Segunda, 18 de julho de 2011

Problema 1. Para qualquer conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de quatro inteiros positivos distintos, a soma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ é denotada por s_A. Seja n_A o número de pares de índices (i, j), com $1 \leq i < j \leq 4$, para os quais $a_i + a_j$ divide s_A.
Encontre todos os conjuntos A de quatro inteiros positivos distintos para os quais n_A alcança o seu valor máximo.

Problema 2. Seja $\mathcal{S}$ um conjunto finito de dois ou mais pontos do plano. Em $\mathcal{S}$ não há três pontos colineares. Um *moinho de vento* é um processo que começa com uma reta ℓ que passa por um único ponto $P \in \mathcal{S}$. Roda-se ℓ no sentido dos ponteiros do relógio ao redor do *pivot* P até que a reta encontre pela primeira vez um outro ponto de $\mathcal{S}$, que denotaremos por Q. Com Q como novo pivot, a reta continua a rodar no sentido dos ponteiros do relógio até encontrar outro ponto de $\mathcal{S}$. Este processo continua sem parar, sendo sempre o pivot algum ponto de $\mathcal{S}$.
Demonstre que se pode escolher um ponto $P \in \mathcal{S}$ e uma reta ℓ que passa por P tais que o moinho de vento resultante usa cada ponto de $\mathcal{S}$ como pivot infinitas vezes.

Problema 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real definida no conjunto dos números reais que satisfaz

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

para quaisquer números reais x e y.
Demonstre que $f(x) = 0$ para todo $x \leq 0$.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Terça, 19 de julho de 2011

Problema 4. Seja n um inteiro positivo. Temos uma balança de dois pratos e n pesos cujas massas são 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Devemos colocar os pesos na balança, um por um, de tal forma que o prato direito nunca seja mais pesado do que o prato esquerdo. A cada passo, devemos escolher um dos pesos que ainda não estejam na balança e colocá-lo sobre o prato esquerdo ou sobre o prato direito, procedendo assim até que todos os pesos tenham sido colocados nela.
Determine o número de maneiras em que isso pode ser feito.

Problema 5. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^*$ uma função do conjunto dos inteiros para o conjunto dos inteiros positivos. Supomos que para quaisquer inteiros m e n, a diferença $f(m) - f(n)$ é divisível por $f(m-n)$.
Demonstre que, para todos os inteiros m e n com $f(m) \leq f(n)$, o número $f(n)$ é divisível por $f(m)$.

Problema 6. Seja ABC um triângulo acutângulo cuja circunferência circunscrita é Γ. Seja ℓ uma reta tangente a Γ e sejam ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c as retas obtidas ao refletir ℓ em relação às retas BC, CA e AB, respectivamente.
Demonstre que a circunferência circunscrita ao triângulo determinado pelas retas ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c é tangente à circunferência Γ.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos