Capítulo 10
Geometria Plana

Para pensar

1. A medida α do ângulo determinado pela vareta e pelo raio de Sol é:

$\frac{1}{50} \cdot 360° = 7{,}2°$

2. Os ângulos $A\hat{D}B$ e $D\hat{C}S$ tinham a mesma medida porque eram alternos internos.

3. Como 1 estádio equivale a 185 metros, temos:

1 estádio ——— 185 metros
250.000 estádios ——— x metros

$x = 250.000 \cdot 185 = 46.250.000$

Portanto, o comprimento da circunferência da Terra obtido por Eratóstenes foi 46.250.000 metros ou 46.250 quilômetros.

Exercícios propostos

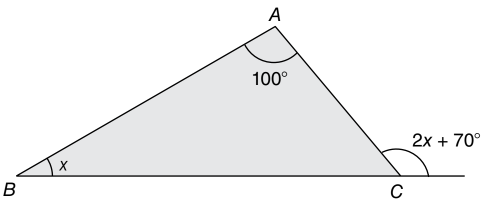
1. **a)** $2x - 10° + x + 20° + x + 10° = 180° \Rightarrow x = 40°$

Logo, $m(B\hat{A}C) = 40° + 20° = 60°$

b) Cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°; logo, $m(B\hat{A}C) = 60°$. Como o ângulo $A\hat{B}D$ é reto, concluímos que a medida x do ângulo $C\hat{D}B$ é dada por:

$x + 90° + 60° = 180° \Rightarrow x = 30°$

2.



$2x + 70° = x + 100° \Rightarrow x = 30°$

Logo, o ângulo externo relativo ao vértice C mede:

$2 \cdot 30° + 70° = 130°$

3. **a)** Quadrilátero: $2 \cdot 180° = 360°$;

pentágono: $3 \cdot 180° = 540°$;

hexágono: $4 \cdot 180° = 720°$

b) Espera-se que os alunos percebam que um polígono de n vértices pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos. Como a soma dos ângulos internos em cada um é 180°, concluímos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados (ou n vértices) é: $180 \cdot (n - 2)$

4. No quadrilátero *EFDA*, temos:

$x + 70° + 90° + 90° = 360° \Rightarrow x = 110°$

O ângulo *EFD* é congruente ao seu ângulo adjacente interno ao quadrilátero tracejado; logo:

$70° + 70° + y = 180° \Rightarrow y = 40°$

5 **(I)** $\cong$ (III), pelo caso LLL
(II) $\cong$ (VIII), pelo caso RHC
(IV) $\cong$ (VI), pelo caso LAA_o
(V) $\cong$ (VII), pelo caso LAL

6. **a)** Temos:

I. $C\hat{D}B \cong E\hat{D}F$, pois são ângulos opostos pelo vértice;
II. $\overline{BD} \cong \overline{DF}$, por hipótese;
III. $C\hat{B}D \cong E\hat{F}D$, pois no quadrilátero *ABDF*, temos que $60° + 80° + 140° + m(D\hat{F}A) = 360° \Rightarrow$ $\Rightarrow m(D\hat{F}A) = 80°$; logo, cada um dos ângulos $C\hat{B}D$ e $E\hat{F}D$ mede 100°.

As condições I, II e III caracterizam o caso ALA de congruência de triângulos; portanto, $\Delta BCD \cong \Delta FED$.

b) Como $\Delta BCD \cong \Delta FED$, temos que lados opostos a ângulos congruentes são congruentes; logo:

$5x + 10 = 3x + 26 \Rightarrow x = 8$

$\therefore 3x + 26 = 24 + 26 = 50$

Logo, $\overline{DE}$ mede 50 cm.

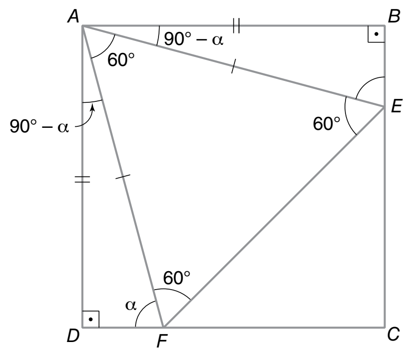
7. Temos:

I. $A\hat{B}E$ e $A\hat{D}F$ são ângulo retos;
II. $\overline{AF} \cong \overline{AE}$, pois o triângulo *AEF* é equilátero;
III. $\overline{AD} \cong \overline{AB}$, pois o quadrilátero *ABCD* é quadrado.

As condições I, II e III caracterizam o caso *RHC* de congruência de triângulos; logo: $\triangle ABE \cong \triangle ADF$

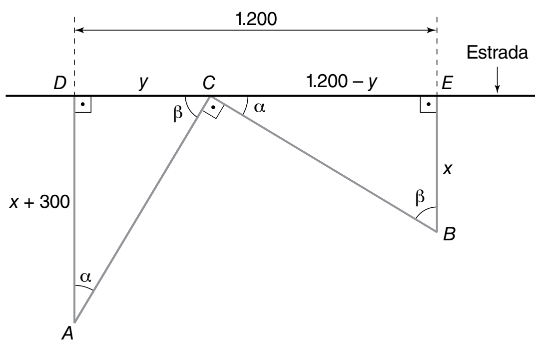
Uma consequência dessa congruência é que $m(A\hat{F}D) = m(A\hat{E}B) = \alpha$. Assim, temos:

$90° - \alpha + 60° + 90° - \alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 75°$



Alternativa **e**.

8. Indicando por x e y as medidas, em metro, dos segmentos $\overline{EB}$ e $\overline{DC}$, e por α e β as medidas dos ângulos internos dos triângulos *ACD* e *CBE*, esquematizamos:

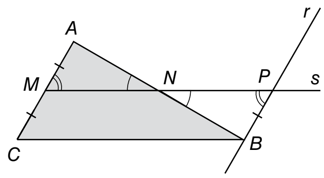


Pelo caso ALA, constatamos que os triângulos *ADC* e *CEB* são congruentes; logo:

$$\begin{cases} y = x \\ x + 300 = 1.200 - y \end{cases} \Rightarrow x = 450 \text{ e } y = 450$$

Concluímos, então, que $AD = 750$ m e $BE = 450$ m.

9. **a)** Em um triângulo ABC, consideremos a reta s, que passa pelo ponto médio M do lado $\overline{AC}$ e intercepta o lado $\overline{AB}$ no ponto N; e a reta r, que passa pelo vértice B, é paralela ao lado $\overline{AC}$ e intercepta s em P, conforme mostra a figura.



Temos:

I. $\overline{AM} \cong \overline{CM} \cong \overline{BP}$, pois M é ponto médio do lado $\overline{AC}$, e $BCMP$ é um paralelogramo;

II. $A\widehat{M}N \cong B\widehat{P}N$, pois são ângulos alternos internos formados por duas paralelas e uma transversal;

III. $A\widehat{N}M \cong B\widehat{N}P$, pois são ângulos opostos pelo vértice.

As condições I, II e III caracterizam o caso LAA_o de congruência de triângulos; logo, $\triangle ANM \cong \triangle BNP$. Dessa congruência, temos que $\overline{AN} \cong \overline{BN}$, ou seja, N é ponto médio do lado $\overline{AB}$.

b) Temos que:

I) o quadrilátero $BCMP$ é um paralelogramo; logo, $CB = MP$;

II) N é ponto médio de $\overline{MP}$, o que se conclui da congruência dos triângulos AMN e BPN; logo, $MN = \dfrac{MP}{2}$.

Por (I) e (II), concluímos que: $MN = \dfrac{CB}{2}$

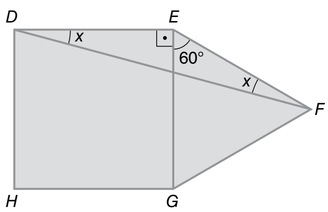
10. Como $AB = AC$, temos que $m(A\widehat{C}B) = m(A\widehat{B}C) = x$; logo: $3x + 20° + x = 180° \Rightarrow x = 40°$

Sendo y a medida do ângulo $B\widehat{A}C$, concluímos que:

$40° + 40° + y = 180° \Rightarrow y = 100°$

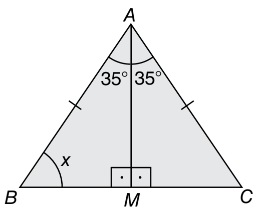
Ou seja, $m(B\widehat{A}C) = 100°$.

11. Indicando por x a medida do ângulo $E\widehat{F}D$, a medida do ângulo $E\widehat{D}F$ também é x, pois o triângulo DEF é isósceles de base $\overline{DF}$. Cada ângulo interno do quadrado é reto e cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°. Assim, temos:



$x + x + 150° = 180° \Rightarrow x = 15°$

12.



A mediana $\overline{AM}$ coincide com a bissetriz interna relativa ao vértice A e coincide com a altura relativa a esse vértice; logo:

$m(B\widehat{A}M) = 35°$ e $m(A\widehat{M}B) = 90°$

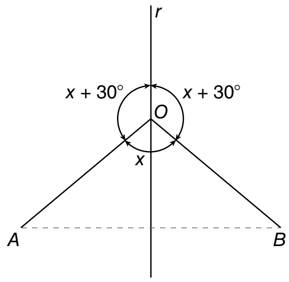
Assim, temos: $x + 90° + 35° = 180° \Rightarrow x = 55°$

13. O triângulo ABC é isósceles, pois:

$m(B\widehat{C}A) = m(C\widehat{B}A) = 45°$

Logo: $AB = AC = 1.260$ m

14.



$x + x + 30° + x + 30° = 360° \Rightarrow x = 100°$

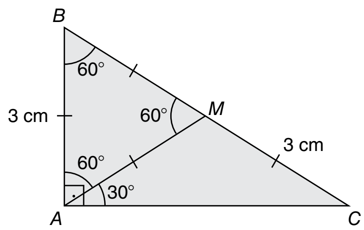
No triângulo isósceles OAB, temos:

$$\begin{cases} m(O\widehat{B}A) = m(O\widehat{A}B) \\ 100° + m(O\widehat{A}B) + m(O\widehat{B}A) = 180° \end{cases}$$

Logo: $m(O\widehat{B}A) = 40°$

Alternativa **a**.

15.



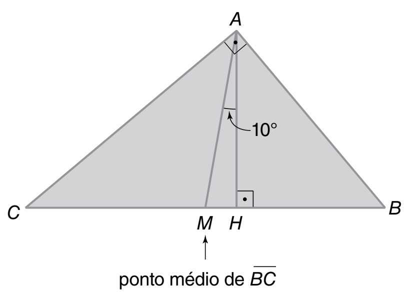
- $30° + m(M\widehat{A}B) = 90° \Rightarrow m(M\widehat{A}B) = 60°$ (I)
- $AM = BM = CM \Rightarrow \Delta ABM$ é isósceles de base $\overline{AB}$ e, portanto, $m(M\widehat{B}A) = m(M\widehat{A}B)$; logo, por (I): $m(M\widehat{B}A) = 60°$ (II)
- Do triângulo ABM, temos: $m(M\widehat{A}B) + m(M\widehat{B}A) + m(A\widehat{M}B) = 180°$ e, por (I) e (II): $m(A\widehat{M}B) = 60°$ (III)
- Por (I), (II) e (III) concluímos que o triângulo ABM é equilátero.
  Como $AB = 3$ cm, o perímetro do triângulo equilátero ABM é 9 cm.

16. Como M é ponto médio da hipotenusa, temos:

$\dfrac{2 + x}{3} = \dfrac{x}{2} - 5 \Rightarrow x = 34$

Logo: $AM = MC = \dfrac{34}{2} - 5 \Rightarrow AM = 12$

17.



No triângulo AHM, temos que $10° + 90° + m(A\widehat{M}H) = 180° \Rightarrow m(A\widehat{M}H) = 80°$.

Indicando por x a medida, em grau, do ângulo $A\hat{B}M$, temos que a medida do ângulo $B\hat{A}M$ também é x, pois o triângulo AMB é isósceles de base $\overline{AB}$. Isso se justifica pelo fato de a mediana $\overline{AM}$ medir metade da hipotenusa $\overline{BC}$; portanto, $\overline{AM} \cong \overline{BM}$. Assim, temos:

$m(A\hat{B}M) + m(B\hat{A}M) + m(A\hat{M}H) = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow x + x + 80° = 180°$

$\therefore x = 50°$

Concluímos, então, que:

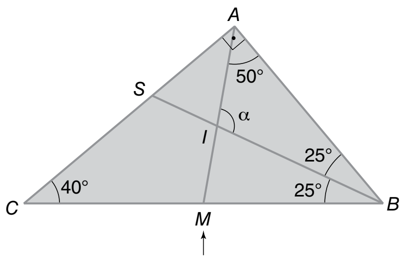
$m(A\hat{B}H) = 50°$

$m(H\hat{A}B) = 50° - 10° = 40°$

$m(A\hat{H}B) = 90°$

18. • Sejam: $\overline{AM}$ a mediana relativa à hipotenusa, $\overline{BS}$ a bissetriz interna relativa ao vértice B, I o ponto comum a $\overline{AM}$ e $\overline{BS}$ e α a medida, em grau, do ângulo $A\hat{I}B$.

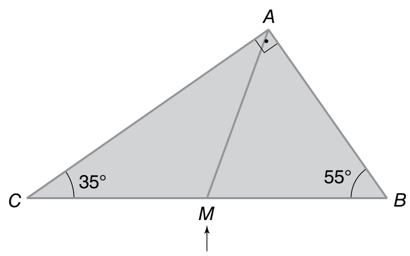
• Pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, obtemos a medida 50° para o ângulo $A\hat{B}C$. Esse ângulo é congruente a $B\hat{A}M$, pois o triângulo ABM é isósceles de base $\overline{AB}$. Isso se justifica pelo fato de a mediana $\overline{AM}$ medir metade da hipotenusa $\overline{BC}$; portanto, $\overline{AM} \cong \overline{BM}$.



ponto médio de $\overline{BC}$

Assim, temos que: $\alpha + 25° + 50° = 180° \Rightarrow \alpha = 105°$, de onde concluímos que um ângulo agudo formado pela mediana relativa à hipotenusa e pela bissetriz interna relativa ao vértice B mede $180° - 105°$, ou seja, 75°.

19. Como os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ medem 55° e 35°, respectivamente, temos que o ângulo $B\hat{A}C$ é reto. Assim, o segmento $\overline{AM}$ é a mediana relativa à hipotenusa $\overline{BC}$ do triângulo retângulo ABC.



ponto médio de $\overline{BC}$

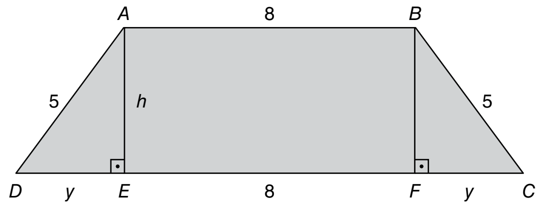
A mediana $\overline{AM}$ mede metade da hipotenusa $\overline{BC}$; logo, $AM + MC = BC$, de onde concluímos que: $AM + MC + 8 = BC + 8$. Assim, a distância percorrida pelo fazendeiro em todo o trajeto citado é 8 quilômetros maior que o comprimento do trecho $\overline{BC}$. Alternativa **a**.

20. a) Sendo x a medida de cada um dos lados não paralelos, temos:

$2x + 8 + 14 = 32 \Rightarrow x = 5$

Logo, cada um dos lados não paralelos mede 5 cm.

b) Sendo $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ alturas do trapézio, temos:

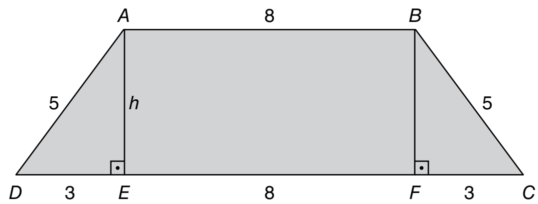


$\triangle ADE \cong \triangle BFC$, pelo caso RHC. Logo, $\overline{DE} \cong \overline{CF}$. Indicando por y as medidas das projeções $\overline{DE}$ e $\overline{CF}$, temos:

$2y + 8 = 14 \Rightarrow y = 3$

Logo, cada projeção mede 3 cm.

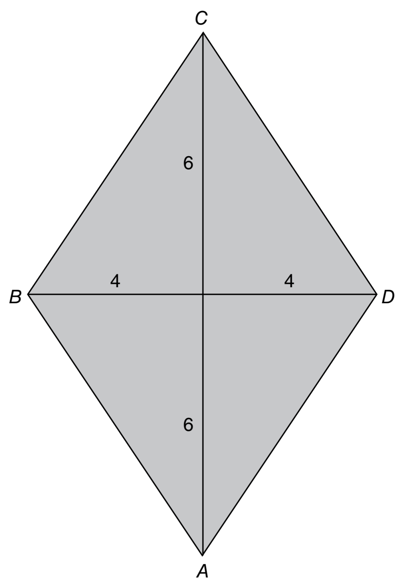
c) Sendo h a medida da altura do trapézio, temos:



$h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$

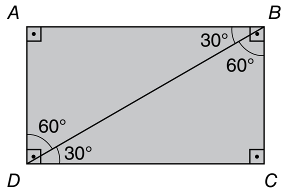
Logo, a altura mede 4 cm.

21. a) F, pois, por exemplo, no paralelogramo a seguir, as diagonais não são congruentes.

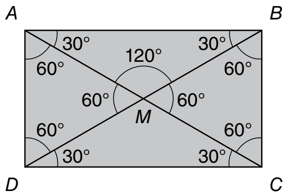


b) V, conforme a propriedade P2 dos quadriláteros notáveis.

c) F, pois, por exemplo, no paralelogramo a seguir a diagonal $\overline{BD}$ não está contida na bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$.

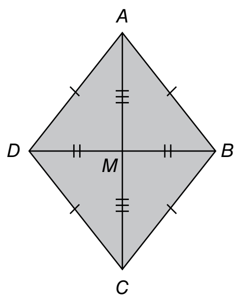


d) F, pois, por exemplo, no retângulo a seguir, os triângulos *ABM* e *BCM* não são congruentes.



e) V, pois, sendo *M* o ponto de intersecção das diagonais de um losango *ABCD*, temos que *M* é ponto médio de cada uma dessas diagonais. Assim, pelo caso LLL de congruência de triângulos, temos:

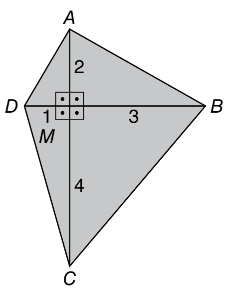
$$\triangle AMB \cong \triangle AMD \cong \triangle CMB \cong \triangle CMD$$



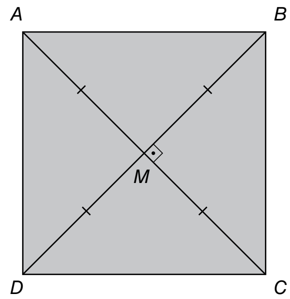
f) V, pois, da congruência entre os quatro triângulos *AMB*, *AMD*, *CMB* e *CMD* do losango do item anterior, os ângulos $A\widehat{M}B$, $A\widehat{M}D$, $C\widehat{M}B$ e $C\widehat{M}D$ são congruentes entre si. Sendo α a medida de cada um deles, temos:

$$4\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 90°$$

g) F, como se pode observar no quadrilátero *ABCD* abaixo.

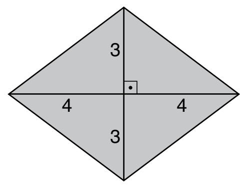


h) V, como mostra a justificativa a seguir: em qualquer retângulo *ABCD*, as diagonais são congruentes e o ponto *M* comum a elas é o ponto médio de cada uma. Se além disso elas forem perpendiculares, então pelo caso LAL os triângulos *AMB*, *BMC*, *CMD* e *DMA* serão congruentes entre si.

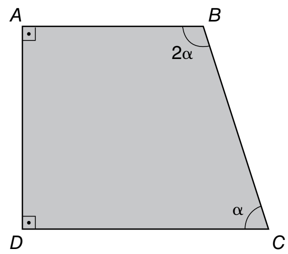


Logo, $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$.
Como o retângulo *ABCD* tem os quatro lados congruentes entre si, concluímos que *ABCD* é um quadrado.

i) F, pois, por exemplo, no losango a seguir as diagonais têm medidas diferentes.



22. Indicando por α a medida do menor ângulo interno do trapézio, temos:



Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360°, concluímos:

$90° + 90° + 2\alpha + \alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 60°$

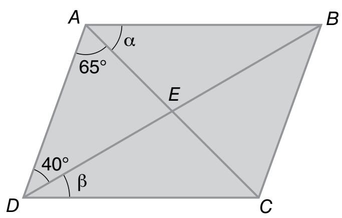
Logo, o menor ângulo interno do trapézio mede 60° e o maior mede 120°.

23. Indicando por *x* a medida *EA*, temos que a medida *EC* também é *x*, pois o ponto comum *E* às diagonais de um paralelogramo é ponto médio de cada uma delas. Analogamente, indicando por *y* a medida *EB*, temos que *ED* também mede *y*. Assim, concluímos:

$$EA + EB = 10 \text{ cm} \Rightarrow 2 \cdot EA + 2 \cdot EB = 20 \text{ cm}$$

Ou seja: $AC + BD = 20$ cm

b) Indicando por α e β as medidas, em grau, dos ângulos $B\widehat{A}C$ e $C\widehat{D}B$, respectivamente, esquematizamos:

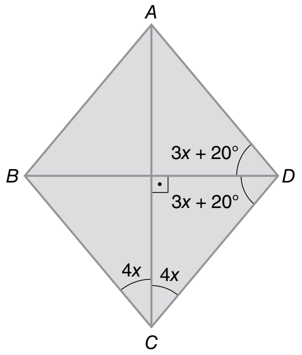


Como em todo paralelogramo dois ângulos consecutivos são suplementares, temos que:

$$65° + \alpha + 40° + \beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 75°$$

Ou seja: $m(B\widehat{A}C) + m(C\widehat{D}B) = 75°$

24. As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos do losango. Assim, esquematizamos:



$4x + 3x + 20° + 90° = 180° \Rightarrow x = 10°$

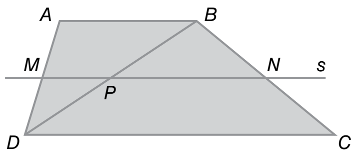
Como $B\widehat{A}D \cong B\widehat{C}D$, temos:

$m(B\widehat{A}D) = 8x = 8 \cdot 10° = 80°$

25. As diagonais de um retângulo são congruentes e o ponto comum a elas é o ponto médio de cada uma. Assim, $AN = BN = DN = 6$ cm.

O ponto P é o baricentro do triângulo ABD, pois $\overline{AN}$ e $\overline{DM}$ são medianas desse triângulo; logo, o ponto P divide a mediana $\overline{AM}$, a partir do vértice A, na razão 2 para 1. Como $AM = 6$ cm, concluímos que $PN = 2$ cm.

26. Em um trapézio $ABCD$, consideremos a diagonal $\overline{DB}$ e a reta s, paralela às bases $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$, que passa pelo ponto médio M do lado $\overline{AD}$ e intercepta $\overline{DB}$ e $\overline{BC}$ em P e N, respectivamente.



No triângulo ABD, temos que M é ponto médio do lado $\overline{AD}$ e $s \mathbin{//} \overline{AB}$; logo, pelo teorema da base média de um triângulo, P é ponto médio de $\overline{DB}$ e, portanto, $MP = \frac{AB}{2}$.

No triângulo CDB, como P é ponto médio do lado $\overline{DB}$ e $s \mathbin{//} \overline{DC}$, temos que N é ponto médio do lado $\overline{BC}$ e, portanto, $PN = \frac{BC}{2}$.

Assim, concluímos que a base média $\overline{MN}$ do trapézio $ABCD$ é paralela às bases do trapézio e

$MN = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2}$, ou seja, $MN = \frac{AB + DC}{2}$.

27. a) $\frac{9}{12} = \frac{x}{8} \Rightarrow 12x = 72$

$\therefore x = 6$

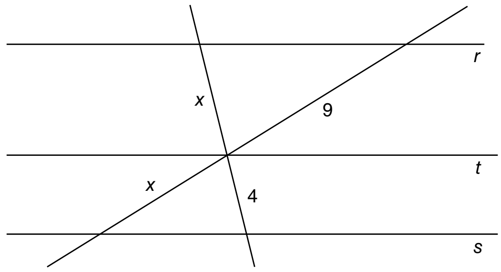
b) $\frac{12}{x} = \frac{8}{6} \Rightarrow 8x = 72$

$\therefore x = 9$

c) $\frac{x+2}{x+1} = \frac{10}{8} \Rightarrow 10x + 10 = 8x + 16$

$\therefore x = 3$

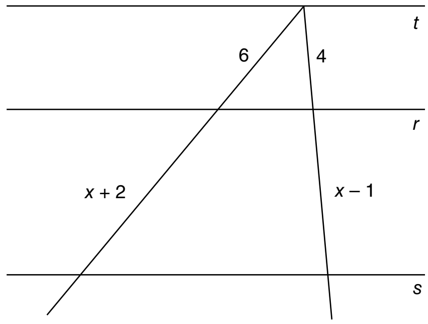
d)



$\frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 36$

$\therefore x = 6$ ou $x = -6$ (não convém)

e)



$\frac{6}{x+2} = \frac{4}{x-1} \Rightarrow 4x + 8 = 6x - 6$

$\therefore x = 7$

28. $\frac{AB}{AD} = \frac{EF}{EH} \Rightarrow \frac{AB}{24} = \frac{3}{18}$

$\therefore AB = 4$ cm

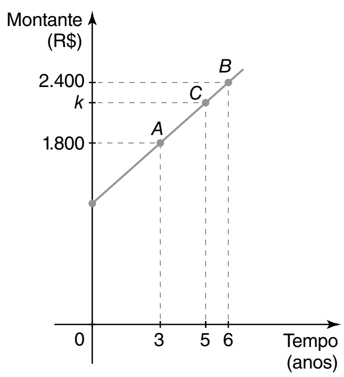
$\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG} \Rightarrow \frac{4}{BC} = \frac{3}{9}$

$\therefore BC = 12$ cm

$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} \Rightarrow \frac{4}{CD} = \frac{3}{6}$

$\therefore CD = 8$ cm

29. a) Sendo k o montante acumulado em 5 anos, esquematizamos:



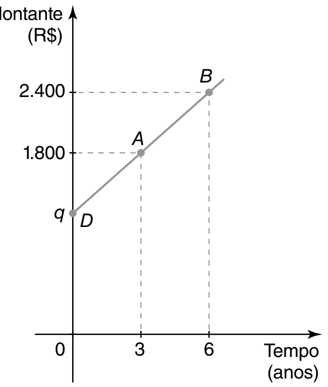
Aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\begin{cases} \frac{AB}{CB} = \frac{2.400 - 1.800}{2.400 - k} \\ \frac{AB}{CB} = \frac{6-3}{6-5} \end{cases} \Rightarrow \frac{600}{2.400 - k} = \frac{3}{1}$$

$\therefore k = 2.200$

Logo, o montante acumulado em 5 anos é R$ 2.200,00.

b) Sendo q o capital aplicado, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{DA} = \dfrac{2.400 - 1.800}{1.800 - q} \\ \dfrac{AB}{DA} = \dfrac{6 - 3}{3 - 0} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{600}{1.800 - q} = \dfrac{3}{3}$$

$\therefore q = 1.200$

Logo, o capital aplicado é R$ 1.200,00.

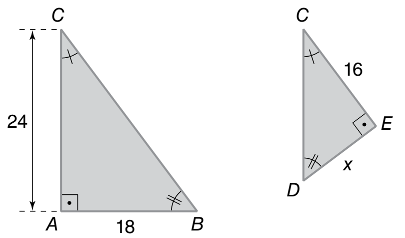
30. a) Da semelhança entre os triângulos ABC e AED, temos:

$$\frac{9}{6} = \frac{18}{w} = \frac{12}{x} \Rightarrow w = 12 \text{ e } x = 8$$

b) Da semelhança entre os triângulos MPN e RPQ, temos:

$$\frac{21}{14} = \frac{z}{8} = \frac{24}{y} \Rightarrow z = 12 \text{ e } y = 16$$

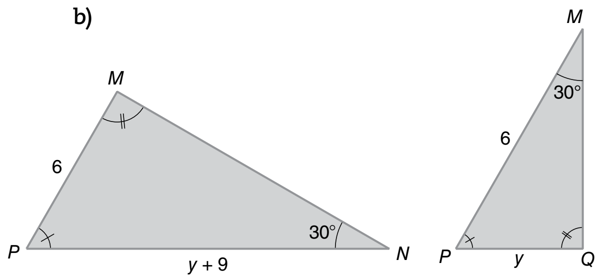
31. a)



Da semelhança entre os triângulos ABC e EDC, temos:

$$\frac{18}{x} = \frac{24}{16} \Rightarrow x = 12$$

b)



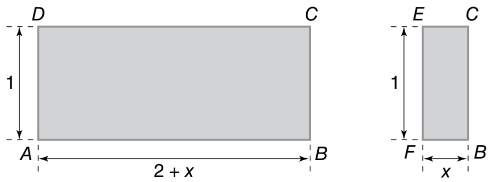
Da semelhança entre os triângulos PMN e PQM, temos:

$$\frac{y + 9}{6} = \frac{6}{y} \Rightarrow y^2 + 9y - 36 = 0$$

$\therefore y = 3$ ou $y = -12$

Como y representa um comprimento, convém apenas o valor não negativo, isto é, $y = 3$.

32.



Da semelhança entre os retângulos, temos:

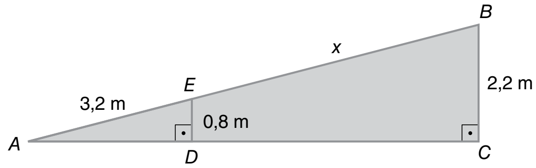
$$\frac{1}{x} = \frac{2 + x}{1} \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$\therefore x = -1 + \sqrt{2}$ ou $x = -1 - \sqrt{2}$

Como x representa um comprimento, convém apenas o valor não negativo, isto é, $x = -1 + \sqrt{2}$.

Alternativa **a**.

33. Indicando por x a distância, em metro, que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto, esquematizamos:

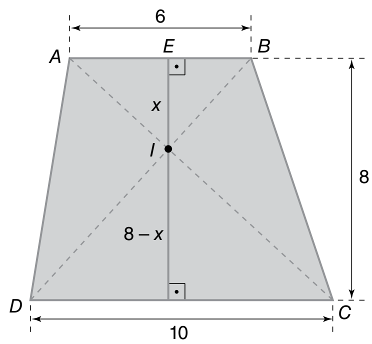


Da semelhança entre os triângulos ABC e AED, concluímos:

$$\frac{2,2}{0,8} = \frac{3,2 + x}{3,2} \Rightarrow x = 5,6$$

Alternativa **d**.

34. Indicando por x a altura IE, esquematizamos:

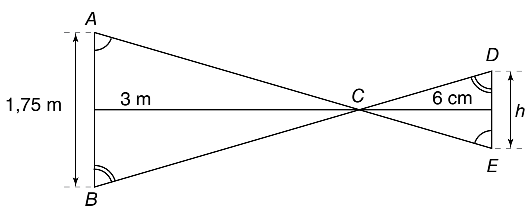


Da semelhança entre os triângulos ABI e CDI, concluímos que:

$$\frac{10}{6} = \frac{8 - x}{x} \Rightarrow x = 3$$

35. Sendo h a altura procurada, temos:

$\triangle ABC \sim \triangle EDC$ e a razão de semelhança é a razão entre dois comprimentos correspondentes quaisquer.



Assim: $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1,75}{h} \Rightarrow h = 3,5$

Logo, a altura da imagem projetada é 3,5 cm.

36. Indicando por x a distância real, em centímetro, temos:

$\frac{1}{10.000} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 40.000$

Assim, a distância real é de 40.000 cm ou 400 m.

37. Indicando por x e y o comprimento e a largura da maquete, ambas em centímetro, temos:

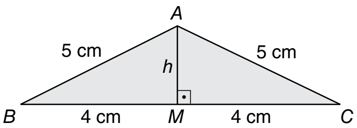
$\frac{1}{250} = \frac{x}{2.800} = \frac{y}{1.200} \Rightarrow x = 11{,}2 \text{ e } y = 4{,}8$

Logo, comprimento e largura que o aluno utilizará na construção da maquete serão 11,2 cm e 4,8 cm.

Alternativa **c**.

38.
- $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow a = 5$
- $5h = 3 \cdot 4 \Rightarrow h = 2{,}4$
- $3^2 = 5m \Rightarrow m = 1{,}8$
- $1{,}8 + n = 5 \Rightarrow n = 3{,}2$

39.



A altura $\overline{AM}$ coincide com a mediana relativa à base $\overline{BC}$.

Indicando por h a medida dessa altura, temos:

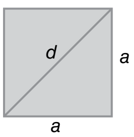
$h^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow h^2 = 9$

$\therefore h = 3$

Logo, a altura mede 3 cm.

40. Sendo $HC = n$, temos: $12^2 = 5n \Rightarrow n = 28{,}8$

41. a)

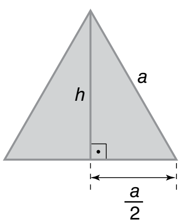


Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2$

$\therefore d = a\sqrt{2}$

b) Cada altura do triângulo equilátero também é mediana. Assim, esquematizamos:

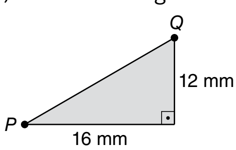


Aplicando o teorema de Pitágoras, concluímos:

$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$\therefore h^3 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

42. Do enunciado, temos o triângulo:

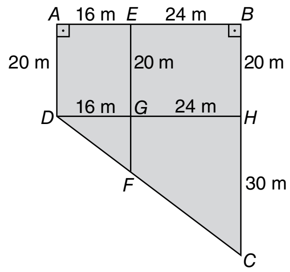


Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$PQ^2 = 16^2 + (12)^2 \Rightarrow PQ^2 = 400$

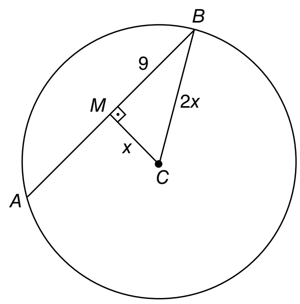
$\therefore PQ = 20 \text{ mm}$

43. Traçando por D a reta r, paralela a $\overline{AB}$, com $r \cap \overline{EF} = \{G\}$ e $r \cap \overline{BC} = \{H\}$, temos:



- Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo DHC:
  $(DC)^2 = 30^2 + 40^2$; logo, $DC = 50$ m
- Aplicando o teorema de Tales:
  $\frac{40}{16} = \frac{50}{DF}$; logo, $DF = 20$ m
- Como $DC = 50$ m e $DF = 20$ m, temos que $CF = 30$ m.
- Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo DGF:
  $20^2 = 16^2 + (GF)^2$; logo, $GF = 12$ m.
  Concluímos, então, que o perímetro do lote $AEFD$ é 88 m e o do lote $EBCF$ é 136 m.

44. Indicando por x a medida CM, em centímetro, temos que $BC = 2x$. Assim:

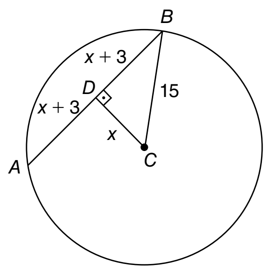


$(2x)^2 = x^2 + 9^2 \Rightarrow 3x^2 = 81$

$\therefore x = 3\sqrt{3}$

Logo, a medida do raio $\overline{BC}$ é $6\sqrt{3}$ cm.

45. Como $\overline{CD}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, temos que D é ponto médio de $\overline{AB}$. Indicando por x a medida CD, em centímetro, temos:



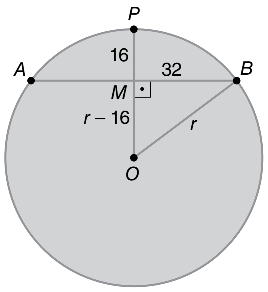
$(x + 3)^2 + x^2 = 15^2 \Rightarrow 2x^2 + 6x - 216 = 0$

$\therefore x^2 + 3x - 108 = 0 \Rightarrow x = 9$ ou $x = -12$ (não convém)

Logo, a medida da corda $\overline{AB}$ é dada por:

$AB = 2(9 + 3)$ cm $\Rightarrow AB = 24$ cm

46. Indicando por r a medida, em metro, do raio da circunferência de centro O, esquematizamos:



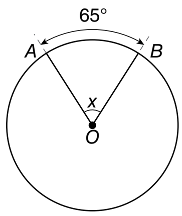
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OMB, concluímos:

$r^2 = (r - 16)^2 + 32^2 \Rightarrow r^2 = r^2 - 32r + 256 + 1.024$

$\therefore 32r = 1.280 \Rightarrow r = 40$

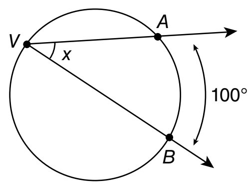
Logo, a medida do raio da circunferência que contém o arco $\overset{\frown}{AB}$ é 40 m.

47. a)



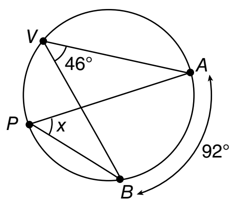
$x = 65°$

b)



$x = \dfrac{100°}{2} \Rightarrow x = 50°$

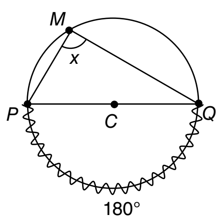
c)



$m(\overset{\frown}{AB}) = 2 \cdot m(A\hat{V}B) = 92°$

$x = \dfrac{92°}{2} \Rightarrow x = 46°$

48. a)



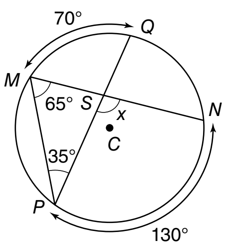
(C é o centro da circunferência)

$x = \dfrac{180°}{2}$

$x = 90°$

b) triângulo retângulo

49.



C é o centro da circunferência.

- $M\hat{P}Q$ é um ângulo inscrito que determina um arco de 70°; logo:

  $m(M\hat{P}Q) = \dfrac{70°}{2} = 35°$

- $P\hat{M}N$ é um ângulo inscrito que determina um arco de 130°; logo:

  $m(P\hat{M}N) = \dfrac{130°}{2} = 65°$

- $P\hat{S}N$ é ângulo externo do triângulo MSP; logo:

  $x = 35° + 65° = 100°$

50. Traçando o segmento $\overline{PN}$, temos:

- $m(P\hat{N}M) = 40°$, pois é inscrito e determina um arco de 80°;
- $m(N\hat{P}Q) = 15°$, pois é inscrito e determina um arco de 30°.

Como $P\hat{N}M$ é ângulo externo do triângulo PNS, temos:

$m(P\hat{N}M) = m(N\hat{P}Q) + x \Rightarrow 40° = 15° + x$

$\therefore x = 25°$

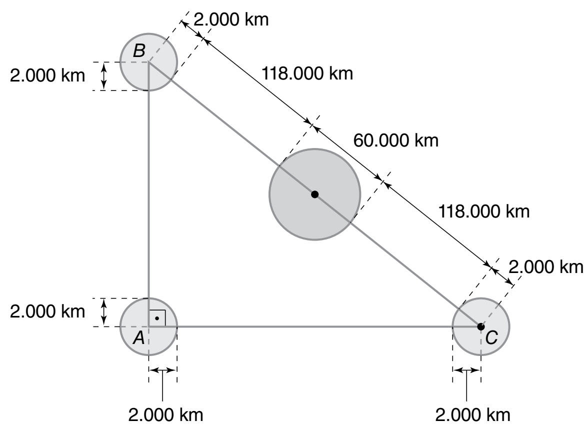
51. A medida do arco $\overset{\frown}{AB}$, em grau, é o dobro da medida do ângulo $A\hat{P}B$; logo, $\overset{\frown}{AB}$ mede 36°. Como a velocidade do satélite é constante, o tempo de percurso é diretamente proporcional à medida do arco percorrido; logo, o tempo t para que o satélite complete uma volta ao redor da Terra pode ser calculado pela regra de três:

Medida de arco (grau)	Tempo (hora)
36	4
360	t

De onde concluímos que $t = 40$ h.

52. a) Todo triângulo retângulo é inscritível em uma semicircunferência cujo centro é o ponto médio da hipotenusa. Assim, os três pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo inscrito na semicircunferência de diâmetro $\overline{BC}$, cujo centro coincide com o centro do planeta. Logo, não é possível o trajeto citado, pois o planeta está entre as luas de centros B e C.

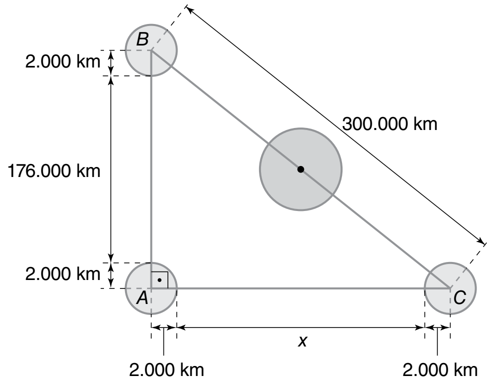
b) De acordo com os argumentos utilizados na resposta do item **a**, esquematizamos:



Logo:

$BC = (2.000 + 118.000 + 60.000 + 118.000 + {} + 2.000)$ km, ou seja, $BC = 300.000$ km

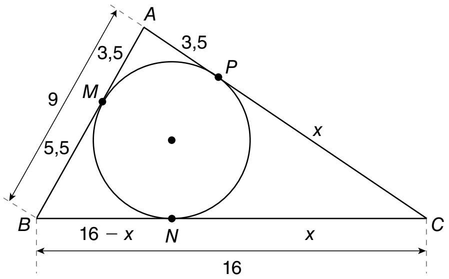
c) No triângulo *ABC*, aplicamos o teorema de Pitágoras:



$(AC)^2 + 180.000^2 = 300.000^2 \Rightarrow AC = 240.000$

Logo, a distância *x* entre as superfícies dos planetas A e C é dada por $x = (240.000 - 4.000)$ km, ou seja, $x = 236.000$ km.

53. Indicando por x a medida *PC*, temos:



Logo, $16 - x = 5{,}5 \Rightarrow x = 10{,}5$.

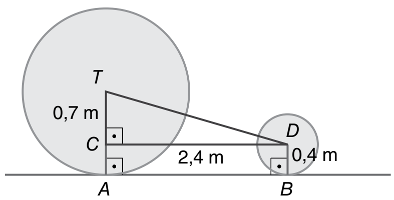
Concluímos, então, que $AC = 3{,}5 + 10{,}5 = 14$.

54. Em duas circunferências tangentes, os centros e o ponto de tangência são colineares. Assim, a medida do lado do losango em cada figura é a soma das medidas dos raios de duas circunferências tangentes. Indicando por R a medida do raio de cada circunferência da figura 1, temos que o perímetro do losango mostrado nessa figura é 8*R*, e o perímetro do losango mostrado na figura 2 é 12*R*. Logo, o aumento percentual do perímetro do losango da figura 1 para o perímetro do losango da figura 2 é dado por:

$$\frac{12R - 8R}{8R} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Alternativa **e**.

55. Os raios das circunferências dos pneus são perpendiculares a $\overline{AB}$ nos pontos de tangência. Assim, traçando por *D* uma reta paralela a $\overline{AB}$, ela é perpendicular a $\overline{AT}$ em um ponto *C*.

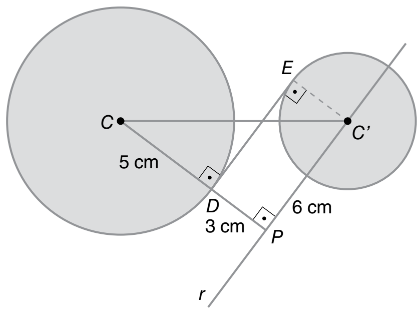


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *CDT*, concluímos:

$$(TD)^2 = (0{,}7)^2 + (2{,}4)^2 \Rightarrow TD = 2{,}5$$

Logo, a distância entre T e D é 2,5 m.

56. Seja *P* o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{CD}$ com a reta *r* que passa por *C'* e é paralela a $\overline{DE}$. Como $\overleftrightarrow{CD}$ é perpendicular a $\overline{DE}$, temos que $\overleftrightarrow{CD}$ também é perpendicular a *r*. Temos, ainda, que $\overleftrightarrow{C'E}$ é perpendicular a $\overline{DE}$; assim, o quadrilátero *C'EDP* é um retângulo; portanto, $PC' = DE = 6$ cm e $DP = EC' = 3$ cm.

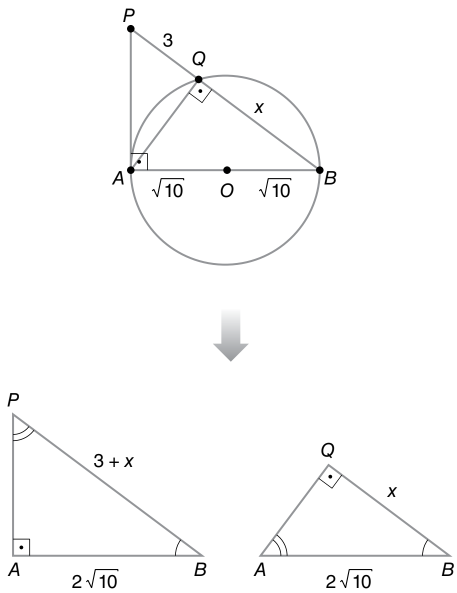


Pelo teorema de Pitágoras, concluímos:

$$(CC')^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow CC' = 10$$

Logo, a distância entre os centros C e C' é 10 cm.

57. O triângulo *ABQ* é retângulo em *Q*, pois está inscrito em meia circunferência; e o triângulo *ABP* é retângulo em *A*, pois a reta $\overleftrightarrow{AP}$ tangencia a circunferência em *A*.



Da semelhança entre os triângulos *ABQ* e *QBA*, concluímos:

$$\frac{3 + x}{2\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{x} \Rightarrow x^2 + 3x - 40 = 0$$

$\therefore x = 5$ ou $x = -8$

Como *x* representa uma medida de comprimento, convém apenas o valor não negativo, isto é, $x = 5$. Assim, o comprimento do segmento $\overline{BQ}$ é 5 cm.

Alternativa **e**.

58. $c = 2\pi r \Rightarrow c = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi$

$\therefore c \approx 2 \cdot 3{,}14 \Rightarrow c \approx 6{,}28$

Logo, o comprimento dessa circunferência é 2π m ou, aproximadamente, 6,28 m. Assim, serão necessários 2π m de renda ou 6,28 m, aproximadamente.

59. Em cada minuto, o ponto A, que dista 5 cm do centro, percorre a distância de $300 \cdot 2\pi \cdot 5$ cm, ou seja, 3.000π cm. Logo, a velocidade desse ponto é dada por:

$$V_A = \frac{3.000\pi \text{ cm}}{60 \text{ s}} = 50\pi \text{ cm/s}$$

Em cada minuto, o ponto B, que dista 2 cm do centro, percorre a distância de $300 \cdot 2\pi \cdot 2$ cm, ou seja, 1.200π cm. Logo, a velocidade desse ponto é dada por:

$$V_B = \frac{1.200\pi \text{ cm}}{60 \text{ s}} = 20\pi \text{ cm/s}$$

Alternativa **c**.

60. **a)** $c = 2\pi r \Rightarrow c = 2 \cdot \pi \cdot 6.370 = 12.740\pi$ km
$\therefore c \approx 12.740 \cdot 3{,}14 \Rightarrow c \approx 40.003{,}6$ km
Logo, o comprimento da linha do Equador é 12.740π km ou, aproximadamente, 40.003,6 km.

b) Sendo x o comprimento, em quilômetro, do arco percorrido, temos:

$$x = \frac{40.003{,}6}{360} \cdot 10 \Rightarrow x \approx 1.111{,}21$$

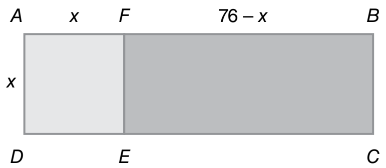
Logo, o comprimento percorrido pelo navio é, aproximadamente, 1.111,21 km.

61. Indicando por x a largura da mesa, em centímetro, temos que o comprimento é 2x. Assim:

$$2x - 45 = x + 45 \Rightarrow x = 90$$

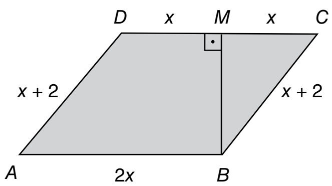
Logo, as dimensões da mesa são 90 cm e 180 cm, de onde concluímos que sua área é 16.200 cm², ou seja, 1,62 m².
Alternativa **a**.

62. Indicando por x a medida, em metro, do lado do lote quadrado, esquematizamos:



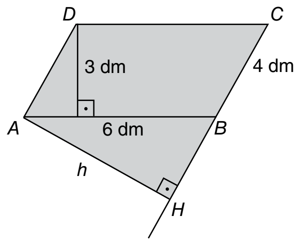
Assim, temos:
$x(76 - x) = 2{,}8x^2 \Rightarrow 3{,}8x^2 - 76x = 0$
$\therefore x = 0$ (não convém) ou $x = 20$
Logo, a área do lote quadrado é 20^2 m², ou seja, 400 m².

63.



$2x + 2x + x + 2 + x + 2 = 22 \Rightarrow x = 3$
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CBM, temos:
$(MB)^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow MB = 4$
Logo, a área do paralelogramo, em centímetro quadrado, é $6 \cdot 4$, ou seja, 24 cm².

64.



Indicando por h a medida dessa altura, temos:
$6 \cdot 3 = 4 \cdot h \Rightarrow h = 4{,}5$
Logo, a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ mede 4,5 dm.

65. **a)** $A = \frac{4 \cdot 6}{2}$ m² $= 12$ m²

b) Pelo teorema de Pitágoras, obtém-se que a altura relativa à base do triângulo isósceles mede 6 cm; logo:
$A = \frac{16 \cdot 6}{2}$ cm² $= 48$ cm²

c) A medida da altura do triângulo equilátero é $3\sqrt{3}$ cm; logo:
$A = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$ cm² $= 9\sqrt{3}$ cm²

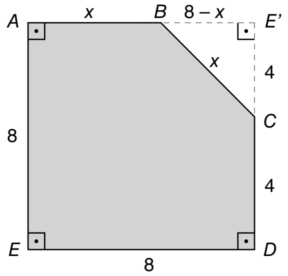
d) Pelo teorema de Pitágoras, obtém-se que $CD = 3$ dm; logo:
$A = \frac{6 \cdot 3}{2}$ dm² $= 9$ dm²

66. Sendo ℓ a medida, em centímetro, do lado desse triângulo equilátero, temos:
$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 4 \Rightarrow \ell = \frac{8\sqrt{3}}{3}$
Logo, a área A do triângulo é:
$$A = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$$

67. A área A do terreno, em metro quadrado, é dada por:
$$A = (16 \cdot 14) - \left(\frac{9 \cdot 4}{2}\right) - \left(\frac{3 \cdot 10}{2}\right) - \left(\frac{14 \cdot 7}{2}\right) \Rightarrow$$
$\Rightarrow A = 224 - 18 - 15 - 49$
$\therefore A = 142$ m²

68. O quadrado da figura I tem diagonal de 12 cm, isto é, metade do lado do quadrado maior; então, a medida x de seu lado é dada por:
$12^2 = 2 \cdot x^2 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$
Logo, a área A_I da figura I é dada por:
$A_I = (6\sqrt{2})^2$ cm² $= 72$ cm²
Os triângulos IV e V são congruentes, e a área de cada um é metade da área do quadrado (I); logo:
$A_{IV} = A_V = \frac{72}{2}$ cm² $= 36$ cm²
A área da figura II é dada por:
$A_{IV} + A_I = A_V + A_{II} \Rightarrow A_{II} = 72 + 36 - 36$
$\therefore A_{II} = 72$ cm²
A figura III é um triângulo retângulo em que cada cateto mede 12 cm; logo: $A_{III} = \frac{12 \cdot 12}{2}$ cm² $= 72$ cm²
Os triângulos VI e VII são congruentes, e a área de cada um é a quarta parte da área de um quadrado com 24 cm de lado; logo:
$A_{VI} = A_{VII} = \frac{24^2}{4}$ cm² $= 144$ cm²

69. Indicando por x a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, temos:



Aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo BCE':

$x^2 = (8 - x)^2 + 16 \Rightarrow x = 5$

Assim, concluímos que:

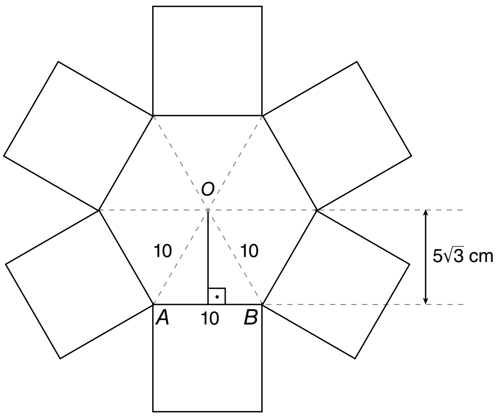
a) O perímetro p do pentágono é dado por:

$p = 8 + 8 + 4 + 5 + 5 = 30$

b) A área S do pentágono é a diferença entre a área do quadrado $AEDE'$ e a área do triângulo BCE', nessa ordem, isto é:

$$S = 8 \cdot 8 - \frac{4 \cdot 3}{2} = 58$$

70.



A área A_H do hexágono é igual ao sêxtuplo da área do triângulo OAB, ou seja:

$$A_H = 6 \cdot \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 = 150\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

A área A_Q de cada quadrado é dada por:

$A_Q = 10^2\ \text{cm}^2 = 100\ \text{cm}^2$

Temos, portanto, que a área A da figura é dada por:

$$A = \left(150\sqrt{3} + 600\right)\ \text{cm}^2 = 150\left(\sqrt{3} + 4\right)\ \text{cm}^2$$

71. A área A de cada face trapezoidal é dada por:

$$A = \frac{(20 + 18) \cdot 22}{2}\ \text{cm}^2 \Rightarrow A = 418\ \text{cm}^2$$

As áreas T e F da tampa e do fundo são, respectivamente:

$T = 324\ \text{cm}^2$ e $F = 400\ \text{cm}^2$

Logo, a área da caixa é dada por:

$4A + T + F = (4 \cdot 418 + 324 + 400)\ \text{cm}^2$

$4A + T + F = 2.396\ \text{cm}^2$

72. A área S_I da secção transversal da atual canaleta é dada por:

$$S_I = \frac{(30 + 20) \cdot 2{,}5}{2}\ \text{m}^2 \Rightarrow S_I = 62{,}5\ \text{m}^2$$

Como a vazão atual Q_I da água é $1.050\ \text{m}^3/\text{s}$, calculamos a velocidade v da água, em metro por segundo:

$62{,}5 \cdot v = 1.050 \Rightarrow v = 16{,}8$

A área S_{II} da secção transversal da canaleta, após a reforma, será:

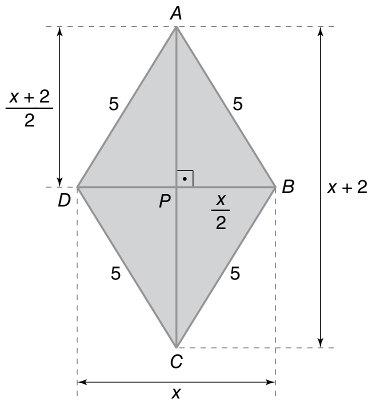
$$S_{II} = \frac{(49 + 41) \cdot 2}{2}\ \text{m}^2 \Rightarrow S_{II} = 90\ \text{m}^2$$

Como a velocidade da água continuará a mesma de antes da reforma, concluímos que a vazão Q_{II}, em metro cúbico por segundo, após a reforma, será:

$Q_{II} = 16{,}8 \cdot 90 \Rightarrow Q_{II} = 1.512$

Alternativa **d**.

73. As diagonais de um losango são perpendiculares entre si no ponto médio de cada uma. Indicando por x a medida, em quilômetro, da diagonal menor do losango, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABP, temos:

$$\left(\frac{x + 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$$

$\therefore\ x = 6$ ou $x = -8$

Como x representa uma medida de comprimento, convém apenas o valor não negativo, isto é, $x = 6$. Assim, as diagonais do losango medem 6 km e 8 km. A área S do losango é o semiproduto das medidas das diagonais, ou seja:

$$S = \frac{6 \cdot 8}{2}\ \text{km}^2 = 24\ \text{km}^2 \text{ ou, ainda, } S = 24.000.000\ \text{m}^2$$

Dividindo esse resultado por 10.000, obtemos a área S em hectare, isto é, $S = 2.400$ ha.

Portanto, o volume V de madeira esperado desse plantio é dado por:

$$V = 250 \cdot 2.400\ \text{m}^3 = 600.000\ \text{m}^3$$

74. Traçando a diagonal menor, observa-se que o losango é formado por dois triângulos equiláteros de lado 4 cm. Logo, a área A do losango é dada por:

$$A = 2 \cdot \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 = 8\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Alternativa **a**.

75. **a)** A medida r do raio do círculo inscrito no quadrado é igual à metade da medida do lado desse quadrado; logo, $r = 3$ cm. Assim, a área A do círculo é dada por:

$A = \pi \cdot 3^2\ \text{cm}^2 = 9\pi\ \text{cm}^2$

b) A medida da diagonal do quadrado é $6\sqrt{2}$ cm; logo, a medida do raio do círculo é $3\sqrt{2}$ cm. Assim, a área A do círculo é:

$$A = \pi\left(3\sqrt{2}\right)^2\ \text{cm}^2 \Rightarrow A = 18\pi\ \text{cm}^2$$

76. As áreas A_m e A_M das pizzas menor e maior, respectivamente, são dadas por:
$A_m = \pi \cdot 8^2\ \text{cm}^2 = 64\pi\ \text{cm}^2$ e $A_M = \pi \cdot 12^2\ \text{cm}^2 = 144\pi\ \text{cm}^2$
Assim, o preço P_M da pizza maior pode ser calculado pela regra de três:

Área (cm^2)		Preço (R$)
64π	———	6
144π	———	P_M

De onde concluímos que P_M = R$ 13,50.
Alternativa **a**.

77. a) A região laranja representa a quarta parte de um círculo de raio 2 cm; logo, a área A dessa região é dada por:
$$A = \frac{\pi \cdot 2^2}{4}\ \text{cm}^2 = \pi\ \text{cm}^2$$

b) A região laranja representa um segmento circular com 1 m de raio e ângulo central de 90°; logo, a área A dessa região é dada por:
$$A = \left(\frac{\pi \cdot 1^2}{4} - \frac{1 \cdot 1}{2}\right)\text{m}^2 = \frac{\pi - 2}{4}\ \text{m}^2$$

c) A região laranja é formada por dois segmentos circulares com 4 dm de raio e ângulo central de 90°; logo, a área A dessa região é dada por:
$$A = 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{4 \cdot 4}{2}\right)\text{dm}^2 = 8(\pi - 2)\ \text{dm}^2$$

d) A região branca é formada por dois semicírculos de raio 5 mm; logo, a área A da região laranja pode ser calculada pela diferença entre a área de um quadrado de lado 10 mm e a área de um círculo de raio 5 mm, isto é:
$$A = (10^2 - \pi \cdot 5^2)\ \text{mm}^2 = 25(4 - \pi)\ \text{mm}^2$$

78. Os raios das tampas grandes, médias e pequenas são iguais a 1 m, $\frac{1}{2}$ m e $\frac{1}{4}$ m, respectivamente.

- Para cada chapa da qual é retirada a tampa grande, a área A_g da sobra é dada por:
$A_g = (2^2 - \pi \cdot 1^2)\ \text{m}^2 \Rightarrow A_g = (4 - \pi)\ \text{m}^2$
- Para cada chapa da qual são retiradas as tampas médias, a área A_m da sobra é dada por:
$$A_m = \left[2^2 - 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\text{m}^2 \Rightarrow A_m = (4 - \pi)\ \text{m}^2$$
- Para cada chapa da qual são retiradas as tampas pequenas, a área A_p da sobra é dada por:
$$A_p = \left[2^2 - 16 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\text{m}^2 \Rightarrow A_p = (4 - \pi)\ \text{m}^2$$

Como $A_g = A_m = A_p$, concluímos que as três entidades recebem quantidades iguais de material.
Alternativa **e**.

79. A área A_O da região de ouro pode ser calculada como a diferença entre a área de um círculo de raio 1,4 cm e a de um círculo de raio 0,7 cm, isto é:
$$A_O = [\pi \cdot (1{,}4)^2 - \pi \cdot (0{,}7)^2]\ \text{cm}^2 = 1{,}47\pi\ \text{cm}^2$$
A área A_P da região de prata pode ser calculada como diferença entre a área da face da moeda e a área A_O, isto é:
$$A_P = [\pi \cdot (2{,}1)^2 - 1{,}47\pi]\ \text{cm}^2 = 2{,}94\pi\ \text{cm}^2$$

80. a) Área A_I do setor I:

Ângulo central (grau)		Área (cm^2)
360	———	$\pi \cdot 6^2$
100	———	A_I

$$\therefore A_I = \frac{100 \cdot 36\pi}{360}\ \text{cm}^2 = 10\pi\ \text{cm}^2$$

b) Ângulo central do setor III:

Ângulo central (grau)		Área (cm^2)
360	———	$\pi \cdot 36$
α	———	8π

$$\therefore \alpha = \frac{360 \cdot 8\pi}{36\pi} = 80°$$

c) Ângulo central do setor II:

Ângulo central (grau)		Comprimento do arco (cm)
360	———	$2\pi \cdot 6$
β	———	$\frac{13\pi}{3}$

$$\therefore \beta = \frac{360 \cdot \frac{13\pi}{3}}{12\pi} = 130°$$

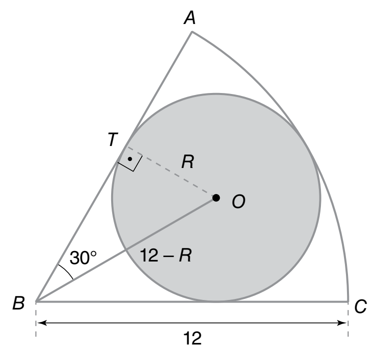
d) Ângulo central, γ, do setor IV:
$100° + 80° + 130° + \gamma = 360° \Rightarrow \gamma = 50°$
Indicando por A_{IV} a área do setor IV, temos:

Ângulo central (grau)		Área (cm^2)
360	———	$\pi \cdot 36$
50	———	A_{IV}

$$\therefore A_{IV} = \frac{50 \cdot 36\pi}{360}\ \text{cm}^2 = 5\pi\ \text{cm}^2$$

81. a) A área A_s do setor é a sexta parte da área de um círculo de raio 12, isto é: $A_s = \frac{\pi \cdot 12^2}{6} = 24\pi$

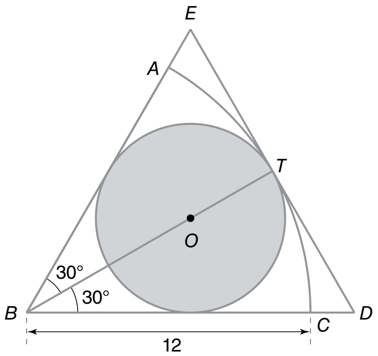
b) Ligando, por segmentos de reta, o centro O do círculo inscrito ao ponto B e ao ponto T em que $\overline{AB}$ tangencia o círculo, temos:



$$\text{sen } 30° = \frac{R}{12 - R} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R}{12 - R}$$
$\therefore R = 4$
Logo, a área A do círculo inscrito é dada por:
$A = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$

Outro modo

Traçam-se as retas: $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e a tangente comum ao círculo inscrito e ao arco $\overset{\frown}{AB}$, obtendo-se o triângulo equilátero *BDE*, representado abaixo. O centro *O* do círculo inscrito é o baricentro desse triângulo; logo: $\frac{BO}{OT} = \frac{2}{1}$. Como $BT = 12$, conclui-se que $OT = 4$, isto é, a medida do raio do círculo inscrito é 4. Conclui-se, então, que a área do círculo é 16π.



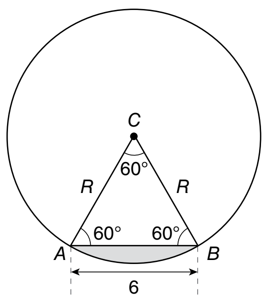
82. a) $A = \left(\frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{4 \cdot 4}{2}\right) \text{cm}^2 = 4(\pi - 2)\ \text{cm}^2$

b) $A = \left(\frac{\pi \cdot 2^2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \text{sen } 120°\right) \text{dm}^2 =$

$= \left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \text{dm}^2$

c) $A = \left(\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 12^2 + \frac{12 \cdot 12}{2}\right) \text{mm}^2 = 36(3\pi + 2)\ \text{dm}^2$

83. O arco menor $\overset{\frown}{AB}$ mede 60°; portanto, o ângulo central $A\hat{C}B$ mede 60°. Sendo R a medida do raio da circunferência, temos:



Como *ACB* é um triângulo equilátero, temos:
R = 6 cm
Calculamos:

- A área A_s do setor circular *ACB*.

Ângulo central (grau)	Área (cm^2)
360	$\pi \cdot 6^2$
60	A_s

$\Rightarrow A_s = 6\pi\ \text{cm}^2$

- A área A_t do triângulo equilátero *ACB*.

$$A_t = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2 = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Logo, a área A_{seg} do segmento circular colorido é dada por:

$A_{seg} = A_s - A_t \Rightarrow A_{seg} = \left(6\pi - 9\sqrt{3}\right) \text{cm}^2$

$\therefore A_{seg} = 3\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right) \text{cm}^2$

84. Sendo *r* e *R* as medidas dos raios das circunferências inscrita e circunscrita ao quadrado, respectivamente, temos:
$r = 2$ cm e $R = 2\sqrt{2}$ cm
Logo, a área A da coroa circular é dada por:
$A = \pi\left[\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2^2\right] \text{cm}^2 = 4\pi\ \text{cm}^2$

85. Sendo R a medida, em metro, do raio do tampo da mesa, temos:

$$\pi \cdot (1{,}4)^2 - \pi R^2 = 0{,}96\pi \Rightarrow R = 1$$

Ou seja, o raio do tampo da mesa mede 1 m.

86. Os triângulos *ADE* e *ACB* são semelhantes, sendo $\frac{3}{5}$ a razão de semelhança. Assim, temos que a área S do triângulo *ADE*, em centímetro quadrado, pode ser calculada por:

$\frac{S}{100} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow S = 36$

Ou seja, a área do triângulo *ADE* é 36 cm^2.

87. a) O segmento $\overline{MN}$ é base média do triângulo *ABC*, relativa ao lado $\overline{BC}$; logo, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ e $MN = \frac{BC}{2}$.

Assim, os triângulos *AMN* e *ABC* são semelhantes, sendo $\frac{1}{2}$ a razão de semelhança. Logo, temos que a área S_t do triângulo *ABC*, em decímetro quadrado, pode ser calculada por:

$\frac{12}{S_t} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow S = 48$

Ou seja, a área do triângulo *ABC* é 48 dm^2.

b) A área S_q do quadrilátero *CBMN* é a diferença entre as áreas dos triângulos *ABC* e *AMN*, nessa ordem, isto é:

$$S_q = (48 - 12)\ \text{dm}^2 = 36\ \text{dm}^2$$

88. Os triângulos *CDP* e *APB* são semelhantes, e a razão de semelhança, do maior para o menor, é $\frac{3}{1}$. Assim, indicando por S a área do triângulo *CDP*, temos:

$$\frac{S}{6} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 \Rightarrow S = 54$$

Logo, a área do triângulo *CDP* é 54 cm^2.

89. A razão de semelhança da foto para a região real é $\frac{3\ \text{cm}}{150\ \text{m}}$. Indicando por A a área da região, em metro quadrado, temos:

$$\frac{18}{A} = \left(\frac{3}{150}\right)^2 \Rightarrow A = 45.000$$

Logo, a área da região fotografada é 45.000 m^2.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

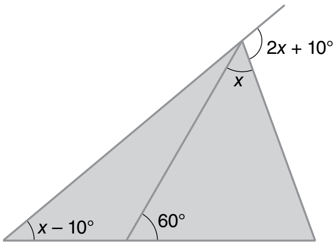
1. a) $95° + 2x + 10° + x = 180° \Rightarrow 3x = 75°$
$\therefore x = 25°$

b) $x + 90° = 40° + 90°$
$\therefore x = 40°$

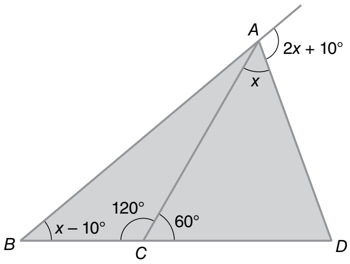
c) $2x + 25° = 65° + x \Rightarrow 2x - x = 40°$
$\therefore x = 40°$

d) $x - 10° + x + 30° = 110° \Rightarrow 2x = 90°$
$\therefore x = 45°$

e)



Nomeando os vértices dos triângulos, conforme a figura abaixo, temos que o ângulo externo relativo ao vértice A do triângulo ABC mede $x + 2x + 10°$ e as medidas dos ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ desse triângulo medem $x - 10°$ e $120°$, respectivamente.



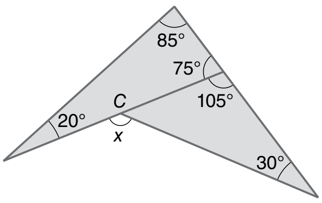
Assim, temos que:

$x + 2x + 10° = x - 10° + 120° \Rightarrow x = 50°$

f) $3x + 90° + 30° = 180° \Rightarrow 3x = 60°$

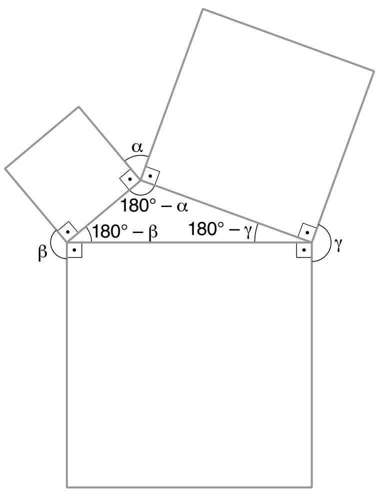
$\therefore x = 20°$

g)



$x = 105° + 30° = 135°$

2. Cada ângulo interno de um quadrado mede 90°. Assim, esquematizamos:



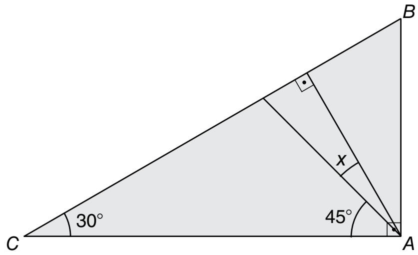
Logo, pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, concluímos que:

$180° - \alpha + 180° - \beta + 180° - \gamma = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 360°$

Alternativa **b**.

3. Sendo x a medida do ângulo pedido, temos:



$x + 45° + 30° + 90° = 180° \Rightarrow x = 15°$

4. As diagonais que partem de um mesmo vértice de um polígono convexo de n lados dividem-no em $n - 2$ triângulos. Logo, a soma S_i dos ângulos internos do polígono é dada por $S_i = (n - 2) \cdot 180°$. Assim, temos:

a) $S_4 = (4 - 2) \cdot 180° \Rightarrow S_4 = 360°$

b) $S_7 = (7 - 2) \cdot 180° \Rightarrow S_7 = 900°$

c) $S_9 = (9 - 2) \cdot 180° \Rightarrow S_9 = 1.260°$

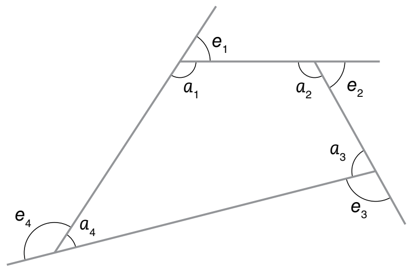
d) $S_{30} = (30 - 2) \cdot 180° \Rightarrow S_{30} = 5.040°$

5. a) A soma S_6 dos seis ângulos internos de um hexágono convexo é dada por $S_6 = (6 - 2) \cdot 180° = 720°$. Como no hexágono regular todos os ângulos internos são congruentes entre si, concluímos que a medida a_6 de cada ângulo é dada por $a_6 = \dfrac{720°}{6} = 120°$.

b) A soma S_8 dos oito ângulos internos de um octógono convexo é dada por $S_8 = (8 - 2) \cdot 180° =$ $= 1.080°$. Como no octógono regular todos os ângulos internos são congruentes entre si, concluímos que a medida a_8 de cada ângulo é dada por $a_8 = \dfrac{1.080°}{8} = 135°$.

6. Em todo polígono convexo, cada ângulo externo e_i é o suplemento do ângulo interno adjacente a_i. Assim, temos:

a)



$(a_1 + e_1) + (a_2 + e_2) + (a_3 + e_3) + (a_4 + e_4) = 4 \cdot 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 720°$

Como a soma dos ângulos internos do quadrilátero, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, é 360°, concluímos:

$360° + (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 720° \Rightarrow e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 360°$

Ou seja, a soma dos ângulos externos do quadrilátero convexo é 360°.

b) Repetindo o raciocínio do item **a** para os ângulos internos $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ e a_8, e os respectivos ângulos externos $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ e e_8, temos:

$(a_1 + e_1) + (a_2 + e_2) + (a_3 + e_3) + (a_4 + e_4) + (a_5 + e_5) +$
$+ (a_6 + e_6) + (a_7 + e_7) + (a_8 + e_8) = 8 \cdot 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8) +$
$+ (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8) = 1.440°$

Como a soma dos ângulos internos do octógono, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$, é 1.080°, concluímos:

$1.080° + (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8) =$
$= 1.440° \Rightarrow e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8 =$
$= 360°$

Ou seja, a soma dos ângulos externos do octógono convexo é 360°.

c) Repetindo o raciocínio do item **a** para os ângulos internos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, e os respectivos ângulos externos $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$, temos:

$(a_1 + e_1) + (a_2 + e_2) + (a_3 + e_3) + \ldots + (a_n + e_n) =$
$= n \cdot 180° \Rightarrow (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) +$
$+ (e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n) = n \cdot 180°$

Como a soma dos ângulos internos do quadrilátero, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_4$, é $(n - 2) \cdot 180°$, concluímos:

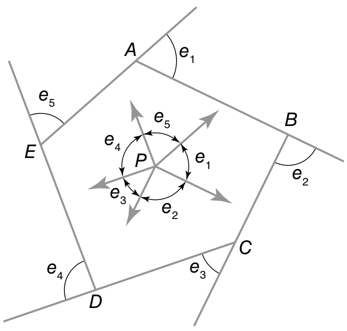
$(n - 2) \cdot 180° + (e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n) = n \cdot 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n = n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180°$
$\therefore e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n = n \cdot 180° - n \cdot 180° +$
$+ 360° \Rightarrow e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n = 360°$

Ou seja, a soma dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados é 360°.

Outro modo

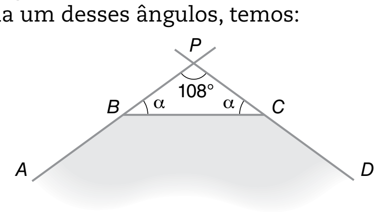
Para qualquer que seja o número de lados do polígono, podemos calcular a soma dos ângulos externos do seguinte modo:

- A partir de um ponto P pertencente ao plano do polígono, traçamos semirretas paralelas aos lados dos ângulos externos do polígono, conforme mostra a figura abaixo (para facilitar a visualização, tomamos o ponto P interno ao polígono).



- Como a soma dos ângulos construídos a partir do vértice P é 360°, e esses ângulos são, respectivamente, congruentes aos ângulos externos do polígono, concluímos que a soma dos ângulos externos do polígono é 360°.

7. Como o polígono é regular, seus ângulos externos são congruentes entre si. Indicando por α a medida de cada um desses ângulos, temos:



$$108° + \alpha + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 36°$$

Como a soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 360°, concluímos:

$$n \cdot 36° = 360° \Rightarrow n = 10$$

8. a) Temos:

I. $A\hat{E}D$ e $B\hat{F}C$ são ângulos retos, por hipótese;
II. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, por hipótese;
III. $A\hat{D}E \cong B\hat{C}F$, por hipótese.

As condições I, II e III caracterizam o caso LAA_o de congruência de triângulos; logo: $\triangle ADE \cong \triangle BCF$

b) Como os triângulos ADE e BCF são congruentes, temos que seus lados correspondentes são congruentes; logo:

$3x + 5 = x + 9 \Rightarrow x = 2$

Portanto: $AE = 3 \cdot 2 + 5 = 11$

9. Como o triângulo ABC é equilátero, temos:

- $C\hat{A}B \cong A\hat{B}C \cong B\hat{C}A$
- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$
- $\overline{AE} \cong \overline{BF} \cong \overline{CD} \Rightarrow \overline{CF} \cong \overline{DA} \cong \overline{EB}$

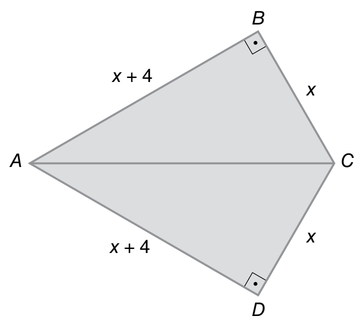
Assim, pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos:

$$\triangle ADE \cong \triangle BEF \cong \triangle CFD$$

Dessa congruência, concluímos:

$\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FD}$; portanto, o triângulo DEF é equilátero.

10. Traçando o segmento $\overline{AC}$, constatamos a congruência dos triângulos ABC e ADC, pelo caso RHC. Assim, indicando por x a medida, em centímetro, do lado $\overline{CD}$, temos:

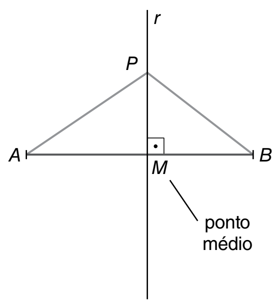


$x + 4 + x + 4 + x + x = 28 \Rightarrow x = 5$

Logo: $AB = 9$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 5$ cm e $AD = 9$ cm.

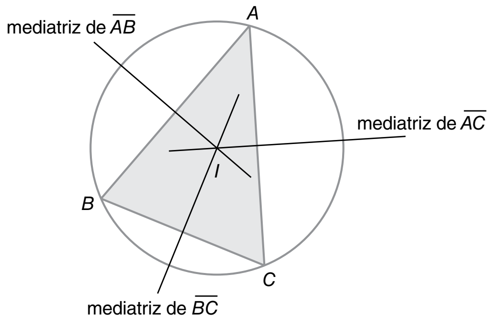
11. a) Consideremos um ponto qualquer P, pertencente a r:

- Se $P \equiv M$, então P é o ponto médio de $\overline{AB}$ e, portanto, equidista de A e B.
- Se $P \not\equiv M$, construímos os segmentos de reta auxiliares $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$:



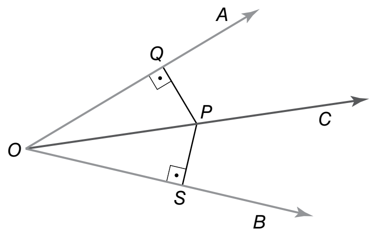
Observando que os triângulos PMA e PMB são congruentes, pelo caso LAL, concluímos que $\overline{PA} \cong \overline{PB}$. Logo, o ponto P equidista de A e B.

b) Se I é o ponto comum às mediatrizes de um triângulo ABC, então I equidista de A e B, pois pertence à mediatriz de $\overline{AB}$; e I equidista de A e C, pois pertence à mediatriz de $\overline{AC}$. Logo, I equidista dos três vértices do triângulo.



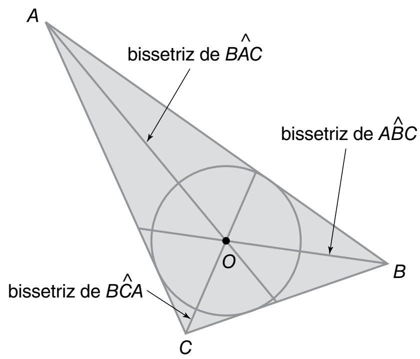
12. **a)** Consideremos um ponto qualquer P, pertencente a $\overrightarrow{OC}$:

- Se $P \equiv O$, então P equidista dos lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, pois O pertence a ambos.
- Se $P \not\equiv O$, construímos os segmentos de reta auxiliares $\overline{PQ}$ e $\overline{PS}$, perpendiculares aos lados do ângulo, com $Q \in \overrightarrow{OA}$ e $S \in \overrightarrow{OB}$.

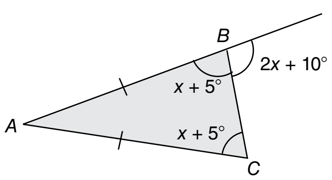


Observando que os triângulos PQO e PSO são congruentes, pelo caso LAA_o, concluímos que $\overline{PQ} \cong \overline{PS}$. Logo, o ponto P equidista dos lados do ângulo.

b) Se O é o ponto comum às bissetrizes internas de um triângulo ABC, então O equidista de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, pois pertence à bissetriz de $B\hat{A}C$; e O equidista de $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$, pois pertence à bissetriz de $B\hat{C}A$. Logo, O equidista dos três lados do triângulo.



13.



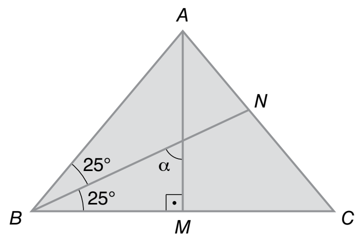
$2x + 10° + x + 5° = 180° \Rightarrow x = 55°$

Logo, o ângulo $\hat{A}$ mede 60°.

14. Como o triângulo é isósceles de base $\overline{BC}$, temos que:

- os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são congruentes; logo, $m(A\hat{B}C) = 50°$;
- a mediana $\overline{AM}$ coincide com a altura relativa à base $\overline{BC}$; logo, $m(A\hat{M}B) = 90°$.

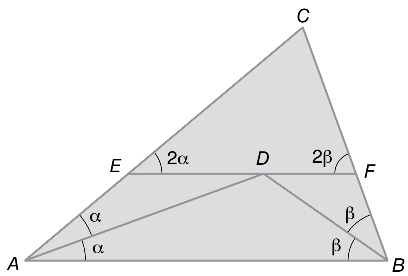
Assim, sendo α a medida do ângulo pedido, esquematizamos:



Pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, concluímos:

$\alpha + 25° + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 65°$

15. Indicando por α e β as medidas dos ângulos $D\hat{A}B$ e $D\hat{B}A$, respectivamente, esquematizamos:

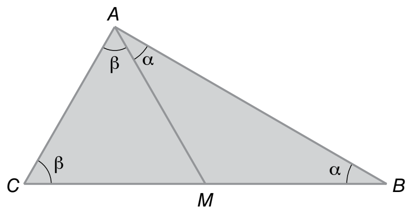


- $C\hat{E}D$ é ângulo externo do triângulo EDA; logo, $2\alpha = \alpha + m(E\hat{D}A) \Rightarrow m(E\hat{D}A) = \alpha$. Assim, o triângulo EDA é isósceles de base $\overline{AD}$, com o que concluímos que $EA = ED$.
- $C\hat{F}D$ é ângulo externo do triângulo FDB; logo, $2\beta = \beta + m(F\hat{D}B) \Rightarrow m(F\hat{D}B) = \beta$. Assim, o triângulo FDB é isósceles de base $\overline{BD}$, com o que concluímos que $FB = FD$.

Assim, o perímetro do triângulo CEF, que pode ser calculado por $CE + ED + FD + CF$, também é calculado por $CE + EA + FB + CF = 12 + 8 = 20$.

Alternativa **c**.

16. Se $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC tal que $AM = MB = MC$, então os triângulos MAB e MAC são isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Assim, indicando por α e β as medidas dos ângulos $M\hat{B}A$ e $M\hat{C}A$, respectivamente, esquematizamos:



Pela propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, concluímos:

$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180° \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180°$

$\therefore \alpha + \beta = 90°$

Ou seja, $m(B\hat{A}C) = 90°$; logo, o triângulo ABC é retângulo em A.

17. Como $\overline{AM}$ é a mediana relativa à hipotenusa, temos que $AM = MB$; logo, o triângulo MBA é isósceles de base $\overline{AB}$, com o que concluímos que $m(M\widehat{A}B) = m(M\widehat{B}C) = 30°$.

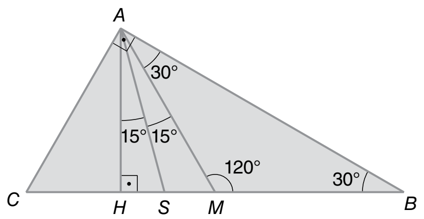
Pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, aplicado ao triângulo MBA, temos que $m(A\widehat{M}B) = 120°$.

O ângulo $A\widehat{M}B$ é externo do triângulo AHM; logo, $120° = 90° + m(H\widehat{A}M) \Rightarrow m(H\widehat{A}M) = 30°$.

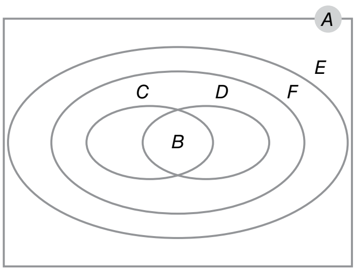
Como $\overline{AS}$ está contido na bissetriz de $H\widehat{A}M$, temos que $m(H\widehat{A}S) = 15°$.

Finalmente, concluímos:

$m(A\widehat{S}H) + 90° + 15° = 180° \Rightarrow m(A\widehat{S}H) = 75°$

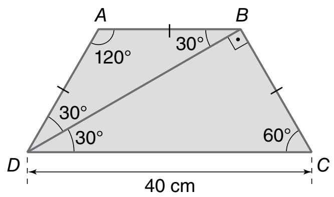


18 Construímos o diagrama de Venn correspondente às relações de inclusão entre esses conjuntos:



Alternativa **b**.

19. Traçando a diagonal $\overline{DB}$, obtemos o triângulo DBC, retângulo em B:



Logo, a distância x do vértice B ao ponto médio de $\overline{DC}$ é a medida da mediana relativa à hipotenusa do triângulo CBD, isto é:

$$x = \frac{DC}{2} = \frac{40}{2}\text{ cm} \Rightarrow x = 20\text{ cm}$$

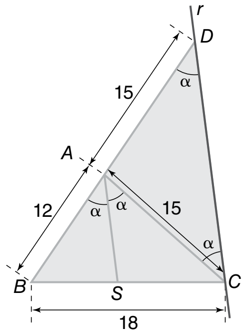
20. **I.** O segmento $\overline{MP}$ é base média do triângulo ADB, relativa à base $\overline{AB}$; logo, $MP = \dfrac{AB}{2} = 6$.

II. O segmento $\overline{MQ}$ é base média do triângulo ADC, relativa à base $\overline{DC}$; logo, $MQ = \dfrac{DC}{2} = 8$.

Por I e II, concluímos que $PQ = MQ - MP = 8 - 6 = 2$.

21. **a)** As retas paralelas $\overleftrightarrow{AS}$ e r formam com a transversal $\overleftrightarrow{AC}$ os ângulos alternos internos $S\widehat{A}C$ e $A\widehat{C}D$ e os ângulos correspondentes $B\widehat{A}S$ e $B\widehat{D}C$; logo, $S\widehat{A}C \cong A\widehat{C}D$ e $B\widehat{A}S \cong B\widehat{D}C$.

Assim, concluímos que $A\widehat{D}C \cong A\widehat{C}D$; portanto, o triângulo ACD é isósceles:



b) Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BC}{BS} \Rightarrow \frac{27}{12} = \frac{18}{BS} \quad \therefore BS = 8$$

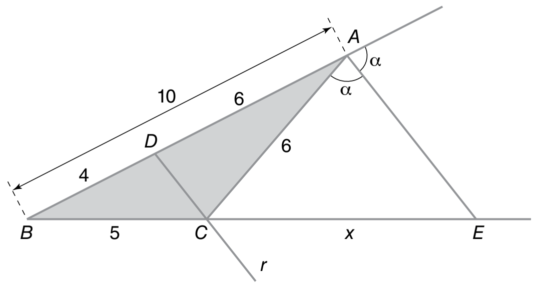
$CS = BC - BS \Rightarrow CS = 18 - 8 = 10$

22. **a)** **I.** Considerando as retas paralelas r e $\overleftrightarrow{AE}$ cortadas pela transversal $\overleftrightarrow{CA}$, temos que o ângulo $A\widehat{C}D$ é congruente ao seu alterno interno, cuja medida é α; logo, $m(A\widehat{C}D) = \alpha$.

II. Considerando as retas paralelas r e $\overleftrightarrow{AE}$ cortadas pela transversal $\overleftrightarrow{DA}$, temos que o ângulo $A\widehat{D}C$ é congruente ao seu correspondente, cuja medida é α; logo, $m(A\widehat{D}C) = \alpha$.

Por I e II, concluímos que no triângulo ADC os ângulos internos $\widehat{D}$ e $\widehat{C}$ são congruentes. Assim, o triângulo ADC é isósceles de base $\overline{DC}$.

b) Pelo item **a**, temos que $AD = 6$. Assim, indicando por x a medida do segmento $\overline{CE}$ esquematizamos:

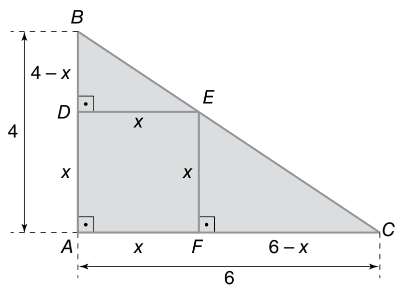


Pelo teorema de Tales, concluímos:

$$\frac{4}{6} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 7{,}5$$

Ou seja, $CE = 7{,}5$.

23. Indicando por x a medida do lado do quadrado, em centímetro, temos:

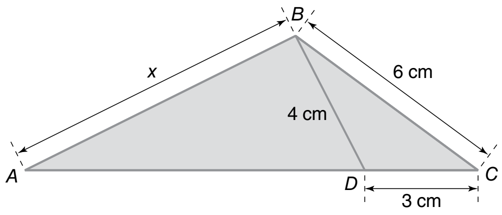


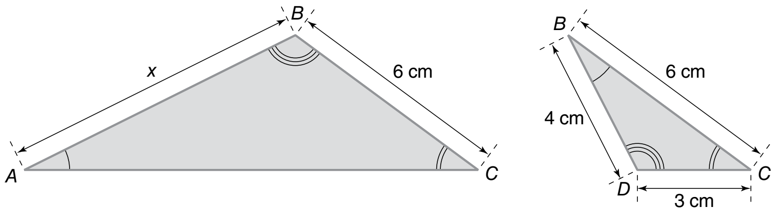
Pelo caso AA, constatamos que os triângulos ABC e DBE são semelhantes; logo:

$$\frac{4}{4 - x} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 2{,}4$$

Ou seja, o lado do quadrado mede 2,4 cm.

24.



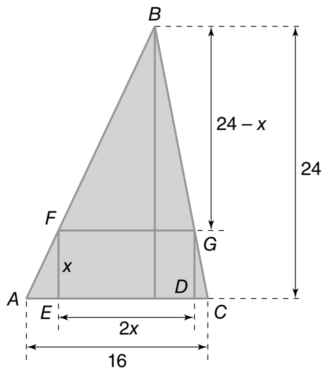


Pelo caso AA, constatamos que os triângulos *ABC* e *BDC* são semelhantes; logo:

$\frac{x}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 8$

Alternativa **b**.

25. Indicando por x a largura do retângulo, em centímetro, esquematizamos:

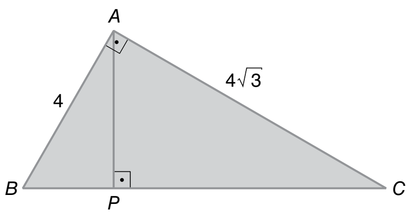


Pelo caso AA, constatamos que o triângulo *BAC* é semelhante ao triângulo *BFG*. Dessa semelhança, temos:

$\frac{16}{2x} = \frac{24}{24 - x} \Rightarrow x = 6$

Logo, o perímetro do retângulo é 36 cm.

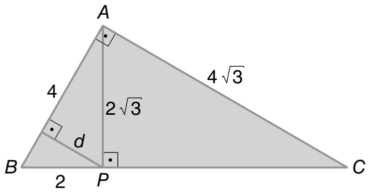
26.



a)
- $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 \Rightarrow (BC)^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2$
  $\therefore BC = 8$
- $(BC) \cdot (AP) = (AB) \cdot (AC) \Rightarrow 8 \cdot (AP) = 4 \cdot 4\sqrt{3}$
  $\therefore AP = 2\sqrt{3}$
- $(BC) \cdot (BP) = (AB)^2 \Rightarrow 8 \cdot (BP) = 4^2$
  $\therefore BP = 2$
- $(BC) \cdot (CP) = (AC)^2 \Rightarrow 8 \cdot (CP) = (4\sqrt{3})^2$
  $\therefore CP = 6$

Assim, concluímos: $AP = 2\sqrt{3}$ dm, $BP = 2$ dm e $CP = 6$ dm.

b) Indicando por d a distância, em decímetro, entre o ponto P e o lado $\overline{AB}$, esquematizamos:



Assim: $(AB) \cdot d = (AP) \cdot (BP) \Rightarrow 4 \cdot d = 2 \cdot 2\sqrt{3}$

$\therefore d = \sqrt{3}$

Logo, a distância entre P e o lado $\overline{AB}$ é $\sqrt{3}$ dm.

27. Como o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, a mediana $\overline{AM}$ também é altura. Assim, pelo teorema de Pitágoras, obtemos AM:

$(AM)^2 + (MC)^2 = (AC)^2 \Rightarrow (AM)^2 = \left(3\sqrt{17}\right)^2 - 3^2$

$\therefore AM = 12$

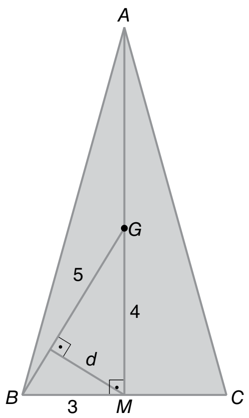
Como o baricentro G divide cada mediana, a partir do vértice, na razão $\frac{2}{1}$, temos que $GM = 4$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BGM, obtemos BG:

$(BG)^2 = (BM)^2 + (GM)^2 \Rightarrow (BG)^2 = 3^2 + 4^2$

$\therefore BG = 5$

Indicando por d a distância entre M e $\overleftrightarrow{BG}$, esquematizamos:



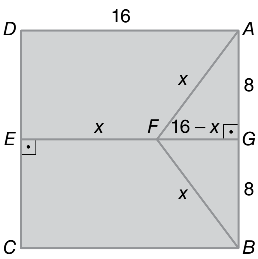
Assim, concluímos:

$(BG) \cdot d = (GM) \cdot (BM) \Rightarrow 5 \cdot d = 4 \cdot 3$

$\therefore d = 2{,}4$

Logo, a distância pedida é 2,4 cm.

28. a) Indicando por x a distância, em centímetro, entre os pontos F e A, esquematizamos:



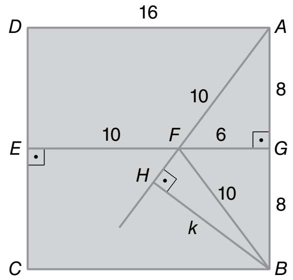
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AFG, temos:

$$x^2 = (16 - x)^2 + 8^2 \Rightarrow x = 10$$

Logo, a distância entre os pontos F e A é 10 cm.

b) A distância entre o ponto F e o lado $\overline{AB}$ é $(16 - 10)$ cm, ou seja, 6 cm.

c) Indicando por k a distância entre B e a reta $\overleftrightarrow{FA}$, esquematizamos:

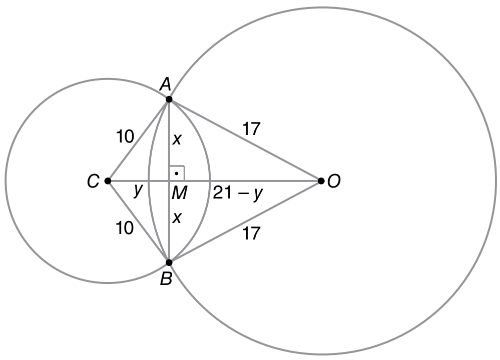


Pelo caso AA, constatamos que os triângulos ABH e AFG são semelhantes. Dessa semelhança, concluímos:

$$\frac{k}{6} = \frac{16}{10} \Rightarrow k = 9{,}6$$

Logo, a distância entre B e $\overleftrightarrow{FA}$ é 9,6 cm.

29. Como O e C equidistam de A e B, a reta $\overleftrightarrow{OC}$ é mediatriz da corda $\overline{AB}$. Sendo M o ponto comum a essa mediatriz e a essa corda, vamos indicar por x e y a medida, em centímetro, dos segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{CM}$, respectivamente:



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos AMC e AMO, obtemos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10^2 \\ x^2 + (21 - y)^2 = 17^2 \end{cases} \Rightarrow x = 8 \text{ e } y = 6$$

Logo, a corda $\overline{AB}$ mede 16 cm.

30. Como a reta $\overleftrightarrow{FE}$ é mediatriz da corda $\overline{BC}$, a corda $\overline{FE}$ é diâmetro da circunferência. Logo, o ângulo $F\hat{A}E$ é reto, pois o triângulo FAE está inscrito em uma semicircunferência de diâmetro $\overline{FE}$. Assim, os triângulos EFA e EUM são semelhantes, pelo caso AA; observe:

I. os ângulos $F\hat{A}E$ e $U\hat{M}E$ são congruentes, pois ambos são retos;

II. os ângulos $U\hat{E}M$ e $F\hat{E}A$ são congruentes, pois são ângulos coincidentes.

Alternativa **e**.

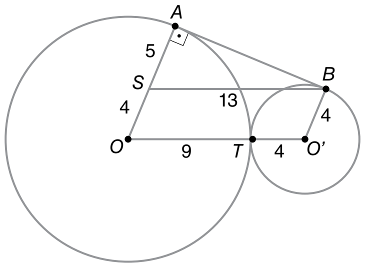
31. I. Traçando por B a reta r paralela a $\overline{OO'}$, seja S o ponto comum a r e $\overline{OA}$.

II. A reta $\overleftrightarrow{OS}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{O'B}$, pois ambas são perpendiculares a $\overline{AB}$.

III. Por I e II, temos que o quadrilátero $BSOO'$ é um paralelogramo.

IV. Os pontos O, T e O' são colineares;
logo, $OO' = OT + O'T = (9 + 4)$ cm $= 13$ cm.

V. Por III e IV, temos que $SB = 13$ cm.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *ASB*, temos:
$(AB)^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow AB = 12$
Concluímos, então, que o perímetro do quadrilátero $ABO'O$ é $(12 + 9 + 13 + 4)$ cm, ou seja, 38 cm.

32. Como cada um dos ângulos internos do triângulo equilátero mede 60°, a soma S dos comprimentos dos três arcos é igual à medida de uma semicircunferência de raio 5 cm, ou seja, $S = 5\pi$ cm.
Alternativa **d**.

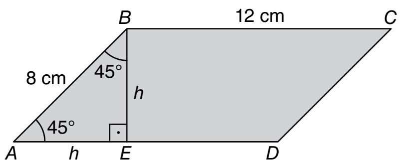
33. **a)** A medida r do raio da circunferência inserida no quadrado é metade da medida do lado do quadrado:
$$r = \frac{6}{2} \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$
Logo, o comprimento c da circunferência é
$c = 2\pi \cdot 3$ cm $= 6\pi$ cm ou, aproximadamente, 18,84 cm.

b) A medida r do raio da circunferência inscrita ao quadrado é metade da medida da diagonal do quadrado:
$$r = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$
Logo, o comprimento c da circunferência é
$c = 2\pi \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm $= 5\sqrt{2}\,\pi$ cm ou, aproximadamente, 22 cm.

c) A medida r do raio da circunferência circunscrita ao hexágono regular é igual à medida do lado do hexágono:
$r = 10$ cm
Logo, o comprimento c da circunferência é
$c = 2\pi \cdot 10$ cm $= 20\pi$ cm ou, aproximadamente, 62,8 cm.

34. $(4 + x)(6 + x) = 63 \Rightarrow x^2 + 10x - 39 = 0$
$\therefore x = -13$ (não convém) ou $x = 3$
Concluímos, então, que a área S do quadrado *CEFG* é dada por $S = 3^2$ cm², ou seja, $S = 9$ cm².

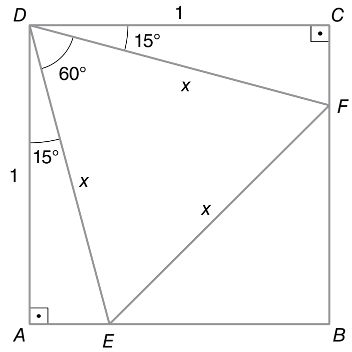
35.



Os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{A}D$ são suplementares; logo: $m(B\hat{A}D) = 45°$

Considerando a altura $\overline{BE}$, de medida h, temos que o triângulo retângulo *BEA* é isósceles, pois tem dois ângulos de mesma medida; logo: $BE = AE = h$
Temos, então:
$h^2 + h^2 = 8^2 \Rightarrow h = 4\sqrt{2}$
Concluímos, assim, que a área A do paralelogramo é dada por:
$A = (12 \cdot 4\sqrt{2})$ cm² $= 48\sqrt{2}$ cm²

36. Pelo caso LAA_O, constatamos que os triângulos *ADE* e *CDF* são congruentes. Assim, indicando por x a medida do lado do triângulo, esquematizamos:



Nos triângulos *DCF* e *DAE*, temos:
$$\cos 15° = \frac{1}{x} \Rightarrow \cos(45° - 30°) = \frac{1}{x}$$
$$\therefore \cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° = \frac{1}{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$$
$$\therefore x = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$
Logo, a área S do triângulo equilátero *DEF* é dada por:
$$S = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = 2\sqrt{3} - 3$$
Alternativa **c**.

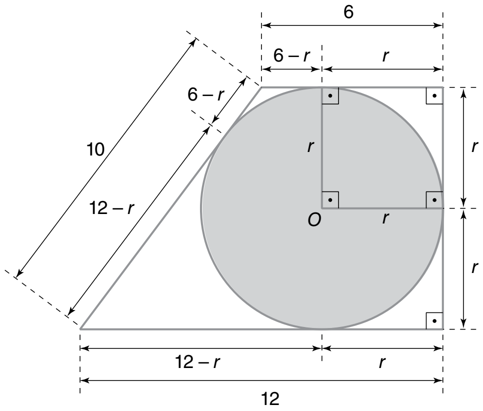
37. A área S do trapézio *ADEF* é metade da área do hexágono; logo:
$$S = \frac{\frac{3 \cdot 4^2\sqrt{3}}{2}}{2} \text{ cm}^2 \Rightarrow S = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$$
Alternativa **e**.

38. Sendo ℓ a medida do lado do quadrado, temos:
$\ell\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 3$
Assim, a medida a do lado do hexágono é $a = 2$ m e, portanto, a área A desse hexágono é dada por:
$$A = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ m}^2 = 6\sqrt{3} \text{ m}^2$$

39. Todo losango tem os quatro lados congruentes entre si; logo, a medida de cada lado do losango em questão é 10 dm.
Todo losango também é um paralelogramo cuja altura é a distância entre dois lados paralelos. Assim, sendo h a distância entre dois lados paralelos do losango em questão, temos que:
$$10 \cdot h = 96 \Rightarrow h = 9{,}6$$
Ou seja, a distância entre dois lados paralelos desse losango é 9,6 dm.

40. As diagonais de um losango são perpendiculares entre si no ponto médio de cada uma. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos a medida x do lado desse losango:
$x^2 = 6^2 + (2\sqrt{7})^2 \Rightarrow x = 8$
Todo losango também é um paralelogramo cuja altura é a distância entre dois lados paralelos. Assim, sendo h a distância entre dois lados paralelos do losango em questão, temos que:
$8 \cdot h = \dfrac{12 \cdot 4\sqrt{7}}{2} \Rightarrow h = 3\sqrt{7}$
Ou seja, a distância entre dois lados paralelos desse losango é $3\sqrt{7}$ cm.

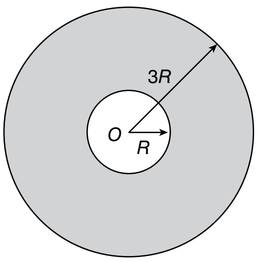
41. Indicando por r a medida do raio desse círculo, esquematizamos:



Logo, $12 - r + 6 - r = 10 \Rightarrow r = 4$.
Concluímos, então, que a área A desse círculo é dada por $A = \pi \cdot 4^2$, ou seja, $A = 16\pi$.

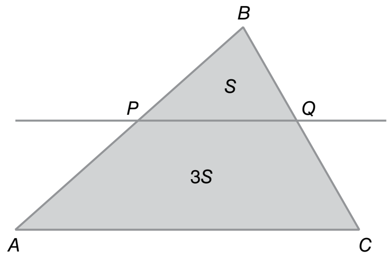
42. Pela propriedade dos ângulos opostos pelo vértice e pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, concluímos que $m(C\widehat{O}D) = 45°$ e $m(C\widehat{D}O) = 45°$. Logo, o triângulo CDO é isósceles de base $\overline{OD}$; portanto, $CD = OC = 4$ cm.
A área S_t do triângulo CDO é dada por:
$S_t = \dfrac{4 \cdot 4}{2}\ \text{cm}^2 = 8\ \text{cm}^2$
A área S_r do setor circular de raio 4 cm e ângulo central 45° é a oitava parte da área do círculo, isto é, $S_r = \dfrac{\pi \cdot 4^2}{8}\ \text{cm}^2 = 2\pi\ \text{cm}^2$.
Concluímos, então, que a área S da região laranja é dada por:
$S = S_t - S_r \Rightarrow S = (8 - 2\pi)\ \text{cm}^2$
$\therefore S = 2(4 - \pi)\ \text{cm}^2$

43.



$\pi[(3R)^2 - R^2] = 16\pi \Rightarrow R = \sqrt{2}$
Logo, o raio externo mede $3\sqrt{2}$ cm.

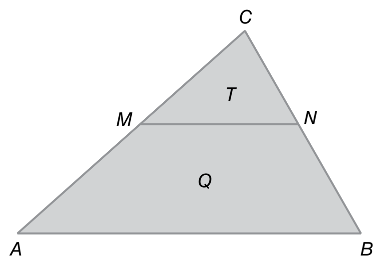
44. a) Indicando por S a área do triângulo PQB, temos que a área do trapézio $APQC$ é $3S$:



Assim, a razão entre as áreas dos triângulos ABC e PQB, nessa ordem, é dada por: $\dfrac{4S}{S} = 4$

b) Pelo caso AA, constatamos que os triângulos ABC e PQB são semelhantes; portanto, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim, concluímos:
$4 = \left(\dfrac{AB}{PB}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{AB}{PB} = 2$

45. O segmento $\overline{MN}$ é base média do triângulo, relativa à base $\overline{AB}$; logo, $\overline{MN} \,//\, \overline{AB}$ e $MN = \dfrac{AB}{2}$. Assim, os triângulos MNC e ABC são semelhantes, sendo $\dfrac{1}{2}$ a razão de semelhança.
Indicando por T e Q as áreas do triângulo MNC e do quadrilátero $ABMN$, esquematizamos:



Como a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, temos:
$\dfrac{T}{T+Q} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{T}{T+Q} = \dfrac{1}{4}$
$\therefore \dfrac{T+Q}{T} = 4 \Rightarrow \dfrac{T}{T} + \dfrac{Q}{T} = 4$
$\therefore 1 + \dfrac{Q}{T} = 4 \Rightarrow \dfrac{Q}{T} = 3$
Logo, $\dfrac{T}{Q} = \dfrac{1}{3}$.
Alternativa **e**.

46. Sejam A', B', C' e D' os simétricos de M em relação aos pontos A, B, C e D, respectivamente. Os retângulos $A'B'C'D'$ e $ABCD$ são semelhantes, e a razão de semelhança do maior para o menor é $\dfrac{2}{1}$.
Assim, indicando por S a área do retângulo maior, temos:
$\dfrac{S}{45} = \left(\dfrac{2}{1}\right)^2 \Rightarrow S = 180$
Logo, a área do retângulo $A'B'C'D'$ é 180 dm^2.

47. Dois octógonos regulares são semelhantes. Assim, indicando por ℓ a medida de um lado do octógono menor, temos:

$$\frac{72\left(1+\sqrt{2}\right)}{8\left(1+\sqrt{2}\right)}=\left(\frac{48}{8\ell}\right)^2 \Rightarrow 9=\left(\frac{6}{\ell}\right)^2$$

$$\therefore\ 3=\frac{6}{\ell} \Rightarrow \ell=2$$

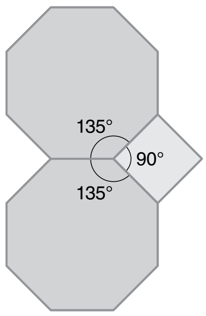
Logo, a medida do lado menor do octógono é 2 cm.

Exercícios contextualizados

48 Os ladrilhos devem ser colocados lado a lado, tendo os vértices em comum. Para que isso seja possível, a soma dos ângulos internos dos ladrilhos, em torno de cada vértice, deve ser 360°.

Observando que, necessariamente, pares de ladrilhos octogonais devem ser postos lado a lado, teremos a soma de seus ângulos adjacentes igual a 135° + 135°, ou seja, 270°. Portanto, o único ladrilho da tabela que pode se encaixar entre dois lados de ladrilhos octogonais, que têm um vértice comum, deve ter 90° em cada ângulo interno.

O único ladrilho da tabela que tem ângulos internos de 90° é o quadrado.



Alternativa **b**.

49 Considerando o maior degrau como o primeiro, temos:

- O terceiro degrau é a base média do trapézio limitado pelos lados da escada e pelo primeiro e último degrau; logo, sua medida a_3 é dada por

  $a_3=\dfrac{60+30}{2}$ cm, ou seja, $a_3 = 45$ cm.

- O quarto degrau é a base média do trapézio limitado pelos lados da escada e pelo terceiro e quinto degrau; logo, sua medida a_3 é dada por

  $a_4=\dfrac{45+30}{2}$ cm, ou seja, $a_4 = 37{,}5$ cm.

- O segundo degrau é a base média do trapézio limitado pelos lados da escada e pelo primeiro e terceiro degrau; logo, sua medida a_2 é dada por

  $a_2=\dfrac{60+45}{2}$ cm, ou seja, $a_4 = 52{,}5$ cm.

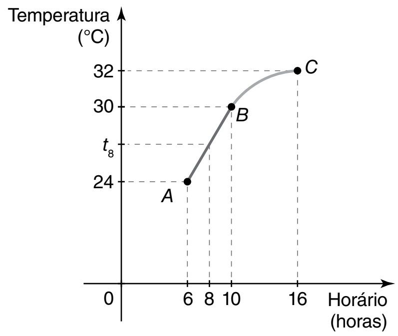
Assim, concluímos que o comprimento mínimo da peça de madeira deve ser
(60 + 52,5 + 45 + 37,5 + 30) cm, ou seja, 225 cm.
Alternativa **d**.

50. Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{100-0}{75-0}=\frac{212-32}{x-32} \Rightarrow x=167$$

Logo, 75 °C equivalem a 167 °F.

51. a) Substituindo o trecho *AB* do gráfico pelo segmento de reta $\overline{AB}$, e indicando por t_8 a temperatura às 8 horas, temos:

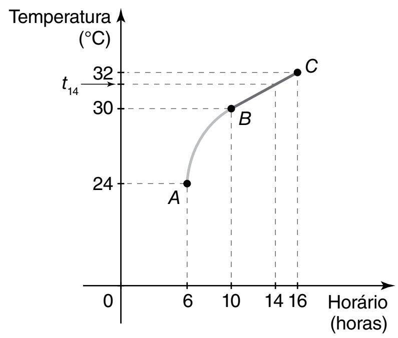


Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{30-24}{t_8-24}=\frac{10-6}{8-6} \Rightarrow t_8=27$$

Logo, às 8 horas, a temperatura nessa região era 27 °C, aproximadamente.

b) Substituindo o trecho *BC* do gráfico pelo segmento de reta $\overline{BC}$, e indicando por t_{14} a temperatura às 14 horas, temos:

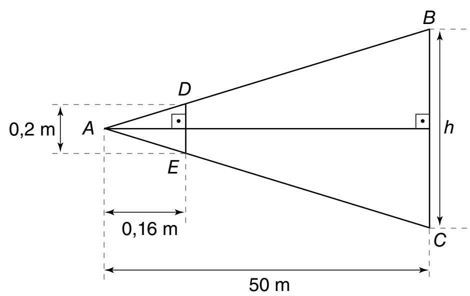


Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{32-30}{t_{14}-30}=\frac{16-10}{14-10} \Rightarrow t_{14}\approx 31{,}3$$

Logo, às 14 horas, a temperatura nessa região era 31,3 °C, aproximadamente.

52.



$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{0{,}2}{h}=\frac{0{,}16}{50}$$

$\therefore\ h = 62{,}5$

Logo, a altura do prédio é 62,5 m.

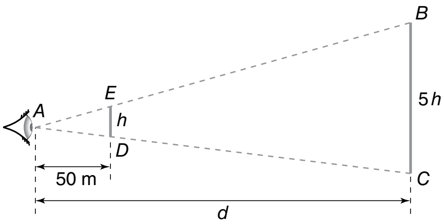
53. Pelo caso AA, observamos a semelhança entre os triângulos *ABE* e *CBD*.

Logo:

$$\frac{18}{AE}=\frac{20}{56} \Rightarrow AE=50{,}4$$

Concluímos, então, que a largura do cânion naquele trecho é 50,4 m.

54. Podemos raciocinar como se o ponto A de observação, o poste e o mastro fossem coplanares. Assim, indicando por h a altura do poste, em metro, e por d a distância, em metro, entre A e o mastro, esquematizamos:

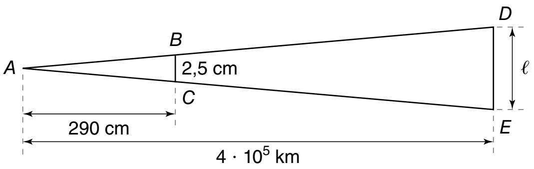


Pela semelhança entre os triângulos ABC e AED, concluímos:

$$\frac{5h}{h} = \frac{d}{50} \Rightarrow d = 250$$

Logo, o fotógrafo estava a 250 m do mastro.

55. Indicando por A o olho do observador e por $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ os diâmetros da moeda e da Lua, respectivamente, temos:



$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{290}{4 \cdot 10^5} = \frac{2{,}5}{\ell} \Rightarrow \ell \approx 3{,}45 \cdot 10^3$$

Logo, o diâmetro da Lua encontrado foi, aproximadamente, $3{,}45 \cdot 10^3$ km.

56. Temos que 2.000 km equivalem a 200.000.000 cm; logo, a escala do mapa é dada por:

$$\frac{8}{200.000.000} = \frac{1}{25.000.000}$$

Alternativa **e**.

57. Indicando por u a altura de cada quadrícula, as alturas dos desenhos I, II, III, IV e V são, aproximadamente, 9u, 9u, 6u, 4,5u e 4,5u, respectivamente.

Assim, representando as alturas reais das árvores I, II, III, IV e V por x_I, x_{II}, x_{III}, x_{IV} e x_V, respectivamente, temos:

$$\frac{1}{100} = \frac{9u}{x_I} \Rightarrow x_I = 900u$$

$$\frac{2}{100} = \frac{9u}{x_{II}} \Rightarrow x_{II} = 450u$$

$$\frac{2}{300} = \frac{6u}{x_{III}} \Rightarrow x_{III} = 900u$$

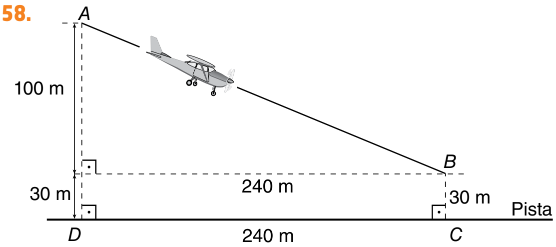
$$\frac{1}{300} = \frac{4{,}5u}{x_{IV}} \Rightarrow x_{IV} = 1.350u$$

$$\frac{2}{300} = \frac{4{,}5u}{x_V} \Rightarrow x_V = 675u$$

Logo, a árvore que apresenta a maior altura real é a representada pelo desenho IV.

Alternativa **d**.

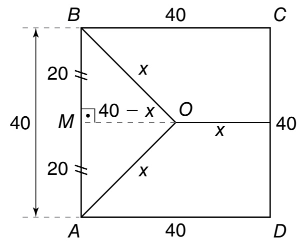
58.



$$(AB)^2 = 100^2 + 240^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AB = 260$$

Logo, o avião percorreu 260 m de A até B.

59. Sendo O o ponto onde deve ser construída a estação e x a distância em quilômetro do ponto O à reta $\overline{DC}$ e aos vértices A e B, temos:



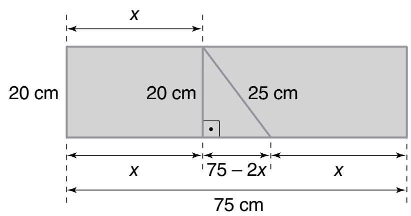
No $\triangle AOM$, temos:

$x^2 = 20^2 + (40 - x)^2 \Rightarrow x = 25$

Logo, a estação deve ser construída na perpendicular à estrada que liga C e D, passando por seu ponto médio, a 25 km da estrada.

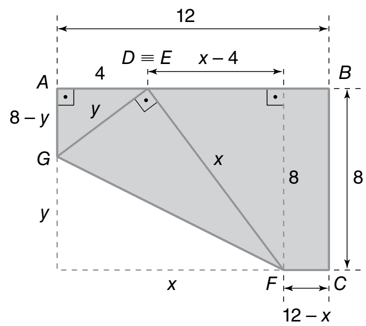
Alternativa **c**.

60.



$(75 - 2x)^2 + 20^2 = 25^2 \Rightarrow (75 - 2x)^2 = 225$; logo, $75 - 2x = \pm 15$ e, portanto, $x = 45$(não convém) ou $x = 30$. Concluímos que a base menor de cada trapézio mede 30 cm.

61. Indicando por x o comprimento FE, temos que o comprimento do segmento de reta com extremos em F e no vértice tracejado também é x; indicando por y o comprimento GD, temos que o comprimento do segmento de reta com extremos em G e no vértice tracejado também é y. Assim, esquematizamos:

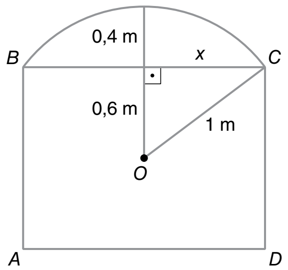


Aplicamos o teorema de Pitágoras:

$$\begin{cases}(x-4)^2+8^2=x^2 & \text{(I)}\\ 4^2+(8-y)^2=y^2 & \text{(II)}\\ x^2+y^2=(GF)^2 & \text{(III)}\end{cases}$$

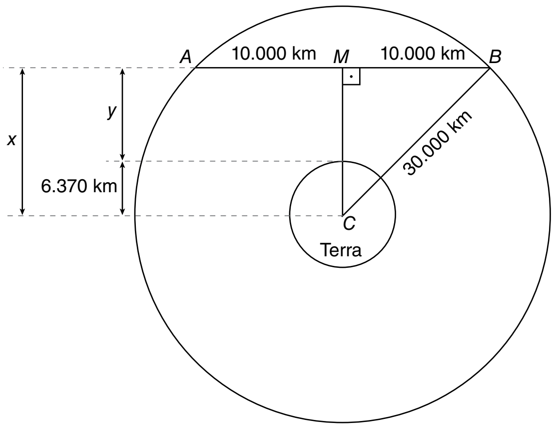
De I, temos $x = 10$; e de II, temos $y = 5$.
Substituindo em III os valores encontrados para x e y, obtemos:
$10^2 + 5^2 = (GF)^2 \Rightarrow GF = 5\sqrt{5}$
Logo, o comprimento GF é $5\sqrt{5}$ cm.

62. Indicando por x a metade da largura AD e por O o centro da circunferência que contém o arco $\overset{\frown}{BC}$, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:
$(0{,}6)^2 + x^2 = 1^2 \Rightarrow x = 0{,}8$
Logo, a largura AD é 1,6 m.
Alternativa **c**.

63. Sendo x a distância da corda ao centro da Terra e y a distância da corda à superfície terrestre, temos:



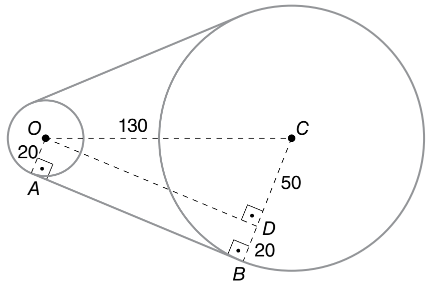
a) $x^2 + 10.000^2 = 30.000^2 \Rightarrow x^2 + 10^8 = 9 \cdot 10^8$
$\therefore x^2 = 8 \cdot 10^8$
$\therefore x = 2 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{2} = 20.000\sqrt{2}$
Logo, a menor distância entre o asteroide e o centro da Terra é $20.000\sqrt{2}$ km.

b) $y = \left(20.000\sqrt{2} - 6.370\right)$ km $= 21.630$ km

64. a) O segmento de reta que liga o ponto C ao ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ é a mediana do triângulo retângulo ABC, relativa à hipotenusa. Logo, o comprimento AM é metade do comprimento da hipotenusa, isto é, $AM = 10$ m.

b) Um triângulo retângulo é inscritível em uma semicircunferência; logo, o fotógrafo poderia se posicionar em qualquer ponto de uma semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$, desde que fosse possível visualizar A e B.

65. Os raios $\overline{OA}$ e $\overline{CB}$ são perpendiculares à reta tangente $\overleftrightarrow{AB}$ nos pontos A e B. Traçando por O a reta r, paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, e indicando por D o ponto comum a r e $\overline{CB}$, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OCD, temos:

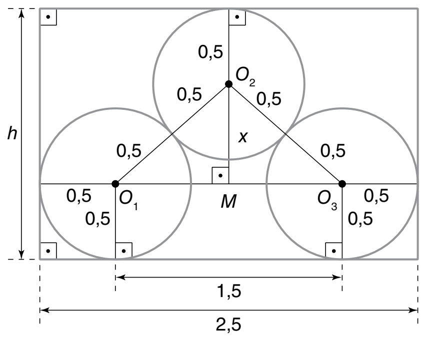
$$(AB)^2 + 50^2 = 130^2 \Rightarrow AB = 120$$

Ou seja, a distância entre os pontos de tangência A e B é 120 cm.

66. Lembramos que:

- em duas circunferências tangentes, os centros e ponto de tangência são colineares;
- se uma reta tangencia uma circunferência, então o raio da circunferência é perpendicular à reta no ponto de tangência;
- a altura de um triângulo isósceles, relativa à sua base, coincide com a mediana.

Assim, esquematizamos:



Observando que $O_1M = 0{,}75$ m, calculamos a altura x do triângulo isósceles $O_1O_2O_3$:
$x^2 + 0{,}75^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 = 0{,}4375$
$\therefore x^2 = \dfrac{4.375}{10.000} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$
Concluímos, então, que $h = \left(0{,}5 + \dfrac{\sqrt{7}}{4} + 0{,}5\right)$ m, ou seja, $h = \left(1 + \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$ m.
Alternativa **e**.

67. Sendo r a medida do raio de cada pneu, sob a especificação do manual do proprietário, a medida do raio de cada pneu, fora da especificação, de acordo com o enunciado, será $1{,}01r$. Logo, a distância percorrida em cada volta dos pneus, fora de especificação, será: $2\pi \cdot 1{,}01r$, ou seja, $2\pi r + 0{,}01 \cdot 2\pi r$
Note, portanto, que a distância percorrida em uma hora será 1% maior que a registrada no velocímetro. Assim, concluímos que, quando o velocímetro registrar 120 km/h, a velocidade real do veículo será $(120 + 0{,}01 \cdot 120)$ km/h, ou seja, 121,2 km/h.
Alternativa **b**.

68. **a)** Como 1 h = $3{,}6 \cdot 10^3$ s e a velocidade do próton é $2{,}3 \cdot 10^5$, temos que a distância d, em quilômetro, percorrida pelo próton nesse tempo é dada por:
$d = 2{,}3 \cdot 10^5 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 \Rightarrow d = 8{,}28 \cdot 10^8$
Logo, em 1 h, o próton percorre a distância de $8{,}28 \cdot 10^8$ km.

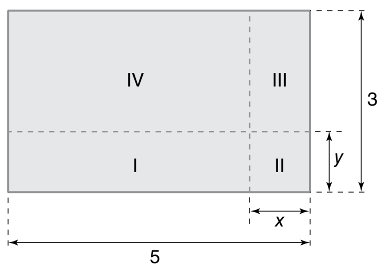
b) Como a aproximação com cinco casas decimais para o número π é 3,14159, e o raio R do anel é 4,3 km, temos que o comprimento c do anel, em quilômetro, é dado por:
$c = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14159 \cdot 4{,}3 \Rightarrow c = 27{,}017674$
Logo, o número n de voltas dadas pela partícula nesse anel é dado por:
$$n = \frac{8{,}28 \cdot 10^8}{2{,}7017674 \cdot 10} \Rightarrow n = 3{,}064660563 \cdot 10^7$$
ou seja:
$n = 30.646.605{,}63$
Assim, em 1 h, o próton deu 30.646.605 voltas completas no anel.

69. O período p, em hora, da órbita da Lua é dado por:
$$3.683 \cdot p = 2 \cdot \pi \cdot 384.400 \Rightarrow p \approx 655{,}45$$
O tempo t, em hora, necessário para que o foguete percorra, em linha reta, a distância entre a superfície da Terra e a órbita da Lua é dado por:
$$45.000 \cdot t = 384.400 - 6.400 \Rightarrow t = 8{,}4$$
O tempo pedido é calculado por:
$$p - t \approx (655{,}45 - 8{,}4)\text{h} \Rightarrow p - t \approx 647 \text{ h}$$
Ou seja, se nesse momento a Lua passou pelo zênite, sobre T, então daqui a 647 horas o foguete deverá partir.

70. As áreas A_R, A_P e A_Z de um azulejo retangular, da parede e de um azulejo quadrado são dadas, respectivamente, por:
$A_R = 20 \cdot 10 \text{ cm}^2 = 200 \text{ cm}^2$
$A_P = 600 \cdot 200 \text{ cm}^2 = 120.000 \text{ cm}^2$
$A_Z = 25^2 \text{ cm}^2 = 625 \text{ cm}^2$
Assim, o número n de azulejos necessários para revestir a parede é obtido por:
$$n = \frac{A_P}{A_Z} = \frac{120.000}{625} \Rightarrow n = 192$$

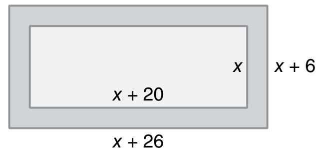
71. $(26 + x)(10 + x) = 398{,}25 \Rightarrow x^2 + 36x - 138{,}25 = 0$
$\therefore x = 3{,}5$ ou $x = -39{,}5$ (não convém)
Logo, o lado do quadrado reservado à churrasqueira mede 3,5 m.

72. Numerando os retângulos separados pelas linhas tracejadas da figura, temos:



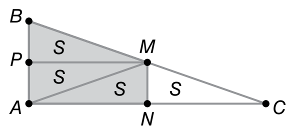
Assim, a área A perdida é dada pela soma das áreas dos retângulos I, II e III, isto é:
$$A = y(5 - x) + x(3 - y) + xy \Rightarrow A = 5y + 3x - xy$$
Alternativa **e**.

73. Indicando por x a largura do jardim, em metro, esquematizamos:



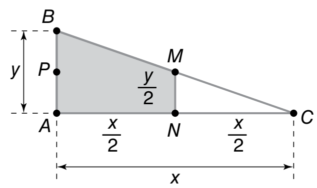
Assim, concluímos que:
$(x + 26)(x + 6) = 576 \Rightarrow x^2 + 32x + 420 = 0$
$\therefore x = 10$ ou $x = -42$ (não convém)
Logo, o jardim é um retângulo com 30 m de comprimento por 10 m de largura.

74. Traçando os segmentos $\overline{PM}$ e $\overline{PN}$, temos que $\overline{PM}$, $\overline{PN}$ e $\overline{MN}$ são bases médias do triângulo ABC; logo:
$\overline{PM} // \overline{AC}$ e $PM = \frac{AC}{2}$; $\overline{PN} // \overline{BC}$ e $PN = \frac{BC}{2}$; e $\overline{MN} // \overline{AB}$ e $MN = \frac{AB}{2}$. Assim, pelo caso LLL, os triângulos APN, BPM, MNA e MNC são congruentes entre si; portanto, todos eles têm a mesma área S:



Concluímos, então, que a área a ser calçada corresponde ao triplo da área do triângulo MNC.
Alternativa **e**.

Outro modo
O segmento $\overline{MN}$ é base média do triângulo ABC, relativa à base $\overline{AB}$; logo, $\overline{MN} // \overline{AB}$ e $MN = \frac{AB}{2}$. Assim, indicando por x a medida AC e por y a medida AB, esquematizamos:



Logo:
- a área S_{ABMN} do trapézio $ABMN$ é calculada por:
$$S_{ABMN} = \frac{\left(y + \frac{y}{2}\right) \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{3xy}{8}$$
- a área S_{MNC} do triângulo MNC é calculada por:
$$S_{MNC} = \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2}}{2} = \frac{xy}{8}$$

Concluímos, então, que $S_{ABMN} = 3 \cdot S_{MNC}$.
Alternativa **e**.

75. Indicando por S_I, S_{II}, S_{III} e S_{IV} as áreas dos ambientes I, II, III e IV, respectivamente, temos:
- $S_I = 5 \cdot 8 \text{ m}^2 = 40 \text{ m}^2$; logo, o aquecedor ideal para o ambiente I é o do modelo B;
- $S_{II} = 6 \cdot 5 \text{ m}^2 = 30 \text{ m}^2$; logo, o aquecedor ideal para o ambiente II é o do modelo A;
- $S_{III} = 4 \cdot 6 \text{ m}^2 = 24 \text{ m}^2$; logo, o aquecedor ideal para o ambiente III é o do modelo A;
- $S_{IV} = \frac{(6 + 4) \cdot 7}{2} \text{ m}^2 = 35 \text{ m}^2$; logo, o aquecedor ideal para o ambiente IV é o do modelo B.

Alternativa **c**.

76. A área do jardim menor é 100π m^2 e a área do maior é 169π m^2. Assim, o tempo *t* para a irrigação do jardim maior pode ser calculado pela regra de três:

Área (m^2)		Tempo (h)
100π	———	3
169π	———	t

Logo, $t = 5{,}07$ *h*, ou seja, $t = 5$ h 4 min 12 s.
Alternativa **c**.

77. Dividindo o comprimento da folha, 80 cm, pelo diâmetro do círculo, 10 cm, concluímos que no comprimento do retângulo obtemos 8 círculos. Analogamente, dividindo a largura da folha, 60 cm, pelo diâmetro do círculo, 10 cm, concluímos que na largura do retângulo obtemos 6 círculos. Assim, o maior número possível de círculos que podemos recortar é dado pelo produto $8 \cdot 6$, ou seja, 48. A diferença entre a área da folha e a área dos 48 círculos recortados é a área A dos pedaços remanescentes, ou seja:

$$A = (80 \cdot 60 - 48 \cdot \pi \cdot 5^2)\ \text{cm}^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = (4.800 - 1.200\pi)\ \text{cm}^2$$

Alternativa **a**.

78. **a)** O comprimento de cada uma das semicircunferências que limitam o campo é πr; assim, temos:

$$x + x + \pi r + \pi r = 400 \Rightarrow x = 200 - \pi r$$

Logo, a área A do campo, em função de *r*, é dada por:

$$A = (200 - \pi r) \cdot 2r + \pi r^2 \Rightarrow A = -\pi r^2 + 400r$$

b) A função $A = -\pi r^2 + 400r$ tem como gráfico um arco de parábola com a concavidade voltada para baixo. A abscissa r_V do vértice dessa parábola é dada por $r_V = \dfrac{200}{\pi}$. Assim, o campo terá a maior área possível se o raio dos semicírculos for igual a $\dfrac{200}{\pi}$ m.

c) A área máxima A_M é a ordenada do vértice da parábola descrita no item **b**, isto é:

$$A_M = \frac{40.000}{\pi}\ \text{m}^2$$

79. A área A_0 da coroa circular à temperatura de 10 °C é dada por:

$$A_0 = (\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2)\ \text{cm}^2 = 3\pi\ \text{cm}^2$$

Assim, depois de um aumento de 90 °C na temperatura, a área da coroa passou para o valor A dado por:

$$A = 3\pi(1 + 2{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot 90)\ \text{cm}^2 \Rightarrow A \approx 9{,}44\ \text{cm}^2$$

80. Indicando por A_M a área do mapa, em centímetro quadrado, temos:

$$\frac{4{,}428}{A_M} = \frac{1{,}440}{100} \Rightarrow A_M = 307{,}5$$

Indicando por A_P a área do estado do Piauí, temos:

$$\frac{A_M}{A_P} = \left(\frac{1}{2.860.00}\right)^2 \Rightarrow \frac{307{,}5}{A_P} = \frac{1}{2.860.000^2}$$

$\therefore A_P = 2{,}515227 \cdot 10^{15}$ cm^2

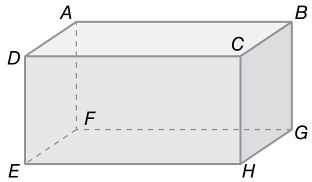
Dividindo esse resultado por 10^{10}, obtemos a área aproximada do estado do Piauí, em quilômetro quadrado: $A_p = 251.522{,}7$ km^2

Pré-requisitos para o capítulo 11

1. **a)** Além da caixa de sapatos e do tijolo, podemos citar os seguintes objetos com a forma de paralelepípedo reto-retângulo: um livro, uma caixa de fósforos, uma caixa de leite longa vida, o baú de um caminhão, um forno de micro-ondas etc.

b) O paralelepípedo possui 6 faces, 12 arestas e 8 vértices.

c) No paralelepípedo representado abaixo, as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ pertencem à mesma face, e as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{EH}$ não pertencem à mesma face.

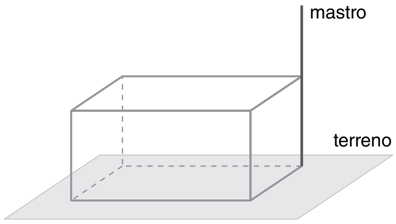


d) No paralelepípedo representado no item **c**, as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ pertencem ao mesmo plano, e as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CH}$ não pertencem ao mesmo plano.

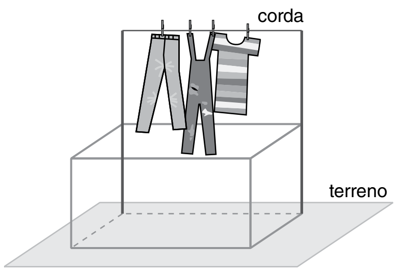
e) Um segmento possível é aquele que tem como extremos os vértices *B* e *H* do paralelepípedo representado no item **c**.

f) Um segmento possível é aquele que tem como extremos os vértices *A* e *H* do paralelepípedo representado no item **c**.

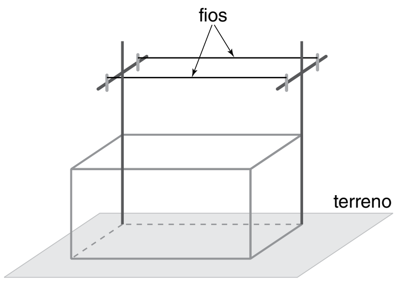
2. **a)** Podemos usar a representação do paralelepípedo reto-retângulo como figura auxiliar, para visualizar melhor o espaço tridimensional.



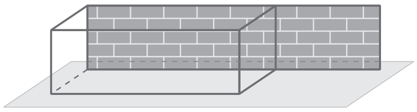
b) Usando o paralelepípedo reto-retângulo como figura auxiliar, temos:



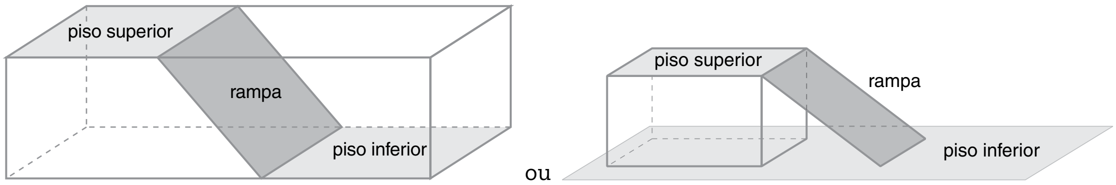
c) Usando o paralelepípedo reto-retângulo como figura auxiliar, temos:



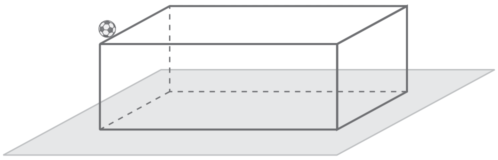
d) Usando o paralelepípedo reto-retângulo como figura auxiliar, temos:



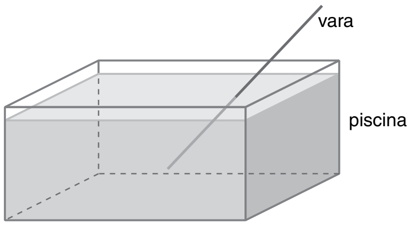
e) A representação do paralelepípedo reto-retângulo como figura auxiliar sempre oferece uma visualização melhor das figuras tridimensionais. Observe:



f) Até que se consiga visualizar o espaço tridimensional, é conveniente o uso do paralelepípedo reto-retângulo como figura auxiliar.



g) O paralelepípedo reto-retângulo ajuda na visualização.



Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. Quanto menor a medida do lado de cada quadradinho e quanto maior o número de sobreposições diferentes, mais precisa será a medida.

2. Resposta pessoal.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno se esqueceu de considerar que as medidas dos lados de um triângulo só podem ser representadas por números reais positivos.

Resolução correta:
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:
$(3 - 2x)^2 = (1 - x)^2 + 3^2 \Rightarrow 9 - 12x + 4x^2 = 1 - 2x + x^2 + 9$
$\therefore\ 3x^2 - 10x - 1 = 0$
O discriminante dessa equação do 2º grau é dado por:
$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 112$
Logo:

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{112}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 4\sqrt{7}}{6} \Rightarrow x = \frac{5 + 2\sqrt{7}}{3} \text{ ou } x = \frac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$$

Como as medidas dos lados de um triângulo são números reais estritamente positivos, temos as seguintes condições para a existência dessas medidas:
$m(\overline{AC}) = 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$ (I)

$m(\overline{BC}) = 3 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$ (II)

De I ∩ II, temos $x < 1$.

Logo, o único valor possível para x é $\frac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$.