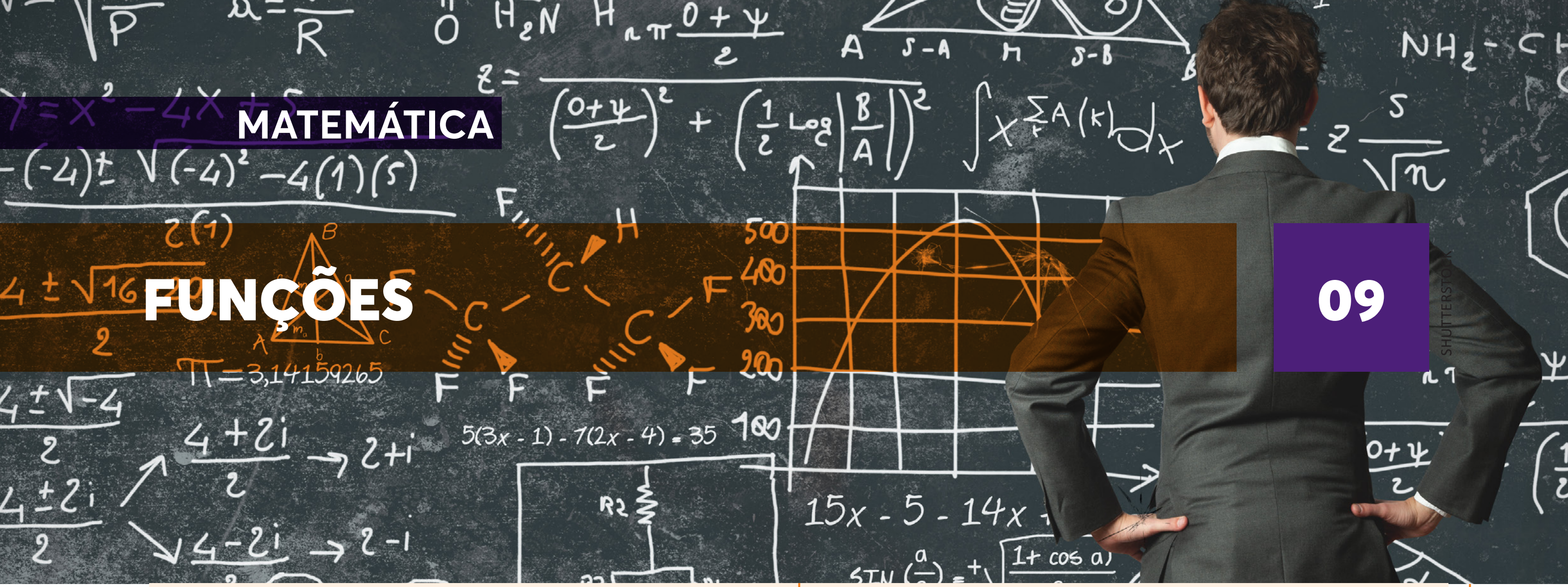
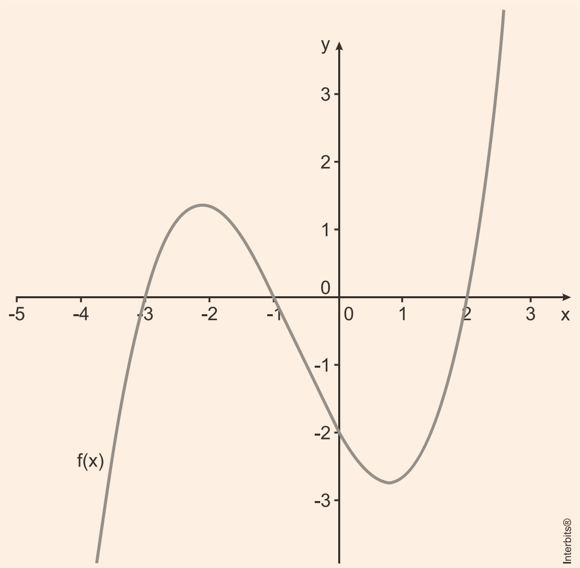


FUNÇÕES

09

01| O gráfico a seguir representa a função polinomial $f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$.

O valor de $a+b+c+d$ é:



A -2

B $-\frac{5}{3}$

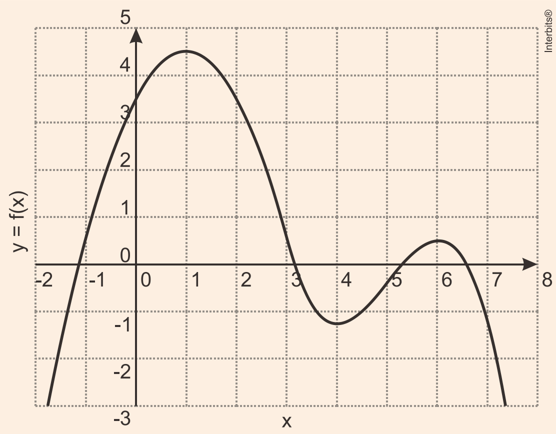
C $\frac{1}{3}$

D $\frac{7}{3}$

E 2

02| A respeito da função representada no gráfico abaixo, considere as seguintes afirmativas:

1. A função é crescente no intervalo aberto $(4, 6)$.
2. A função tem um ponto de máximo em $x = 1$.
3. Esse gráfico representa uma função injetora.
4. Esse gráfico representa uma função polinomial de terceiro grau.



Assinale a alternativa correta.

A Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.

B Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

C Somente as afirmativas 3 e 4 são verdadeiras.

D Somente as afirmativas 1, 2 e 4 são verdadeiras.

E Somente as afirmativas 2, 3 e 4 são verdadeiras.

03| Um professor de matemática apresentou a seguinte função quadrática para os seus alunos: $F_1(x) = x^2 - 2x + 1$. Em seguida, começou a alterar os valores do termo independente de x dessa função, obtendo três novas funções:

$F_2(x) = x^2 - 2x + 8;$

$F_3(x) = x^2 - 2x + 16;$

$F_4(x) = x^2 - 2x + 32.$

Sobre os gráficos de $F_2(x)$, $F_3(x)$ *e* $F_4(x)$, em relação ao gráfico da função $F_1(x)$, é CORRETO afirmar que

A interceptarão o eixo “x” nos mesmos pontos.

B interceptarão o eixo “y” nos mesmos pontos.

C terão o mesmo conjunto imagem.

D terão a mesma abscissa (terão o mesmo “x” do vértice).

E terão a mesma ordenada (terão o mesmo “y” do vértice).

04| A função definida por $f(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$, onde a, b e c são constantes reais, representa quanto José tinha em sua carteira ao final de cada um dos últimos 31 dias. Assim, x é um número natural tal que $1 \le x \le 31$ e $f(x)$ é o valor, em reais, que José tinha em sua carteira no final do dia x. Da mesma forma, a função $g(x)=mx+n$ onde m e n são constantes reais, representa quanto Paulo tinha em sua carteira ao final de cada um dos últimos 31 dias. Sabe-se que no final do:

- primeiro dia, José e Paulo não tinham dinheiro em suas carteiras.
- segundo dia, Paulo tinha R$ 7,00.
- dia 16, José tinha R$ 120,00.
- dia 31, José não tinha dinheiro em sua carteira.

Com base nestas informações, é CORRETO afirmar que

A ao final do dia x, a soma dos valores que José e Paulo tinham nas carteiras é $S=\frac{-8}{15}(x-1)^2+23(x-1)$.

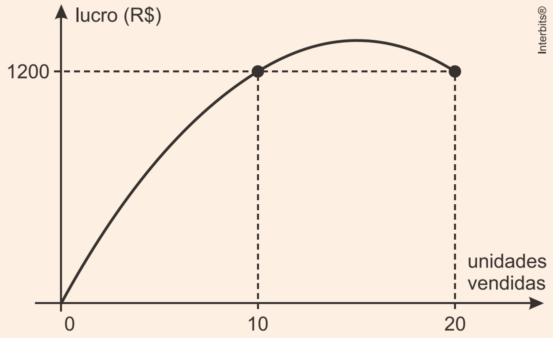
B ao final do dia 18, José tinha R$ 5,00 a mais do que Paulo.

C a expressão da função que representa a soma dos valores que José e Paulo têm na carteira no dia x é um polinômio de grau 3.

D $f(x)=-x^2+32x-31$.

E Paulo nunca teve em sua carteira um valor maior do que José.

05| O lucro de uma pequena empresa é dado por uma função quadrática cujo gráfico está representado na figura abaixo:



Podemos concluir que o lucro máximo é de:

A R$ 1.280,00

B R$ 1.400,00

C R$ 1.350,00

D R$ 1.320,00

E R$ 1.410,00

06| Se x e y são números reais tais que $5y+2x=10$, então, o menor valor que x^2+y^2 pode assumir é

A $\frac{70}{13}$.

B $\frac{97}{17}$.

C $\frac{100}{29}$.

D $\frac{85}{31}$.

07| Considere o polinômio p definido por $p(x)=x^2+2(n+2)x+9n$.

Se as raízes de $p(x)=0$ são iguais, os valores de n são

A 1 e 4.

B 2 e 3.

C -1 e 4.

D 2 e 4.

E 1 e -4.

08| Uma parábola P_1 de equação $y=x^2+bx+c$, quando refletida em relação ao eixo x, gera a parábola P_2. Transladando horizontalmente P_1 e P_2 em sentidos opostos, por quatro unidades, obtemos parábolas de equações $y=f(x)$ e $y=g(x)$.

Nas condições descritas, o gráfico de $y=(f+g)(x)$ necessariamente será

A uma reta.

B uma parábola.

C uma hipérbole.

D uma exponencial.

E um círculo.

09| Dadas as funções f e g, definidas por $f(x)=x^2+1$ e $g(x)=x$, o intervalo tal que $f(x)>g(x)$ é

A $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

B $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$

C $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$

D $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$

E $(-\infty, +\infty).$

10| Durante 16 horas, desde a abertura de certa confeitaria, observou-se que a quantidade $q(t)$ de unidades vendidas do doce "amor em pedaço", entre os instantes $(t-1)$ e t, é dada pela lei $q(t) = \left||t-8| + t - 14\right|$, em que t representa o tempo, em horas, e $t \in \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$.

É correto afirmar que

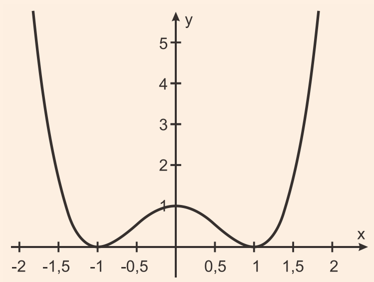
A entre todos os instantes foi vendida, pelo menos, uma unidade de "amor em pedaço".

B a menor quantidade vendida em qualquer instante corresponde a 6 unidades.

C em nenhum momento vendem-se exatamente 2 unidades.

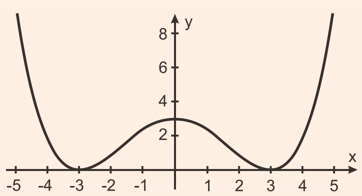
D o máximo de unidades vendidas entre todos os instantes foi 10.

11| Sabendo-se que o gráfico da função $y = f(x)$ é

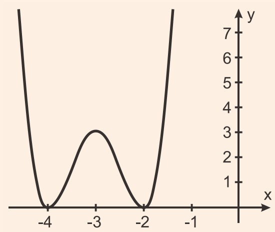


o gráfico que melhor representa a função $y = 3f(x-3)$ é

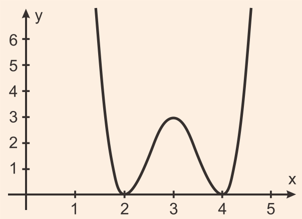
A



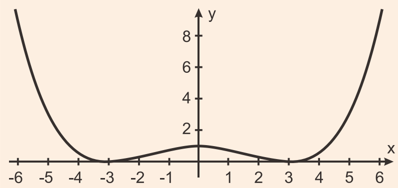
B



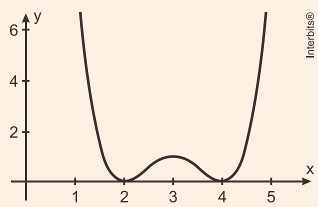
C



D



E



12| Os gráficos de $f(x) = 2$ e $g(x) = x^2 - |x|$ têm dois pontos em comum. O valor da soma das abscissas dos pontos em comum é igual a

A 0

B 4

C 8

D 10

E 15

13| Seja f uma função real tal que $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x - 1,$ para todo x real não nulo.

Sendo $0 < è < \frac{ð}{2},$ o valor de $f(\text{sen}^2\ è)$ é:

A) sen^2 è

B) $\cos^2$ è

C) tg^2 è

D) $\sec^2$ è

E) cos sec^2 è

14| A função real de variável real definida por $f(x) = \frac{2x+3}{4x+1}$, para $x \neq -\frac{1}{4}$ é invertível. Sua inversa g pode ser expressa na forma $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, onde a, b, c e d são números inteiros.

Nessas condições, a soma $a+b+c+d$ é um número inteiro múltiplo de

A) 6.

B) 5.

C) 4.

D) 3.

15| Seja $f(x)$ uma função tal que para todo número real x temos que $xf(x-1) = (x-3)f(x)+3$. Então, $f(1)$ é igual a

A) 0.

B) 1.

C) 2.

D) 3.

16| Se f é a função real de variável real definida por $f(x) = \log(4-x^2) + \sqrt{4x-x^2}$, então, o maior domínio possível para f é

Dados: $\log x \equiv$ logaritmo de x na base 10

A) {números reais x tais que $0 \leq x < 4$}.

B) {números reais x tais que $2 < x < 4$}.

C) {números reais x tais que $-2 < x < 4$}.

D) {números reais x tais que $0 \leq x < 2$}.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Leia o gráfico referente ao rendimento médio mensal na Região Metropolitana de Belo Horizonte (BH), no período de 2010 a 2013, para responder à(s) questão(ões).

17| Índices ou coeficientes como o IDH ou o de Gini servem para que a comparação dos dados de países ou regiões seja realizada de modo mais objetivo.

Suponha que seja criado o Coeficiente de Desigualdade do Rendimento entre os Sexos, o $CDRS$. Quando o $CDRS$ é igual a zero, há ausência de desigualdade de rendimento entre os sexos; quando o $CDRS$ é igual a 1, a desigualdade é dita plena e, nesse caso, o rendimento dos homens supera em muito o rendimento das mulheres.

Para calcular o $CDRS$ deve-se utilizar a seguinte fórmula:

$$CDRS = 1 - \left(\frac{M \cdot R_M}{H \cdot R_H}\right),$$

sendo:

- M, o número de mulheres de uma determinada região;

- R_M, a média mensal dos rendimentos das mulheres dessa região;

- H, o número de homens dessa mesma região; e

- R_H, a média mensal dos rendimentos dos homens dessa região.

Com base na série histórica dos rendimentos de homens e de mulheres, observou-se que a razão $\frac{M \cdot R_M}{H \cdot R_H}$ pertence ao intervalo real $[0, 1]$.

Admita que na região metropolitana de BH, em 2013, havia $1.200.000$ mulheres e $1.000.000$ de homens.

O valor do $CDRS$ para a região metropolitana de BH em 2013 é, aproximadamente, igual a

A) 0,12

B) 0,16

C) 0,20

D) 0,24

E) 0,28

GABARITO

01| B

Calculando:

Das intersecções do gráfico, tem-se:

$f(x) = a(x-2)(x+1)(x+3)$

se $a = 1$:

$f'(0) = (0-2)(0+1)(0+3) = -6 \Rightarrow$ intersecção em $(-6, 0)$

mas a intersecção é $(-2, 0) \Rightarrow a = 1/3$

$f(x) = \frac{1}{3}(x-2)(x+1)(x+3)$

$a+b+c+d = \frac{1}{3} + 2 - 1 - 3 = -\frac{5}{3}$

02| A

[1] Verdadeira. Com efeito, pois para quaisquer $x_1, x_2 \in (4, 6)$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.

[2] Verdadeira. Vamos supor que o domínio de f seja o conjunto dos números reais. Logo, desde que, para todo elemento x do domínio de f, se verifica $f(x) \le f(1)$, podemos concluir que f tem um ponto de máximo em $x = 1$.

[3] Falsa. Basta observar que f possui mais de uma raiz real.

[4] Falsa. O gráfico de f corta o eixo das abscissas em quatro pontos. Logo, f possui no mínimo quatro raízes reais e, portanto, não pode ser uma função polinomial de terceiro grau.

03| D

[A] Falsa, pois terão raízes distintas (facilmente comprovado pelas Relações de Girard).

[B] Falsa, pois se substituirmos x por zero em cada uma das funções, percebe-se que elas cortam o eixo y em diferentes pontos.

[C] Falsa, pois terão raízes distintas.

[D] Verdadeira, pois o “x” do vértice independe do valor do termo independente.

[E] Falsa, pois o “y” do vértice depende do valor do termo independente.

04| A

Sabendo que $f(1) = 0$, $f(16) = 120$ e $f(31) = 0$, temos

$$\begin{vmatrix} c = 0 \\ 225a + 15b = 120 \\ 900a + 30b = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} c = 0 \\ 15a + b = 8 \\ b = -30a \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} c = 0 \\ b = 16 \\ a = -\frac{8}{15} \end{vmatrix}.$$

Logo, vem $f(x) = -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1)$.

Por outro lado, se $g(1) = 0$ e $g(2) = 7$ então

$$\begin{vmatrix} m + n = 0 \\ 2m + n = 7 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m = 7 \\ n = -7 \end{vmatrix}.$$

Daí, temos $g(x) = 7x - 7$.

[A] Verdadeira. De fato, pois

$$f(x) + g(x) = -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1) + 7(x-1)$$
$$= -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 23(x-1).$$

[B] Falsa. Tem-se que

$$f(18) - g(18) = -\frac{8}{15}(18-1)^2 + 9(18-1)$$
$$= \frac{2159}{15}$$
$$> \frac{75}{15}.$$

[C] Falsa. Conforme [A].

[D] Falsa. Na verdade, sabemos que $f(x) = -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1)$.

[E] Falsa. Suponhamos, por absurdo, que $g(x) - f(x) \le 0$, para todo natural x, com $1 \le x \le 31$.

Tem-se que

$$7(x-1)+\frac{8}{15}(x-1)^2-16(x-1)\le 0 \Leftrightarrow \frac{8}{15}(x-1)^2-9(x-1)\le 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x-\frac{143}{8}\right)\le 0$$
$$\Leftrightarrow 1\le x\le 17.$$

Portanto, existem valores de x, com $1\le x\le 31$, para os quais $g(x)-f(x)>0$. Contradição.

05| C

Seja $L=ax^2+bx+c$, com L sendo o lucro obtido com a venda de x unidades. É fácil ver que $c=0$. Ademais, como a parábola passa pelos pontos $(10, 1200)$ e $(20, 1200)$, temos

$$\begin{cases}100a+10b=1200\\400a+20b=1200\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-6\\b=180\end{cases}.$$

Portanto, segue que

$$L=-6x^2+180x=1350-6(x-15)^2.$$

O lucro máximo ocorre para $x=15$ e é igual a R\$ 1.350,00.

06| C

Desde que $y=\dfrac{10-2x}{5}$, temos

$$x^2+y^2=x^2+\left(\frac{10-2x}{5}\right)^2$$
$$=\frac{1}{25}\cdot(29x^2-40x+100).$$

Logo, sendo $-\dfrac{(-40)^2-4\cdot 29\cdot 100}{4\cdot 29}=\dfrac{2500}{29}$ o valor mínimo de $29x^2-40x+100$, podemos concluir que o resultado é $\dfrac{1}{25}\cdot\dfrac{2500}{29}=\dfrac{100}{29}$.

07| A

Fazendo $P(x)=0$, temos:

$$0=x^2+2(n+2)x+9n.$$

Para que as duas raízes sejam iguais devemos considerar o discriminante nulo.

$$\Delta=0$$
$$(2\cdot(n+2))^2-4\cdot 1\cdot 9n=0$$
$$4\cdot\left(n^2+4n+4-9n\right)=0$$
$$n^2-5n+4=0\Rightarrow n=1 \text{ ou } n=4$$

08| A

É imediato que a equação de P_2 é $y=-x^2-bx-c$. Agora, devemos considerar dois casos: (i) P_1 deslocada para a esquerda e P_2 deslocada para a direita; (ii) P_1 deslocada para a direita e P_2 deslocada para a esquerda.

No primeiro caso, temos $f(x)=(x+4)^2+b(x+4)+c$ e $g(x)=-(x-4)^2-b(x-4)-c$. Logo, vem

$$\begin{aligned}(f+g)(x)&=f(x)+g(x)\\&=(x+4)^2+b(x+4)+c-(x-4)^2-b(x-4)-c\\&=16x+8b.\end{aligned}$$

Por outro lado, no segundo caso, de maneira inteiramente análoga, encontramos $(f+g)(x)=-16x-8b$.

Assim, em qualquer caso, o gráfico de $y=(f+g)(x)$ é uma reta.

09| E

$$f(x)>g(x)$$
$$x^2+1>x$$
$$x^2-x+1>0$$

A equação $x^2-x+1=0$ não possui raízes reais, logo $x^2-x+1>0$ para todo o x, concluímos que a solução desta inequação é o conjunto dos números reais que também poderá ser representado por $(-\infty, +\infty)$.

10| D

Calculando:

$$q(t)=\left||t-8|+t-14\right|$$
$$t\in\{1, 2, 3, \ldots, 16\}$$
$$t=8\to q(t)=|8-14|\to q(t)=6$$
$$t<8\to q(t)=|-(t-8)+t-14|\to q(t)=6$$
$$t=16\to q(t)=|8+16-14|\to q(t)=10$$
$$8<t<16\to q(t)=2\cdot|t-11|$$
$$q(t)\in\{0,2,4,6,8,10\}$$

Assim, a única alternativa correta é a letra D.

11| C

O gráfico da função g, dada por $g(x)=f(x-3)$, corresponde ao gráfico de $y=f(x)$ deslocado de três unidades no sentido positivo do eixo das abscissas. Ademais, o gráfico da função h, dada por $h(x)=3g(x)$, corresponde ao gráfico de g dilatado verticalmente por um fator igual a 3.

Portanto, o gráfico da alternativa [C] é o que melhor representa a função h.

12| A

Igualando as duas funções, temos:

$$x^2-|x|=2 \Leftrightarrow x^2-|x|-2=0 \Leftrightarrow$$
$$|x|=\frac{1\pm 3}{2} \Leftrightarrow |x|=2 \text{ ou } |x|=-1 \text{ (não convém)}$$
$$\text{Se } |x|=2 \Rightarrow x=2 \text{ ou } x=-2$$

Portanto, as soma das abscissas dos pontos em comum será $-2+2=0$.

13| C

Calculando:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x-1$$
$$f(g(x))=x-1$$
$$g(x)=\frac{x-1}{x}$$
$$g(x)=\frac{x-1}{x}=\text{sen}^2\,\text{è} \Rightarrow x-1=x\cdot\text{sen}^2\,\text{è} \Rightarrow x-x\cdot\text{sen}^2\,\text{è}=1 \Rightarrow x\cdot\left(1-\text{sen}^2\,\text{è}\right)=1$$
$$x=\frac{1}{1-\text{sen}^2\,\text{è}}=\frac{1}{\cos^2\text{è}}$$
$$\text{quando } x=\frac{1}{\cos^2\text{è}} \Rightarrow f(g(x))=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=f\left(\text{sen}^2\,\text{è}\right)$$
$$f\left(\text{sen}^2\,\text{è}\right)=\frac{1}{\cos^2\text{è}}-1=\frac{1-\cos^2\text{è}}{\cos^2\text{è}}=\frac{\text{sen}^2\,\text{è}}{\cos^2\text{è}}=\left(\frac{\text{sen}\,\text{è}}{\cos\text{è}}\right)^2$$
$$f\left(\text{sen}^2\,\text{è}\right)=\text{tg}^2\text{è}$$

14| C

Se $f(x)=\dfrac{2x+3}{4x+1}$, então

$$y=\frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow 4xy+y=2x+3$$
$$\Leftrightarrow x(4y-2)=-y+3$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{y-3}{-4y+2}.$$

Portanto, temos $g(x)=\dfrac{x-3}{-4x+2}$ e, assim, desde que $1-3-4+2=(-1)\cdot(4)$, podemos afirmar que a soma $a+b+c+d$ é um número inteiro múltiplo de 4.

15| B

Calculando:

$$x=0$$
$$0\cdot f(0-1)=(0-3)\cdot f(0)+3 \to f(0)=1$$
$$x=1$$
$$1\cdot f(1-1)=(1-3)\cdot f(1)+3 \to f(0)=-2\cdot f(1)+3 \to f(1)=1$$

16| D

O maior domínio possível para f corresponde ao conjunto de números reais que satisfazem simultaneamente as desigualdades $4-x^2>0$ e $x^2-4x\le 0$. Desse modo, como

$$4-x^2>0 \Leftrightarrow -2<x<2$$

e

$$x^2-4x\le 0 \Leftrightarrow x(x-4)\le 0 \Leftrightarrow 0\le x\le 4,$$

podemos concluir que a resposta é $\{x \in \square \mid 0\le x<2\}$.

17| B

$$CDRS=1-\left(\frac{M\cdot R_M}{H\cdot R_H}\right)=1-\frac{1200000\cdot 1410}{1000000\cdot 2022}=1-\frac{16920}{20220}\ \square\ 0{,}16$$