



ITA
2023



ELETROMAGNETISMO

AULA 01
ELETROSTÁTICA II

Prof. João Maldonado





Sumário

INTRODUÇÃO	3
1.0. O campo elétrico	4
1.1. Direção e sentido do campo elétrico	6
1.2. Linhas de força	6
1.3. Campo elétrico de um carga puntiforme	9
1.3.1. Campo elétrico de uma carga puntiforme Q positiva	9
1.3.2. Campo elétrico de uma carga puntiforme Q negativa	10
1.3.3. Campo elétrico da carga puntiforme	11
1.4. Campo elétrico devido a diversas cargas puntiformes	12
1.5. Informações das linhas de forças	16
2.0. Campo elétrico do condutor isolado em equilíbrio eletrostático	18
2.1. Distribuição das cargas elétricas em um condutor	19
2.2. Propriedades do condutor isolado e em equilíbrio eletrostático	19
2.3. Blindagem eletrostática	21
2.4. O poder das pontas	23
2.5. Campo elétrico de um condutor esférico	24
3.0. Campo elétrico uniforme	28
3.1. Cinemática de uma carga puntiforme em um campo uniforme	30
4.0. A lei de Gauss da eletricidade	36
4.1. Fluxo de um campo vetorial	36
4.2. A lei de Gauss	40
4.3. Algumas aplicações da lei de Gauss	42
4.3.1. Distribuição de carga elétrica de um condutor eletrizado e em equilíbrio eletrostático	42
4.3.2. Campo elétrico criado por uma distribuição plana e ilimitada de cargas	43
4.3.3. Fio retilíneo infinito uniformemente carregado	45
4.3.4. Esfera isolante uniformemente carregada	46
4.3.5. Indução total vista pela lei de Gauss	48
5.0. Lista de questões	52
6.0. Gabarito sem comentários	69
7.0. Lista de questões comentadas	71
8.0. Considerações finais da aula	103
9.0. Referências bibliográficas	104



INTRODUÇÃO

Nessa aula iniciaremos o estudo de Campo Elétrico, Lei de Gauss da Eletricidade. Esses assuntos são de extrema importância para os nossos vestibulares.

Daremos o tratamento com base no Cálculo, mas sempre procuraremos mostrar tudo sem o uso de derivada e de integral.

Após essa aula, teremos uma grande quantidade de questões de eletrostática nas nossas mãos. É muito importante fazer o máximo de questões que darão uma excelente fortificação nos conceitos teóricos e em específicos.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

ESCLARECENDO!



@prof.maldonado



1.0. O campo elétrico

No capítulo a seguir, vamos entender o que é a noção do campo de uma força. Aprendemos que quando temos duas partículas carregadas separadas a uma certa distância d , a força de interação entre elas é dada pela Lei de Coulomb:

$$F_{ele} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2}$$

Ou seja, trata-se de uma força de ação **a distância**.

Vamos imaginar o seguinte experimento: uma esfera A carregada com uma carga $+Q_A$ é fixada em um dado ponto do espaço. Se colocarmos uma carga $+q_B$, que chamamos de **carga de prova**, próximo a A podemos examinar a região que envolve a carga $+Q_A$.

De acordo com a teoria estudada na aula passada, vimos que a força elétrica entre A e B é repulsiva. Supostamente, podemos imaginar que o espaço ao redor de A foi **modificado** de alguma forma. Podemos dizer que nessa região criou-se um campo elétrico.

De outra forma, quando colocamos uma carga de prova em uma região que existe um campo elétrico, surge na carga uma força elétrica.

Note a diferença: a força elétrica é uma força que depende de duas cargas para existir (se tivermos somente uma carga no espaço, não existirá força elétrica), enquanto que o campo elétrico é formado por cargas individuais (a partir do momento que colocamos uma carga em um lugar que não tinha carga, é como se o universo mudasse e surgisse uma grandeza invisível chamada de campo elétrico, a partir desse momento qualquer carga de prova colocada em outro lugar do espaço sofrerá algum tipo de interação por esse campo elétrico).

Se em uma dada região do espaço existe um campo elétrico, podemos usar diversas cargas de provas e medir as forças elétricas em um dado ponto P . Para cada carga vamos fazer o quociente:

$$\frac{|\vec{F}_i|}{q_i}$$

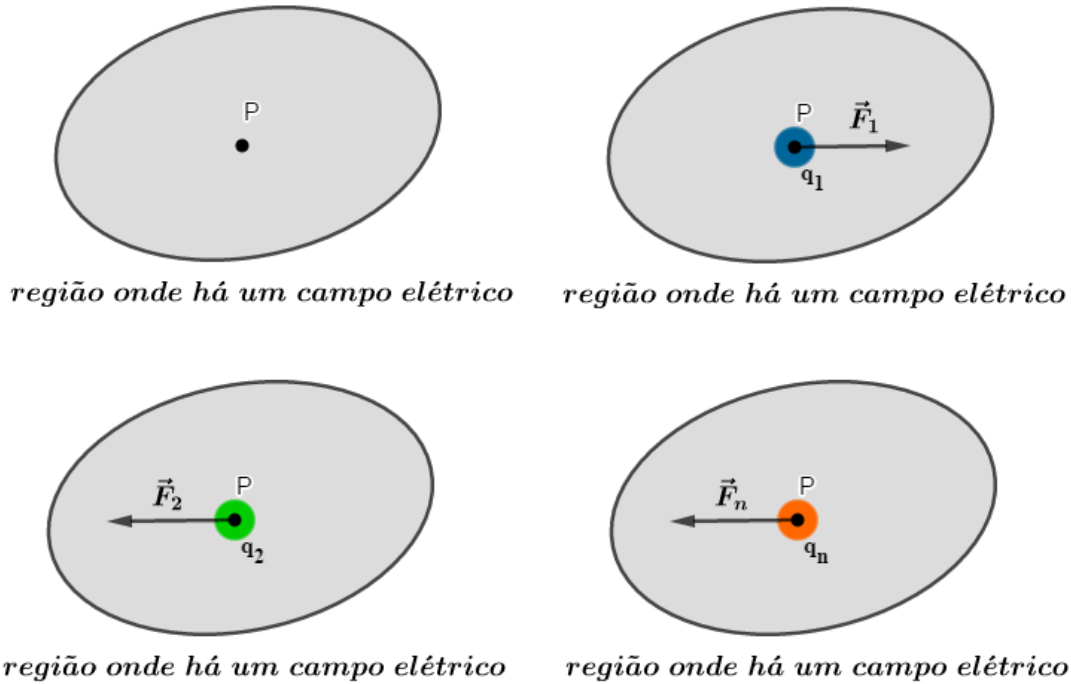


Figura 1: Experimento para determinação do campo elétrico em uma região.

Experimentalmente, verifica-se que todas as forças \vec{F}_i têm a mesma direção, alterando apenas o sentido da força quando se altera o sinal da carga q_i . Matematicamente, verifica-se que as forças são proporcionais às cargas de provas, isto é:

$$\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \frac{\vec{F}_3}{q_3} = \dots = \frac{\vec{F}_i}{q_i} = \dots = \frac{\vec{F}_n}{q_n} \text{ (constante)}$$

Essa razão é chamada de **vetor campo elétrico** ou somente **campo elétrico** no ponto P e denotamos por \vec{E} .

Assim, temos que:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \text{ ou } \vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Podemos, dessa forma, definir o campo elétrico como a razão entre a força elétrica que age em uma corpo e a quantidade de carga do corpo.

Observações:

- 1) Quando efetuamos $\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \frac{\vec{F}_3}{q_3} = \dots = \frac{\vec{F}_i}{q_i} = \dots = \frac{\vec{F}_n}{q_n}$, vemos que o campo elétrico em um dado ponto P não depende do valor da carga de prova. Isso pode ser provado para cargas pontuais pela Lei de Coulomb: Veja que $E = \frac{F_i}{q_i} = \frac{\frac{kQq_i}{d^2}}{q_i} = \frac{kQ}{d^2}$, que não depende da carga de prova q_i , somente da carga fixa Q
- 2) Utilizamos sempre uma carga de prova bem pequena, de forma que sejam desprezíveis os efeitos de indução eletrostática sobre as cargas geradoras do campo elétrico.
- 3) Quando o campo elétrico de certa região não variar **com o decorrer do tempo**, este campo será chamado de campo eletrostático.



A partir da definição de campo elétrico, se tomarmos uma carga de 1 C e uma força de 1 N , temos que:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1\text{ N}}{1\text{ C}} = 1\text{ N/C}$$

Assim, dizemos que a unidade de campo elétrico é N/C . Posteriormente, definiremos campo elétrico a partir do potencial elétrico e a unidade de campo elétrico será dado por V/m (*volt por metro*) no SI.

Por último, é importante notar que essa noção de campo de uma força não é exclusiva da força elétrica. Qualquer força conservativa pode ser pensada como derivada de um campo. Veremos adiante que a força gravitacional tem o seu próprio campo gravitacional, e o seu próprio potencial também! Mas não vamos fugir muito do assunto para não nos perdermos!

1.1. Direção e sentido do campo elétrico

Diante da definição de campo elétrico, temos que:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Sendo q um número escalar (que pode ser positivo ou negativo), quando efetuamos $q \cdot \vec{E}$ sabemos que \vec{E} e \vec{F} tem sempre a **mesma direção**. Dessa forma, temos dois sentidos possíveis:

- 1) $q > 0$: \vec{E} tem o mesmo sentido de \vec{F} .
- 2) $q < 0$: \vec{E} e \vec{F} têm sentidos contrários.

Observe que primeiramente definimos o conceito de força elétrica entre duas cargas antes do conceito de campo elétrico. Contudo, vimos que o campo é a causa da existência da força. Dessa forma, quando colocamos a carga de prova no ponto P , já está associado a esse ponto um campo elétrico \vec{E} . Podemos, de outra forma, definir a força a partir do campo (embora menos didático, definir força a partir do campo é o fisicamente correto).



1.2. Linhas de força

Trata-se de linhas imaginárias desenhadas nas representações de um campo elétrico, com a intenção de mostrar sua direção e sentido. Lembre-se que o campo elétrico é como se fosse uma perturbação do meio pela imposição de uma carga. Ele está lá, parado e invisível, e irá se manifestar quando colocarmos uma segunda carga nesse mesmo meio. As linhas de força, também chamadas de linhas de campo, são linhas que buscam ajudar na “visualização” desse campo invisível. Por definição, **a linha de força em um dado ponto tem a mesma direção e o mesmo sentido que o vetor campo elétrico naquele ponto.**

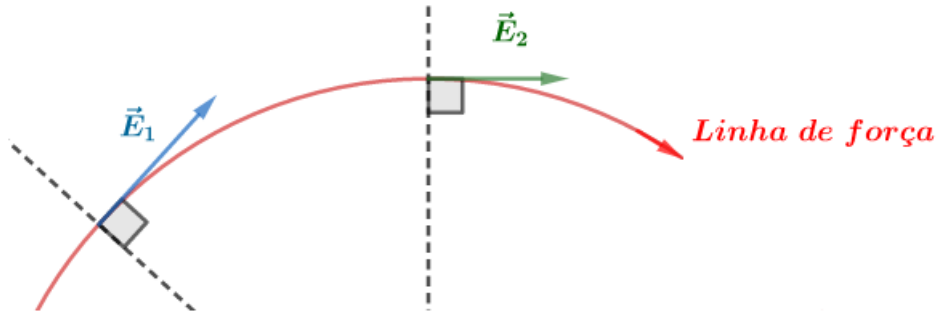


Figura 2: Representação da Linha de força.

Além disso, o número de linhas por unidade de área (área medida em um plano perpendicular às linhas) deve ser proporcional ao módulo do campo elétrico. Assim, **quanto mais próximas as linhas, maior o módulo do campo**. Vemos então que as linhas de campo mostram a direção e o sentido do campo elétrico em um ponto, e embora não forneçam o valor do **módulo** do campo naquele ponto, permitem comparar o valor desse módulo em regiões distintas (ex: se uma região tem linhas de campo mais próximas, terá um módulo de campo maior).

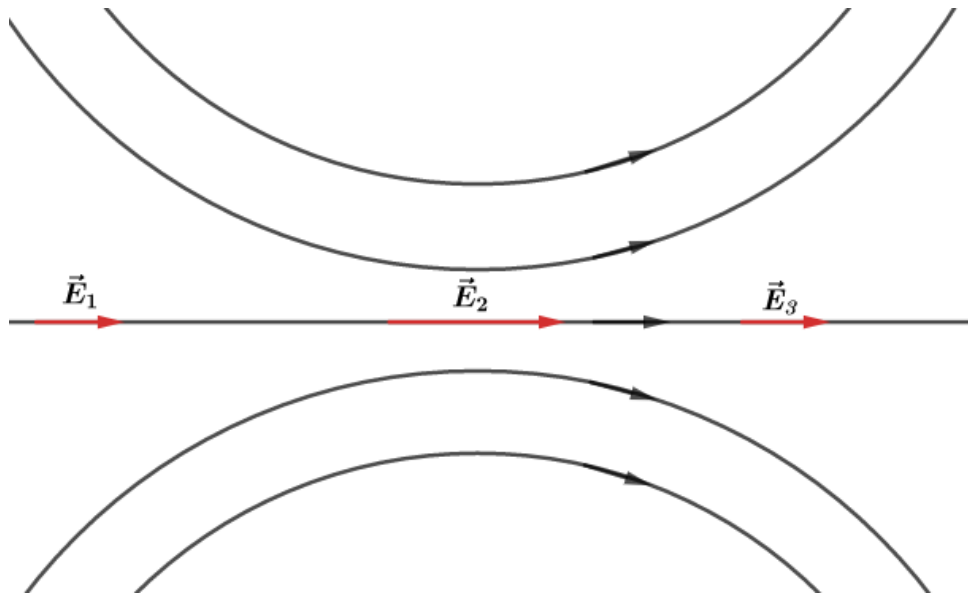


Figura 3: Linhas de força

Na figura acima podemos ver que $|\vec{E}_2| > |\vec{E}_1|$ e $|\vec{E}_2| > |\vec{E}_3|$, pois próximo a \vec{E}_2 as linhas estão mais próximas (mais linhas por unidade de área).

Quando o campo elétrico é constante (uniforme) em todos os pontos de uma região do espaço, suas linhas de força são retilíneas, paralelas, de mesmo sentido e uniformemente distribuídas. Pense comigo: se as linhas não fossem retas e igualmente espaçadas haveria regiões com maior densidade de linhas do que outras, ou seja, o campo não seria uniforme, absurdo! Estudaremos as propriedades do campo elétrico uniforme mais à frente.

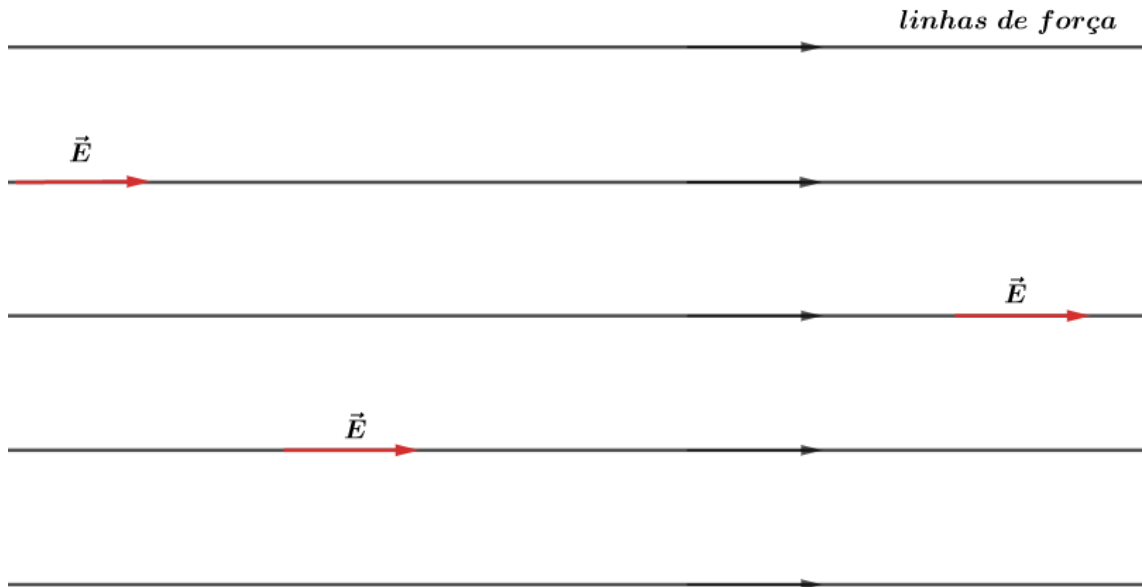


Figura 4: Região onde existe um campo elétrico uniforme.

Observações:

- 1) As linhas de força nunca se cruzam! Se isso acontecesse, teríamos no ponto de cruzamento dois vetores \vec{E} , apontando para direções distintas, o que é um **absurdo**.

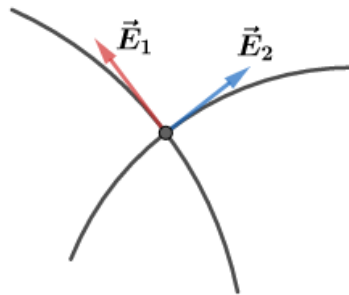


Figura 5: Linhas de forças se cruzando, gerando um absurdo.

- 2) Trajetória de uma carga sujeita a um campo elétrico: não necessariamente a trajetória de uma partícula coincide com as linhas de forças.

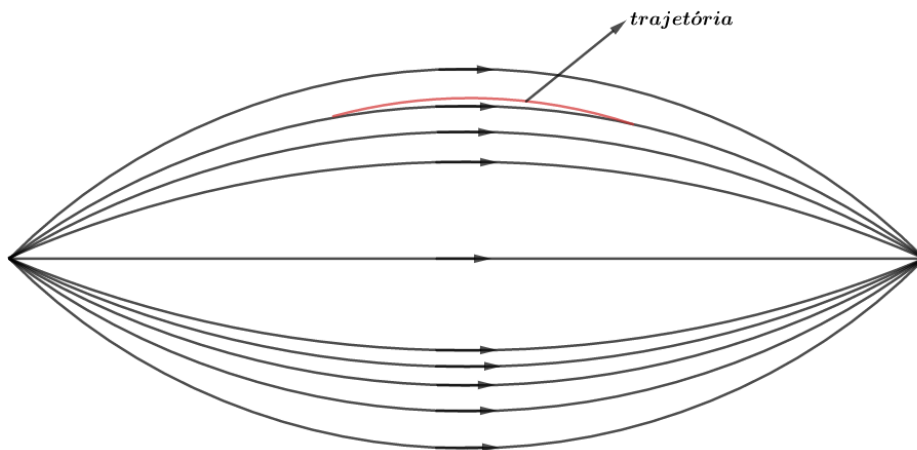


Figura 6: Linhas de força e trajetória.



1)

Em um ponto P de uma região onde há um campo elétrico, coloca-se uma carga de prova de valor q e verifica-se que a força elétrica nessa carga é de F . Qual o valor de outra carga de prova que quando colocada no mesmo ponto P a força elétrica na carga seja de $5F$?

Comentários:

De acordo com a força elétrica em função do campo, temos:

$$F = |q| \cdot E$$

Para a primeira carga, temos que:

$$F = |q| \cdot E \quad eq.1$$

Para a segunda carga, temos que:

$$5F = |q_2| \cdot E \quad eq.2$$

Dividindo $\frac{eq.2}{eq.1}$, temos:

$$\frac{5F}{F} = \frac{|q_2| \cdot E}{|q| \cdot E}$$

$$\therefore |q_2| = 5|q|$$

Repare que com as informações podemos apenas encontrar o módulo da carga q_2 . Para determinação do sinal, seria necessária alguma informação a respeito das direções das forças.

1.3. Campo elétrico de um carga puntiforme

Iremos agora responder à pergunta: dado que o campo não depende da carga de prova, qual a direção e sentido do campo elétrico de uma carga fixa? Está entrando ou saindo da carga?

1.3.1. Campo elétrico de uma carga puntiforme Q positiva

Seja uma carga fixa $Q > 0$ e uma carga de prova $q_p > 0$, então a força elétrica \vec{F} entre elas será de repulsão e, como $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, temos que \vec{F} e \vec{E} terão o mesmo sentido. Dessa forma, podemos concluir que para uma carga elétrica puntiforme o campo elétrico está **saindo da carga**.

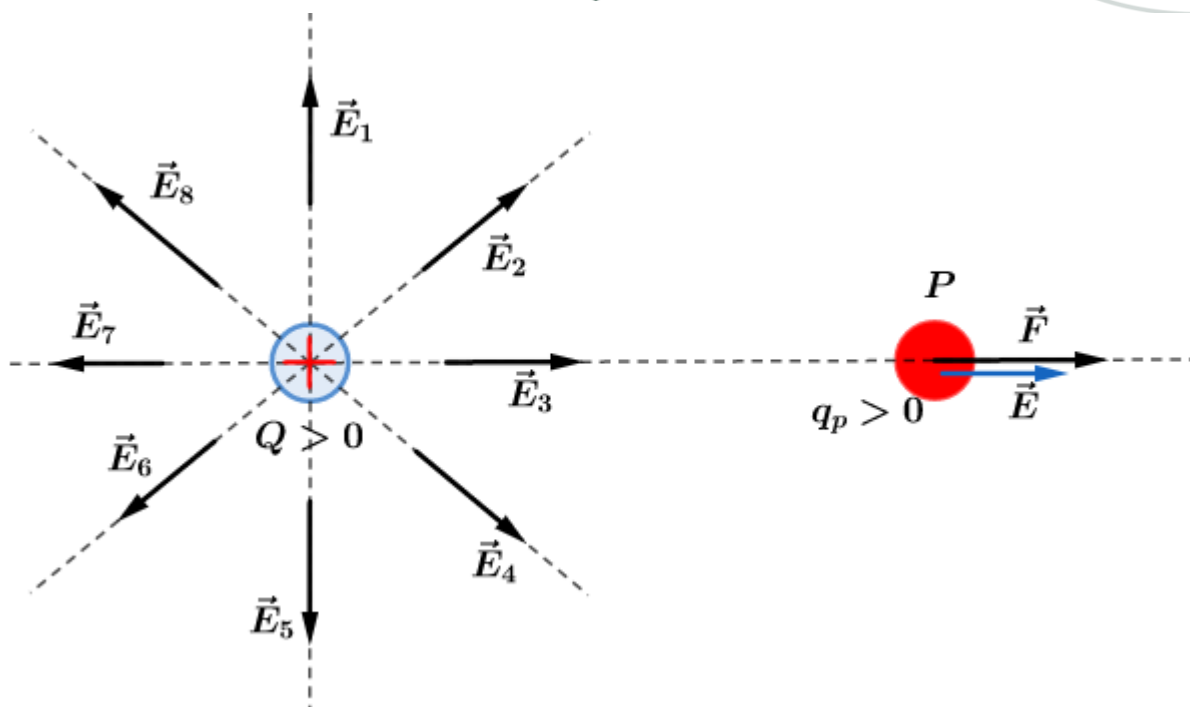


Figura 7: Campo elétrico gerado em torno de uma carga puntiforme positiva.

Observe que a direção do campo será radial, já que é a mesma direção da força, ou seja, reta que passa pelos pontos onde se encontram as cargas, e o sentido será **saindo da carga fixa**.

Professor, mas e se tivéssemos pegado uma carga de prova negativa? Teríamos que chegar no mesmo resultado, já que o campo elétrico depende somente da carga fixa. Pense comigo: Se a carga fixa for positiva e a carga de prova negativa, teríamos uma força de atração (na figura acima a força na bolinha vermelha seria para a esquerda). Entretanto, como a carga de prova é negativa, a fórmula $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ mostra que força e campo tem sentidos opostos, e o campo continuaria sendo para a direita (saindo da carga fixa).

Assim, as linhas de força desse campo são semirretas, radiais, apontando para fora da carga $Q > 0$ (se afastando).

1.3.2. Campo elétrico de uma carga puntiforme Q negativa

Dado que $Q < 0$ e nossa carga de prova é $q_p > 0$, então a força elétrica \vec{F} entre elas será de atração e, como $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, temos que \vec{F} e \vec{E} terão o mesmo sentido. Dessa forma, podemos concluir que para uma carga elétrica puntiforme o campo elétrico está **entrando na carga fixa**.

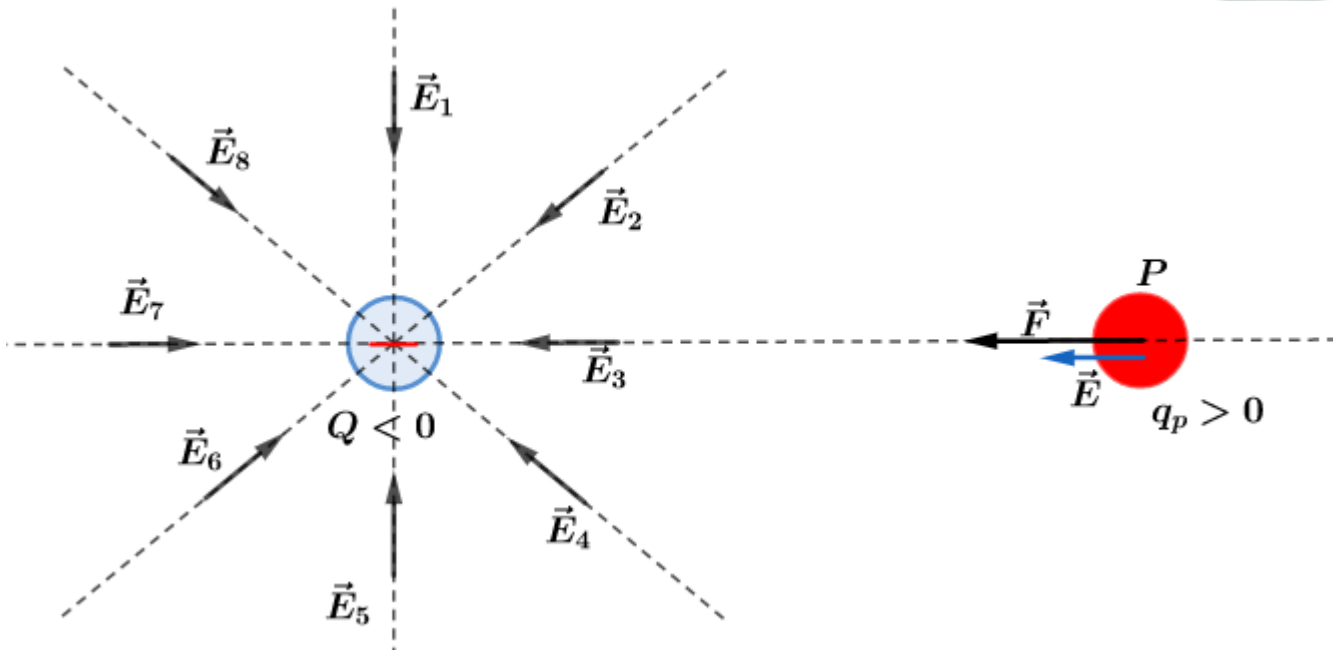


Figura 8: Campo elétrico gerado em torno de uma carga puntiforme negativa.

Dessa forma, em qualquer ponto da região que circunda a carga elétrica $Q < 0$, o campo elétrico será de aproximação, em outras palavras, \vec{E} deverá “apontar” para a carga Q .

Assim, as linhas de força desse campo são semirretas, radiais, apontando para dentro da carga $Q < 0$ (se aproximando).

Note que o sentido do campo elétrico não depende do sinal da carga de prova, apenas depende da “carga-fonte” ou carga fixa (carga que gerou o campo).

Resumindo:

$$\begin{cases} Q > 0 \rightarrow \text{campo saindo} \\ Q < 0 \rightarrow \text{campo entrando} \end{cases}$$

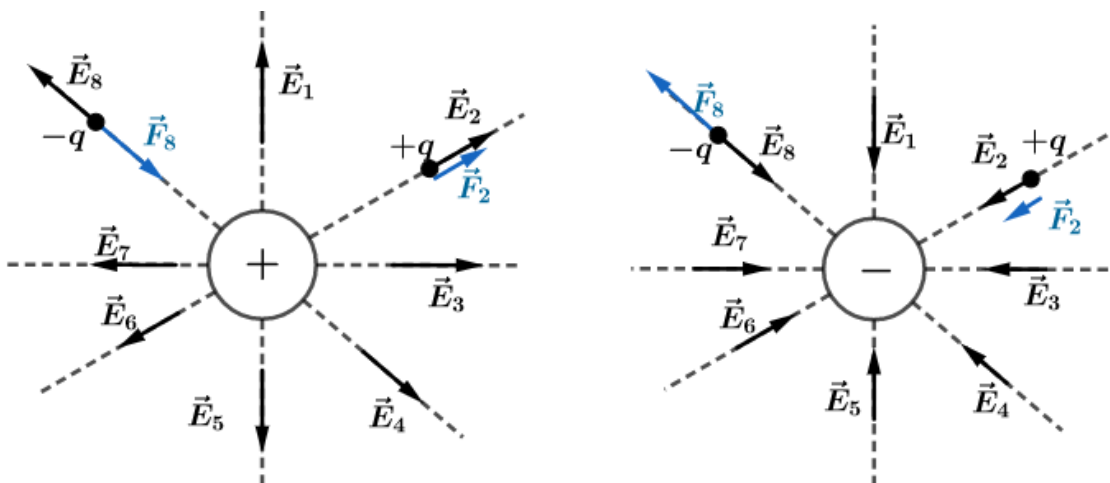


Figura 9: Linhas de força do campo elétrico de uma carga positiva e de uma negativa.

1.3.3. Campo elétrico da carga puntiforme

Em um dado ponto P coloca-se uma carga de prova q_p , situada a uma distância d de uma carga puntiforme Q . Pela Lei de Coulomb **em módulo**, temos que:



$$F = \frac{K \cdot |Q| \cdot |q_p|}{d^2} \Rightarrow E = \frac{F}{|q_p|} = \frac{K \cdot |Q|}{d^2}$$

$$\therefore E = K \cdot \frac{|Q|}{d^2}$$

Observações:

- 1) Devido ao fato desse campo ser inversamente proporcional ao quadrado da distância $E \propto \frac{1}{d^2}$, ele é conhecido por “campo newtoniano” pois existe grande semelhança com a expressão do campo gravitacional de um planeta. Veremos este fato mais adiante.
- 2) Quando representamos o gráfico do campo elétrico de uma carga puntiforme em função da distância obtemos a curva:

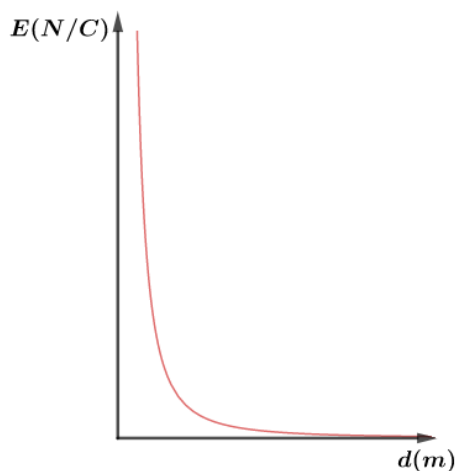


Figura 10: Gráfico da intensidade do campo elétrico de uma carga puntiforme em função da distância.

1.4. Campo elétrico devido a diversas cargas puntiformes

Quando existem várias cargas puntiformes geradoras de campo em um mesmo ponto P , podemos determinar o campo elétrico resultante dos campos pelo Princípio da Superposição.

Para isso, vamos considerar n cargas puntiformes gerando diversos campos elétricos em P . Se colocarmos uma carga de prova em P , podemos determinar a força elétrica resultante na carga de prova pelo Princípio da Superposição:

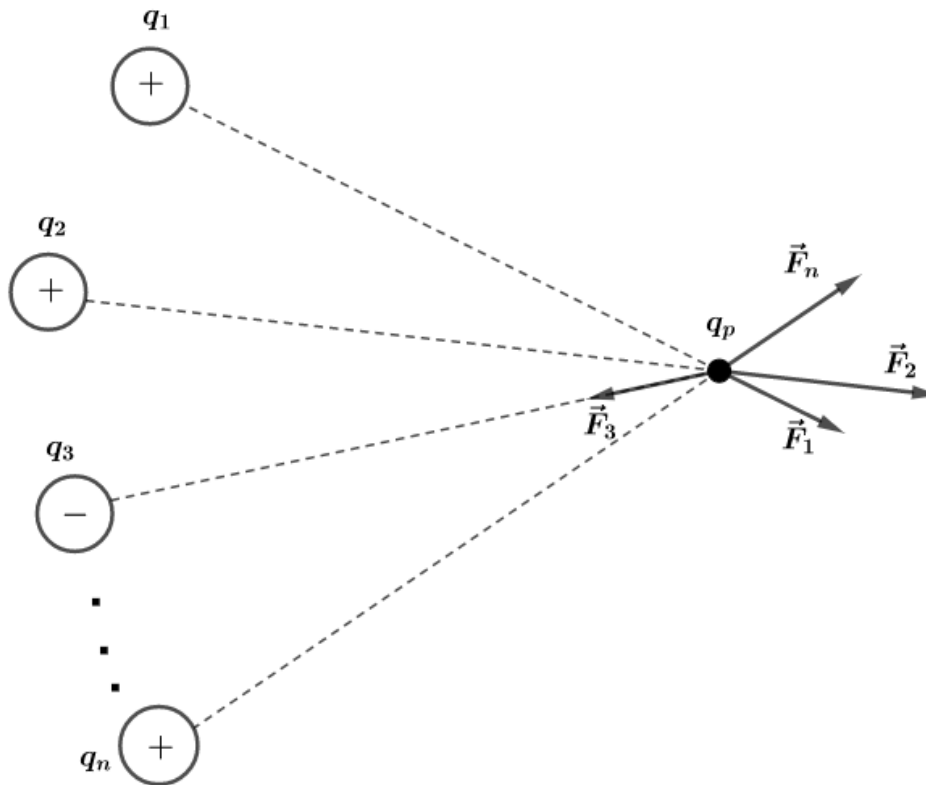


Figura 11: Campo elétrico resultante em P da superposição de n cargas, supondo uma carga de prova positiva.

Assim, a força resultante em P é dada por:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

Mas, cada força elétrica pode ser escrita por $\vec{F}_i = q_p \cdot \vec{E}_i$, portanto:

$$q_p \cdot \vec{E}_{res} = q_p \cdot \vec{E}_1 + q_p \cdot \vec{E}_2 + \dots + q_p \cdot \vec{E}_n$$

$$q_p \cdot \vec{E}_{res} = q_p (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n)$$

$$\therefore \boxed{\vec{E}_{res} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n}$$

Para o caso particular de existirem apenas duas cargas puntiformes, temos que:

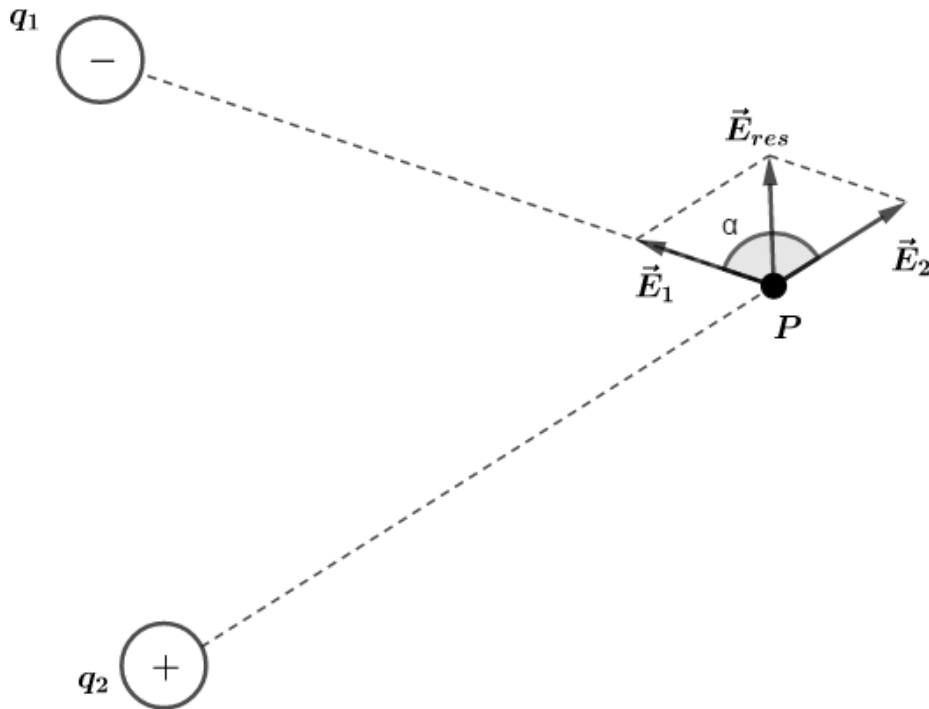


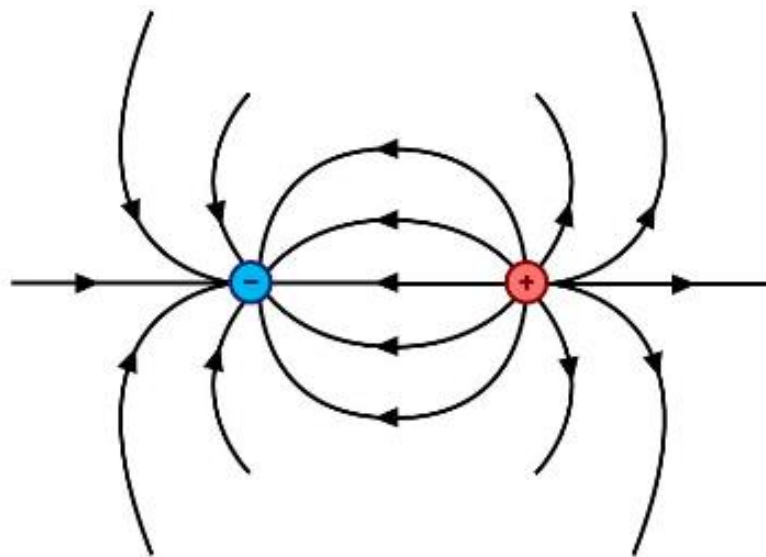
Figura 12: Campo elétrico resultante gerado por duas cargas puntiformes.

Podemos escrever que o módulo do campo elétrico resultante, de acordo com a Lei dos Cossenos, é:

$$E_{res} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot \cos \alpha}$$

É evidente que o sentido do campo elétrico resultante depende dos valores das cargas q_1 e q_2 . Assim, depois de obtidos os vetores \vec{E}_1 e \vec{E}_2 utilizamos a soma de vetores para determinar o sentido e a direção de \vec{E}_{res} .

Podemos também determinar as linhas de forças devido a duas cargas. Como vimos, as linhas de força “nascem” nas cargas positivas e “morrem” nas cargas negativas. Dessa forma, para duas cargas puntiformes temos as seguintes configurações:



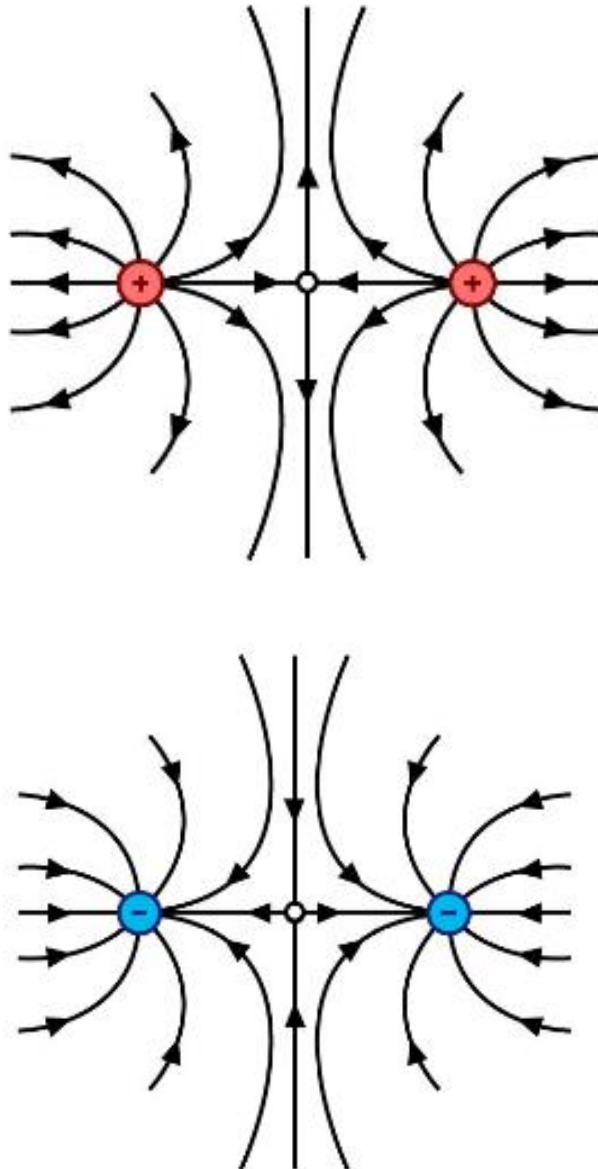


Figura 13: Possíveis linhas de forças para diferentes configurações de cargas.

Decore as figuras acima! Elas são muito importantes! Veja que quando temos duas cargas iguais existe um ponto central (a bolinha branca) onde o campo é nulo. Chamamos esse ponto de ponto de estagnação. Isso não ocorre quando temos cargas diferentes.

ATENÇÃO
DECORE!





1.5. Informações das linhas de forças

Vamos resumir algumas informações que podem ser extraídas de uma configuração de linhas de forças do \vec{E} :

- 1) **Direção e sentido:** tangente às linhas de força e no sentido das mesmas.



Figura 14: Linha de Força, direção e sentido do campo elétrico.

- 2) **Intensidade relativa do vetor \vec{E} :** obtemos através da densidade de linhas de força.

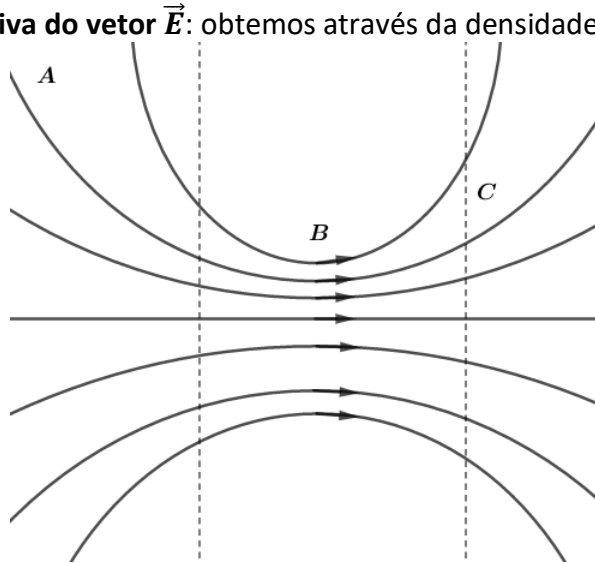


Figura 15: Intensidade relativo do campo elétrico, utilizando densidade de linhas de força.

$$E_B > E_C > E_A$$

Além disso, podemos representar o campo elétrico como saindo ou entrando do plano do papel:

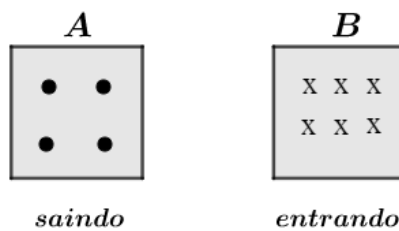


Figura 16: Representação de vetores entrando ou saindo do plano.

$$E_B > E_A$$

- 3) **Sinal da carga fonte do \vec{E} :** Linhas entrando (carga negativa) ou linhas saindo (carga positiva)

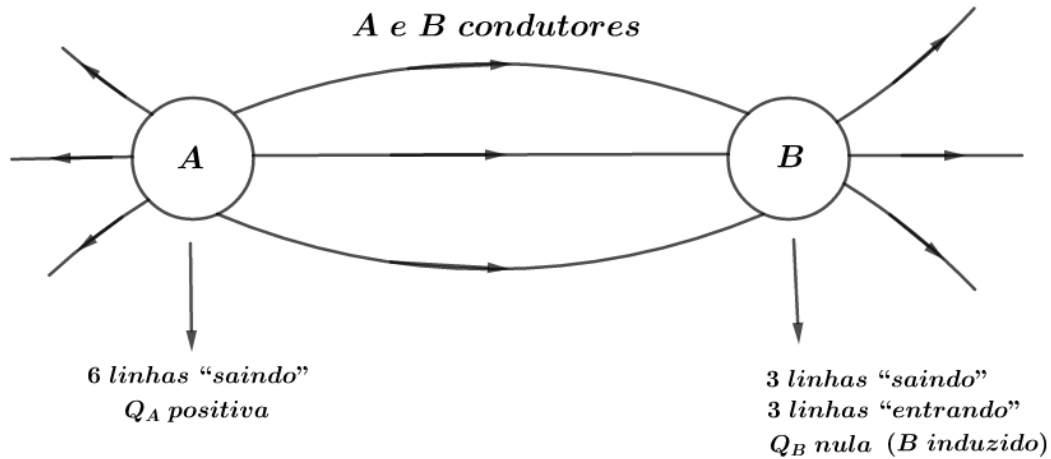


Figura 17: Representação de linhas de forças e o sinal da carga.

Veja que no exemplo acima B tem 3 linhas saindo e 3 entrando. O saldo líquido de linhas é zero e conseqüentemente sua carga é neutra. Entretanto, vemos que existem linhas entrando na superfície do lado esquerdo e linhas saindo do lado direito. Isso quer dizer que, apesar de B estar neutro, ele está induzido por A, fazendo com que uma certa carga positiva se concentre no lado direito e uma certa carga negativa no lado esquerdo.

Se aterrarmos B, temos que:

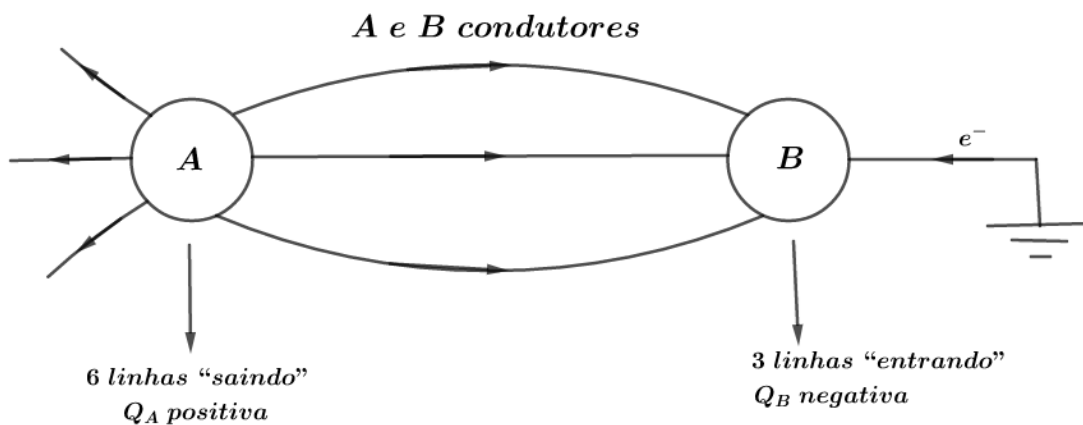


Figura 18: Representação de linhas de força e o sinal das cargas, quando uma é aterrada.

4) Relação entre os módulos das cargas que geram o campo elétrico: análise de quantidade de linhas. I

Iremos provar, quando vermos lei de Gauss, que a carga elétrica é diretamente proporcional à quantidade de linhas de campo que saem de uma superfície. Você pode pensar nas linhas de campo como setinhas que entram em cada elétron ou saem de cada próton. Se tivermos uma carga de 1 C iremos ter x linhas de campo saindo. Se na mesma figura tivermos uma carga de 10 C iremos ter $10x$ linhas de campo saindo. A carga é diretamente proporcional à **quantidade** de linhas de campo (não confunda: o campo elétrico é diretamente proporcional à densidade, e não à quantidade, de linhas de campo).

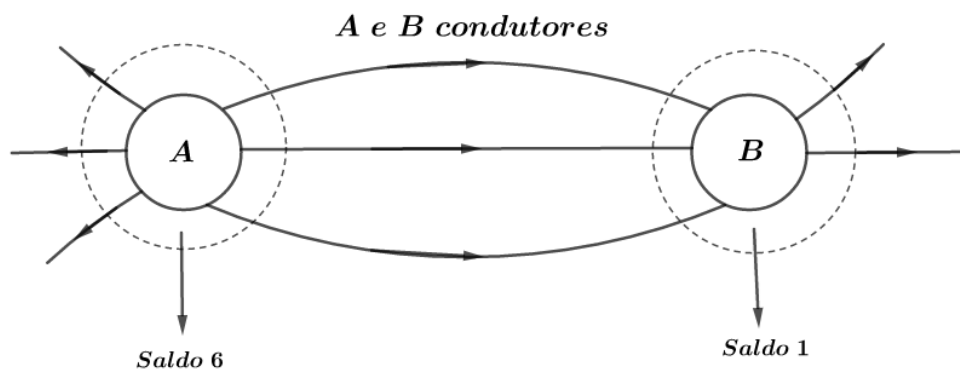


Figura 19: Representação das linhas de força e a relação entre as cargas.

$$\frac{|q_A|}{|q_B|} = \frac{6}{1} = 6$$

Na figura acima, podemos ver que a carga de A é positiva, e 6 vezes maior, em módulo, que a carga de B (negativa).

Mais tarde, ampliaremos nossa visão sobre as linhas de força e a relação das cargas através da Lei de Gauss.

2.0. Campo elétrico do condutor isolado em equilíbrio eletrostático

Dizemos que um condutor isolado está em equilíbrio eletrostático quando não existe movimento ordenado de cargas elétricas no seu interior e na sua superfície. Isso não quer dizer que os elétrons não estejam se movendo. Eles estão, e a milhões de quilômetros por hora, mas o movimento dos mesmos é desordenado, totalmente aleatório.

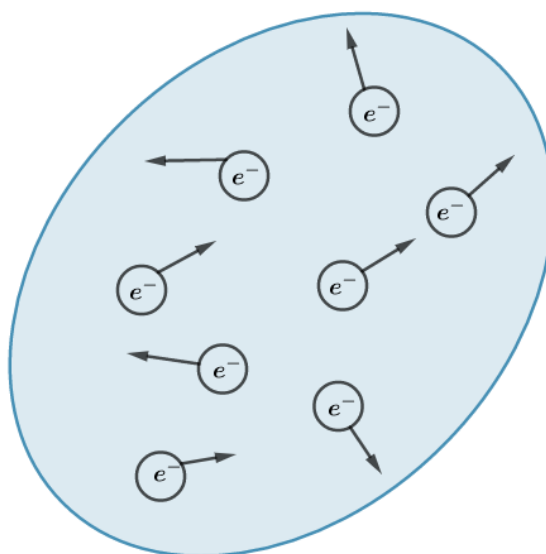


Figura 20: Condutor isolado em equilíbrio eletrostático, os elétrons livres em movimento aleatório.

Note que quando o corpo está em equilíbrio eletrostático ele pode ou não estar eletrizado.



2.1. Distribuição das cargas elétricas em um condutor

Quando um condutor está eletricamente carregado (positivamente ou negativamente), as cargas se repelem buscando a maior distância entre si, indo para a **superfície** do condutor.

2.2. Propriedades do condutor isolado e em equilíbrio eletrostático

Propriedade 1:

No interior do condutor o campo elétrico resultante é nulo.

Observe que se houvesse um campo elétrico resultante, como $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, também haveria uma força resultante, e conseqüentemente uma aceleração resultante nos elétrons livres, o que geraria um **movimento ordenado de carga**, na direção do campo, violando o princípio de equilíbrio eletrostático. Na verdade, durante um curtíssimo período de tempo (na ordem de milissegundos) após aplicarmos um campo em um certo condutor, os elétrons irão se mover ordenadamente e ocupar suas posições finais na superfície desse condutor. Nesse regime transitório o condutor não está em equilíbrio eletrostático, mas pouquíssimo tempo depois, quando as cargas atingiram suas posições finais, não ocorre mais movimento ordenado, e o campo elétrico interno é nulo!

Professor, por que em isolantes isso não ocorre? Apesar de isolantes também terem elétrons internos que são influenciados pelo campo externo, esses elétrons não são livres! Ou seja, não podem se mover pela malha ou sair de seu átomo de origem, diferentemente dos elétrons de um metal. Os elétrons de um isolante irão sim sofrer a presença do campo, e isso irá distorcer os seus orbitais, polarizando o isolante, mas essa força não é suficiente para arrancar o elétron do átomo!

Dessa forma, podemos pensar que os elétrons de metais se organizam de forma a cancelar completamente o campo elétrico interno, e os elétrons de isolantes somente polarizam os átomos, de forma a diminuir, mas não cancelar completamente, o campo elétrico interno. Iremos estudar mais esse fenômeno quando estudarmos dielétricos.

Cuidado! O campo elétrico resultante é nulo **apenas no interior do condutor**, mas na superfície o campo resultante é diferente de zero. Mais à frente mostraremos como calcular o campo na superfície. Isso ocorre pois se tivermos campo elétrico no interior de um condutor, como já explicamos, teremos força elétrica, aceleração e movimento ordenado de carga na direção do campo, o que viola o princípio de equilíbrio eletrostático. Mas pense comigo: se tivermos um campo elétrico **radial na superfície** (ou seja, um campo elétrico perpendicular à superfície) tal que a força elétrica nos elétrons aponte para fora, apesar de essa força existir, ela não pode gerar aceleração e movimento ordenado, pois os elétrons não podem “pular para fora” desse metal. O que acontece é que os orbitais são polarizados e os elétrons dessas camadas são “puxados” para fora, mas ao mesmo tempo essa polarização aumenta a força com que o núcleo puxa os elétrons de volta, e a força resultante se torna nula. Isso é óbvio: seria péssimo se todas as vezes que carregássemos nosso celular elétrons comesçassem a pular do celular para o ar!

Dessa forma, na superfície de um condutor eletrizado temos campo elétrico radial (nunca tangencial!!!).

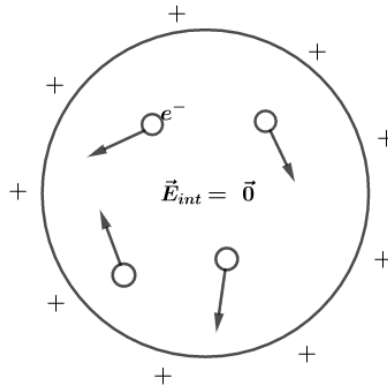


Figura 21: Condutor isolado e em equilíbrio eletrostático: campo elétrico resultante é nulo no interior e movimento aleatório dos elétrons livres.

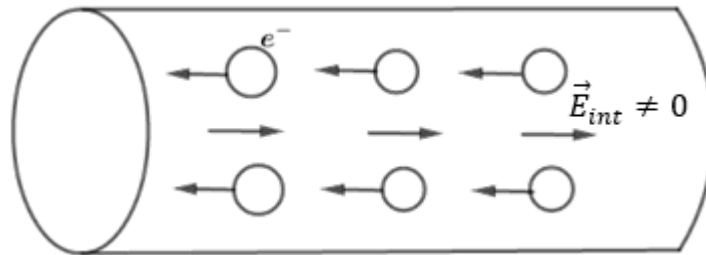


Figura 22: Quando o condutor não está em equilíbrio eletrostático, existe movimento ordenado dos elétrons.

Propriedade 2:

O campo elétrico nos pontos da superfície externa de um condutor isolado e em equilíbrio eletrostático tem direção normal/perpendicular/radial à superfície.

Já explicamos porque isso é verdade acima. Mas explicação nunca é demais, então vamos ver porque isso ocorre de novo. Se houvesse um campo na superfície não perpendicular a ela, este poderia ser decomposto em duas componentes: normal \vec{E}_n e tangencial \vec{E}_t . Dessa forma, a componente tangencial ocasionaria um movimento das cargas, contrariando a hipótese de condutor em equilíbrio eletrostático, pois geraria aceleração.

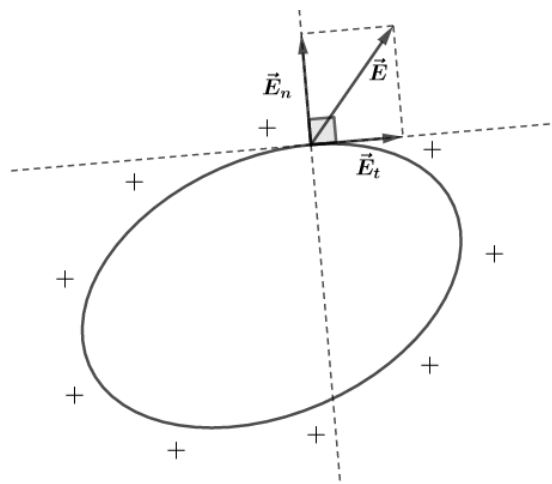


Figura 23: Caso o campo não fosse perpendicular à superfície externa.



2.3. Blindagem eletrostática

Seja um condutor oco (A) que pode estar eletrizado ou não. Considere que esse corpo A envolva completamente um corpo B. Conforme estudamos, esse fenômeno se chama indução total, e **toda** a carga de B será induzida na **superfície interna** de A, com sentido contrário.

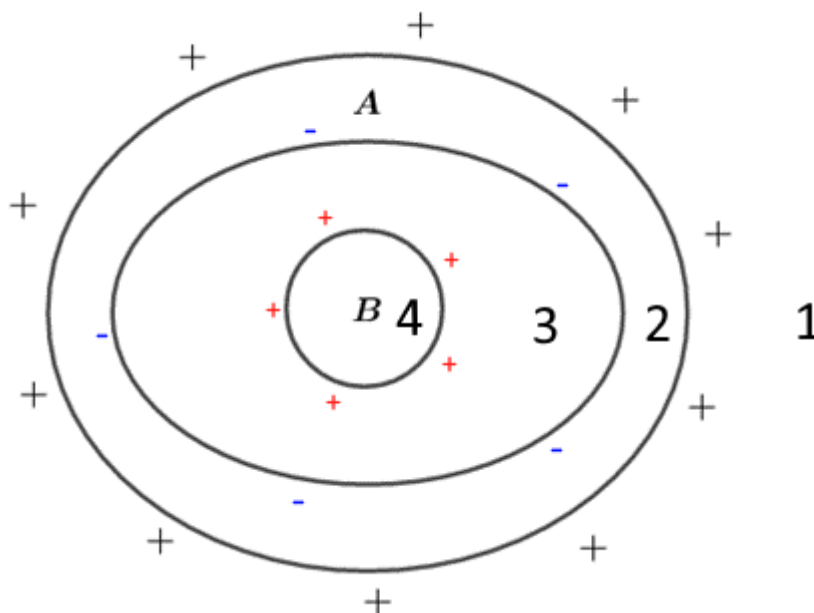


Figura 24: Blindagem eletrostática.

Vamos analisar a figura acima. Considere que cada sinal seja 1C de carga. A tem 10C de carga positiva na superfície externa e -5C de carga negativa na superfície interna, consequentemente sua carga líquida é de 5C. B tem 5C de carga na superfície externa. Veja que os 5C de B (que deve estar na superfície pois B é condutor) induziu -5C de carga na superfície interna de A, pelo fenômeno da indução total. Conforme iremos estudar na Lei de Gauss, essa é a única forma de fazer com que o campo elétrico interno a A seja nulo (região 2). Dessa forma, sobraram 10C de carga positiva na superfície externa de A.

Até aí já sabemos. Porém outro fato que ocorre quando B está no interior de A é um fenômeno chamado de **blindagem eletrostática**. Conforme iremos provar na Lei de Gauss, A é induzido por B, mas B **nunca** será induzido por A e nem por **nenhum corpo externo a A**. Isso ocorre porque quando aproximamos outro corpo C do conjunto A+B, as cargas da superfície **externa** de A mudam de lugar (indução) a fim de cancelar o campo interno a A (ponto 1). Dessa forma, as cargas da superfície **interna** de A nem precisam se mover, e consequentemente as cargas de B também não, pois já estão na configuração de equilíbrio eletrostático. Resultado: B não sofreu qualquer alteração com a presença de C.

Ao aproximar de A um outro corpo eletrizado C, haverá indução eletrostática em A, mas B não sofrerá nenhum efeito.

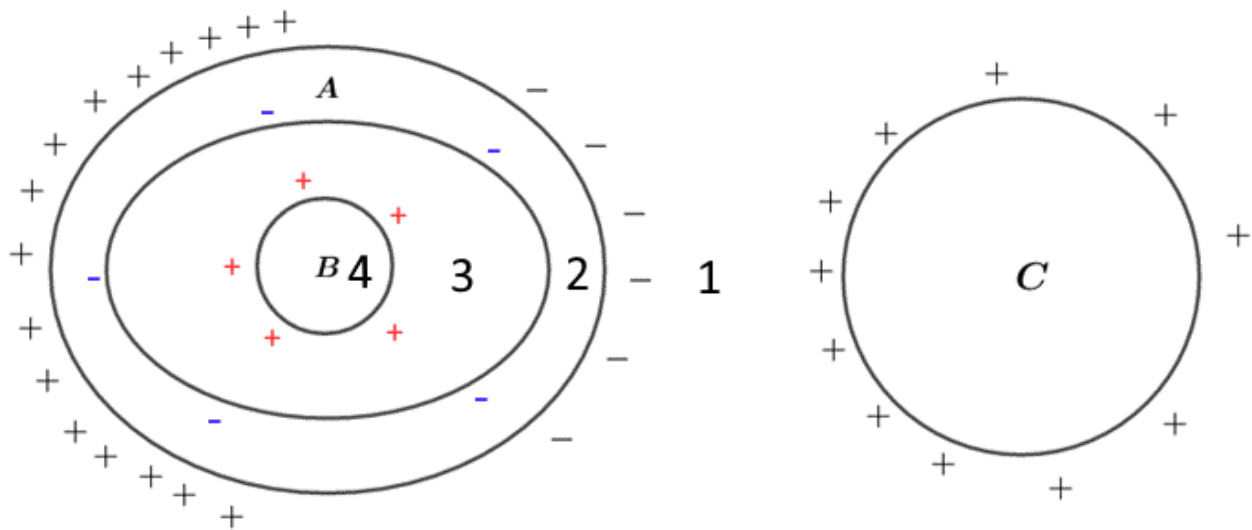


Figura 25: Aproximação de um corpo carregado e nenhum efeito observado em B.

Veja que A continua com $10C$, mas houve indução parcial de $-6C$ na superfície direita, devido a C. Entretanto os elétrons da superfície interna de A **nem mesmo se mexeram**, o mesmo para a superfície externa de B. Isso ocorre pois B está blindado eletrostaticamente.

Na região 1 teremos campo elétrico não nulo e na região 3 também. Entretanto 4 e 2 têm campo elétrico nulo, pois estão no interior de um condutor.

Com este experimento, vemos que o condutor oco A blinda eletrostaticamente os corpos no seu interior. Este feito é chamado de blindagem eletrostática.

Em 1836, Faraday criou um experimento para provar esta blindagem eletrostática. Ele construiu uma grande “gaiola” metálica e colocou suportes isolantes. Ele entrou na gaiola portando diversos dispositivos de detecção da presença de campo elétricos, e mandou que seu assistente eletrizassem a caixa intensamente.

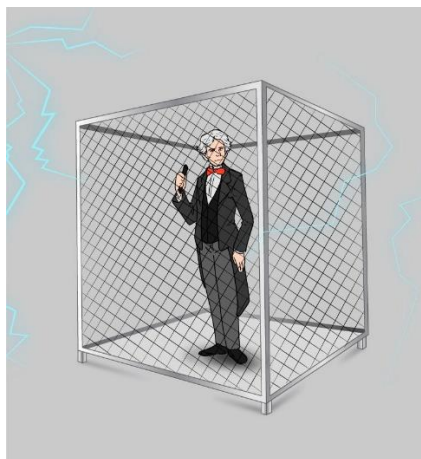


Figura 26: Representação de uma gaiola de Faraday, experimento realizado pelo próprio Michael Faraday para mostrar a blindagem eletrostática.

Como já era esperado por Faraday, nenhum dos aparelhos acusavam qualquer existência de campo no interior da caixa. Nem mesmo o próprio Faraday não sentiu qualquer efeito, mesmo com a caixa altamente eletrizada externamente, com grandes eflúvios elétricos saltando por vários pontos de sua superfície externa, palavras do próprio Michael Faraday.



Essa é a razão pela qual celulares não pegam dentro de superfícies metálicas. Como não pode haver campo elétrico, não pode existir ondas eletromagnéticas, e qualquer equipamento eletrônico ficará sem sinal! Tente envolver o seu celular, por exemplo, com papel alumínio, e veja o sinal diminuir.



2.4. O poder das pontas

Conforme já dissemos, em um condutor, a densidade superficial σ é elevada nas pontas e a intensidade do campo elétrico é diretamente proporcional a σ . Assim, o campo elétrico nas pontas de um condutor é mais intenso, o que é chamado de poder das pontas e será provado na lei de Gauss.

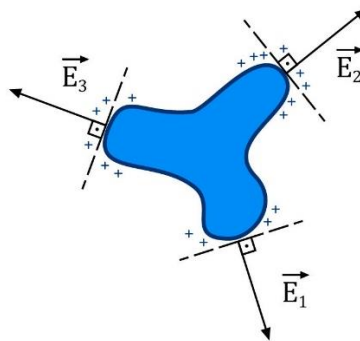


Figura 27: Efeito das pontas na superfície de um condutor, mostrando que $|\vec{E}_2| > |\vec{E}_1|$, já que o raio de curvatura em 2 é menor que em 1, por exemplo.

Quando o campo elétrico na superfície de um condutor é muito intenso, pode ocorrer a ionização das moléculas do isolante que o envolve. Isso ocorre porque aquela polarização que explicamos se torna tão intensa que faz com que o elétron se ionize do átomo que está ligado. Dessa forma, o isolante torna-se um condutor, isto é, adquire cargas livres.

Chamamos de rigidez dielétrica de um meio o maior valor de campo elétrico que um meio isolante pode suportar sem ionizar-se (“dielétrico” é sinônimo de “isolante”). Para o ar, a rigidez dielétrica é de $3 \times 10^6 \text{ N/C}$. Isso quer dizer que de um campo de 3 MN/C existir em uma região o ar se tornará um plasma, as moléculas de oxigênio e nitrogênio se ionizarão e uma faísca irá surgir (é o que ocorre no fogão e no relâmpago, por exemplo). Abaixo estão os valores para alguns meios (1 V/m é a mesma coisa que 1 N/C, como será explicado na próxima aula).



Material	Constante Dielétrica κ	Rigidez Dielétrica, kV/mm
Ar	1,00059	3
Baquelita	4,9	24
Gasolina	2,0 (70°F)	
Mica	5,4	10–100
Neoprene	6,9	12
Óleo de transformador	2,24	12
Papel	3,7	16
Parafina	2,1–2,5	10
Plexiglas	3,4	40
Poliestireno	2,55	24
Porcelana	7	5,7
Titanato de estrôncio	240	8
Vidro (Pirex)	5,6	14

Tabela 1. Rigidez e constante dielétrica para alguns materiais.



2.5. Campo elétrico de um condutor esférico

Considere uma esfera condutora não puntiforme e de raio R , eletrizada uniformemente com uma carga elétrica Q . Como vimos, o campo elétrico resultante no interior do condutor é nulo. O campo elétrico a uma distância $d > R$, pode ser calculado como se fosse produzido por uma carga puntiforme Q , localizada no centro da esfera (conforme será provado na lei de Gauss).

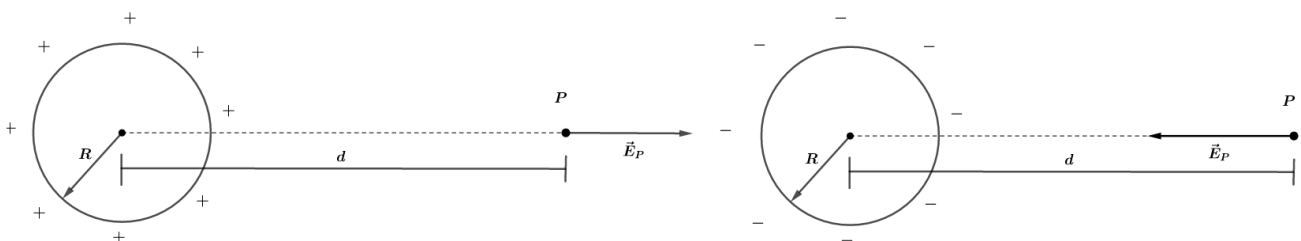


Figura 28: Campo elétrico a uma distância $d > R$.

Assim, temos que:

$$E_P = \frac{kQ}{d^2}, d > R$$

A relação acima não é óbvia. A fórmula $E = \frac{kQ}{d^2}$ só vale para cargas pontuais. Acima estamos dizendo que vale **também** para o exterior da esfera condutora.

Se tomarmos um ponto P , ainda externo, mas muito próximo à superfície do condutor, a intensidade do campo elétrico ainda segue a fórmula, entretanto, nesse caso, a distância será praticamente igual ao raio.

$$E_{próx} = \frac{kQ}{R^2}$$



A fórmula acima vale para pontos muito próximos da **superfície do condutor**, mas que não estão exatamente sobre a superfície, ainda são pontos externos. Exatamente na superfície existe uma descontinuidade, e iremos calcular quanto o campo vale na superfície conforme o esquema abaixo.

Para isso, vamos tomar uma esfera condutora de raio R , eletrizada com uma carga Q e em equilíbrio eletrostático. Vamos marcar três pontos extremamente próximos à superfície externa, de tal forma que S pertence à superfície, I esteja no interior da esfera e T esteja fora da esfera.

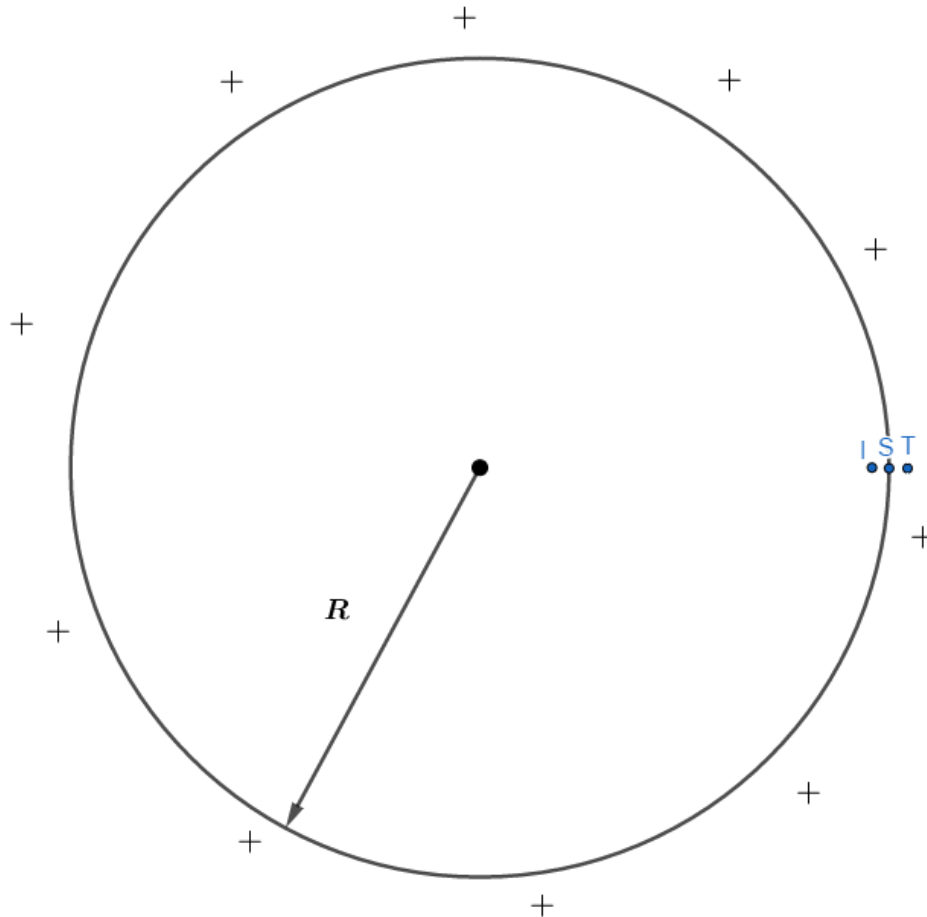


Figura 29: Representação de um ponto na superfície de um condutor esférico.

Observe que I , S e E estão muito próximos.

Vamos encontrar uma relação entre as intensidades dos campos elétricos que a carga Q do condutor cria em I , S e E .

Imagine que a superfície externa da esfera seja dividida em duas partes A e B , como na figura logo abaixo:

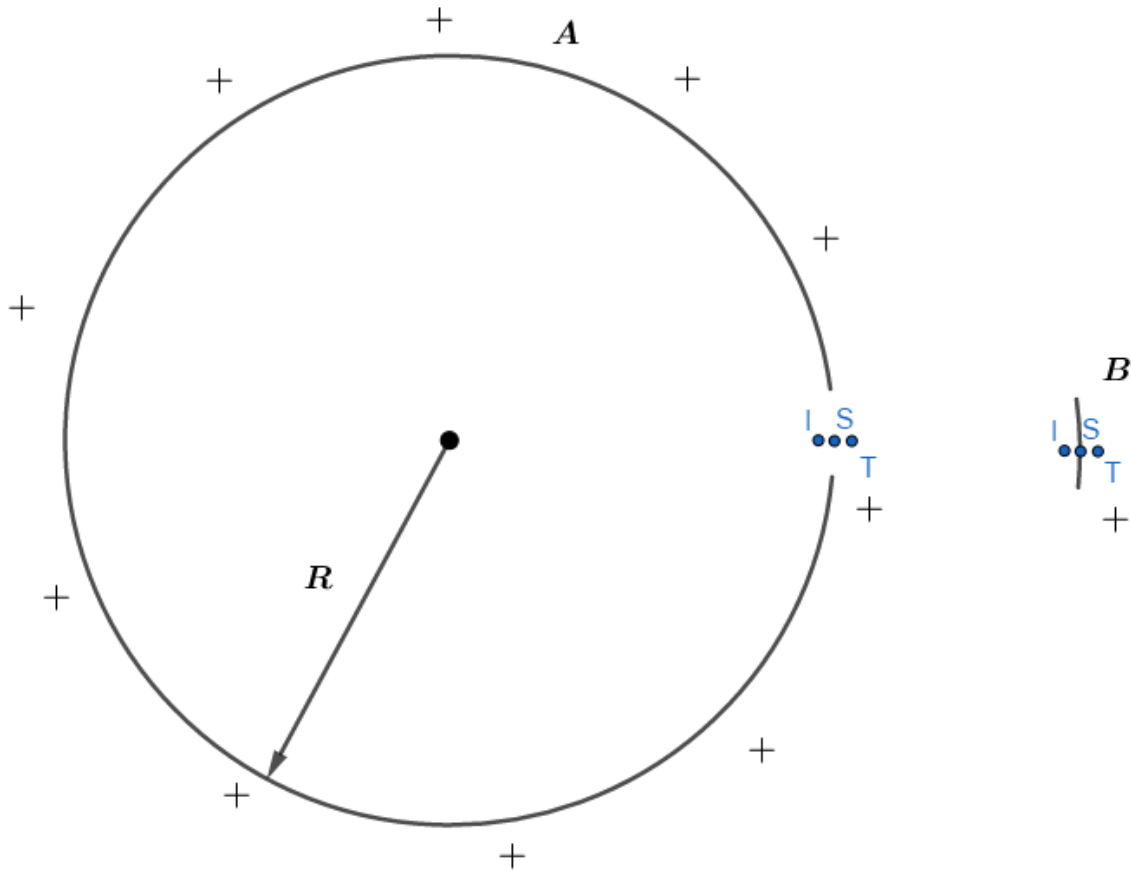
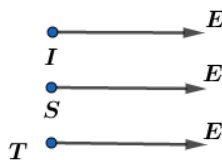


Figura 30: Ampliação do ponto desejado na superfície da esfera condutora.

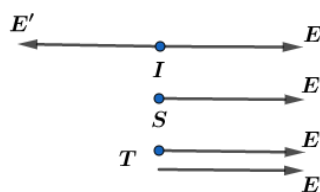
O campo elétrico nos pontos I, S e T, pelo princípio da superposição, será igual ao campo elétrico gerado pela superfície A mais o campo elétrico gerado pela superfície B. **Em relação a A** esses pontos podem ser considerados como coincidentes, já que estão muito próximos. Logo o campo gerado por A nesses pontos pode ser visto abaixo:



Conforme iremos ver quando estudarmos capacitores planos, a parte B pode ser considerada como uma placa plana uniformemente carregada. Essa parte gera campos externos de módulo constante ($E' = \sigma/2\epsilon_0$) em I e T, mas não gera campo em S, pois S está no interior de B.



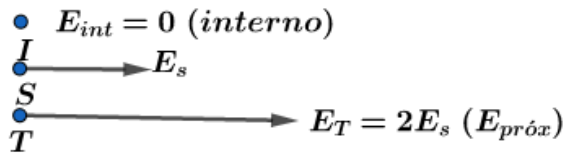
Dessa forma, temos que o campo elétrico resultante em cada ponto devido às duas partes da superfície do condutor é:





Já sabemos que o campo elétrico resultante no interior, ou seja, em I é nulo, então concluímos que $\vec{E} + \vec{E}' = \vec{0} \rightarrow \vec{E}' = -\vec{E}$.

Assim temos que:



Sendo assim, a intensidade do campo elétrico na superfície do condutor, E_{sup} , é metade da intensidade do campo elétrico nas vizinhanças externas de sua superfície ($E_{próx}$), ou seja:

$$E_{sup} = \frac{1}{2} \cdot E_{próx}$$

$$E_{sup} = \frac{kQ}{2R^2}$$

ESCLARECENDO!



Podemos reunir os resultados dos campos para as três regiões do espaço no seguinte gráfico:

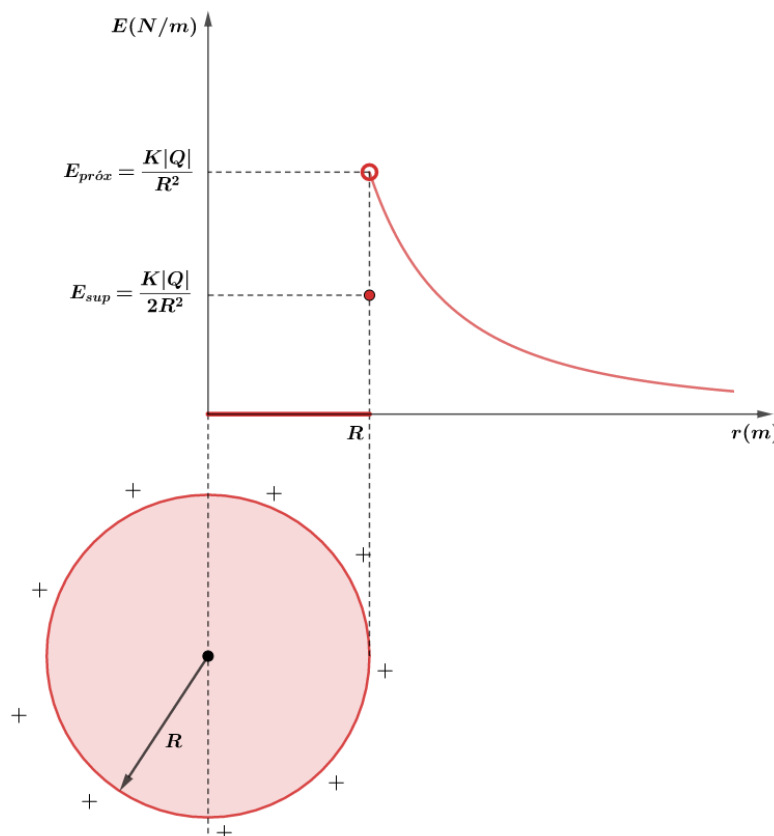


Figura 31: Descontinuidade do campo elétrico na superfície de um condutor esférico.



3.0. Campo elétrico uniforme

Campo elétrico uniforme é aquele cujo vetor \vec{E} tem mesmo módulo, direção e sentido em todos os pontos.

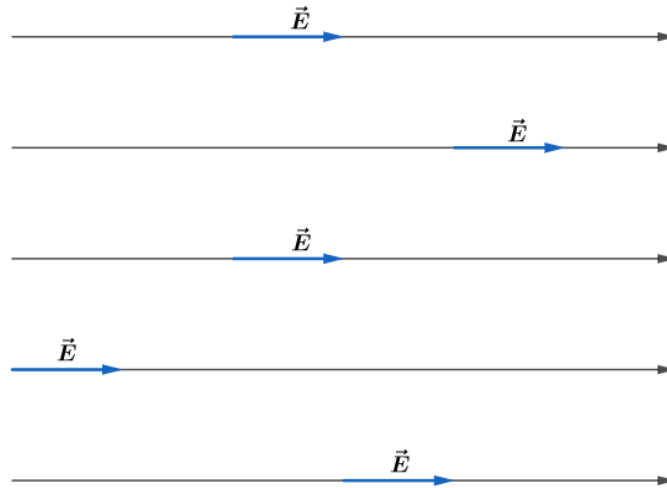


Figura 32: Região do espaço onde existe um campo elétrico uniforme.

Em um campo elétrico uniforme, representamos as linhas de força por segmentos retos paralelos entre si, igualmente espaçados.

Embora não exista uma superfície infinita, o campo elétrico gerado por uma superfície plana, finita e uniformemente eletrizada pode ser considerado uniforme nos pontos situados próximos à placa, e pode ser calculado por (iremos provar essa relação quando vermos lei de Gauss):

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

Esse é o módulo do campo elétrico produzido por uma placa infinita, com distribuição uniforme de cargas na superfície de um material condutor.

Podemos conseguir um campo elétrico uniforme utilizando duas placas planas e iguais, paralelas entre si e eletrizadas com cargas de mesmo módulo e sinais opostos. Quando colocamos as placas próximas, surgem três regiões do espaço:

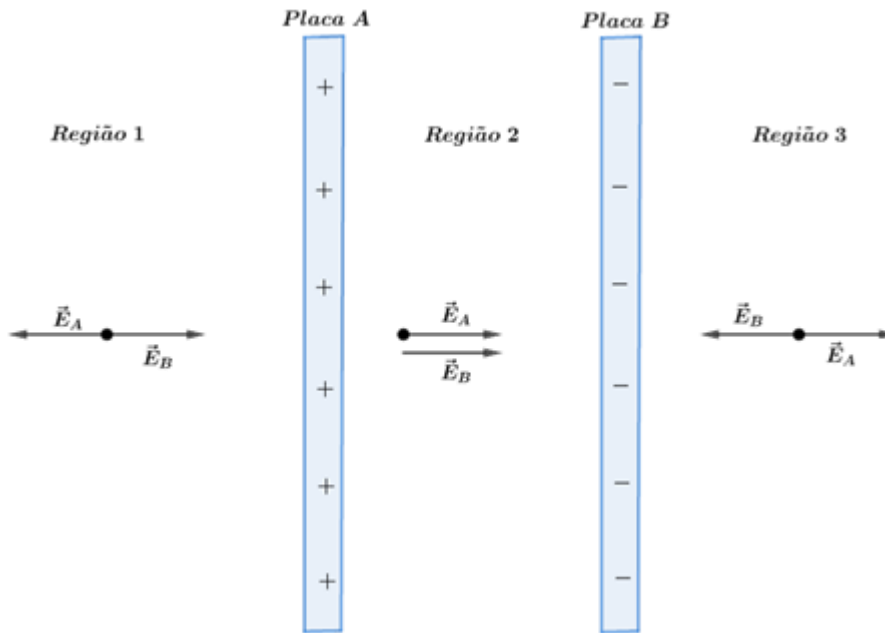


Figura 33: Campo elétrico entre duas placas infinitas e paralelas.

Dado que as placas possuem, em valor absoluto, a mesma densidade de cargas, o módulo do campo produzido por elas é o mesmo.

$$E_A = E_B = \frac{|\sigma|}{2\epsilon}$$

De acordo com a figura, é possível calcular o campo resultante nas três regiões:

- Região 1:

$$\vec{E}_R = \vec{0}$$

- Região 2:

$$E_R = E_A + E_B = \frac{|\sigma|}{2\epsilon} + \frac{|\sigma|}{2\epsilon}$$

$$E_R = \frac{|\sigma|}{\epsilon}$$

- Região 3:

$$\vec{E}_R = \vec{0}$$

A figura acima se chama capacitor de placas paralelas. Dessa forma, na região externa ao capacitor o campo vale zero, e na região interna o campo vale σ/ϵ

ESCLARECENDO!





3.1. Cinemática de uma carga puntiforme em um campo uniforme

Para estudar este problema, vamos tomar um exemplo de uma carga $+q$, entrando em uma região onde existe um campo elétrico uniforme, como mostra a figura logo abaixo:

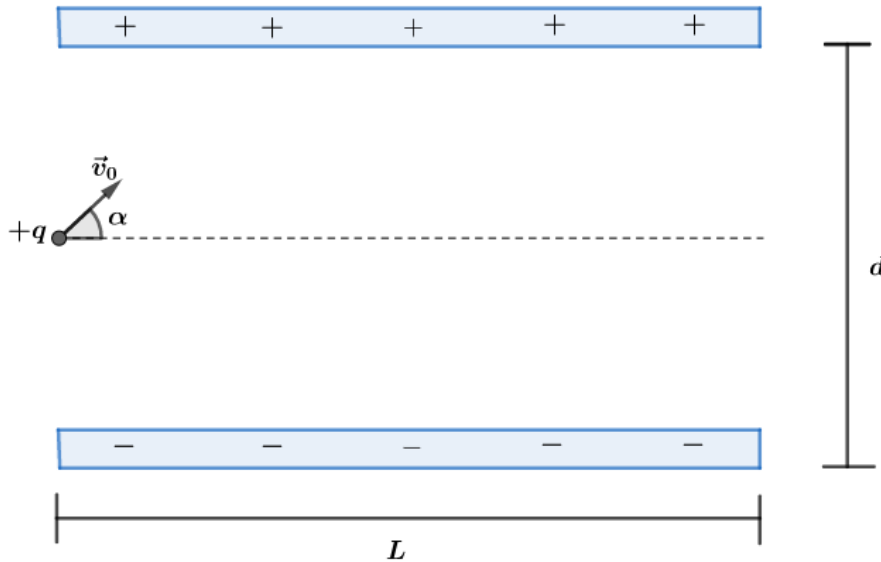
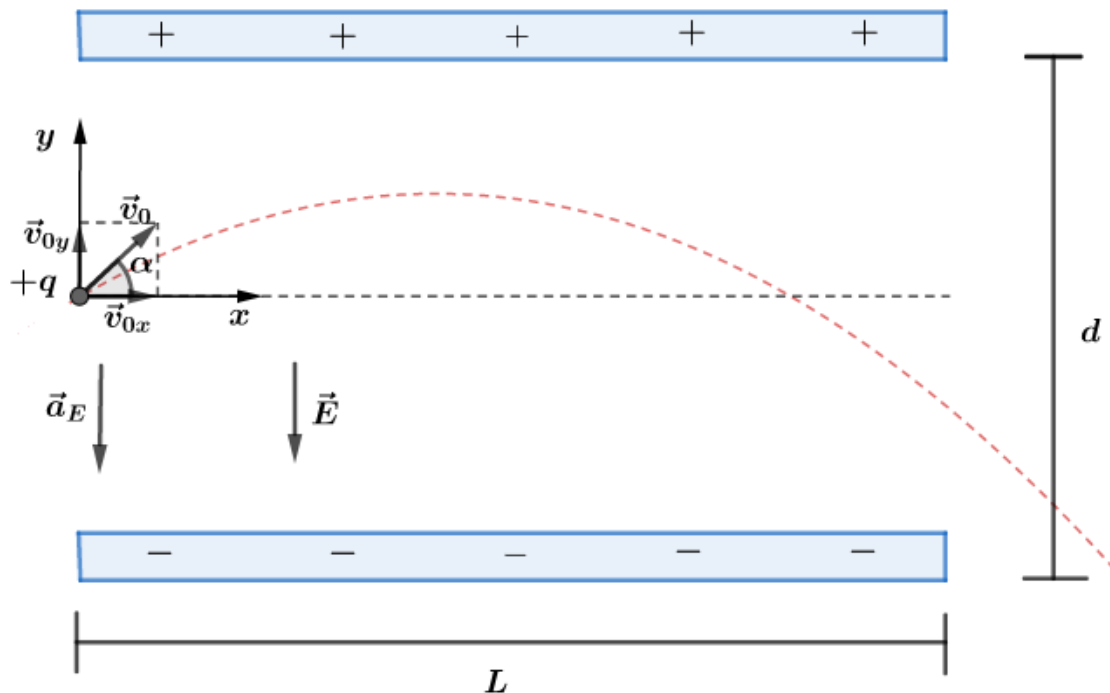


Figura 34: Carga q sendo lançada no interior de uma região com campo elétrico uniforme.

Adotando a origem do sistema de coordenada no ponto onde a carga está quase entrando na região do campo elétrico uniforme e considerando que a força peso pode ser desprezada quando comparada em magnitude com a força elétrica, podemos escrever as equações dos movimentos na horizontal e na vertical:





Supondo que $L \gg d$, podemos desprezar o efeito de borda nas extremidades das placas paralelas. Dessa forma, temos que:

- Em x:

$$\vec{F}_{Rx} = \vec{0} \Rightarrow MU \text{ em } x$$

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} \text{ eq. 2}$$

- Em y:

$$\vec{F}_{Ry} = q \cdot \vec{E} \Rightarrow MUV \text{ em } y$$

Podemos escrever o módulo da aceleração em y como:

$$q \cdot E = m \cdot a_y$$

$$a_y = \frac{q \cdot E}{m}$$

A função horária do espaço em y é dada por:

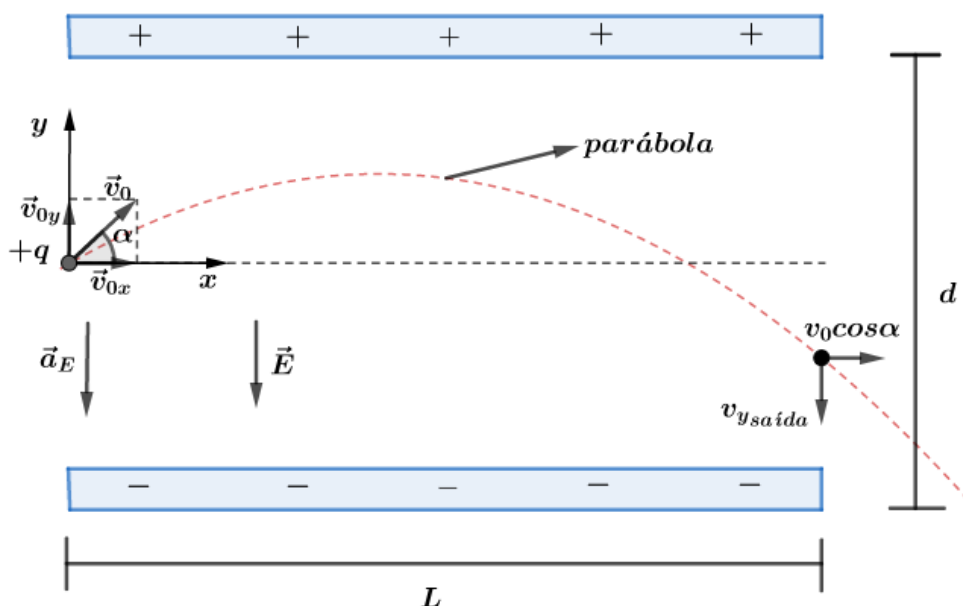
$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{qE}{m} \cdot t^2 \text{ eq. 3}$$

Substituindo eq. 2 em eq. 3 e manipulando algebricamente, temos que:

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot E}{m} \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} \right)^2$$

$$\therefore y = v_0 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot E}{m \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

Com este resultado, vemos que a curva no interior do campo elétrico será uma parábola, onde o tempo de voo pode ser dado por:





$$v_y = v_{0y} - a_y \cdot t$$

$$v_y = v_0 \cdot \text{sen}\alpha - \frac{qE}{m} \cdot t$$

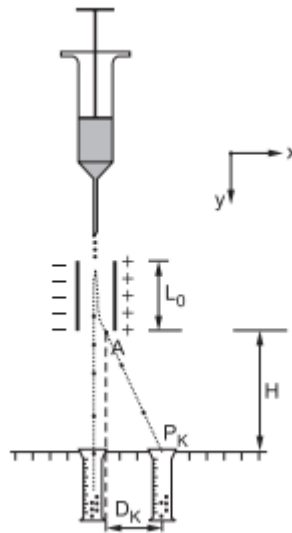
$$v_{y\text{saída}} = v_0 \cdot \text{sen}\alpha - \frac{qE}{m} \cdot t_{voo}$$

$$t_{voo} = \frac{v_0 \cdot \text{sen}\alpha - v_{y\text{saída}}}{\frac{qE}{m}}$$



2) (Fuvest – 2002)

Um selecionador eletrostático de células biológicas produz, a partir da extremidade de um funil, um jato de gotas com velocidade V_{0y} constante. As gotas, contendo as células que se quer separar, são eletrizadas. As células selecionadas, do tipo K , em gotas de massa M e eletrizadas com carga $-Q$, são desviadas por um campo elétrico uniforme E , criado por duas placas paralelas carregadas, de comprimento L_0 . Essas células são recolhidas no recipiente colocado em P_K , como na figura. Para as gotas contendo células do tipo K , utilizando em suas respostas apenas Q, M, E, L_0, H e V_{0y} determine:



- A aceleração horizontal A_x dessas gotas, quando elas estão entre as placas.
- A componente horizontal V_x da velocidade com que essas gotas saem, no ponto A , da região entre as placas.
- A distância D_K , indicada no esquema, que caracteriza a posição em que essas gotas devem ser recolhidas.

(Nas condições dadas, os efeitos gravitacionais podem ser desprezados).



Comentários:

a) Quando a gota eletrizada com carga $-Q$ entra na região entre as placas, ela fica sujeita a ação da força elétrica e como o campo está orientado no sentido contrário ao eixo x adotado na questão, a força elétrica na carga negativa está orientada no sentido do eixo x . A única força que atua na partícula em x é a força elétrica, portanto, ela será a resultante em x :

$$\vec{F}_{Rx} = (-Q) \cdot E \cdot (-\hat{x})$$

$$M \cdot \vec{A}_x = Q \cdot E \cdot \hat{x}$$

$$\boxed{\vec{A}_x = \frac{Q \cdot E}{M} \hat{x}}$$

Em módulo: $\boxed{A_x = \frac{Q \cdot E}{M}}$

b) Em x , temos um MUV, pois existe a aceleração de módulo constante A_x . Logo, a velocidade em x obedece a equação horária:

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$

$$v_x = 0 + A_x \cdot t$$

$$v_x = \frac{Q \cdot E}{M} \cdot t$$

Em y , a gota está caindo com velocidade praticamente constante, já que os efeitos gravitacionais foram desprezados, então, a função horária do espaço é dada por:

$$y = y_0 + v_y \cdot t \Rightarrow y = 0 + V_{0y} \cdot t \Rightarrow y = V_{0y} \cdot t$$

O tempo que a gota percorre no interior das placas pode ser dado por:

$$\Delta y = L \Rightarrow L = V_{0y} \cdot t_{placas} \Rightarrow t_{placas} = \frac{L}{V_{0y}}$$

Então, a velocidade em x quando a gota sai da região das placas é dada por:

$$\boxed{v_x = \frac{Q \cdot E}{M} \cdot \frac{L}{V_{0y}}}$$

c) Após a gota sair da região entre as placas, nenhuma força atuará tanto em x quanto em y . Dessa forma, nessa fase do movimento da gota temos apenas a composição de dois MU, um em cada eixo:

$$\Delta y = V_{0y} \cdot t$$

$$\Delta x = v_x \cdot t$$

Tempo para partícula percorrer H :

$$H = v_{0y} \cdot t_H$$

Logo:

$$D_K = \frac{Q \cdot E}{M} \cdot \frac{L}{V_{0y}} \cdot \frac{H}{V_{0y}}$$

$$\boxed{D_K = \frac{Q \cdot E \cdot L \cdot H}{M \cdot V_{0y}^2}}$$



3)

Um pêndulo cuja haste mede L e cuja massa pendular é igual a m , oscila em uma região onde a aceleração da gravidade vale g .

a) qual o período de oscilação desse pêndulo?

b) imagine que o sistema foi levado para uma região onde existe um campo elétrico uniforme, vertical e orientado para baixo, de intensidade E . A massa pendular é eletrizada com carga $+Q$. Considere que a haste é feita de material isolante.

Qual deve ser o novo período de oscilação do pêndulo?

Comentários:

a) em primeiro momento, trata-se de um pêndulo simples, onde sabemos que o período de oscilação é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Onde g é a aceleração da gravidade sentida pela massa pendular.

b) quando levamos o sistema para a região onde existe o campo elétrico uniforme, vertical e para baixo, a massa pendular que possui uma carga positiva Q fica submetida também a uma força elétrica. Dessa forma, a gravidade aparente na massa pendular passa a ser:

$$g_{ap} = g + a_e$$

$$g_{ap} = g + \frac{QE}{m}$$

Logo, o novo período é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g + \frac{QE}{m}}}$$





INDO MAIS
FUNDO!



4.0. A lei de Gauss da eletricidade

Antes de mostrar o que é a Lei de Gauss da Eletricidade, vamos definir alguns conceitos que serão utilizados na formulação dessa lei.

TOME
NOTA!



4.1. Fluxo de um campo vetorial

Chamamos de vetor área (\vec{A}) o vetor cuja direção é perpendicular à área em questão e seu módulo é igual à área da superfície que ele representa. O sentido do vetor é arbitrado.

Exemplo: quadrado de lado L , temos que:

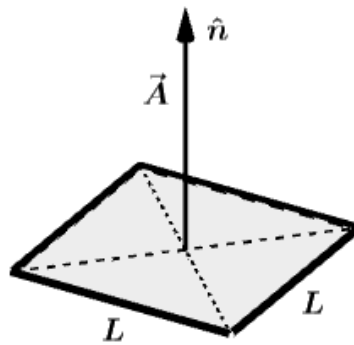
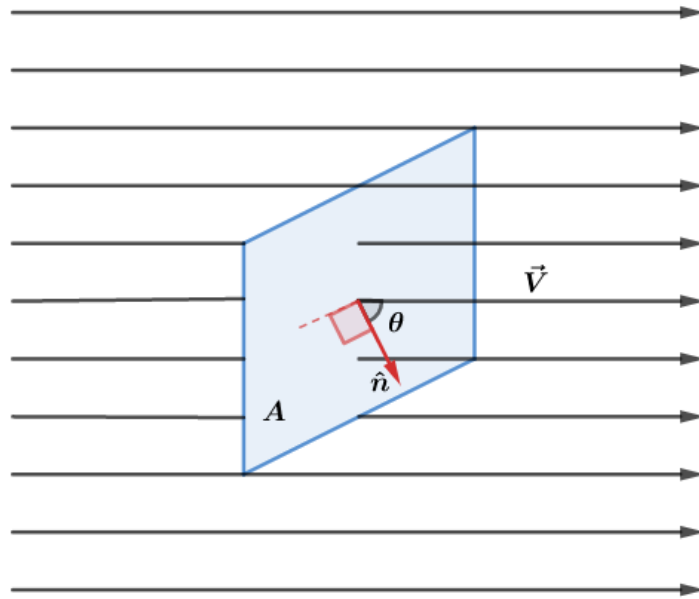


Figura 35: Representação de um vetor área.

$$\vec{A} = A \cdot \hat{n} = L^2 \cdot \hat{n}$$

O fluxo de um campo vetorial através de uma superfície imaginária de área A é uma **medida do número de linhas do campo que perfuram essa superfície**, ou seja, o fluxo elétrico é proporcional à quantidade de linhas de campo. Seja \vec{V} um campo qualquer, matematicamente, dizemos que:

$$\varphi = \vec{V} \cdot \vec{A} = V \cdot A \cdot \cos\theta$$



vista em perspectiva

Figura 36: Vista em perspectiva do fluxo de um campo vetorial perfurando uma área imaginária A.

Na vista frontal, temos as seguintes situações particulares:

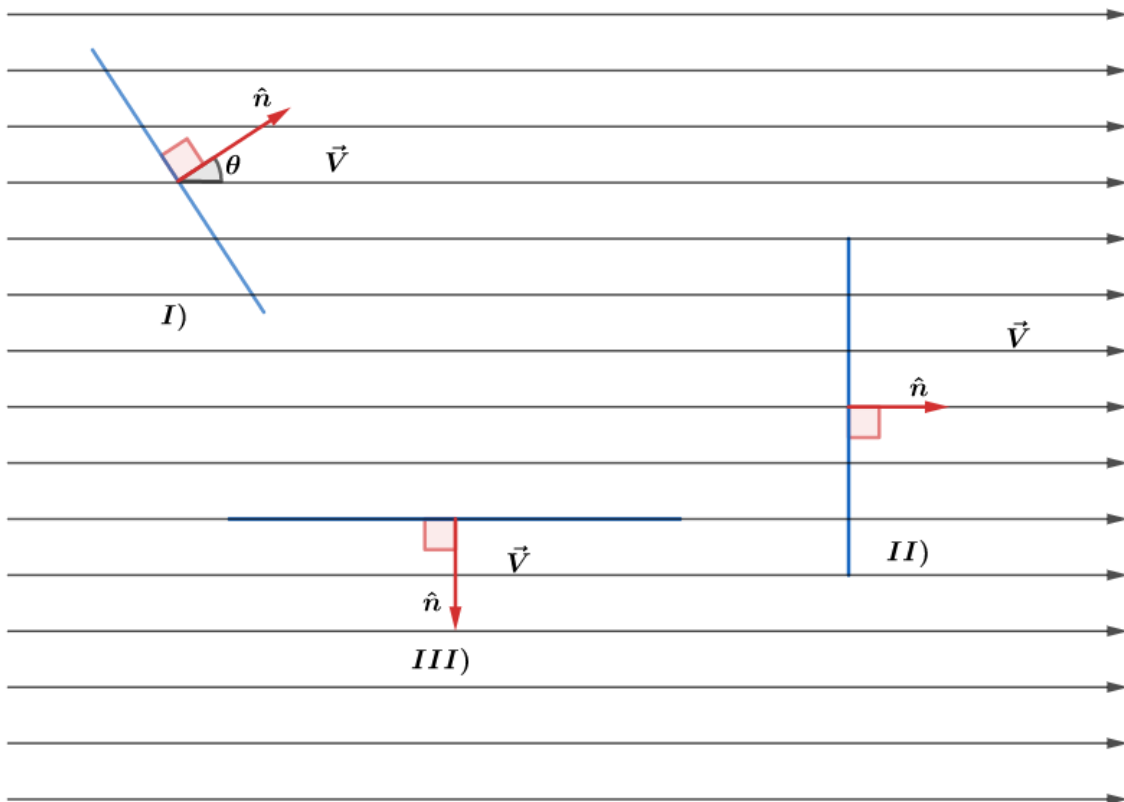


Figura 37: Vista frontal do fluxo de um campo vetorial perfurando uma área imaginária A em diferentes casos.

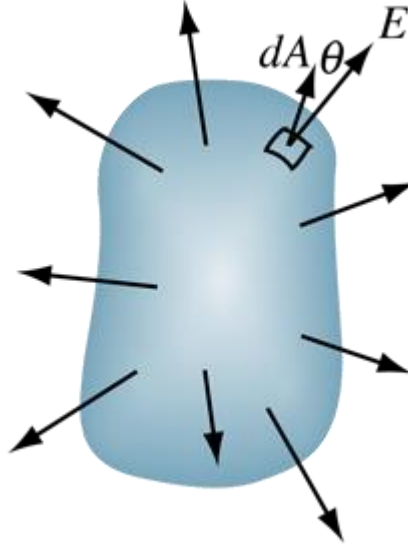
Para essas três situações temos os seguintes fluxos:

- I. $\varphi_I = V \cdot A \cdot \cos \theta$
- II. $\varphi_{II} = V \cdot A \cdot \cos 0^\circ = VA$
- III. $\varphi_{III} = V \cdot A \cdot \cos 90^\circ = 0$



Observe que quando $\theta = 0^\circ$ o fluxo é máximo pois temos o maior número de linhas de força que atravessam a superfície. Por outro lado, quando $\theta = 90^\circ$ nenhuma linha de força atravessa a superfície.

Veja que até agora aprendemos a calcular o fluxo em uma superfície plana. Mas como fazemos para calcular o fluxo em uma superfície curva? Veja a figura abaixo por exemplo:

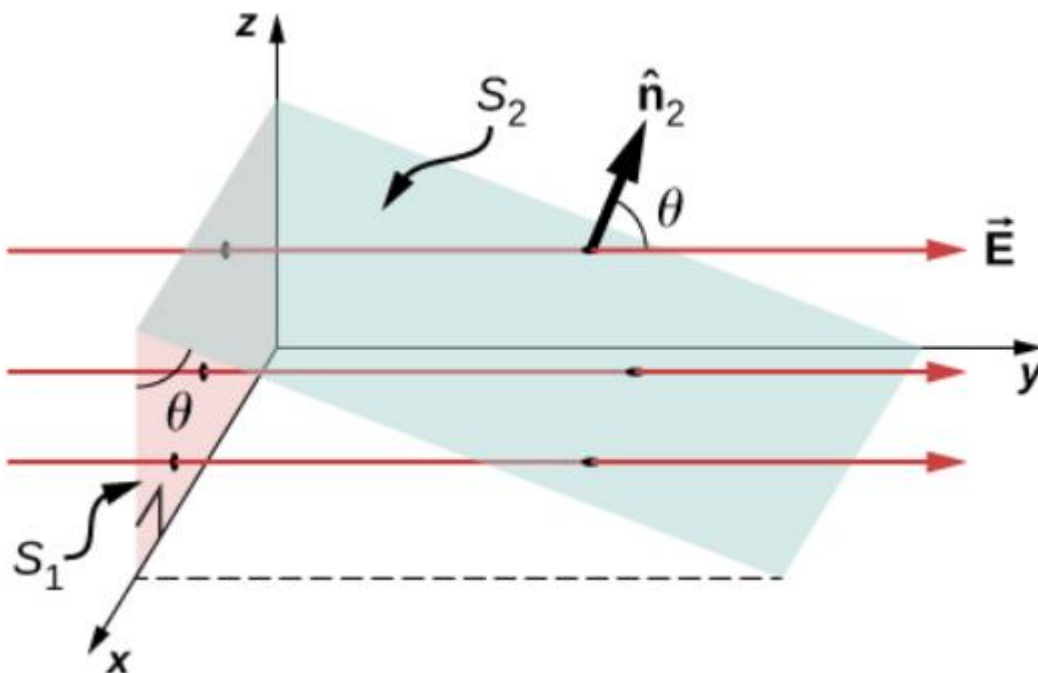


Podemos dividir essa superfície em infinitas áreas infinitesimais dA . Se as áreas forem pequenas o suficiente, podemos considerar essas áreas planas e calcular o fluxo de cada uma delas por:

$$d\phi = E \cdot dA \cdot \cos \theta$$

Depois daí, podemos somar os infinitos fluxos (integrar) e chegar no fluxo final.

Muito difícil professor! Existe alguma maneira mais fácil de calcular o fluxo de uma superfície curva? Sim! Podemos utilizar o conceito de área projetada. Veja que $dA \cdot \cos \theta$ é simplesmente a área projetada de dA no plano perpendicular ao campo naquele ponto:





Considere que precisemos calcular o fluxo na superfície S2 acima. Seja A2 a área dessa superfície, podemos fazer:

$$\phi = E \cdot A_2 \cdot \cos \theta$$

Mas veja que, pela figura, $A_1 = A_2 \cos \theta$, logo:

$$\phi = E \cdot A_1$$

Ou seja, o fluxo que passa pela superfície 1 (área projetada) é igual ao fluxo que passa pela superfície 2. Isso é verdade pois o número de linhas de força que passa por 1 é igual ao número de linhas de força que passa por 2, e ocorre sempre que **não haja carga entre 1 e 2** (pois se existisse carga entre 1 e 2, o número de linhas de campo que passariam por 1 e 2 seria diferente. Vejamos um outro exemplo:

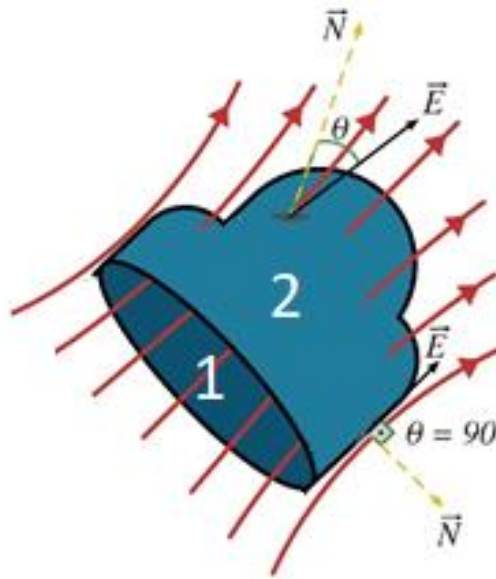


Figura 38: Fluxo de um campo vetorial em uma superfície curva

Veja que a superfície 1 é a área projetada da superfície 2 e não existe carga entre 1 e 2, logo o fluxo em 1 é igual ao fluxo em 2, bem mais fácil de calcular!

Mas o que acontece quando as linhas de campo atravessam uma figura tridimensional? Para responder a essa pergunta vamos considerar uma superfície imaginária, fechada, num campo vetorial qualquer. Para fins de ilustração, vamos considerar que nossa superfície fechada seja a área superficial dessa figura tridimensional. Além disso, vamos dividir a superfície em duas partes, conforme a figura abaixo:

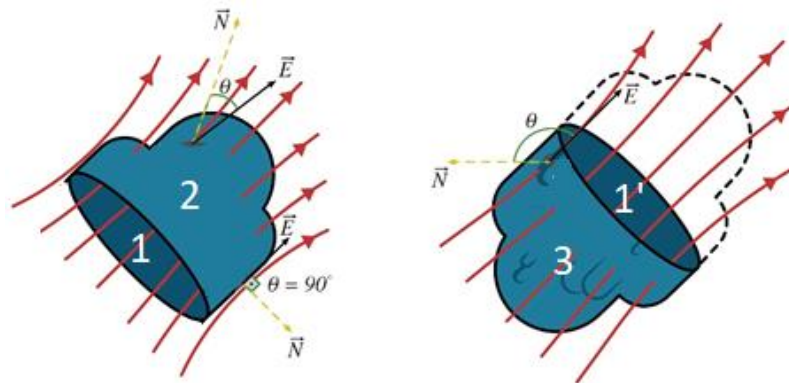


Figura 39: Fluxo de um campo vetorial em uma superfície fechada.



Veja inicialmente que não existe carga dentro da figura. Como 1 é a área projetada de 2, o fluxo em 2 é igual ao fluxo em 1. Como 1' é a área projetada de 3, o fluxo em 1' é igual ao fluxo em 3. Além disso, como 1 e 1' são a mesma superfície, exceto pelo sentido (linhas de campo entrando em 1 e saindo de 1'), logo fluxo de 1 é menos o fluxo de 1', logo:

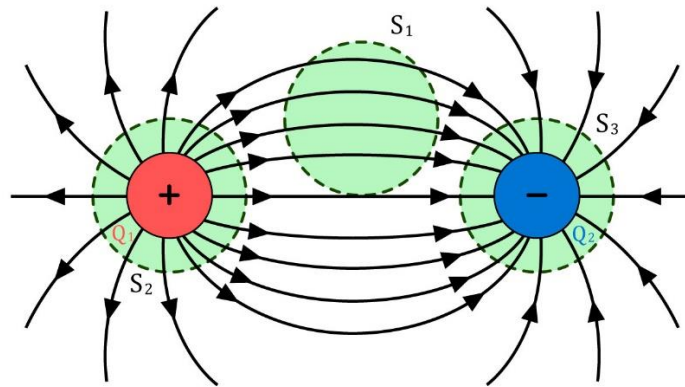
$$\phi_2 = \phi_1 = -\phi'_1 = -\phi_3$$

$$\phi_2 + \phi_3 = 0 \rightarrow \phi_{\text{superfície fechada}} = 0$$

Acabamos de provar que o fluxo de uma **superfície fechada** (também chamada de superfície gaussiana) sem cargas internas nulo. Isso é justificado pelo fato da quantidade de linhas de força que entram em uma superfície, gerando um fluxo negativo, ser igual à quantidade de linhas de forças que saem dessa superfície, gerando um fluxo positivo. Lembre-se que o fluxo elétrico é proporcional à quantidade líquida de linhas de campo que passam pela superfície.

Exemplo:

Sejam duas cargas, $+q$ e $-q$, onde representamos suas linhas de forças. Vamos estudar o fluxo do campo elétrico nas três superfícies fechadas.



Na superfície S_1 não existe carga interna, logo o fluxo elétrico nessa superfície é nulo. Por outro lado, na superfície S_2 as linhas estão saindo, logo, o fluxo é positivo e na superfície S_3 as linhas estão entrando, logo, o fluxo é negativo.



4.2. A lei de Gauss

Vamos considerar uma distribuição de cargas elétricas e uma superfície imaginária fechada qualquer, que envolva essas cargas. Chamamos essa superfície imaginária de **superfície gaussiana** (Ω).

Acima provamos que se a superfície gaussiana não tem cargas internas, seu fluxo é nulo. Além disso, para cargas pontuais, o campo elétrico pode ser dado por $E = kQ/d^2$, ou seja, o campo é diretamente proporcional à carga. Como o fluxo é diretamente proporcional ao campo, para cargas pontuais o fluxo também será diretamente proporcional à carga interna. Ou seja:



$$\phi_{gaussiana} = k \cdot Q_{interna}$$

Sendo k uma constante. Gauss prova, experimentalmente, que a relação acima não vale somente para cargas pontuais, mas para quaisquer cargas. Além disso, a constante k é igual para todos os casos e vale o inverso da permissividade do meio, ou seja:

$$\phi_{\Omega} = \frac{Q_{int}}{\epsilon} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n}{\epsilon}$$

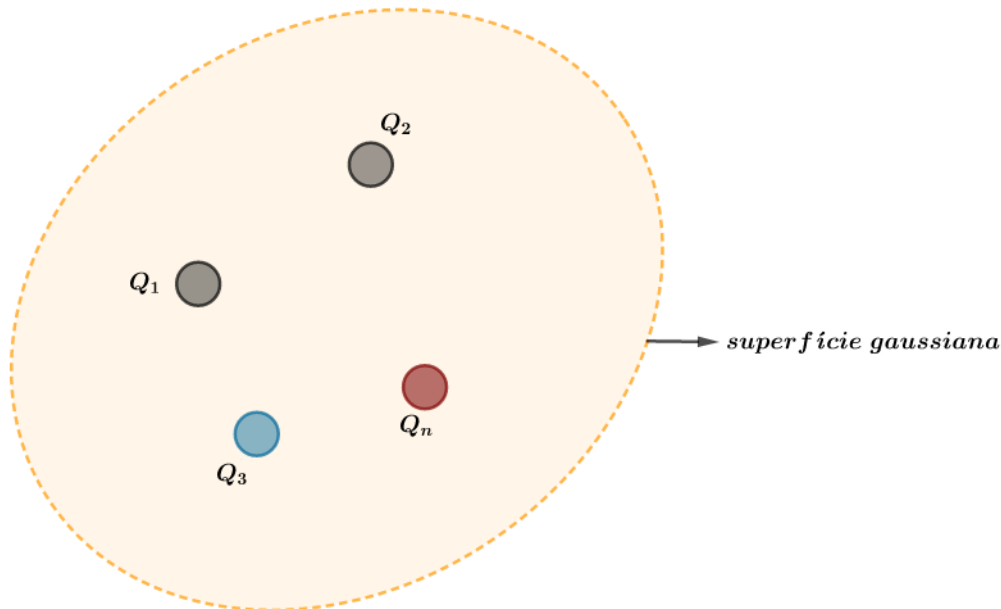


Figura 40: Aplicação da Lei de Gauss para n cargas.

A unidade de fluxo elétrico é o $\frac{N \cdot m^2}{C}$.

Para exemplificar o uso da Lei de Gauss, vamos calcular o fluxo elétrico gerado por uma carga elétrica puntiforme com carga +q, em um meio cuja permissividade elétrica é ϵ .

Aqui devemos ter cuidado! A lei de Gauss calcula o fluxo de maneira muito simples, basta dividir a carga por ϵ . Mas não é no fluxo que estamos interessados, mas no campo elétrico. Se pagarmos uma superfície gaussiana assimétrica e aleatória, será muito difícil relacionar o fluxo com o campo elétrico (teríamos que integrar cada elemento infinitesimal, pois para cada ponto da superfície teríamos um campo, uma área e ângulos distintos). Dessa forma, para utilizarmos a lei de Gauss eficientemente (da maneira como cai nos nossos vestibulares), precisamos estabelecer uma superfície gaussiana tal que o campo nessa superfície seja constante, tanto em módulo quando em ângulo. Se o campo for constante para toda a superfície, podemos utilizar:

$$E_{gaussiana} = \frac{\phi}{A \cos \theta}$$

Além disso, se o campo além de constante for perpendicular à superfície ($\theta = 0^\circ$), podemos utilizar:

$$E_{gaussiana} = \frac{\phi}{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon A}$$

Dessa forma, temos a nossa fórmula final para a Lei de Gauss, que é a que nós utilizaremos daqui em diante:



Lei de Gauss: Para uma superfície fechada com campo constante e perpendicular:

$$E = \frac{Q_{int}}{\epsilon A}$$

Sem muito esforço, vemos que se pegarmos uma superfície gaussiana esférica com centro na carga puntiforme, iremos ter uma superfície com campo constante e perpendicular, logo podemos utilizar a lei de Gauss da maneira simplificada:

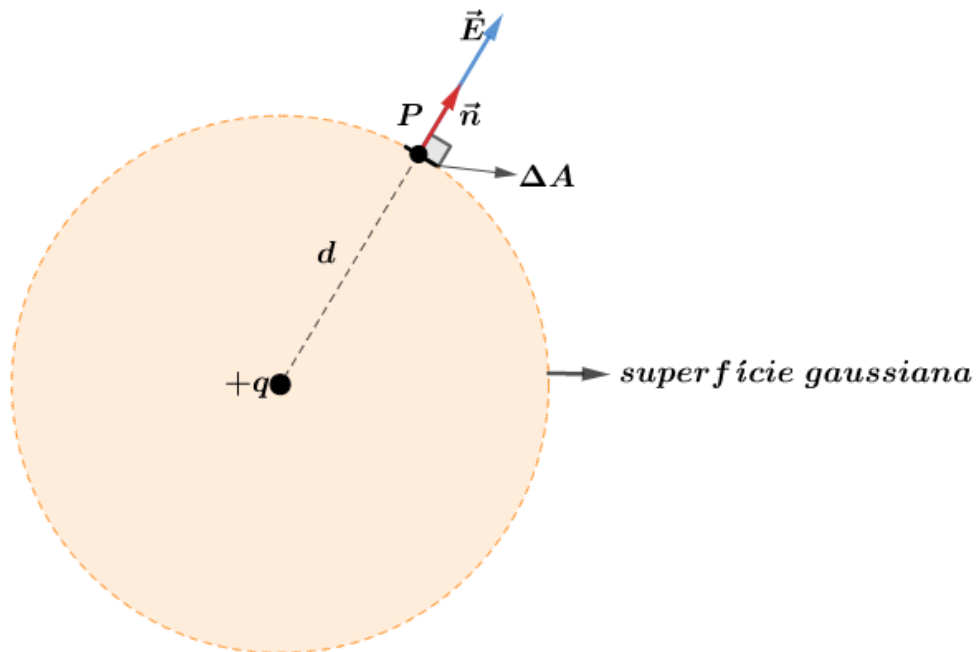


Figura 41: Aplicação da Lei de Gauss para uma carga puntiforme.

$$E = \frac{q}{\epsilon A}$$

A área da superfície gaussiana é igual a:

$$A = 4\pi d^2$$

Dessa forma:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon d^2} = \frac{kq}{d^2}$$

Conforme deduzimos pela lei de Coulomb.

4.3. Algumas aplicações da lei de Gauss

4.3.1. Distribuição de carga elétrica de um condutor eletrizado e em equilíbrio eletrostático

Podemos verificar que o campo elétrico no interior de um condutor eletrizado e em equilíbrio eletrostático é nulo utilizando a Lei de Gauss. Como bem sabemos, dada a condição de equilíbrio eletrostático do condutor, as cargas no condutor se distribuem ao longo da superfície externa.



Com isso, se idealizarmos uma gaussiana (Ω) no interior do condutor, a carga interna a essa gaussiana é nula. Portanto, pela Lei de Gauss, temos que:

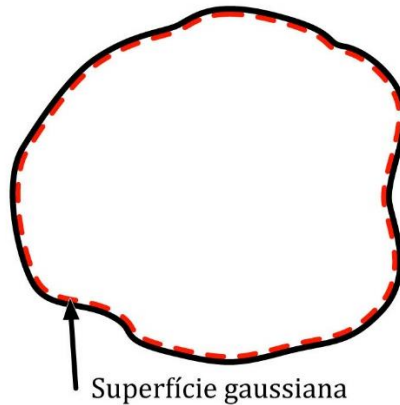


Figura 42: Desenho de uma gaussiana de acordo com o objetivo do problema.

$$E = \frac{Q_{int}}{\epsilon A} = 0$$

4.3.2. Campo elétrico criado por uma distribuição plana e ilimitada de cargas

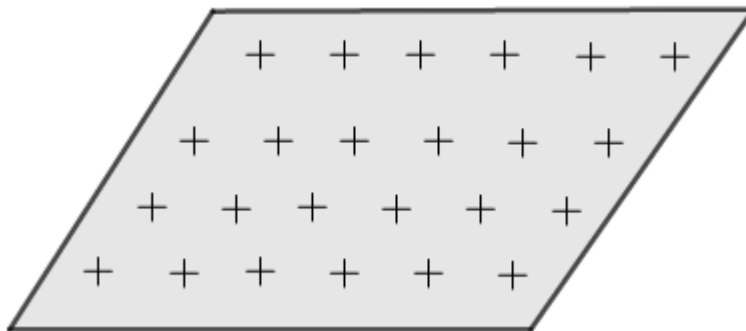
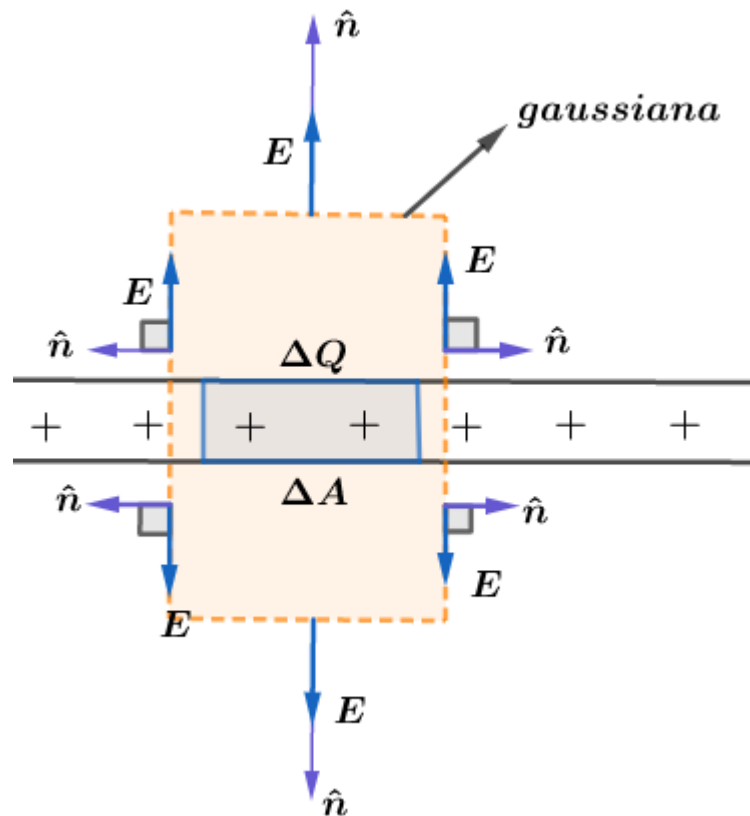


Figura 43: Placa uniformemente carregada com densidade de cargas uniforme σ .

Diante da simetria de uma placa ilimitada (infinita) com distribuição de cargas elétricas uniformes, podemos mostrar que o campo é constante em qualquer região externa, e não depende da distância ao plano.

Nesse caso, a nossa gaussiana será um paralelepípedo, conforme a figura:



Lembre-se que a figura acima está em perfil. Além disso, veja que, como a placa é infinita, o campo elétrico deve ser perpendicular à superfície da placa. Consequentemente, nas superfícies de cima e de baixo do paralelepípedo laranja (gaussiana), podemos aplicar a lei de Gauss de forma simplificada. Além disso, o fluxo nas superfícies laterais (direita e esquerda) e frontais (frente e trás) é nulo, pois o campo é paralelo às quatro superfícies.

Dessa forma:

$$\varphi_{inferior} = E\Delta A \text{ e } \varphi_{superior} = E\Delta A$$

Pela Lei de Gauss, temos que:

$$\varphi_{total} = \varphi_{inferior} + \varphi_{superior} + \varphi_{laterais} + \varphi_{frontais}$$

$$\varphi_{total} = E\Delta A + E\Delta A + 0 + 0 = 2E\Delta A = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

Portanto:

$$2E\Delta A = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

Como a densidade superficial uniforme de cargas da placa pode ser escrita como $\sigma = \frac{Q_{int}}{\Delta A}$, concluímos que:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

Esse resultado é extremamente importante! Decore-o!



4.3.3. Fio retilíneo infinito uniformemente carregado

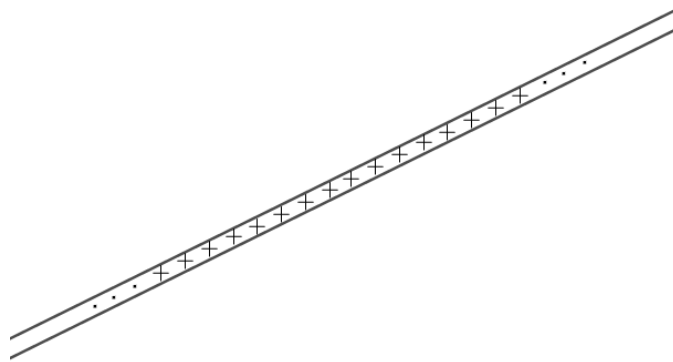


Figura 44: Fio retilíneo uniformemente carregado com densidade de carga λ .

Vamos calcular o campo elétrico gerado por um fio retilíneo infinito, com uma densidade linear de cargas λ , tal que:

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta l}$$

Nossa gaussiana será um cilindro, com eixo central no mesmo eixo do fio. Veja que na superfície lateral desse cilindro o campo é perpendicular, mas nas extremidades o campo é paralelo (fluxo nulo).

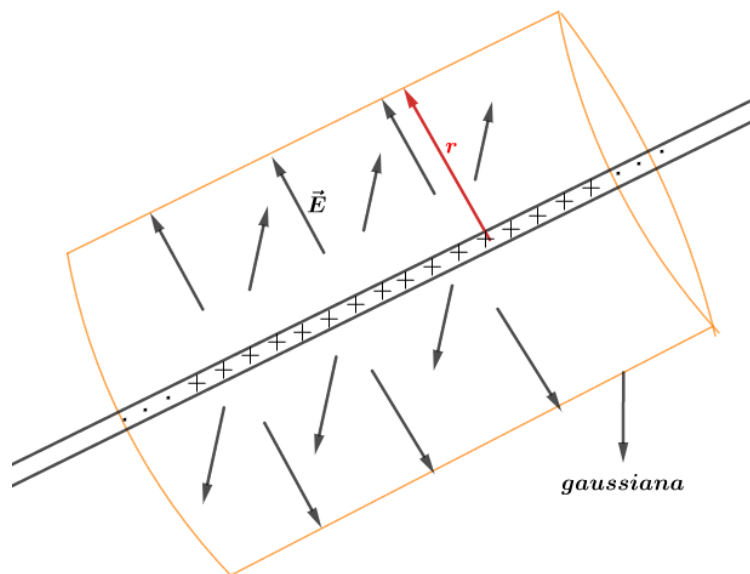


Figura 45: Traçado da gaussiana em um fio retilíneo infinito. A superfície que mais se encaixa para o problema é a superfície externa de um cilindro reto.

$$\varphi_{lateral} = E \Delta A$$

$$\varphi_{lateral} = E 2\pi r \Delta l$$

Pela Lei de Gauss, temos que:

$$\varphi_{total} = \varphi_{lateral} + \varphi_{bases} = E 2\pi r \Delta l + 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon r} \cdot \frac{Q_{int}}{\Delta l}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} = \frac{2k\lambda}{r}$$



Este resultado mostra que o campo elétrico em um fio infinito é inversamente proporcional à distância (e não ao quadrado da distância).

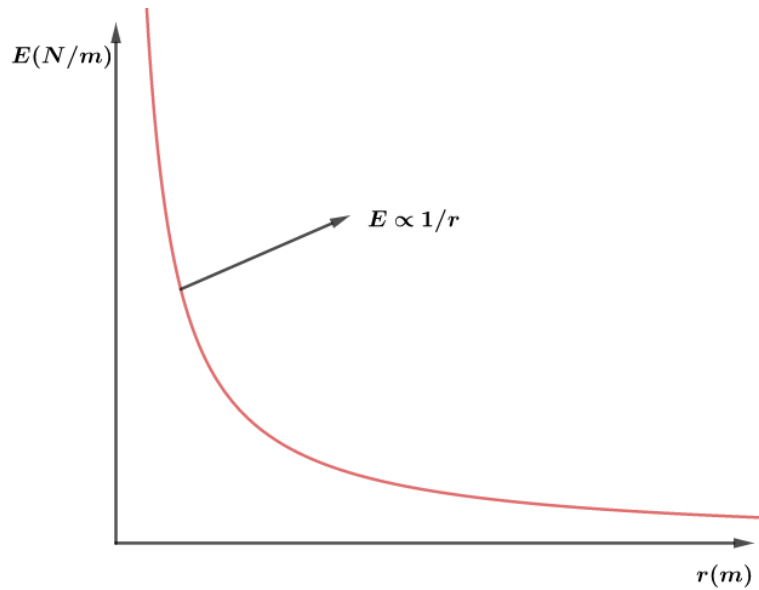


Figura 46: Gráfico do campo elétrico em função da distância para um fio retilíneo e uniformemente carregado.

4.3.4. Esfera isolante uniformemente carregada

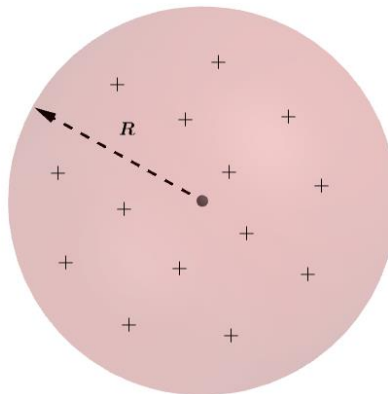


Figura 47: Esfera isolante uniformemente carregada.

Onde a densidade volumétrica de cargas pode ser dada por:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} \cdot R^3}$$

Para este caso, temos duas regiões onde o campo deve ser analisado:

a) Interior da esfera ($r < R$):

Notamos que a gaussiana que atende nossas condições de simetria e campo constante é também a superfície de uma esfera de mesmo centro, mas raio r . Dessa forma, temos a seguinte configuração:

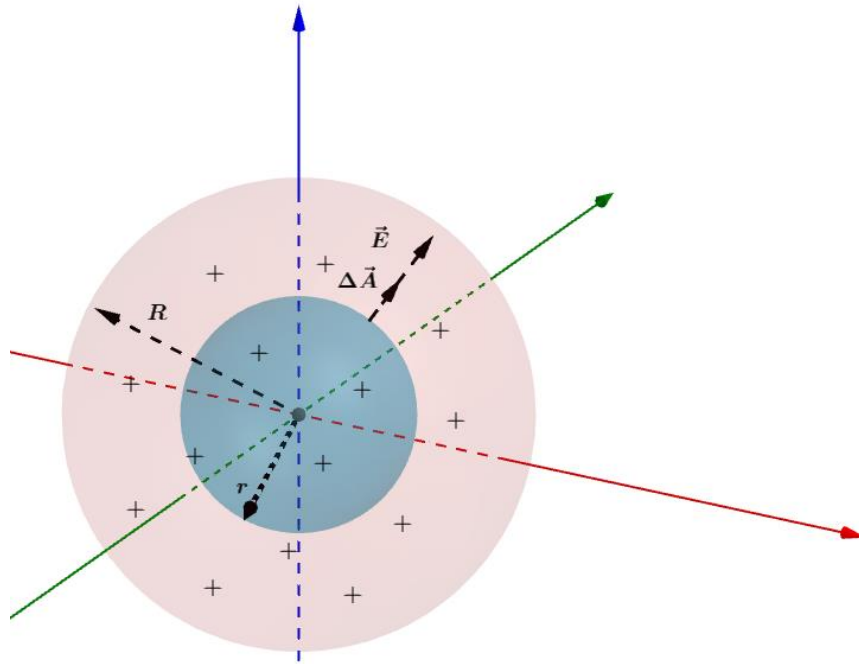


Figura 48: Representação da gaussiana, que é a superfície externa de uma esfera concêntrica a primeira esfera.

A esfera laranja é a esfera isolante, e a carga azul é a gaussiana.

Pela Lei de Gauss, temos que:

$$E = \frac{Q_{int}}{\epsilon A}$$

A carga interna à gaussiana é proporcional ao volume da gaussiana:

$$\frac{Q_{int}}{r^3} = \frac{Q}{R^3}$$

$$Q_{int} = \left(\frac{r^3}{R^3}\right) Q$$

A área da Gaussiana vale:

$$A = 4\pi r^2$$

Juntando:

$$E = \frac{\frac{r^3 Q}{R^3}}{\epsilon \cdot 4\pi r^2} = \frac{kQr}{R^3}$$

Note que o campo no interior de uma esfera isolante, com densidade volumétrica uniforme de cargas, cresce **linearmente** à medida que pegamos pontos mais distantes do centro da esfera.

b) Exterior da esfera ($r > R$):

Para pontos externos a gaussiana continua sendo uma casca esférica concêntrica.

$$Q_{int} = Q$$

$$A = 4\pi r^2$$



$$E = \frac{Q_{int}}{\epsilon A} = \frac{Q}{\epsilon \cdot 4\pi r^2} = \frac{kQ}{r^2}$$

Ou seja, para um ponto fora da esfera, tudo se passa como se a carga fosse pontual e estivesse situada no centro da esfera. Além disso, não existe descontinuidade em superfície como ocorre para esferas condutoras. Dessa forma, temos o seguinte gráfico do campo elétrico em função da distância para as duas regiões:

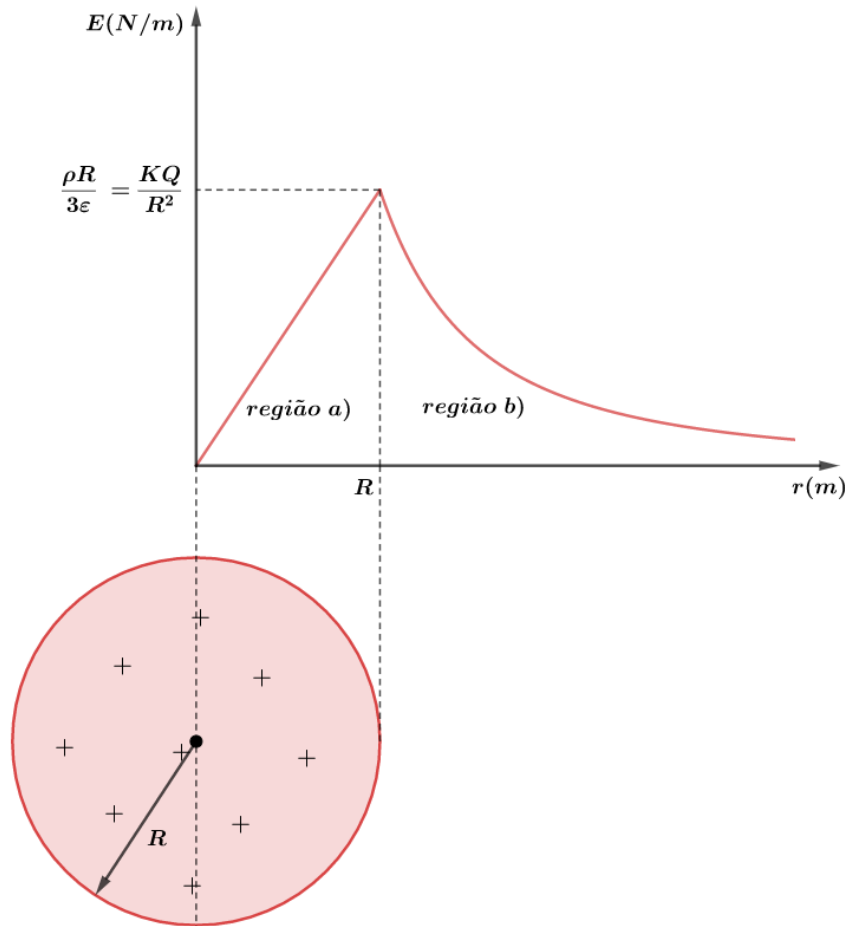


Figura 49: Gráfico do campo elétrico em função da distância ao centro.

4.3.5. Indução total vista pela lei de Gauss

Vamos tomar uma casca esférica condutora, com uma carga puntiforme no centro, conforme mostra a figura:

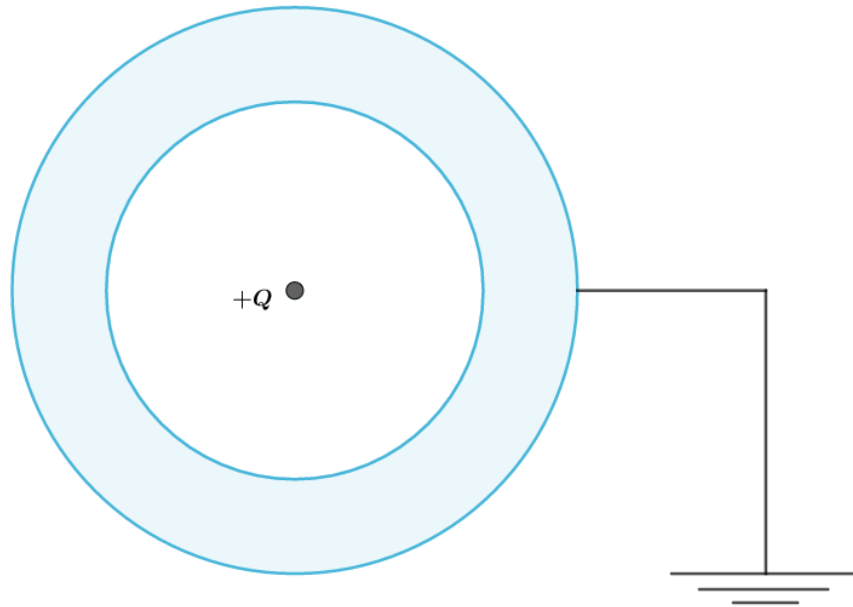


Figura 50: Casca esférica condutora aterrada.

Podemos passar uma gaussiana pelo interior da casca esférica e observar o que deve ocorrer no interior da casca, de acordo com a Lei de Gauss:

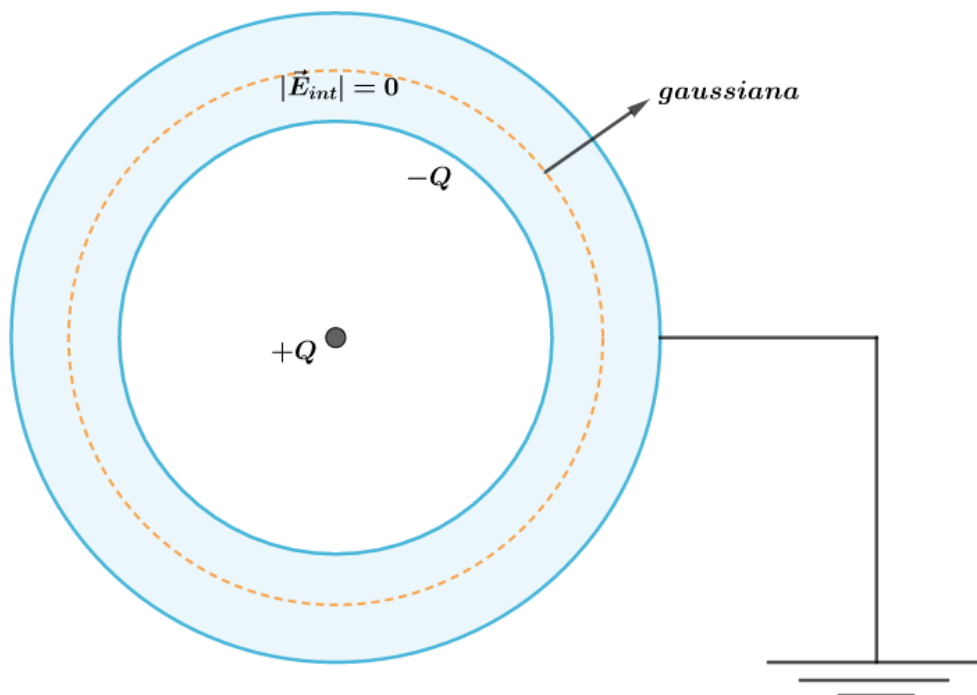


Figura 51: Campo elétrico no interior da casca condutora é nulo.

De acordo com o equilíbrio eletrostático no interior do condutor, sabemos que o campo elétrico nessa região é nulo. Logo, pela Lei de Gauss, se $|\vec{E}_{in}| = 0$ então $\varphi_{total} = 0$, o que implica $Q_{int} = 0$. Logo, a carga induzida deve ser simétrica em relação a carga no interior da casca (+Q). Portanto:

$$Q_{induzida} = -(Q_{indutora})$$

O que prova o fenômeno da indução total.



4)

Considere uma superfície plana com área $A = 8,0 \text{ cm}^2$ imersa em um campo elétrico de intensidade $1,0 \times 10^5 \text{ N/C}$. Determine o fluxo do campo nesta superfície para os seguintes casos:

- o vetor área e o campo formam um ângulo de 60° .
- o vetor área é perpendicular ao campo.
- o vetor área é paralelo ao campo e possui sentido contrário ao do campo.

Comentários:

a) Diante das condições, temos que:

$$\varphi = EA \cos \theta = 1,0 \times 10^5 \cdot 8,0 \times 10^{-4} \cdot \cos(60^\circ) = 40 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$$

b) Quando o vetor área é perpendicular ao campo, quer dizer que nenhuma linha do campo atravessa a área, ou seja, ela está disposta paralelamente ao campo. Sendo assim, o fluxo nela é zero. Ou ainda:

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos(90^\circ) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

c) Nessa situação, $\theta = 180^\circ$, portanto:

$$\varphi = EA \cos \theta = 1,0 \times 10^5 \cdot 8,0 \times 10^{-4} \cdot \cos(180^\circ) = -80 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$$

5)

Considere uma carga elétrica puntiforme Q colocada no centro de um cubo de aresta 10 cm . O meio pode ser considerado vácuo, isto é, ϵ_0 . Calcule o fluxo do campo da carga Q na superfície do cubo. Qual o fluxo em uma das faces do cubo?

Comentários:

De acordo com a Lei de Gauss, sabemos que o fluxo depende das cargas internas e da permissividade elétrica do meio:

$$\varphi = \frac{\sum Q_{\text{interna}}}{\epsilon}$$

Dessa forma, temos que o fluxo no cubo é dado por:

$$\varphi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Note que podemos dizer que o fluxo total é a soma dos fluxos em cada face. Além disso, como a carga se encontra no centro, podemos dizer que o fluxo será o mesmo em todas as faces, logo:



$$\varphi_{total} = 6\varphi_{faces}$$

$$\varphi_{faces} = \frac{Q}{6\epsilon_0}$$

6)

Considere uma superfície plana de área A imersa em um campo elétrico uniforme de intensidade E . A superfície plana gira em um movimento uniforme, de tal forma que o ângulo θ entre o vetor campo elétrico e o versor \hat{n} obedece a equação $\theta = \omega \cdot t$, onde ω é a velocidade angular. Esboce o gráfico do fluxo que atravessa a área em função do tempo, para t igual a $0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, 2T$, onde T é o período de rotação.

Comentários:

Utilizando a definição de fluxo de um campo, temos que:

$$\varphi = EA \cos \theta$$

$$\varphi = EA \cos(\omega t)$$

$$\varphi(t) = EA \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

Assim, temos os seguintes valores do fluxo elétrico:

$$t = 0 \Rightarrow \varphi(0) = EA \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \Rightarrow \varphi(0) = EA$$

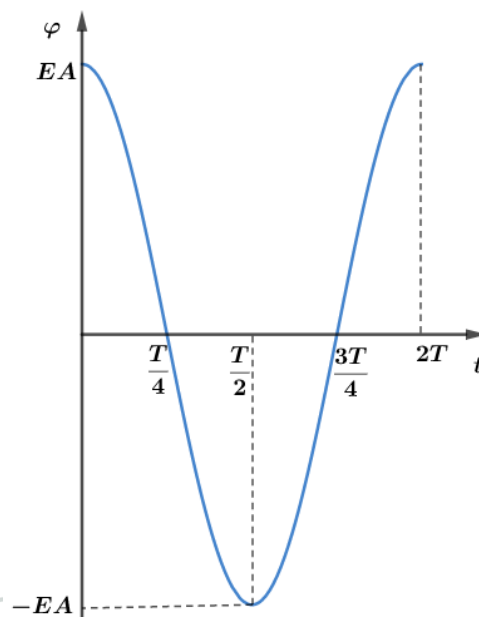
$$t = \frac{T}{4} \Rightarrow \varphi\left(\frac{T}{4}\right) = EA \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = EA \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$t = \frac{T}{2} \Rightarrow \varphi\left(\frac{T}{2}\right) = EA \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = EA \cos(\pi) = -EA$$

$$t = \frac{3T}{4} \Rightarrow \varphi\left(\frac{3T}{4}\right) = EA \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = EA \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$t = 2T \Rightarrow \varphi(2T) = EA \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 2T\right) = EA \cos(4\pi) = EA$$

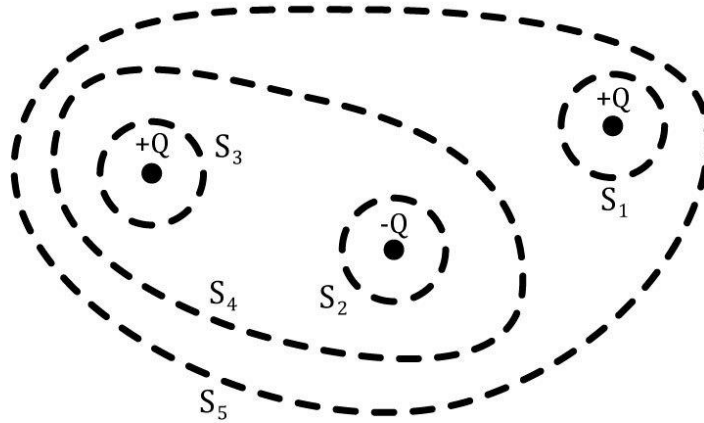
Plotando no gráfico, temos:





7)

Determine os fluxos elétricos para cada uma das superfícies indicadas em função de Q e de ϵ .



Comentários:

Utilizando a lei de Gauss em cada uma das gaussianas, temos que:

$$\varphi_{S_1} = \frac{\sum \Omega Q_{\text{interna}}}{\epsilon} = \frac{+Q}{\epsilon}$$

$$\varphi_{S_2} = \frac{\sum \Omega Q_{\text{interna}}}{\epsilon} = \frac{-Q}{\epsilon}$$

$$\varphi_{S_3} = \frac{\sum \Omega Q_{\text{interna}}}{\epsilon} = \frac{+Q}{\epsilon}$$

$$\varphi_{S_4} = \frac{\sum \Omega Q_{\text{interna}}}{\epsilon} = \frac{+Q - Q}{\epsilon} = \frac{0}{\epsilon} = 0$$

$$\varphi_{S_5} = \frac{\sum \Omega Q_{\text{interna}}}{\epsilon} = \frac{+Q + Q - Q}{\epsilon} = \frac{+Q}{\epsilon}$$



5.0. Lista de questões

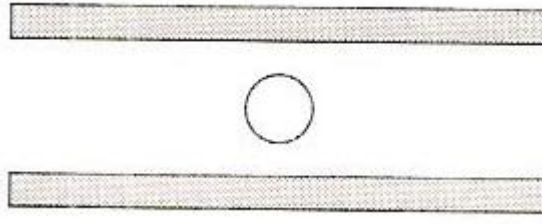
1. (FUVEST – 1987)

Uma gotícula de água, com massa $m = 0,80 \times 10^{-9} \text{ kg}$, eletrizada com carga $q = 16 \times 10^{-19}$ está em equilíbrio no interior de um capacitor de placas paralelas e horizontais, conforme esquema abaixo.

Nestas circunstâncias, o valor do campo elétrico entre as placas é:



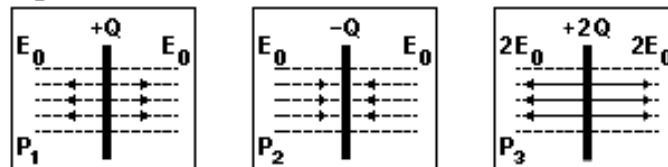
- a) $5 \times 10^9 N/C$
- b) $2 \times 10^{-10} N/C$
- c) $12,8 \times 10^{-29} N/C$
- d) $2 \times 10^{-11} N/C$
- e) $5 \times 10^8 N/C$



2. (FUVEST – 2015)

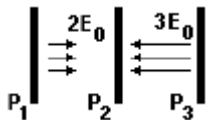
Três grandes placas P1, P2 e P3, com, respectivamente, cargas +Q, -Q e +2Q, geram campos elétricos uniformes em certas regiões do espaço. A figura 1 abaixo mostra intensidade, direção e sentido dos campos criados pelas respectivas placas P1, P2 e P3, quando vistas de perfil. Colocando-se as placas próximas, separadas pela distância D indicada, o campo elétrico resultante, gerado pelas três placas em conjunto, é representado por:

Figura 1

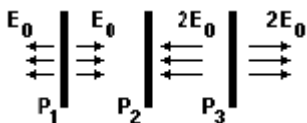


Nota: onde não há indicação, o campo elétrico é nulo.

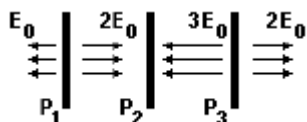
a)



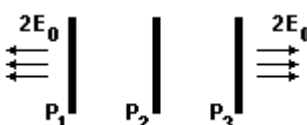
b)



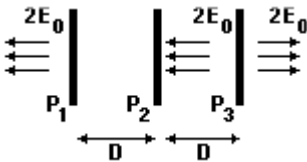
c)



d)

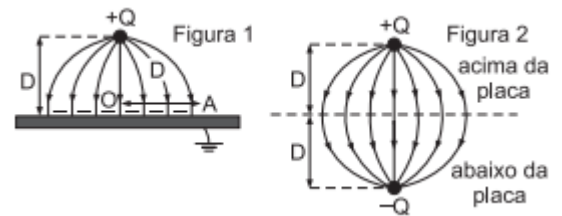


e)



3. (FUVEST – 2006 modificada)

Uma pequena esfera, com carga elétrica positiva $Q = 1,5 \times 10^{-9} \text{C}$, está a uma altura $D = 0,05 \text{m}$ acima da superfície de uma grande placa condutora, ligada à Terra, induzindo sobre essa superfície cargas negativas, como na figura 1. O conjunto dessas cargas estabelece um campo elétrico que é idêntico, apenas na parte do espaço acima da placa, ao campo gerado por uma carga $+Q$ e uma carga $-Q$, como se fosse uma “imagem” de Q que estivesse colocada na posição representada na figura 2.

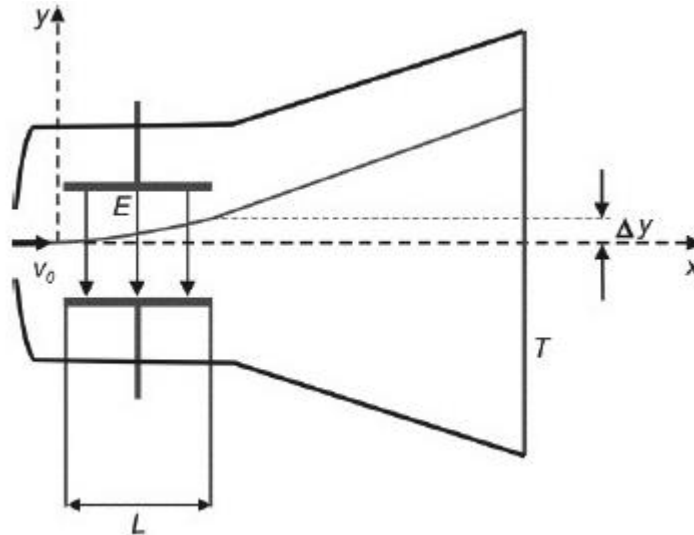


- Determine a intensidade da força F , em N , que age sobre a carga $+Q$, devida às cargas induzidas na placa.
- Determine a intensidade do campo elétrico E_0 , em V/m , que as cargas negativas induzidas na placa criam no ponto onde se encontra a carga $+Q$.
- Determine a intensidade do campo elétrico resultante E_A , em V/m , no ponto A .

Note e adote: $F = \frac{kQ_1Q_2}{r^2}$, $E = \frac{kQ_2}{r^2}$, $k = 9 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$ e $1 \text{V/m} = 1\text{N/C}$

4. (FUVEST – 2013)

Um equipamento, como o esquematizado na figura abaixo, foi utilizado por J.J.Thomson, no final do século XIX, para o estudo de raios catódicos em vácuo. Um feixe fino de elétrons (cada elétron tem massa m e carga e) com velocidade de módulo v_0 , na direção horizontal x , atravessa a região entre um par de placas paralelas, horizontais, de comprimento L . Entre as placas, há um campo elétrico de módulo constante E na direção vertical y . Após saírem da região entre as placas, os elétrons descrevem uma trajetória retilínea até a tela fluorescente T .



Note e adote:

Ignore os efeitos de borda no campo elétrico.

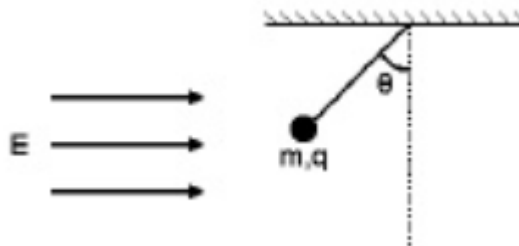
Ignore efeitos gravitacionais.

Determine:

- o módulo a da aceleração dos elétrons enquanto estão entre as placas;
- o intervalo de tempo Δt que os elétrons permanecem entre as placas;
- o desvio Δy na trajetória dos elétrons, na direção vertical, ao final de seu movimento entre as placas;
- a componente vertical v_y da velocidade dos elétrons ao saírem da região entre as placas.

5. (UNICAMP – 1998)

Considere uma esfera de massa m e carga q pendurada no teto e sob a ação da gravidade e do campo elétrico E como indicado na figura a seguir.



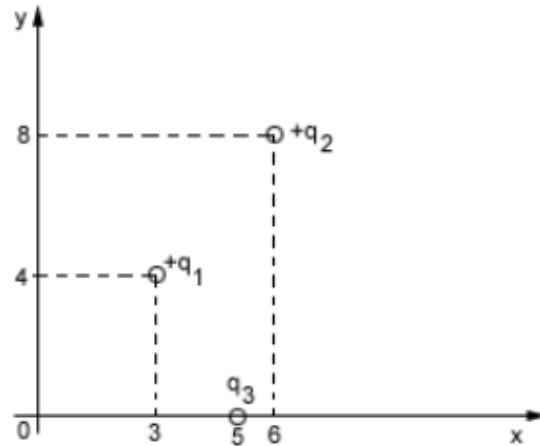
- Qual é o sinal da carga q ? Justifique sua resposta.
- Qual é o valor do ângulo θ no equilíbrio.



6. (ITA-1975)

Três cargas q_1 e q_2 (iguais e positivas) e q_3 , estão dispostas conforme a figura. Calcule a relação entre q_3 e q_1 para que o campo elétrico na origem do sistema seja paralelo a y .

- a) $-\frac{5}{4}$
- b) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$
- c) $-\frac{3}{4}$
- d) $\frac{4}{3}$



e) nenhuma das respostas anteriores.

7. (ITA-1985)

Considere um campo eletrostático cujas linhas de força são curvilíneas. Uma pequena carga de prova, cujo efeito sobre o campo é desprezível, é abandonada num ponto do mesmo, no qual a intensidade do vetor campo elétrico é diferente de zero. Sobre o movimento ulterior dessa partícula podemos afirmar que:

- a) Não se moverá porque o campo é eletrostático.
- b) Percorrerá necessariamente uma linha de força.
- c) Não percorrerá uma linha de força.
- d) Percorrerá necessariamente uma linha reta.
- e) Terá necessariamente um movimento oscilatório.

8. (ITA-1991)

Em uma região do espaço onde existe um campo elétrico uniforme \vec{E} , dois pêndulos simples de massas $m = 0,20 \text{ kg}$ e comprimento L são postos a oscilar. A massa do primeiro pêndulo está carregada com $q_1 = 0,20 \text{ C}$ e a massa do segundo pêndulo com $q_2 = -0,20 \text{ C}$. São dados que a aceleração da gravidade local é $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, que o campo elétrico

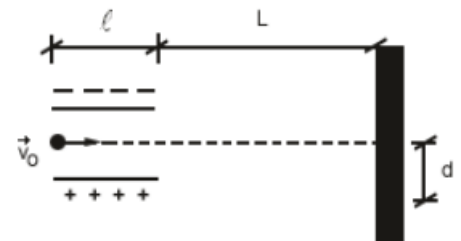


tem mesma direção e mesmo sentido que \vec{g} e sua intensidade é $E = 6,0V/m$. A razão (p_1/p_2), entre os períodos p_1 e p_2 dos pêndulos 1 e 2, é:

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) 1
- d) 2
- e) 4

9. (ITA-1993)

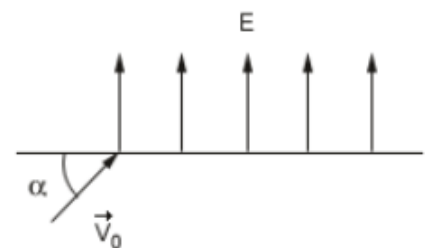
Duas placas planas e paralelas, de comprimento l , estão carregadas e servem como controladoras de elétrons em um tubo de raios catódicos. A distância das placas até a tela do tubo é L . Um feixe de elétrons (cada um de massa m e carga elétrica de módulo e) penetra entre as placas com uma velocidade v_0 , como mostra a figura. Qual é a intensidade do campo elétrico entre as placas se o deslocamento do feixe na tela do tubo é igual a d ?



- a) $E = \frac{mv_0^2 d}{el(L-\frac{l}{2})}$
- b) $E = \frac{mv_0^2 d}{el(L+\frac{l}{2})}$
- c) $E = \frac{mv_0^2 d}{el(L+\frac{l}{2})}$
- d) $E = \frac{mv_0^2 d}{el(mL+\frac{l}{2})}$
- e) $E = \frac{mv_0^2 d}{el(mL-\frac{l}{2})}$

10. (ITA-1994)

Numa região onde existe um campo elétrico uniforme $E = 1,0 \times 10^2 N/C$ dirigido verticalmente para cima, penetra um elétron com velocidade inicial $v_0 = 4,0 \times 10^5 m/s$, seguindo uma direção que faz um ângulo de 30° com a horizontal, como mostra a figura.





Sendo a massa do elétron $9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ e a carga do elétron $-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, podemos afirmar que:

- a) O tempo de subida do elétron será $1,14 \times 10^{-8} \text{ s}$.
- b) O alcance horizontal do elétron será $5,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}$.
- c) A aceleração do elétron será $2,0 \text{ m/s}^2$.
- d) O elétron será acelerado continuamente para cima até escapar do campo elétrico.
- e) O ponto mais elevado alcançado pelo elétron será $5,0 \times 10^{-1} \text{ m}$.

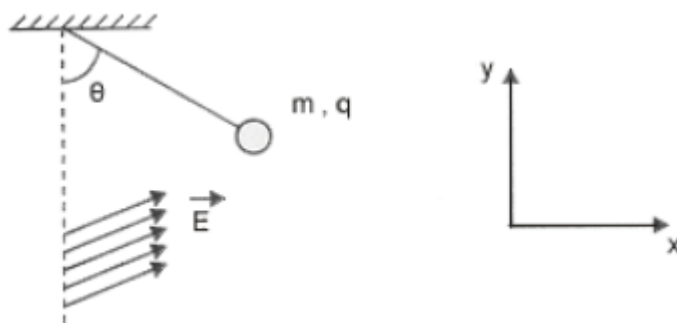
11. (ITA-1995)

Um pêndulo simples é construído com uma esfera metálica de massa $m = 1,0 \times 10^{-4} \text{ kg}$, carregada com uma carga elétrica $q = 3,0 \times 10^{-5} \text{ C}$ e um fio isolante de comprimento $L = 1,0 \text{ m}$, de massa desprezível. Este pêndulo oscila com período P num local onde $g = 10,0 \text{ m/s}^2$. Quando um campo elétrico uniforme e constante \vec{E} é aplicado verticalmente em toda a região do pêndulo o seu período dobra de valor. A intensidade E do campo elétrico é de:

- a) $6,7 \times 10^3 \text{ N/C}$.
- b) 42 N/C .
- c) $6,0 \times 10^{-6} \text{ N/C}$.
- d) 33 N/C .
- e) 25 N/C .

12. (ITA-1999)

Uma esfera homogênea de carga q e massa m de 2 g está suspensa por um fio de massa desprezível em um campo elétrico uniforme cujas componentes em x e y têm intensidades $E_x = \sqrt{3} \times 10^5 \text{ N/C}$ e $E_y = 1 \times 10^5 \text{ N/C}$, respectivamente, como mostra a figura.



Considerando que a esfera está em equilíbrio para $\theta = 60^\circ$, qual é a intensidade da força de tração no fio?



Considere $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

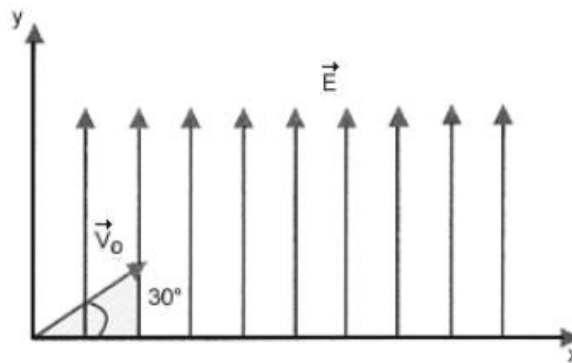
- a) $9,80 \times 10^{-3} \text{ N}$.
- b) $1,96 \times 10^{-2} \text{ N}$.
- c) Nula.
- d) $1,70 \times 10^{-3} \text{ N}$.
- e) $7,17 \times 10^{-3} \text{ N}$.

13. (ITA-1999)

No instante $t = 0 \text{ s}$, um elétron é projetado em um ângulo de 30° em relação ao eixo x , com velocidade v_0 de $4 \times 10^5 \text{ m/s}$, conforme o esquema abaixo.

A massa do elétron é $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ e a sua carga elétrica é igual a $-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Considerando que o elétron se move num campo elétrico constante $E = 100 \text{ N/C}$, o tempo que o elétron levará para cruzar novamente o eixo x é de:

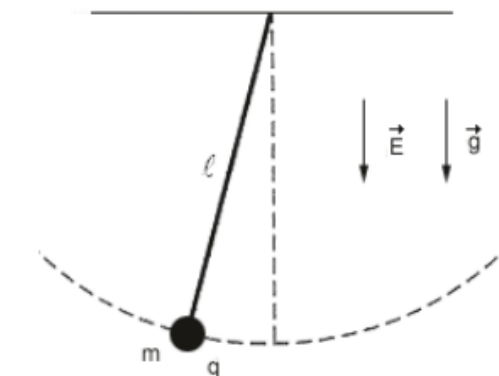
- a) 10 ns.
- b) 15 ns.
- c) 23 ns.
- d) 12 ns.
- e) 18 ns.



14. (ITA-2005)

Considere um pêndulo de comprimento l , tendo na sua extremidade uma esfera de massa m com uma carga positiva q . A seguir, esse pêndulo é colocado num campo elétrico uniforme \vec{E} que atua na mesma direção e sentido da aceleração da gravidade \vec{g} . Deslocando-se essa carga ligeiramente de sua posição de equilíbrio e soltando-a, ela executa um movimento harmônico simples, cujo período é:

- a) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
- b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+q}}$
- c) $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{gE}}$
- d) $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg-qE}}$
- e) $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg+qE}}$



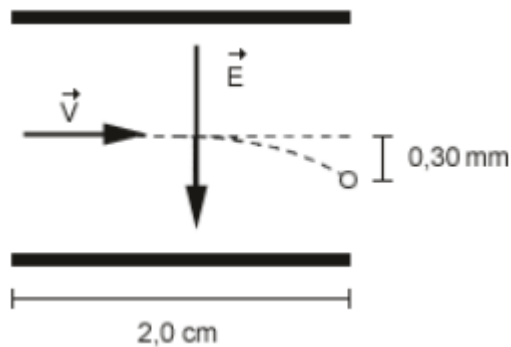


15. (ITA-2005)

Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q , e, a seguir, deslocam-se no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio $10 \mu\text{m}$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20 \text{ m/s}$ entre as placas de comprimento igual a $2,0 \text{ cm}$, no interior das quais existe um campo elétrico uniforme de módulo $E = 8,0 \times 10^4 \text{ N/C}$, como mostra a figura.

Considerando que a densidade da gota seja 1000 kg/m^3 e sabendo-se que a mesma sofre um desvio de $0,30 \text{ mm}$ ao atingir o final do percurso, o módulo de sua carga elétrica é de:

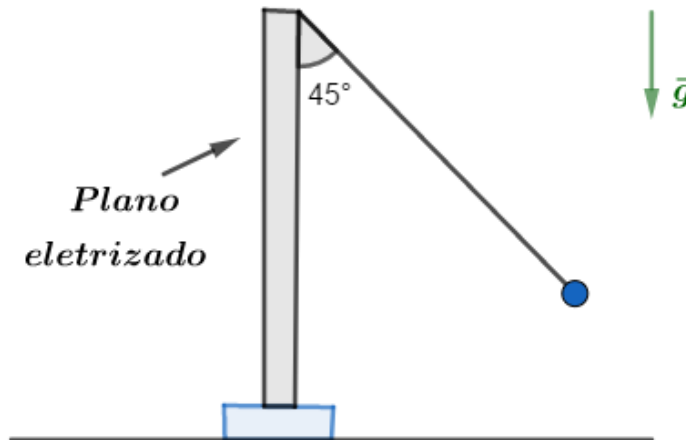
- a) $2,0 \times 10^{-14} \text{ C}$
- b) $3,1 \times 10^{-14} \text{ C}$
- c) $6,3 \times 10^{-14} \text{ C}$
- d) $3,1 \times 10^{-11} \text{ C}$
- e) $1,0 \times 10^{-1} \text{ C}$



16.

Uma pequena esfera de peso $P = 5,0 \times 10^{-2} \text{ N}$, eletrizada com uma carga $q = +0,20 \mu\text{C}$, está suspensa por um fio isolante bastante leve, que na posição de equilíbrio forma um ângulo de 45° com um plano vertical uniformemente eletrizado com densidade superficial σ . Qual é o módulo da densidade superficial de cargas σ ?

Dado: permissividade absoluta do meio: $\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ (SI)}$.



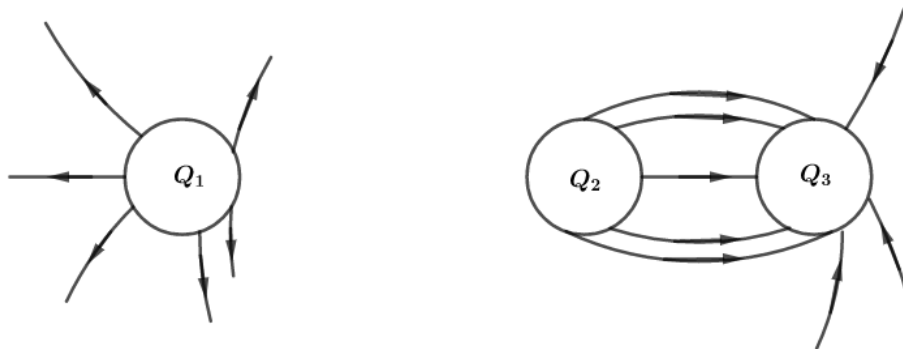


INDO MAIS
FUNDO!



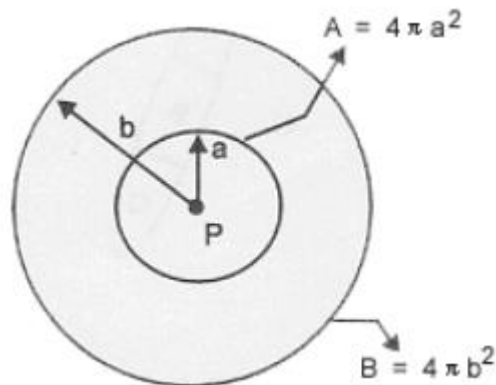
17.

Determine Q_1 e Q_3 sabendo que $Q_2 = +15\mu\text{C}$.



18. (ITA-1999)

Uma carga pontual P é mostrada na figura com duas superfícies gaussianas de raios a e $b = 2a$, respectivamente.



Sobre o fluxo elétrico que passa pelas superfícies de áreas A e B , pode-se concluir que:

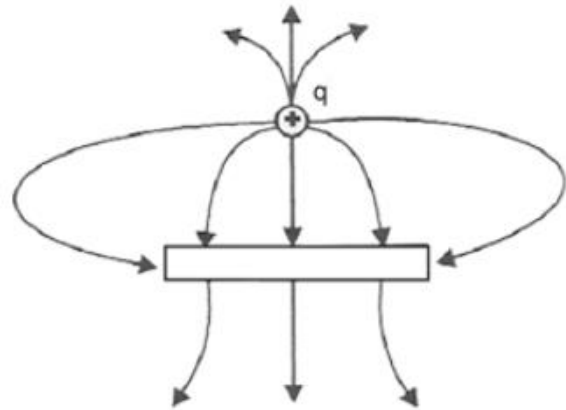
- a) O fluxo elétrico que atravessa a área B é duas vezes maior que o fluxo elétrico que passa pela área A .
- b) O fluxo elétrico que atravessa a área B é a metade do fluxo elétrico que passa pela área A .
- c) O fluxo elétrico que atravessa a área B é $1/4$ do fluxo elétrico que passa pela área A .



- d) O fluxo elétrico que atravessa a área B é quatro vezes maior que o fluxo elétrico que passa pela área A.
- e) O fluxo elétrico que atravessa a área B é igual ao fluxo elétrico que atravessa a área A.

19. (ITA-2000)

A figura mostra uma carga elétrica puntiforme positiva q , próxima de uma barra de metal. O campo elétrico nas vizinhanças da carga puntiforme e da barra está representado pelas linhas de campo mostradas na figura. Sobre o módulo da carga da barra $|Q_{bar}|$, comparativamente ao módulo da carga puntiforme $|q|$, e sobre a carga líquida da barra Q_{bar} , respectivamente, pode-se concluir que:

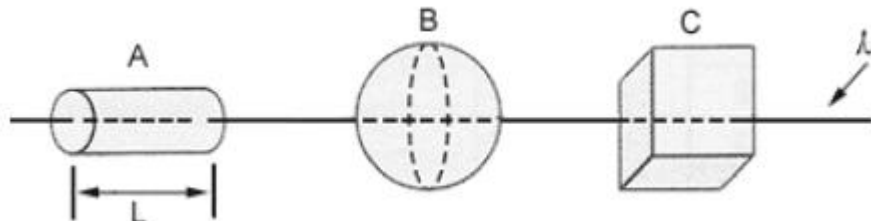


- a) $|Q_{bar}| > |q|$ e $Q_{bar} > 0$
- b) $|Q_{bar}| < |q|$ e $Q_{bar} < 0$
- c) $|Q_{bar}| = |q|$ e $Q_{bar} = 0$
- d) $|Q_{bar}| > |q|$ e $Q_{bar} < 0$
- e) $|Q_{bar}| < |q|$ e $Q_{bar} > 0$

20. (ITA-2000)

Um fio de densidade linear λ de carga positiva atravessa três superfícies fechadas A, B e C, de formas respectivamente cilíndrica, esférica e cúbica, como mostra a figura. Sabe-se que A tem comprimento $L =$ diâmetro de B = comprimento de um lado de C, e que o raio da base de A é a metade do raio da esfera B.

Sobre o fluxo do campo elétrico, ϕ , através de cada superfície fechada, pode-se concluir que:

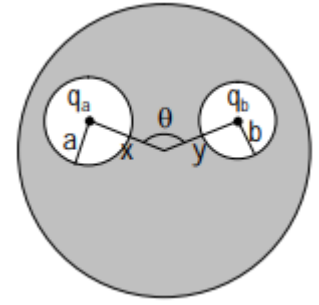


- a) $\phi_A = \phi_B = \phi_C$
- b) $\phi_A > \phi_B > \phi_C$
- c) $\phi_A < \phi_B < \phi_C$
- d) $\frac{\phi_A}{2} = \phi_B = \phi_C$
- e) $\phi_A = 2\phi_B = \phi_C$



21. (ITA – 2010)

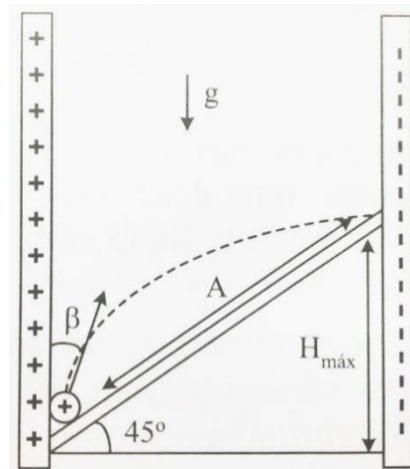
Uma esfera condutora de raio R possui no seu interior duas cavidades esféricas, de raio a e b , respectivamente, conforme mostra a figura. No centro de uma cavidade há uma carga pontual q_a e no centro da outra, uma carga também pontual q_b , cada qual distando do centro da esfera condutora de x e y , respectivamente. E correto afirmar que:



- A) a força entre as cargas q_a e q_b é $k_0 q_a q_b / (x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta)$.
- B) a força entre as cargas q_a e q_b é nula.
- C) não é possível determinar a força entre as cargas, pois não há dados suficientes.
- D) se nas proximidades do condutor houvesse uma terceira carga, q_c , esta não sentiria força alguma.
- E) se nas proximidades do condutor houvesse uma terceira carga, q_c , a força entre q_a e q_b seria alterada.

22.

V_0 , como na figura abaixo, sob a ação do campo elétrico das placas e do campo gravitacional (g) da terra. Determine o ângulo β para que a esfera atinja a altura máxima ($H_{m\acute{a}x}$) ao longo do plano inclinado. Determine $H_{m\acute{a}x}$.



Dados:

$$\sigma = 7,08 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$Q = +2\mu\text{C}$$

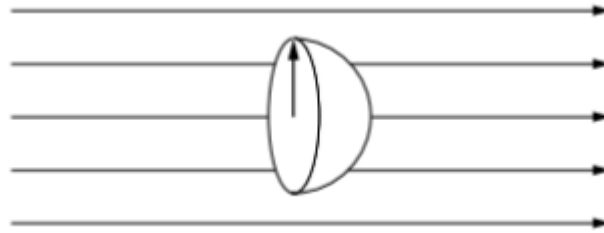
$$M = 160 \text{ g}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

$$V_0 = 10 \text{ m/s}$$

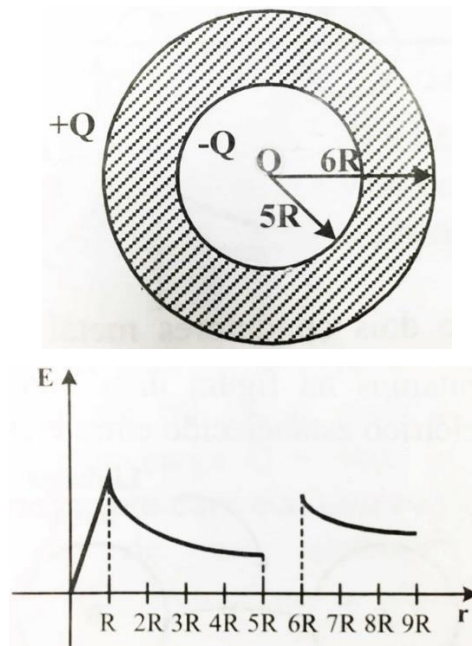
23.

Determine o fluxo através da superfície hemisférica de raio r imersa num campo elétrico uniforme \vec{E} .



24.

Utilizando a Lei de Gauss, mostre que a variação do campo elétrico com a distância ao centro do sistema abaixo é dada pelo gráfico:

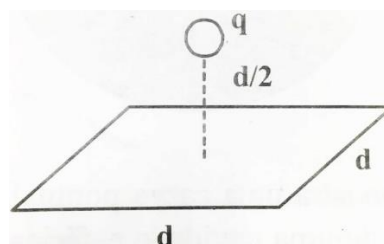


Suponha que a esfera seja metálica e que a carga Q interna seja distribuída uniformemente em uma esfera de raio R .

Qual mudança haveria no gráfico se a casca esférica de espessura R fosse isolante com carga uniformemente distribuída?

25.

Uma carga pontual $+q$ está a uma distância $d/2$ de uma superfície quadrada de lado d e encontra-se diretamente acima do centro do quadrado, como na figura:

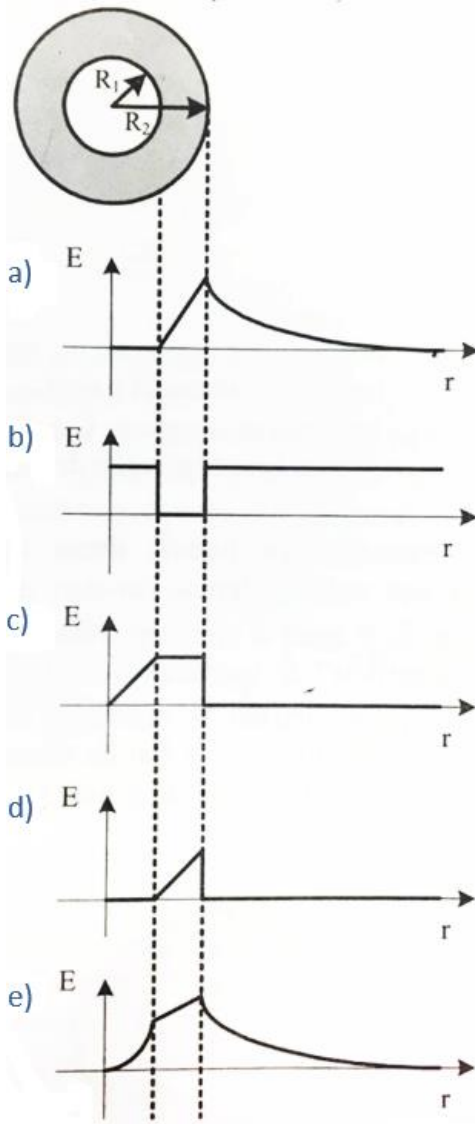


Determine o fluxo elétrico que passa através do quadrado.



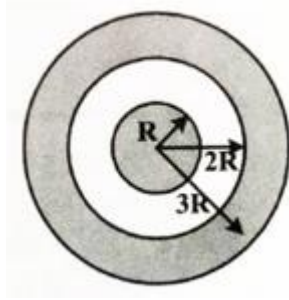
26.

Uma camada esférica isolante de raio interno R_1 e raio externo R_2 , conforme mostra a figura, é eletrizada uniformemente. O gráfico que melhor representa a variação do campo elétrico $|\vec{E}|$, ao longo de uma direção radial, é:

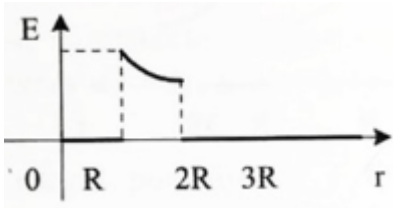


27. (PUC – SP)

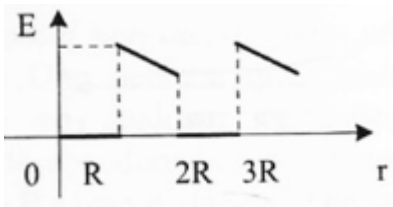
Sabendo que a esfera oca representada na figura está isolada e sua carga total é nula, escolha, dos gráficos a seguir, o que melhor representa a intensidade do campo elétrico \vec{E} em função em distância r ao centro comum. Tanto a esfera oca como a esfera maciça que estão em seu interior são condutoras. A esfera maciça está eletrizada.



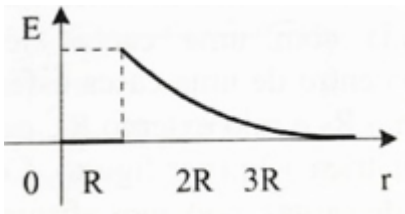
a)



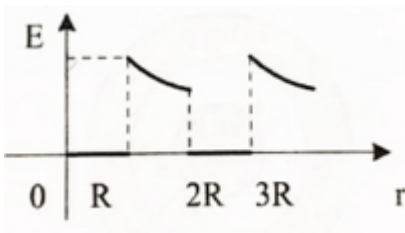
b)



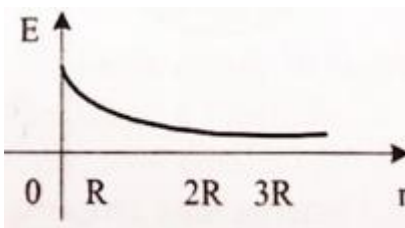
c)



d)



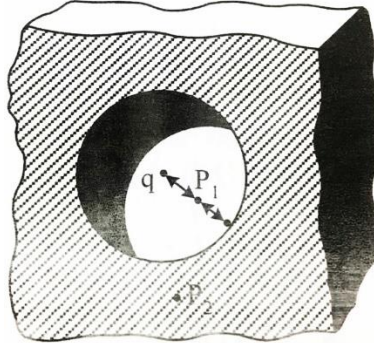
e)





28.

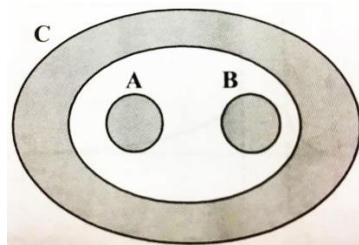
A figura mostra uma carga pontual de $1,0 \times 10^{-7} C$, no centro de uma cavidade esférica de raio igual a $3,0 \text{ cm}$ existente num pedaço de metal. Utilizando a Lei de Gauss, obtenha o valor do campo elétrico para:



- a) um ponto P_1 no meio da distância que vai do centro da cavidade à superfície.
- b) no ponto P_2 .

29.

Dadas as esferas A e B colocadas dentro de uma casca esférica C, todas metálicas, em equilíbrio eletrostático. Sabendo que as esferas têm cargas $+2q$, $+3q$ e $+4q$, respectivamente.



Determine:

- a) a carga total na superfície interna de C.
- b) a carga total na superfície externa de C.
- c) comente sobre a distribuição de cargas nas superfícies.

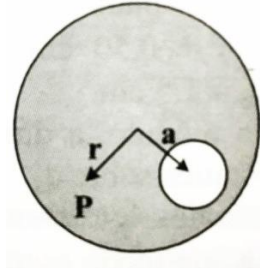


30.



Uma região esférica está uniformemente carregada com uma densidade volumétrica de carga ρ . Seja \vec{r} o vetor que vai do centro da esfera até um ponto genérico P no interior da esfera.

a) mostre que o campo elétrico no ponto P é dado por $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{r}$.



b) uma cavidade esférica é aberta na esfera, como nos mostra a figura. Usando conceitos de superposição, mostre que o campo elétrico, em todos os pontos no interior da cavidade, é $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{a}$ (campo uniforme), onde \vec{a} é o vetor que vai do centro da esfera ao centro da cavidade. Note que ambos os resultados são independentes dos raios da esfera e da cavidade.

Observe que o campo será uniforme apenas na cavidade.



GABARITO



6.0. Gabarito sem comentários

1. A

2. E

3. $F = 2,025 \times 10^{-6} N$ b) $E_0 = 1,35 \times 10^3 V/m$ c) $E_A = 3,81 \times 10^3 V/m$ 4. a) $a = \frac{|e|E}{m}$ b) $\Delta t = \frac{L}{v_0}$ c) $\Delta y = \frac{|e|EL^2}{2mv_0^2}$ d) $v_y = \frac{|e|EL}{mv_0}$ 5. a) negativa b) $\theta = \arctg\left(\frac{|q|E}{mg}\right)$

6. C

7. C

8. B

9. C

10. A

11. E

12. B

13. C

14. E

15. B

16. $4,4 \mu C/m^2$ 17. $Q_1 = 18 \mu C$ e $Q_3 = 24 \mu C$

18. E

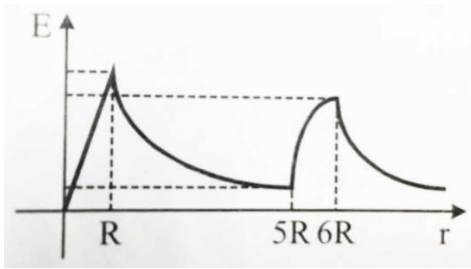
19. B

20. A

21. B

22. $\beta = 0$ e $H_{m\acute{a}x} = 5 m$

23. nulo



24.

25. $\phi = + \frac{q}{6\epsilon_0}$

26. A

27. D

28. a) $4 \times 10^6 N/C$ e b) zero

29. a) $-5q$ b) $+9q$ c) não-uniforme em todas as superfícies

30. a) $\frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$ b) $\vec{E}_{res} = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0}$



GABARITO



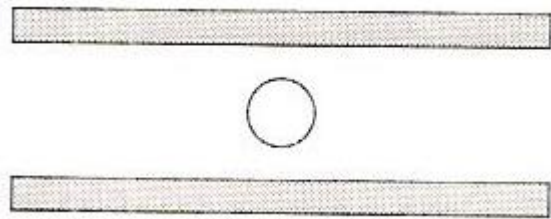
7.0. Lista de questões comentadas

1. (FUVEST – 1987)

Uma gotícula de água, com massa $m = 0,80 \times 10^{-9} \text{ kg}$, eletrizada com carga $q = 16 \times 10^{-19}$ está em equilíbrio no interior de um capacitor de placas paralelas e horizontais, conforme esquema abaixo.

Nestas circunstâncias, o valor do campo elétrico entre as placas é:

- a) $5 \times 10^9 \text{ N/C}$
- b) $2 \times 10^{-10} \text{ N/C}$
- c) $12,8 \times 10^{-29} \text{ N/C}$
- d) $2 \times 10^{-11} \text{ N/C}$
- e) $5 \times 10^8 \text{ N/C}$



Comentários:

Aplicando a 2ª Lei de Newton ($F = ma$) à gota, vem:

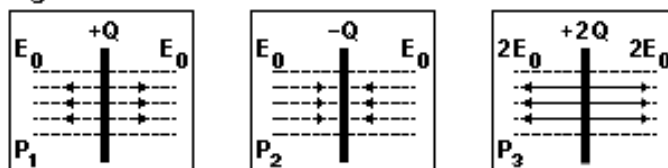
$$mg - qE = 0 \Rightarrow E = 5 \cdot 10^8 \text{ N/C}$$

Gabarito: A

2. (FUVEST – 2015)

Três grandes placas P1, P2 e P3, com, respectivamente, cargas $+Q$, $-Q$ e $+2Q$, geram campos elétricos uniformes em certas regiões do espaço. A figura 1 abaixo mostra intensidade, direção e sentido dos campos criados pelas respectivas placas P1, P2 e P3, quando vistas de perfil. Colocando-se as placas próximas, separadas pela distância D indicada, o campo elétrico resultante, gerado pelas três placas em conjunto, é representado por:

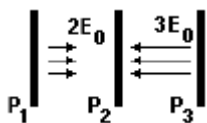
Figura 1



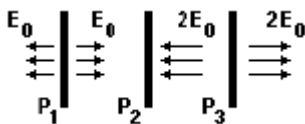
Nota: onde não há indicação, o campo elétrico é nulo.



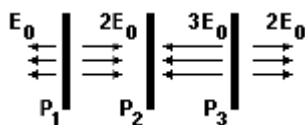
a)



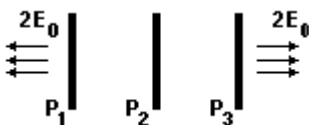
b)



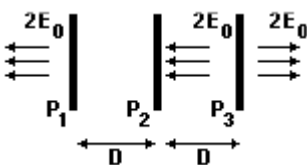
c)



d)



e)



Comentários:

Usando o princípio da superposição, temos:

$$E(-inf, P_1) = E_1(-inf, P_1) + E_2(-inf, P_1) + E_3(-inf, P_1) = (-E_0) + E_0 + (-2E_0)$$

$$E(-inf, P_1) = -2E_0$$

$$E(P_1, P_2) = E_1(P_1, P_2) + E_2(P_1, P_2) + E_3(P_1, P_2) = (E_0) + E_0 + (-2E_0) = 0$$

$$E(P_2, P_3) = E_1(P_2, P_3) + E_2(P_2, P_3) + E_3(P_2, P_3) = E_0 + (-E_0) + (-2E_0)$$

$$E(P_3, +inf) = E_1(P_3, +inf) + E_2(P_3, +inf) + E_3(P_3, +inf) = E_0 + (-E_0) + 2E_0 = 2E_0$$

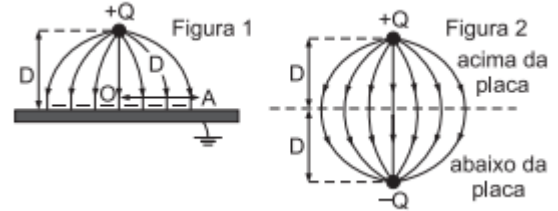
Acima, o sentido positivo foi considerado para a direita.



Gabarito: E

3. (FUVEST – 2006 modificada)

Uma pequena esfera, com carga elétrica positiva $Q = 1,5 \times 10^{-9} \text{C}$, está a uma altura $D = 0,05 \text{m}$ acima da superfície de uma grande placa condutora, ligada à Terra, induzindo sobre essa superfície cargas negativas, como na figura 1. O conjunto dessas cargas estabelece um campo elétrico que é idêntico, apenas na parte do espaço acima da placa, ao campo gerado por uma carga $+Q$ e uma carga $-Q$, como se fosse uma “imagem” de Q que estivesse colocada na posição representada na figura 2.



- a) Determine a intensidade da força F , em N , que age sobre a carga $+Q$, devida às cargas induzidas na placa.
- b) Determine a intensidade do campo elétrico E_0 , em V/m , que as cargas negativas induzidas na placa criam no ponto onde se encontra a carga $+Q$.
- c) Determine a intensidade do campo elétrico resultante E_A , em V/m , no ponto A .

Note e adote: $F = \frac{kQ_1Q_2}{r^2}$, $E = \frac{kQ_2}{r^2}$, $k = 9 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$ e $1 \text{V/m} = 1 \text{N/C}$

Comentários:

a) Pela Lei de Coulomb, temos:

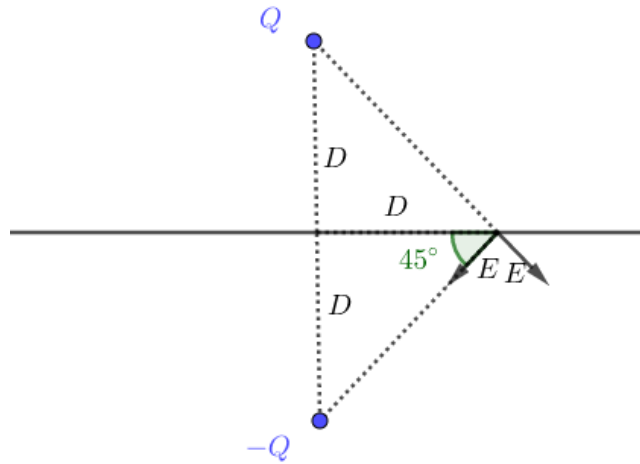
$$F = \frac{kQ^2}{(2D)^2} = \frac{kQ^2}{4D^2}$$

b) O campo é idêntico ao da carga $-Q$ mostrada, assim:

$$E_0 = \frac{kQ}{(2D)^2} = \frac{kQ}{4D^2}$$

c) Calculando o campo resultante em A, temos que:

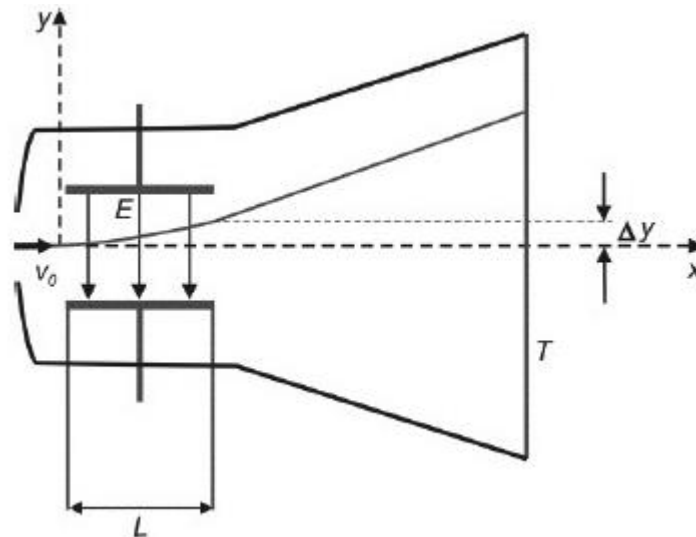
$$E_A = 2E \text{ sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}kQ}{(D\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}kQ}{2D^2}$$



Gabarito: a) $F = 2,025 \times 10^{-6} N$ b) $E_0 = 1,35 \times 10^3 V/m$ c) $E_A = 3,81 \times 10^3 V/m$

4. (FUVEST – 2013)

Um equipamento, como o esquematizado na figura abaixo, foi utilizado por J.J.Thomson, no final do século XIX, para o estudo de raios catódicos em vácuo. Um feixe fino de elétrons (cada elétron tem massa m e carga e) com velocidade de módulo v_0 , na direção horizontal x , atravessa a região entre um par de placas paralelas, horizontais, de comprimento L . Entre as placas, há um campo elétrico de módulo constante E na direção vertical y . Após saírem da região entre as placas, os elétrons descrevem uma trajetória retilínea até a tela fluorescente T .



Note e adote:

Ignore os efeitos de borda no campo elétrico.

Ignore efeitos gravitacionais.

Determine:



- a) o módulo a da aceleração dos elétrons enquanto estão entre as placas;
- b) o intervalo de tempo Δt que os elétrons permanecem entre as placas;
- c) o desvio Δy na trajetória dos elétrons, na direção vertical, ao final de seu movimento entre as placas;
- d) a componente vertical v_y da velocidade dos elétrons ao saírem da região entre as placas.

Comentários:

a) Aplicando $F = ma$ ao elétron:

$$|e|E = ma$$

$$a = \frac{|e|E}{m}$$

b) O movimento do elétron é uniforme na horizontal, logo:

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{v} = \frac{L}{v_0}$$

c) Usando a equação de deslocamento horário de um MRUV para o movimento vertical:

$$\Delta y = \frac{a\Delta t^2}{2} = \frac{|e|EL^2}{2mv_0^2}$$

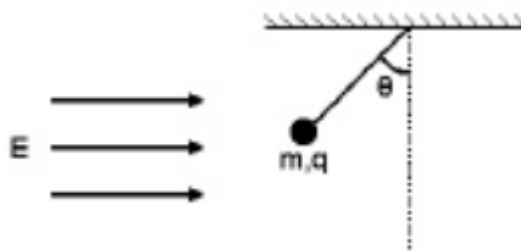
d) Como o movimento tem aceleração vertical constante, temos:

$$v_y = a\Delta t = \frac{|e|EL}{mv_0}$$

Gabarito: a) $a = \frac{|e|E}{m}$ b) $\Delta t = \frac{L}{v_0}$ c) $\Delta y = \frac{|e|EL^2}{2mv_0^2}$ d) $v_y = \frac{|e|EL}{mv_0}$

5. (UNICAMP – 1998)

Considere uma esfera de massa m e carga q pendurada no teto e sob a ação da gravidade e do campo elétrico E como indicado na figura a seguir.

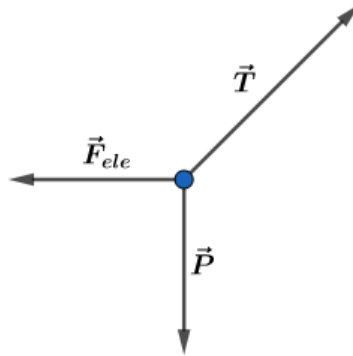


- b) Qual é o sinal da carga q ? Justifique sua resposta.
- b) Qual é o valor do ângulo θ no equilíbrio.



Comentários:

Diagrama de forças na carga:



a) Negativo. Cargas negativas sentem forças no sentido oposto ao do campo elétrico que as geram.

b) Aplicando $\vec{F} = m\vec{a}$ à esfera:

$$\vec{F}_{ele} + \vec{P} + \vec{T} = 0$$

Assim os vetores mostrados acima devem formar um triângulo, do qual tiramos a relação:

$$\tan \theta = \frac{F_{ele}}{P}$$

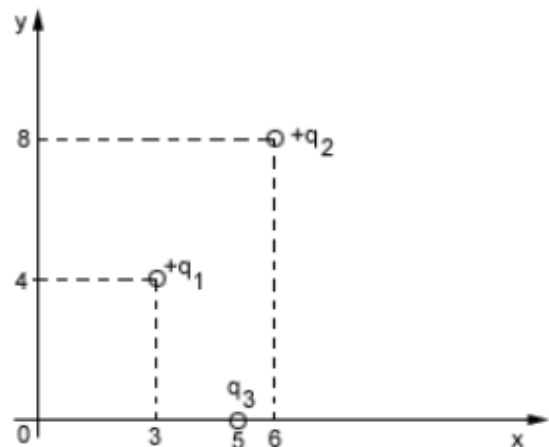
$$\theta = \arctan \left(\frac{|q|E}{mg} \right)$$

Gabarito: a) negativa b) $\theta = \arctg \left(\frac{|q|E}{mg} \right)$

6. (ITA-1975)

Três cargas q_1 e q_2 (iguais e positivas) e q_3 , estão dispostas conforme a figura. Calcule a relação entre q_3 e q_1 para que o campo elétrico na origem do sistema seja paralelo a y .

- a) $-\frac{5}{4}$
- b) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$
- c) $-\frac{3}{4}$
- d) $\frac{4}{3}$
- e) nenhuma das respostas anteriores.



Comentários:



Seja E o campo que q_1 exerce na origem. Como q_2 tem o mesmo módulo e o dobro da distância de q_1 à origem, seu campo será $\frac{E}{4}$. Seja θ o ângulo que o vetor posição de q_1 faz com o eixo x .

Para que não haja resultante na horizontal, devemos ter:

$$E_3 = \left(E + \frac{E}{4} \right) \cos \theta$$

$$\frac{k|q_3|}{5^2} = \frac{5kq_1}{4 \cdot 5^2} \frac{3}{5}$$

$$|q_3| = \frac{3}{4} q_1$$

Como a força deve ser de atração, temos:

$$q_3 = -\frac{3}{4} q_1$$

Gabarito: C

7. (ITA-1985)

Considere um campo eletrostático cujas linhas de força são curvilíneas. Uma pequena carga de prova, cujo efeito sobre o campo é desprezível, é abandonada num ponto do mesmo, no qual a intensidade do vetor campo elétrico é diferente de zero. Sobre o movimento ulterior dessa partícula podemos afirmar que:

- Não se moverá porque o campo é eletrostático.
- Percorrerá necessariamente uma linha de força.
- Não percorrerá uma linha de força.
- Percorrerá necessariamente uma linha reta.
- Terá necessariamente um movimento oscilatório.

Comentários:

Uma linha de força gera força na partícula apenas na sua direção. Para que a partícula descreva a trajetória curvilínea de qualquer linha de força, precisaria sentir uma resultante centrípeta perpendicular a essa trajetória, o que é impossível.

Gabarito: C

8. (ITA-1991)



Em uma região do espaço onde existe um campo elétrico uniforme \vec{E} , dois pêndulos simples de massas $m = 0,20 \text{ kg}$ e comprimento L são postos a oscilar. A massa do primeiro pêndulo está carregada com $q_1 = 0,20 \text{ C}$ e a massa do segundo pêndulo com $q_2 = -0,20 \text{ C}$. São dados que a aceleração da gravidade local é $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, que o campo elétrico tem mesma direção e mesmo sentido que \vec{g} e sua intensidade é $E = 6,0 \text{ V/m}$. A razão (p_1/p_2), entre os períodos p_1 e p_2 dos pêndulos 1 e 2, é:

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) 1
- d) 2
- e) 4

Comentários:

Calculando a gravidade aparente para os pêndulos:

$$g_{apa,1} = g + \frac{q_1 E}{m} \quad (eq. 1)$$

$$g_{apa,2} = g - \frac{q_2 E}{m} \quad (eq. 2)$$

Lembre-se que o período de oscilação de um pêndulo é dado por:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Assim, temos:

$$\frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\frac{g - \frac{q_2 E}{m}}{g + \frac{q_1 E}{m}}}$$

Substituindo (1) e (2) na equação acima, obtemos:

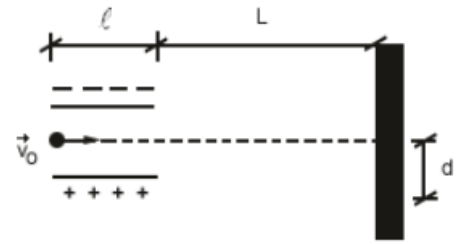
$$\frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\frac{10 - 6}{10 + 6}} = \frac{1}{2}$$

Gabarito: B

9. (ITA-1993)



Duas placas planas e paralelas, de comprimento l , estão carregadas e servem como controladoras de elétrons em um tubo de raios catódicos. A distância das placas até a tela do tubo é L . Um feixe de elétrons (cada um de massa m e carga elétrica de módulo e) penetra entre as placas com uma velocidade v_0 , como mostra a figura. Qual é a intensidade do campo elétrico entre as placas se o deslocamento do feixe na tela do tubo é igual a d ?



- a) $E = \frac{mv_0^2 d}{el(L-\frac{l}{2})}$
- b) $E = \frac{mv_0^2 d}{el(L+\frac{l}{2})}$
- c) $E = \frac{mv_0^2 d}{el(L+\frac{l}{2})}$
- d) $E = \frac{mv_0^2 d}{el(mL+\frac{l}{2})}$
- e) $E = \frac{mv_0^2 d}{el(mL-\frac{l}{2})}$

Comentários:

Calculando a aceleração dos elétrons no tubo:

$$F = ma$$

$$a = -\frac{Ee}{m}$$

O movimento horizontal tem velocidade constante, logo:

$$v_0 = \frac{l}{t_{tubo}}$$

$$t_{tubo} = \frac{l}{v_0} \quad (eq.1)$$

A distância vertical que percorrem, enquanto ainda se encontram no tubo, é dada por:

$$y_{tubo} = \frac{at_{tubo}^2}{2} = \frac{\left(-\frac{Ee}{m}\right)t_{tubo}^2}{2} \quad (eq.2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$y_{tubo} = -\frac{Eel^2}{2mv_0^2} \quad (eq.3)$$

Após sair do tubo os elétrons se movem com velocidade constante. Calculando sua velocidade vertical nesse momento:



$$v_y = v_{y_0} + at = 0 - \frac{Ee}{m} t_{v_{00}}$$

$$v_y = -\frac{Eel}{mv_0}$$

Após sair do tubo os elétrons manterão a velocidade calculada acima:

$$\frac{y_{após}}{t_{após}} = -\frac{Eel}{mv_0} \quad (eq. 4)$$

Os elétrons também possuem velocidade horizontal constante após saírem do tubo, assim:

$$t_{após} = \frac{L}{v_0} \quad (eq. 5)$$

Substituindo (5) em (4), temos:

$$y_{após} = -\frac{EelL}{mv_0^2} \quad (eq. 6)$$

A distância vertical total percorrida pelos elétrons é dada pelo enunciado:

$$y_{tubo} + y_{após} = -d \quad (eq. 7)$$

Substituindo (3) e (6) em (7), obtemos:

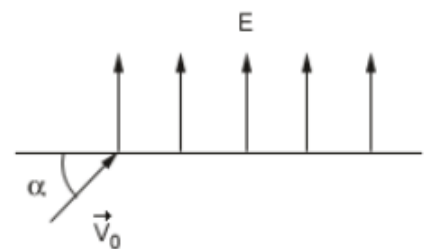
$$\frac{Eel}{mv_0^2} \left(\frac{l}{2} + L \right) = d$$

$$E = \frac{mv_0^2 d}{el \left(\frac{l}{2} + L \right)}$$

Gabarito: C

10. (ITA-1994)

Numa região onde existe um campo elétrico uniforme $E = 1,0 \times 10^2 \text{ N/C}$ dirigido verticalmente para cima, penetra um elétron com velocidade inicial $v_0 = 4,0 \times 10^5 \text{ m/s}$, seguindo uma direção que faz um ângulo de 30° com a horizontal, como mostra a figura.



Sendo a massa do elétron $9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ e a carga do elétron $-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, podemos afirmar que:

- O tempo de subida do elétron será $1,14 \times 10^{-8} \text{ s}$.
- O alcance horizontal do elétron será $5,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}$.
- A aceleração do elétron será $2,0 \text{ m/s}^2$.
- O elétron será acelerado continuamente para cima até escapar do campo elétrico.



e) O ponto mais elevado alcançado pelo elétron será $5,0 \times 10^{-1}m$.

Comentários:

Aplicando $\vec{F} = m\vec{a}$ ao elétron, temos:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{a} &= \frac{Ee}{m}\hat{y} - g\hat{y} \\ \vec{a} &= \left(\frac{-1,6 \cdot 10^{-17}}{9,1 \cdot 10^{-31}} - 10 \right) \hat{y} \\ \vec{a} &\approx -1,76 \cdot 10^{13} \text{ m/s}^2 \hat{y}\end{aligned}$$

Como o movimento vertical do elétron tem aceleração constante, podemos escrever:

$$\begin{aligned}v_y &= v_{0y} + at \\ 0 &= v_0 \sin \alpha - 1,76 \cdot 10^{13} \cdot t_{subida} \\ t_{subida} &\approx 1,14 \cdot 10^{-8} \text{ s}\end{aligned}$$

Gabarito: A

11. (ITA-1995)

Um pêndulo simples é construído com uma esfera metálica de massa $m = 1,0 \times 10^{-4}kg$, carregada com uma carga elétrica $q = 3,0 \times 10^{-5}C$ e um fio isolante de comprimento $L = 1,0 m$, de massa desprezível. Este pêndulo oscila com período P num local onde $g = 10,0 m/s^2$. Quando um campo elétrico uniforme e constante \vec{E} é aplicado verticalmente em toda a região do pêndulo o seu período dobra de valor. A intensidade E do campo elétrico é de:

- a) $6,7 \times 10^3 N/C$.
- b) $42 N/C$.
- c) $6,0 \times 10^{-6} N/C$.
- d) $33 N/C$.
- e) $25 N/C$.

Comentários:

O período de um pêndulo simples é dado por:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Calculando a gravidade aparente do problema:

$$g_{apa} = g - \frac{Eq}{m}$$



Logo, a razão entre os períodos pode ser escrita como:

$$\frac{P_f}{P_0} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{\text{apa}}}}}{2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{g - \frac{Eq}{m}}} = 2$$

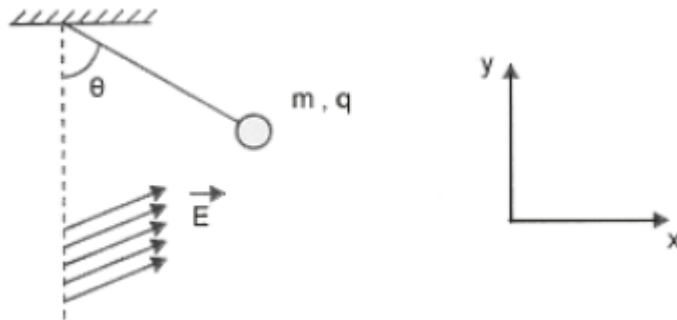
$$\frac{Eq}{m} = \frac{3g}{4}$$

$$E = \frac{3mg}{4q} = 25 \text{ N/C}$$

Gabarito: E

12. (ITA-1999)

Uma esfera homogênea de carga q e massa m de $2g$ está suspensa por um fio de massa desprezível em um campo elétrico uniforme cujas componentes em x e y têm intensidades $E_x = \sqrt{3} \times 10^5 \text{ N/C}$ e $E_y = 1 \times 10^5 \text{ N/C}$, respectivamente, como mostra a figura.



Considerando que a esfera está em equilíbrio para $\theta = 60^\circ$, qual é a intensidade da força de tração no fio?

Considere $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

- a) $9,80 \times 10^{-3} \text{ N}$.
- b) $1,96 \times 10^{-2} \text{ N}$.
- c) Nula.
- d) $1,70 \times 10^{-3} \text{ N}$.
- e) $7,17 \times 10^{-3} \text{ N}$.

Comentários:

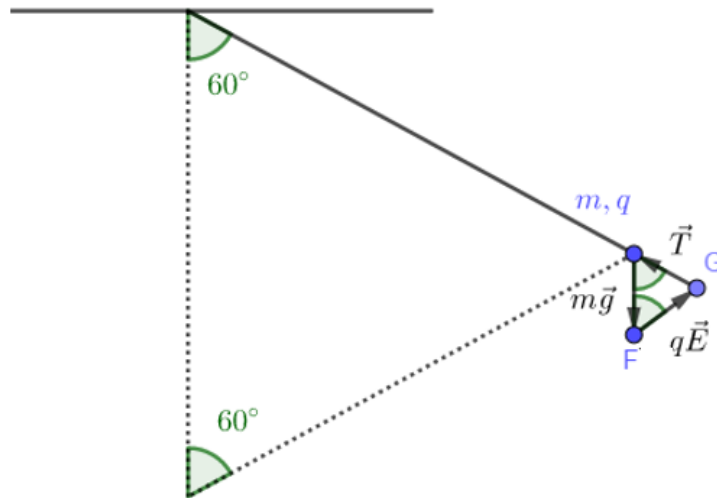
Calculando o ângulo do vetor campo elétrico com a vertical:

$$\tan \alpha = \frac{E_x}{E_y} = \sqrt{3}$$



$$\alpha = 60^\circ$$

Observe o esquema das forças agindo na esfera:



Como a partícula está em equilíbrio a soma vetorial das forças agindo sobre ela deve resultar em um polígono fechado. (Como são três, é um triângulo)

Note que o triângulo mostrado na figura é equilátero, logo:

$$T = mg = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 = 1,96 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

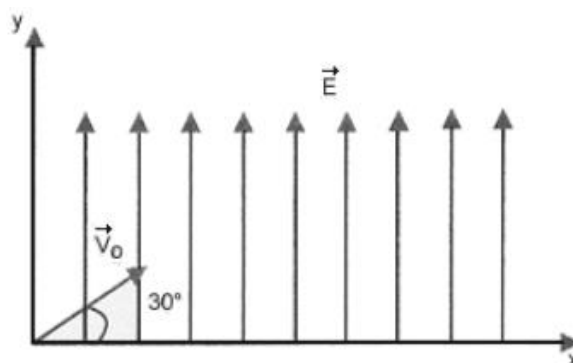
Gabarito: B

13. (ITA-1999)

No instante $t = 0 \text{ s}$, um elétron é projetado em um ângulo de 30° em relação ao eixo x , com velocidade v_0 de $4 \times 10^5 \text{ m/s}$, conforme o esquema abaixo.

A massa do elétron é $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ e a sua carga elétrica é igual a $-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Considerando que o elétron se move num campo elétrico constante $E = 100 \text{ N/C}$, o tempo que o elétron levará para cruzar novamente o eixo x é de:

- a) 10 ns.
- b) 15 ns.
- c) 23 ns.
- d) 12 ns.
- e) 18 ns.



Comentários:

Aplicando $\vec{F} = m\vec{a}$ ao elétron, temos:

$$q\vec{E} + m\vec{g} = m\vec{a}$$



$$\vec{a} = \frac{-100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}} \hat{y} - 10 \hat{y} \approx -1,76 \cdot 10^{13} \hat{y} \text{ m/s}^2$$

Como o movimento vertical tem aceleração constante, podemos escrever:

$$v_y = v_{0y} + at$$

Quando a partícula cruza o eixo horizontal novamente sua velocidade vertical deve ser a mesma, com sentido invertido:

$$-v_{0y} = v_{0y} + at_{voo}$$

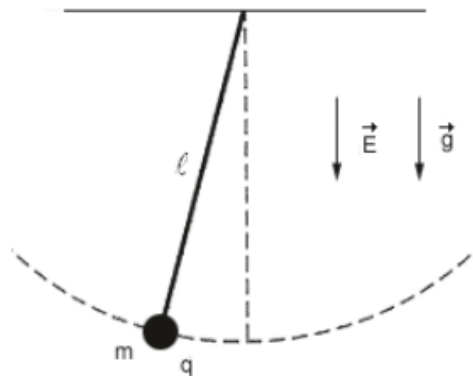
$$t_{voo} = \frac{2v_0 \text{ sen } 30^\circ}{-a} = \frac{4 \cdot 10^5}{1,76 \cdot 10^{13}} \approx 22,7 \text{ ns}$$

Gabarito: C

14. (ITA-2005)

Considere um pêndulo de comprimento l , tendo na sua extremidade uma esfera de massa m com uma carga positiva q . A seguir, esse pêndulo é colocado num campo elétrico uniforme \vec{E} que atua na mesma direção e sentido da aceleração da gravidade \vec{g} . Deslocando-se essa carga ligeiramente de sua posição de equilíbrio e soltando-a, ela executa um movimento harmônico simples, cujo período é:

- a) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
- b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+q}}$
- c) $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{gE}}$
- d) $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg-qE}}$
- e) $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg+qE}}$



Comentários:

Calculando a gravidade aparente para o movimento:

$$g_{apa} = g + \frac{F_{eletrica}}{m} = g + \frac{qE}{m}$$

Lembrando da expressão para o período de um pêndulo simples:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Devemos substituir a gravidade pela gravidade aparente do movimento considerado:



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg + qE}}$$

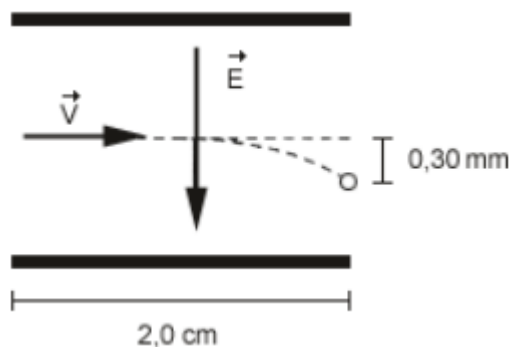
Gabarito: E

15. (ITA-2005)

Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q , e, a seguir, deslocam-se no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio $10 \mu\text{m}$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20 \text{ m/s}$ entre as placas de comprimento igual a $2,0 \text{ cm}$, no interior das quais existe um campo elétrico uniforme de módulo $E = 8,0 \times 10^4 \text{ N/C}$, como mostra a figura.

Considerando que a densidade da gota seja 1000 kg/m^3 e sabendo-se que a mesma sofre um desvio de $0,30 \text{ mm}$ ao atingir o final do percurso, o módulo de sua carga elétrica é de:

- a) $2,0 \times 10^{-14} \text{ C}$
- b) $3,1 \times 10^{-14} \text{ C}$
- c) $6,3 \times 10^{-14} \text{ C}$
- d) $3,1 \times 10^{-11} \text{ C}$
- e) $1,0 \times 10^{-1} \text{ C}$



Comentários:

Calculando a massa da gota:

$$m = \rho_{\text{agua}} V = 10^3 \cdot \frac{4}{3} \pi (10^{-5})^3 = \frac{4}{3} \pi 10^{-12} \text{ kg}$$

Aplicando $\vec{F} = m\vec{a}$ à partícula, temos;

$$q\vec{E} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = -\frac{qE}{m} \hat{y}$$

Perceba que a partícula sofre uma aceleração vertical constante e horizontal nula, de modo idêntico a um lançamento horizontal. A equação da parábola para um lançamento horizontal é dada por:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Basta substituímos a aceleração da gravidade pela aceleração encontrada no movimento acima:

$$y = -\frac{\left(\frac{qE}{m}\right)x^2}{2v_0^2}$$



O desvio total ocorrerá em $x = l_{placa} = 2 \text{ cm}$:

$$3 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2} \frac{(q \cdot 8 \cdot 10^4)}{\left(\frac{4}{3}\pi 10^{-12}\right) \cdot (20)^2} \cdot 4 \cdot 10^{-4}$$

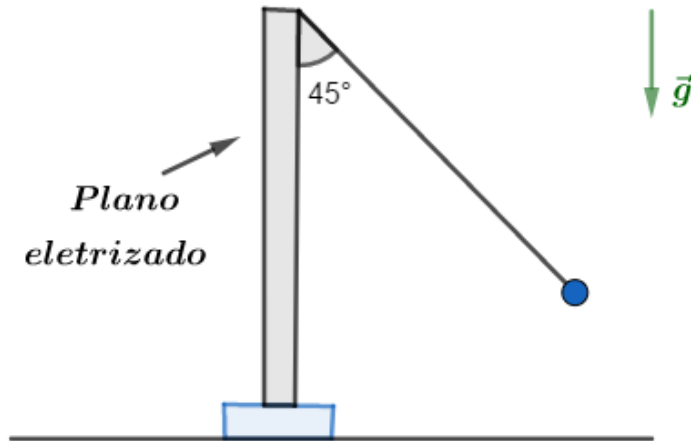
$$q = \pi \cdot 10^{-14} \text{ C}$$

Gabarito: B

16.

Uma pequena esfera de peso $P = 5,0 \times 10^{-2} \text{ N}$, eletrizada com uma carga $q = +0,20 \mu\text{C}$, está suspensa por um fio isolante bastante leve, que na posição de equilíbrio forma um ângulo de 45° com um plano vertical uniformemente eletrizado com densidade superficial σ . Qual é o módulo da densidade superficial de cargas σ ?

Dado: permissividade absoluta do meio: $\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ (SI)}$.

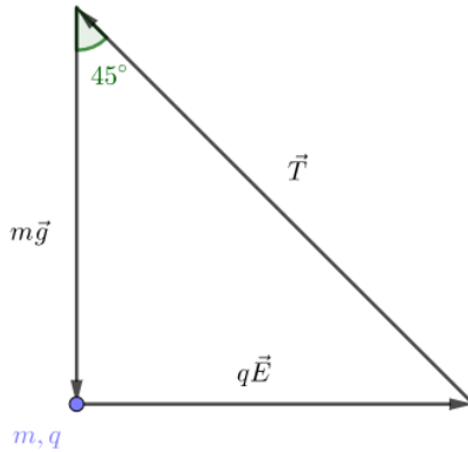


Comentários:

Considere a distância da esfera ao plano muito menor que sua extensão. Sabemos que o campo de um plano infinito é perpendicular ao mesmo e tem intensidade:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Logo, na questão teremos as seguintes forças agindo na partícula:



$$qE = P$$

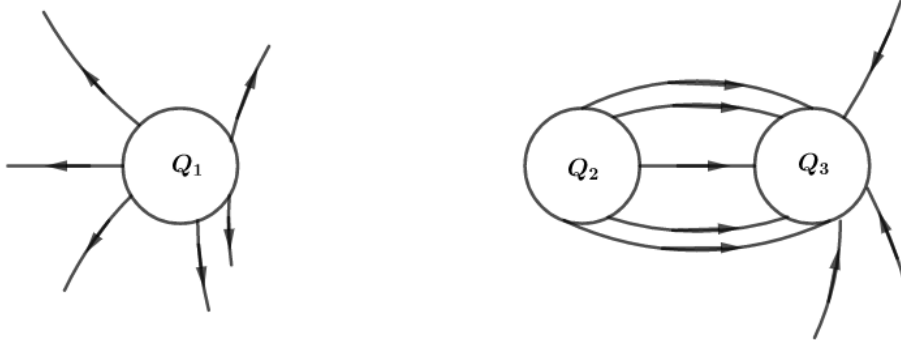
$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0 P}{q}$$

$$\sigma \cong 4,4 \frac{\mu C}{m^2}$$

Gabarito: $4,4 \mu C/m^2$

17.

Determine Q_1 e Q_3 sabendo que $Q_2 = +15\mu C$.



Comentários:

Consideraremos o valor do fluxo elétrico como proporcional ao número de linhas desenhadas. Usando a Lei de Gauss, com uma gaussiana encobrindo Q_3 :

$$\phi_3 = \frac{Q_3}{\varepsilon_0}$$

Do mesmo, para Q_1 e Q_2 , temos:

$$\phi_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_2 = \frac{Q_2}{\varepsilon_0}$$

Tirando as razões das equações acima, obtemos:



$$\frac{\phi_3}{\phi_2} = \frac{Q_3}{Q_2} = -\frac{8}{5}$$

$$Q_3 = -24\mu C$$

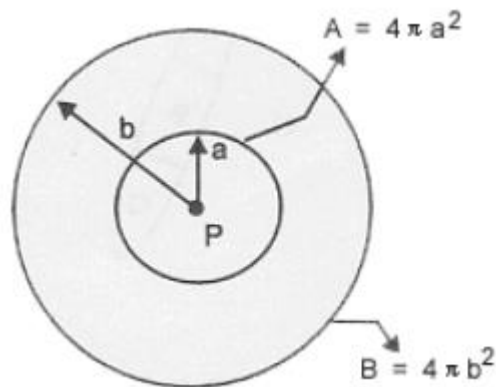
$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{6}{5}$$

$$Q_1 = 18\mu C$$

Gabarito: $Q_1 = 18 \mu C$ e $Q_3 = 24 \mu C$

18. (ITA-1999)

Uma carga pontual P é mostrada na figura com duas superfícies gaussianas de raios a e $b = 2a$, respectivamente.



Sobre o fluxo elétrico que passa pelas superfícies de áreas A e B , pode-se concluir que:

- a) O fluxo elétrico que atravessa a área B é duas vezes maior que o fluxo elétrico que passa pela área A .
- b) O fluxo elétrico que atravessa a área B é a metade do fluxo elétrico que passa pela área A .
- c) O fluxo elétrico que atravessa a área B é $1/4$ do fluxo elétrico que passa pela área A .
- d) O fluxo elétrico que atravessa a área B é quatro vezes maior que o fluxo elétrico que passa pela área A .
- e) O fluxo elétrico que atravessa a área B é igual ao fluxo elétrico que atravessa a área A .

Comentários:

Pela Lei de Gauss, aplicando em uma gaussiana qualquer Ω , temos:

$$\Phi_{\Omega,E} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

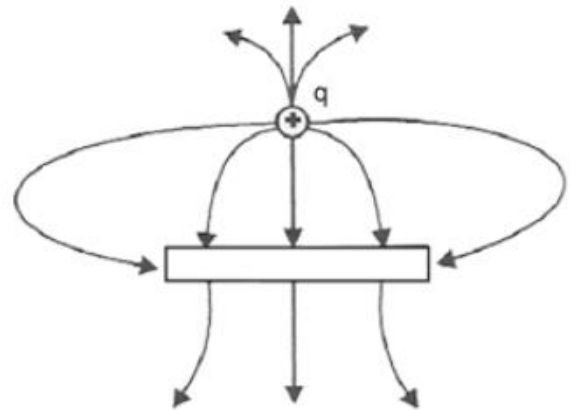


Como temos a mesma carga interna para ambas as superfícies consideradas na questão, devemos ter também o mesmo fluxo.

Gabarito: E

19. (ITA-2000)

A figura mostra uma carga elétrica puntiforme positiva q , próxima de uma barra de metal. O campo elétrico nas vizinhanças da carga puntiforme e da barra está representado pelas linhas de campo mostradas na figura. Sobre o módulo da carga da barra $|Q_{bar}|$, comparativamente ao módulo da carga puntiforme $|q|$, e sobre a carga líquida da barra Q_{bar} , respectivamente, pode-se concluir que:



- a) $|Q_{bar}| > |q|$ e $Q_{bar} > 0$
- b) $|Q_{bar}| < |q|$ e $Q_{bar} < 0$
- c) $|Q_{bar}| = |q|$ e $Q_{bar} = 0$
- d) $|Q_{bar}| > |q|$ e $Q_{bar} < 0$
- e) $|Q_{bar}| < |q|$ e $Q_{bar} > 0$

Comentários:

Consideraremos a intensidade do fluxo do campo elétrico proporcional ao número de linhas atravessando a gaussiana considerada.

Usando a Lei de Gauss em uma gaussiana Ω_1 encobrindo a carga q (sem encobrir a barra ou passar por dentro dela):

$$\Phi_{\Omega_1} = 7k = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Onde k é uma constante positiva.

Usando a Lei de Gauss em uma gaussiana Ω_2 encobrindo a barra (sem encobrir a carga q):

$$\Phi_{\Omega_2} = (3 - 4)k = -k = \frac{Q_{bar}}{\epsilon_0}$$

Das expressões acima temos: $|Q_{bar}| < |q|$ e $Q_{bar} < 0$

Gabarito: B

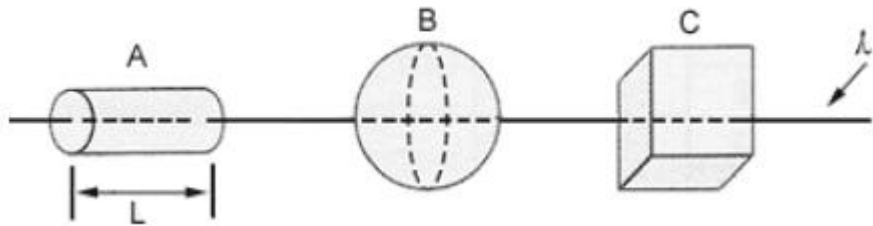


20. (ITA-2000)

Um fio de densidade linear λ de carga positiva atravessa três superfícies fechadas A, B e C, de formas respectivamente cilíndrica, esférica e cúbica, como mostra a figura. Sabe-se que A tem comprimento $L =$ diâmetro de B = comprimento de um lado de C, e que o raio da base de A é a metade do raio da esfera B.

Sobre o fluxo do campo elétrico, ϕ , através de cada superfície fechada, pode-se concluir que:

- a) $\phi_A = \phi_B = \phi_C$
- b) $\phi_A > \phi_B > \phi_C$
- c) $\phi_A < \phi_B < \phi_C$
- d) $\frac{\phi_A}{2} = \phi_B = \phi_C$
- e) $\phi_A = 2\phi_B = \phi_C$



Comentários:

Pela Lei de Gauss sabemos que o fluxo é proporcional a quantidade de carga dentro da superfície Ω :

$$\Phi_{\Omega,E} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_A = \frac{L\lambda}{\epsilon_0}$$

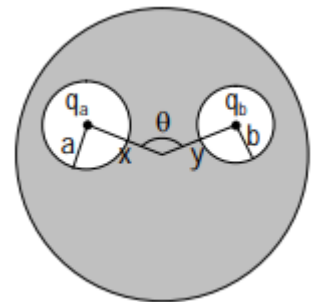
$$\Phi_B = \frac{D_B\lambda}{\epsilon_0} = \frac{L\lambda}{\epsilon_0} = \Phi_A$$

$$\Phi_C = \frac{a_C\lambda}{\epsilon_0} = \frac{L\lambda}{\epsilon_0} = \Phi_A$$

Gabarito: A

21. (ITA – 2010)

Uma esfera condutora de raio R possui no seu interior duas cavidades esféricas, de raio a e b , respectivamente, conforme mostra a figura. No centro de uma cavidade há uma carga pontual q_a e no centro da outra, uma carga também pontual q_b , cada qual distando do centro da esfera condutora de x e y , respectivamente. E correto afirmar que:



A) a força entre as cargas q_a e q_b é $k_0q_aq_b/(x^2 + y^2 - 2xycos\theta)$.



- B) a força entre as cargas q_a e q_b é nula.
- C) não é possível determinar a força entre as cargas, pois não há dados suficientes.
- D) se nas proximidades do condutor houvesse uma terceira carga, q_c , esta não sentiria força alguma.
- E) se nas proximidades do condutor houvesse uma terceira carga, q_c , a força entre q_a e q_b seria alterada.

Comentários:

No equilíbrio o condutor possui potencial uniforme e, portanto, campo nulo em seu interior. Como não há linhas de campo no interior do condutor, uma linha de campo começando na cavidade de raio a nunca alcançara a cavidade de raio b . Do mesmo modo uma linha de campo começando fora do condutor nunca alcançará as cavidades, logo as cargas não sofrem forças já que as únicas linhas de campo dentro das cavidades são as linhas devidas aos seus próprios campos.

Pela Lei de Gauss chegamos ao resultado que a carga de indução na superfície interna das cavidades deve ser menos aquela carga no interior da cavidade. Assim, por conservação de carga, temos:

$$q_{condutor,A} + q_{condutor,B} + q_{condutor,ext} = 0$$

$$q_{condutor,ext} = q_a + q_b$$

Logo uma carga externa sentirá uma força devido a uma esfera carregada com a carga acima.

Gabarito: B

22.

V_0 , como na figura abaixo, sob a ação do campo elétrico das placas e do campo gravitacional (g) da terra. Determine o ângulo β para que a esfera atinja a altura máxima ($H_{m\acute{a}x}$) ao longo do plano inclinado. Determine $H_{m\acute{a}x}$.

Dados:

$$\sigma = 7,08 \times 10^{-6} C/m^2$$

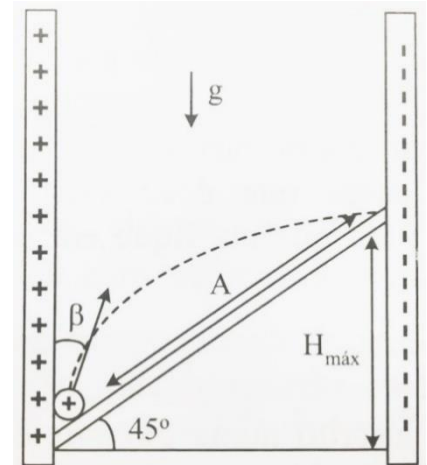
$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$Q = +2\mu C$$

$$M = 160 \text{ g}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} C^2/Nm^2$$

$$V_0 = 10 \text{ m/s}$$





Comentários:

Logo H_{max} acontecerá quando a amplitude ao longo do plano também for máxima.

Vamos trabalhar com o Princípio da Independência dos Movimentos e calcular a aceleração horizontal devido a ação da força elétrica. Notamos que o campo elétrico entre as duas placas é dado por:

$$\vec{E}_{Res} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon} + \frac{\sigma}{2\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Logo, temos que:

$$F_R = m \cdot a$$

$$q \cdot E = m \cdot a_H$$

$$a_H = \frac{q\sigma}{m\epsilon}$$

Substituindo valores, temos que:

$$a_H = \frac{2 \times 10^{-6} \cdot 7,08 \times 10^{-6}}{160 \times 10^{-3} \cdot 8,85 \times 10^{-12}}$$

$$a_H = 10 \text{ m/s}^2$$

Notamos que a aceleração horizontal é igual a aceleração da gravidade. Portanto, a distância percorrida na horizontal será a mesma distância percorrida na vertical, dado o ângulo de 45° . Dessa forma, basta olhar o movimento na vertical. Sabemos da cinemática que um objeto a máxima altura quando lançado na vertical, isto é, $\beta = 0$.

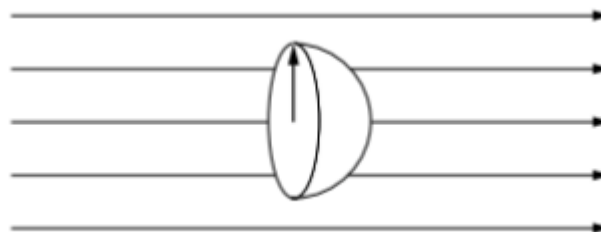
Por Torricelli, temos que:

$$H_{m\acute{a}x} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \cdot 10} = 5 \text{ m}$$

Gabarito: $\beta = 0$ e $H_{m\acute{a}x} = 5 \text{ m}$

23.

Determine o fluxo através da superfície hemisférica de raio r imersa num campo elétrico uniforme \vec{E} .



Comentários:

Forme uma gaussiana Ω tampando o hemisfério com um círculo de raio r . Aplicando a Lei de Gauss a Ω , obtemos:



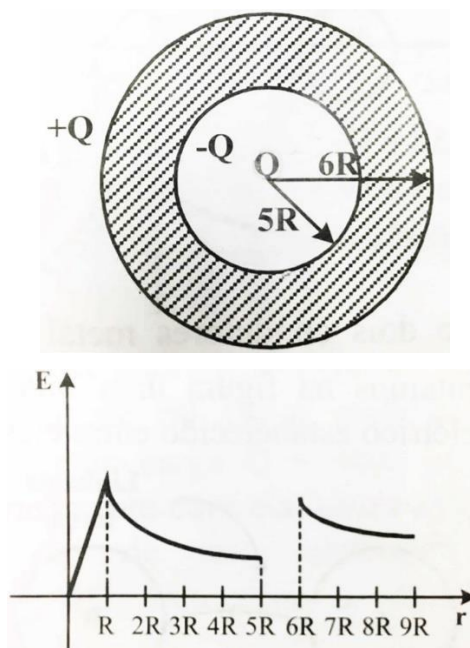
$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0} = 0$$

Logo, o fluxo é nulo. Podemos ver também que a quantidade de linhas que entram na superfície hemisférica é a mesma que saem da superfície. Como vimos, o fluxo total deve ser nulo.

Gabarito: nula

24.

Utilizando a Lei de Gauss, mostre que a variação do campo elétrico com a distância ao centro do sistema abaixo é dada pelo gráfico:



Suponha que a esfera seja metálica e que a carga Q interna seja distribuída uniformemente em uma esfera de raio R .

Qual mudança haveria no gráfico se a casca esférica de espessura R fosse isolante com carga uniformemente distribuída?

Comentários:

Usando a lei de Gauss com uma gaussiana esférica $\Omega(r)$ de raio r , temos:

$$\sum_{\Omega(r)} \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

Pela simetria do problema o campo elétrico deve ser radial.

Para $r < R$:



$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0} = \frac{\left(\frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3}\right) \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \text{ (linear)}$$

Para $R < r < 5R$:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{r^2}$$

Para $5R < r < 6R$ a superfície estará no interior do condutor, onde o campo é nulo.

Para $r > 6R$:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{r^2}$$

Suponha agora uma distribuição uniforme de carga ρ_0 entre $5R$ e $6R$. O campo para $r < 5R$ continuaria o mesmo. (somente carga interna aparece na Lei de Gauss, no cálculo do campo elétrico)

Para $5R < r < 6R$:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{\left(Q + \rho_0 \frac{4}{3} \pi (r^3 - (5R)^3)\right)}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{r^2} + \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} - \frac{125\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

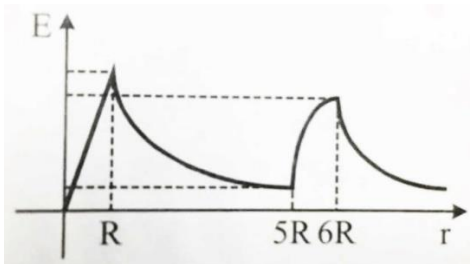
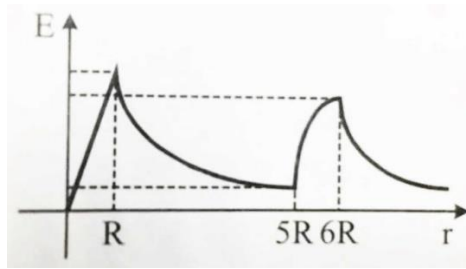
Note que o campo acima adiciona um termo linear crescente.

Para $r > 6R$:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q + \rho_0 \frac{4}{3} \pi ((6R)^3 - (5R)^3)}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q + \rho_0 \frac{364\pi}{3} R^3}{r^2}$$

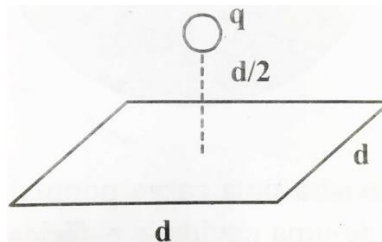
Onde $Q_{total} = Q + \rho_0 V_{5R,6R}$. O gráfico representado as funções acima ficariam:



Gabarito:

25.

Uma carga pontual $+q$ está a uma distância $d/2$ de uma superfície quadrada de lado d e encontra-se diretamente acima do centro do quadrado, como na figura:



Determine o fluxo elétrico que passa através do quadrado.

Comentários:

Adicione 5 quadrados ao mostrado na figura, de modo a criar um cubo englobando a carga. Perceba que cada quadrado deverá ter a mesma distância à carga. Como a superfície do cubo é fechada, podemos usá-lo na Lei de Gauss:

$$\Phi_{S(\text{cubo})} = \frac{q_{\text{interna}}}{\epsilon_0}$$

$$6\Phi_{\text{face}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

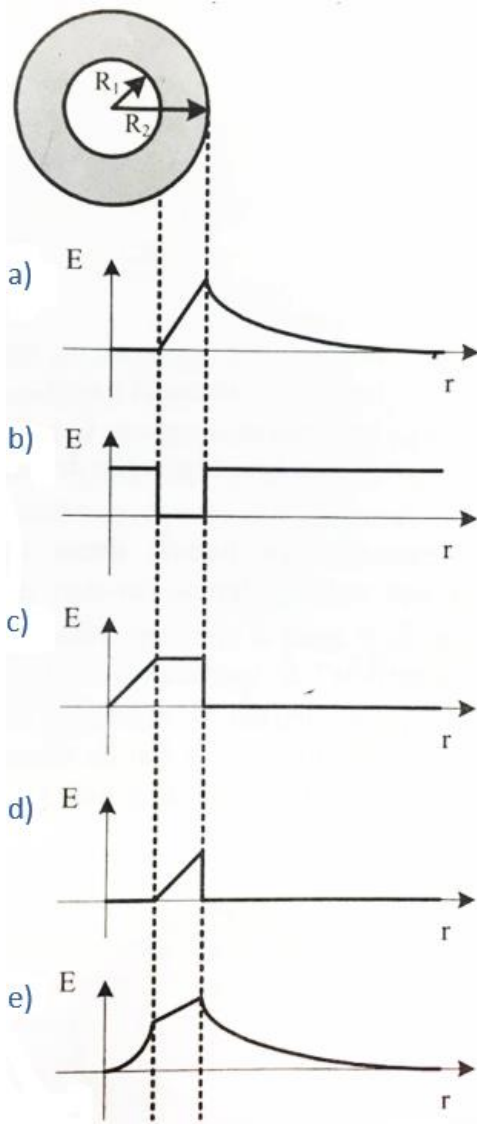
$$\Phi_{\text{face}} = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

Gabarito: $\phi = +\frac{q}{6\epsilon_0}$

26.



Uma camada esférica isolante de raio interno R_1 e raio externo R_2 , conforme mostra a figura, é eletrizada uniformemente. O gráfico que melhor representa a variação do campo elétrico $|\vec{E}|$, ao longo de uma direção radial, é:



Comentários:

Usando a Lei de Gauss com uma gaussiana esférica $\Omega(r)$ de raio r , obtemos:

$$\sum_{\Omega(r)} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

Para $r < R_1$:

$$E \cdot \Delta s = 0$$

$$E = 0$$

Para $R_1 < r < R_2$:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)}{\epsilon_0}$$



$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right)$$

Para $r > R_2$:

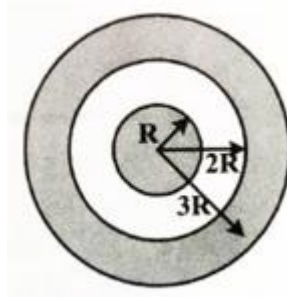
$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$

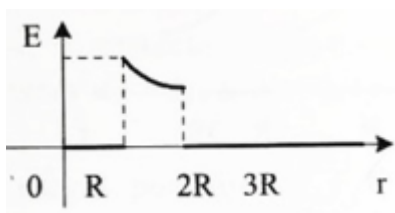
Gabarito: A

27. (PUC – SP)

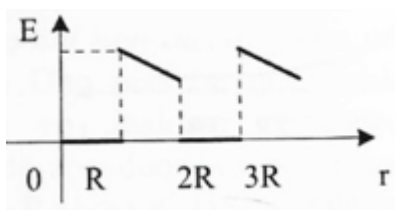
Sabendo que a esfera oca representada na figura está isolada e sua carga total é nula, escolha, dos gráficos a seguir, o que melhor representa a intensidade do campo elétrico \vec{E} em função em distância r ao centro comum. Tanto a esfera oca como a esfera maciça que estão em seu interior são condutoras. A esfera maciça está eletrizada.



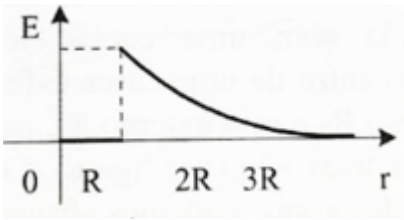
a)



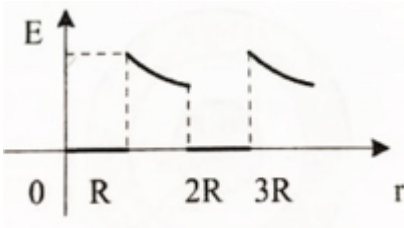
b)



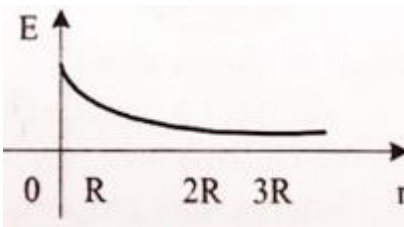
c)



d)



e)



Comentários:

O campo no interior de condutores em equilíbrio deve ser nulo, assim ficamos somente com as alternativas b) e d). Ambas configurações possuem carga. Considere que o condutor interno possua carga $+q$, logo o externo, que é neutro, tem carga $-q$ interna e $+q$ externa.

Utilizando a Lei de Gauss com uma gaussiana esférica de raio r ($R < r < 2R$):

$$\sum_{\Omega(r)} \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

O campo deve ser radial devido à simetria do problema:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

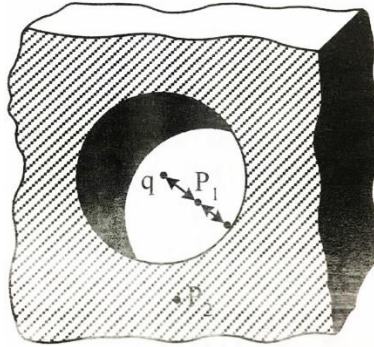
Que certamente não é linear, como em b).

Gabarito: D

28.



A figura mostra uma carga pontual de $1,0 \times 10^{-7} \text{ C}$, no centro de uma cavidade esférica de raio igual a $3,0 \text{ cm}$ existente num pedaço de metal. Utilizando a Lei de Gauss, obtenha o valor do campo elétrico para:



- a) um ponto P_1 no meio da distância que vai do centro da cavidade à superfície.
- b) no ponto P_2 .

Comentários:

a) Pela simetria do problema o campo elétrico, se existir, deve ser radial. Usando a lei de Gauss com uma gaussiana Ω esférica de raio $\frac{r}{2}$ e centro na carga, temos: (r é o raio da cavidade)

$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot \left[4\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \right] = \frac{q}{\epsilon_0}$$

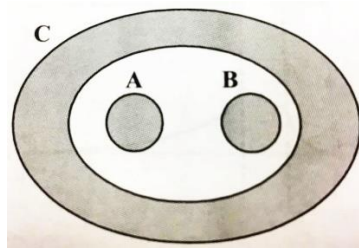
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-7}}{\frac{9}{4} \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

b) A condição de equilíbrio para um condutor é campo elétrico interno nulo.

Gabarito: a) $4 \times 10^6 \text{ N/C}$ e b) zero

29.

Dadas as esferas A e B colocadas dentro de uma casca esférica C, todas metálicas, em equilíbrio eletrostático. Sabendo que as esferas têm cargas $+2q$, $+3q$ e $+4q$, respectivamente.



Determine:

- a carga total na superfície interna de C.
- a carga total na superfície externa de C.
- comente sobre a distribuição de cargas nas superfícies.

Comentários:

a) Aplicando a Lei de Gauss em uma gaussiana Ω inteiramente contida em C, temos: (campo nulo no interior de condutores)

$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

$$0 = \frac{q_A + q_B + q_{C,int}}{\epsilon_0}$$

$$q_{C,int} = -(q_A + q_B) = -5q$$

b) Por conservação de carga, temos:

$$q_C = q_{C,ext} + q_{C,int}$$

$$q_{C,ext} = q_C - q_{C,int} = 9q$$

Na superfície interior haverá mais carga negativa perto dos vértices horizontais da forma elíptica, devido à atração com as cargas A e B.

c) Como é visto em A, o campo gerado pela distribuição de cargas internas é nulo e, portanto, não afeta o exterior. Na superfície exterior a carga seria distribuída igualmente se estivéssemos tratando de uma esfera, contudo como o raio de curvatura da superfície varia, teremos uma concentração de cargas maior na região dos vértices horizontais, pelo efeito conhecido como poder das pontas. (Mais acentuado quanto menor for o raio, chegando ao limite quando falamos de pontas)

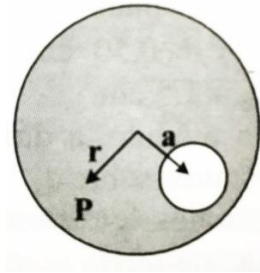
Gabarito: a) $-5q$ b) $+9q$ c) não-uniforme em todas as superfícies

30.

Uma região esférica está uniformemente carregada com uma densidade volumétrica de carga ρ . Seja \vec{r} o vetor que vai do centro da esfera até um ponto genérico P no interior da esfera.



a) mostre que o campo elétrico no ponto P é dado por $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{r}$.



b) uma cavidade esférica é aberta na esfera, como nos mostra a figura. Usando conceitos de superposição, mostre que o campo elétrico, em todos os pontos no interior da cavidade, é $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{a}$ (campo uniforme), onde \vec{a} é o vetor que vai do centro da esfera ao centro da cavidade. Note que ambos os resultados são independentes dos raios da esfera e da cavidade.

Observe que o campo será uniforme apenas na cavidade.

Comentários:

a) Pela simetria do problema podemos concluir que o campo, se existir, deve ter direção radial. Usando a Lei de Gauss com uma gaussiana esférica $\Omega(r)$ de raio r , temos:

$$\sum_{\Omega(r)} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

Vetorialmente:

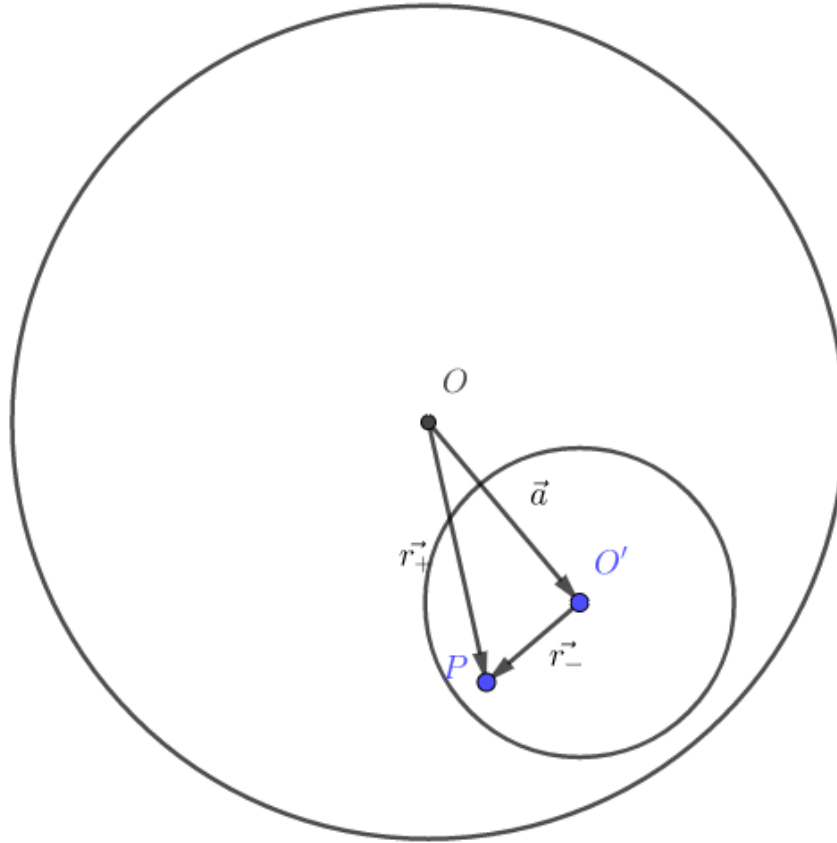
$$\vec{E} = E \cdot \hat{r} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$$

b) Considere uma distribuição de cargas igual à do item a), com a adição de uma esfera de raio b e densidade $-\rho$ a uma distância a do centro. Note que a distribuição descrita acima é idêntica à proposta pelo exercício.

Calculando o campo dentro da esfera de densidade $-\rho$: (ou seja, dentro da cavidade)

$$\vec{E}_{res} = \frac{\rho \vec{r}_+}{3\epsilon_0} + \frac{(-\rho) \vec{r}_-}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{res} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$



Pela figura mostrada acima, temos:

$$\vec{r}_+ = \vec{r}_- + \vec{a}$$

$$\vec{r}_+ - \vec{r}_- = \vec{a}$$

$$\boxed{\vec{E}_{res} = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0}}$$

Note que, para um campo fora da esfera de densidade $-\rho$, o termo $-\frac{\rho \vec{r}_-}{3\epsilon_0}$ se torna:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{r_-^2} \hat{r}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} - \frac{\left(\rho \frac{4}{3}\pi b^3\right)}{r_-^2} \hat{r}_- = \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}$$

Logo, temos que o campo em um ponto P no interior cresce à medida que ele se afasta do centro:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}_+}{3\epsilon_0} - \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}}$$

Gabarito: A. $\boxed{\vec{E} = E \cdot \hat{r} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}}$ **B.** $\boxed{\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}_+}{3\epsilon_0} - \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}}$



8.0. Considerações finais da aula

Chegamos ao final da nossa aula. Relembramos conceitos estudados no ensino fundamental e aprofundamos o nosso conhecimento em alguns assuntos. Nessa aula, estudamos álgebra e aritmética elementar.

Quero que você se acostume com as notações matemáticas e a usar expressões algébricas.

Lembre-se! Treine o maior número de exercícios que você conseguir!

Eu sei que o caminho para a aprovação é árduo, mas comentarei o maior número de questões e passarei todos os bizus que precisei para minha aprovação.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

ESCLARECENDO!





9.0. Referências bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 5. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 3. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.
- [4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 3. 9ª ed. Moderna. 490p.
- [5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 3. 10ª ed. LTC. 365p.