt{17}$$

Logo, $a = 5$.

Gabarito: "c".

---

35. (ESPCEX/2016)

Seja C a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$. Considere em C a corda MN cujo ponto médio é $P(-1, -1)$. O comprimento de MN (em unidade de comprimento) é igual a

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{3}$

e) 2

Comentário

O primeiro passo é identificar o centro e o raio da circunferência. Para isso, vamos completar os quadrados:

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 2 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 3$$

Seu centro é $O(-1, -2)$ e seu raio é $\sqrt{3}$.

Como MN é corda da circunferência, temos o triângulo OMN e o triângulo retângulo OPM, retângulo em P, pois OMN é isósceles. Como M está sobre a circunferência, temos que:

$$OM = \sqrt{3}$$

Veja que:

$$OP = \sqrt{(-1-(-1))^2 + (-2-(-1))^2} = 1$$

Por Pitágoras:

$$PM^2 + OP^2 = OM^2 \Rightarrow PM^2 + 1 = 3 \Rightarrow PM = \sqrt{2}$$

Como $PM = PN$, temos:

$$MN = PM + PN = 2\sqrt{2}$$

Gabarito: “c”.

---

36. (ESPCEX/2015)

Considere a circunferência que passa pelos pontos $(0,0)$, $(0,6)$ e $(4,0)$ em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Sabendo que os pontos $(0,6)$ e $(4,0)$ pertencem a uma reta que passa pelo centro dessa circunferência, uma das retas tangentes a essa circunferência, que passa pelo ponto $(3,-2)$, tem por equação

a) $3x - 2y - 13 = 0$

b) $2x - 3y - 12 = 0$

c) $2x - y - 8 = 0$

d) $x - 5y - 13 = 0$

e) $8x + 3y - 18 = 0$

Comentários

Observe que esse triângulo é retângulo em $(0,0)$ com catetos 6 e 4. O centro dessa circunferência é o ponto médio da hipotenusa, isto é:

$$C = \frac{(0,6) + (4,0)}{2} = (2,3)$$

Seu raio é a metade da hipotenusa, isto é:

$$r = \frac{\sqrt{4^2 + 6^2}}{2} = \sqrt{13}$$

Seja $y = mx + b$ essa reta tangente, podemos dizer que a distância entre C e essa reta é igual ao raio, isto é:

$$\sqrt{13} = \left|\frac{2m - 3 + b}{\sqrt{m^2 + 1}}\right|$$

Como $(3,-2)$ pertence à reta:

$$-2 = 3m + b \Rightarrow b = -2 - 3m$$

Logo:

$$\sqrt{13} = \left|\frac{2m - 3 - 2 - 3m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| \Rightarrow 13 = \frac{(m+5)^2}{m^2 + 1} \Rightarrow 13m^2 + 13 = m^2 + 10m + 25$$

Ou seja:

$$6m^2 - 5m - 6 = 0$$

Resolvendo para m:

$$m = \frac{3}{2} \; ou \; m = -\frac{2}{3}$$

Do que segue que:

$$m = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{13}{2}$$

$$m = -\frac{2}{3} \Rightarrow b = -2 - 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

As retas são:

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2} \Rightarrow 3x - 2y - 13 = 0 \; ou \; y = -\frac{2}{3}x$$

Gabarito: "a".

---

37. (ESPCEX/2013)

Sejam dados a circunferência $\lambda: x^2 + y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$ e o ponto P, que é simétrico de $(-1, 1)$ em relação ao eixo das abscissas. Determine a equação da circunferência concêntrica a λ e que passa pelo ponto P

a) $\lambda: x^2 + y^2 + 4x + 10y + 16 = 0$

b) $\lambda: x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0$

c) $\lambda: x^2 - y^2 + 4x - 5y + 16 = 0$

d) $\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 5y + 12 = 0$

e) $\lambda: x^2 - y^2 - 4x - 10y - 17 = 0$

Comentários

O primeiro passo é completar os quadrados da equação da circunferência:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 + 10y + 25 = 0$$

Ou seja:

$$(x+2)^2+(y+5)^2=4$$

Seu centro é, portanto, $(-2,-5)$.

Como P é simétrico de $(-1,1)$ em relação ao eixo das abcissas, temos que ele é dado por:

$$P(-1,-1)$$

A equação reduzida da circunferência procurada é dada por:

$$(x+2)^2+(y+5)^2=r^2$$

Como ela passa por P:

$$(-1+2)^2+(-1+5)^2=r^2 \Rightarrow r^2=1+16=17$$

Logo:

$$(x+2)^2+(y+5)^2=17$$

Desenvolvendo os quadrados:

$$x^2+4x+4+y^2+10y+25=17 \Rightarrow x^2+y^2+4x+10y+12=0$$

Gabarito: “b”.

---

38. (ESPCEX/2012)

Considere a circunferência $(\lambda) x^2+y^2-4x=0$ e o ponto $P(1,\sqrt{3})$. Se a reta t é tangente a λ no ponto P, então a abscissa do ponto de intersecção de t com o eixo horizontal do sistema de coordenadas cartesianas é

a) -2

b) $2+\sqrt{3}$

c) 3

d) $3+\sqrt{3}$

e) $3+3\sqrt{3}$

Comentários

Se t é tangente à circunferência e sua equação reduzida é da forma $mx-y+b=0$, temos que a distância entre t e o centro de λ é igual ao raio da circunferência.

Completando os quadrados na equação da circunferência, temos:

$$(x-2)^2+y^2=2^2$$

Seu centro é $(2,0)$ e seu raio vale 2. Disso:

$$2 = \left|\frac{2m + b}{\sqrt{m^2 + 1}}\right|$$

Como P está sobre a reta, temos:

$$m - \sqrt{3} + b = 0 \Rightarrow b = \sqrt{3} - m$$

Logo:

$$2^2 = \frac{\left(2m + \sqrt{3} - m\right)^2}{m^2 + 1} \Rightarrow 4(m^2 + 1) = m^2 + 2\sqrt{3}m + 3$$

Ou ainda:

$$3m^2 - 2\sqrt{3}m + 1 = 0 \Rightarrow 3\left(m - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0$$

Resolvendo para m, vem:

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Do que temos que:

$$b = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Assim, a reta t é dada por:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

O eixo horizontal é a reta $y = 0$, logo:

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -2$$

O ponto é, portanto:

$$(-2,0)$$

Gabarito: "a".

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da Geometria Analítica. Esse assunto possui alta taxa de incidência nas provas, é muito provável que caia uma questão dela no seu concurso. Resolva muitos exercícios e tente entender o método usado nas resoluções.

Sempre que você tiver dúvidas, não hesite em nos procurar. Estamos sempre prontos para atendê-lo.

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 7: geometria analítica. 6. ed. Atual, 2013. 312p.

[2] Steinbruch, Alfredo. Winterle, Paulo. Geometria analítica. 2 ed. Pearson Makron Books, 1987. 292p.

6. VERSÕES DAS AULAS

Caro aluno! Para garantir que o curso esteja atualizado, sempre que alguma mudança no conteúdo for necessária, uma nova versão da aula será disponibilizada.