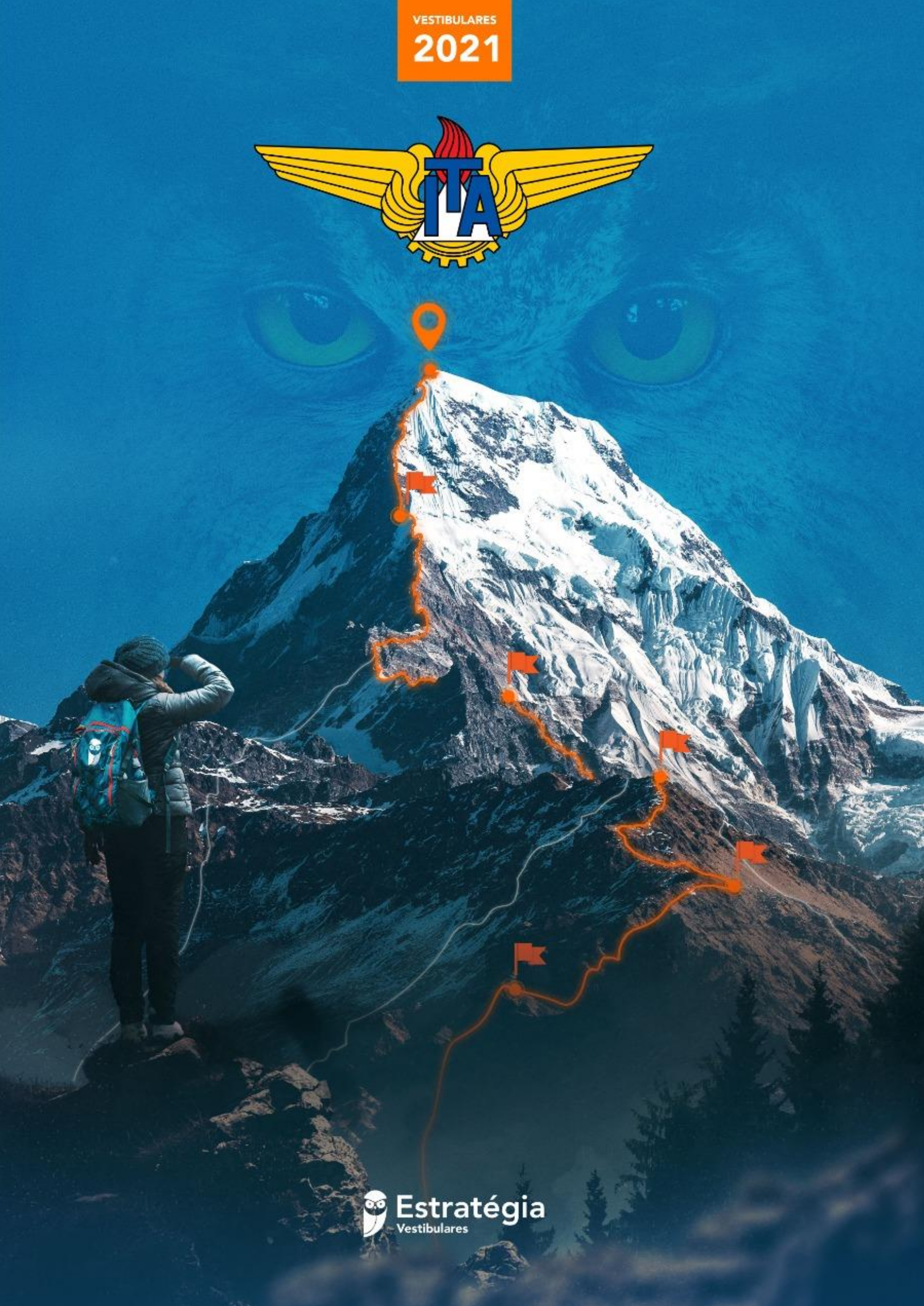
VESTIBULARES
2021
ITA
Estratégia
Vestibulares

Sumário

Apresentação

Olá, caros alunos!

Sejam bem-vindos à Trilha Estratégica, nosso Bizuário, para as provas do ITA!

Antes de darmos início, vou me apresentar:

Meu nome é Bruno Henrique Almeida da Cunha, sou aluno do ITA, aprovado na AFA, no IME e no ITA por dois anos consecutivos (2018 e 2019).

SOBRE O BIZUÁRIO: Trata-se de uma instrução sobre como otimizar o seu estudo nas disciplinas. Sabemos que, durante a preparação para o ITA, é comum o aluno se deparar com inúmeras listas com muitos exercícios e materiais enormes também. Nesse sentido, esse material foi feito no intuito de instruir o aluno a seguir um caminho mais otimizado para conseguir o conhecimento que ele precisa e acertar as questões da prova. Aqui usarei da minha experiência nos vestibulares ITA/IME, obtida com mais de 4 anos de preparação, para fazer um roteiro de aula em que você poderá acessar as suas dificuldades na matéria de forma rápida e objetiva.

Instruções Gerais

A aula 03 trata do assunto de funções no vestibular do ITA. Tal matéria configura 4% das questões da prova desde o ano de 2000 até 2009. Pode parecer uma porcentagem baixa, mas já é o suficiente para cair todos os anos e ser de estudo obrigatório. Conhecer as propriedades das funções é importante não só para funções polinomiais, mas também para o entendimento de matérias como trigonometria e combinatória, que envolvem muitos conceitos de funções. Vale ressaltar também que funções é uma matéria extensa e com muitos detalhes, muitas vezes cobrados em questões de análise de itens, o que exige um conhecimento pleno do assunto. Dessa forma, essa aula é de fundamental importância para a sua aprovação no vestibular. Deixarei na parte de bizus vários tópicos importantes que vão ajudar a você relembrar a teoria e acessar as informações importantes mais rápido para resolver as questões. Sendo assim, vamos começar.

Quanto à questão de como estudar o Bizuário e as aulas, lembre-se:

- para passar no ITA é preciso bastante disciplina, foco e paciência. O esperado é que o aluno estude entre 10 e 12 horas por dia, em média, principalmente no começo. Pode parecer muita coisa, até fora da realidade. Porém, considerando que o aluno tem afinidade pelas disciplinas de exatas e que ele encontre um ambiente propício para o estudo, é natural que, com o tempo, ele atinja níveis de estudo muito altos sem demandar grandes esforços para isso.

- “Sangue no olho” e “faca nos dentes” são expressões que indicam muito bem o comportamento de um vestibulando de ITA. Sabendo disso, vamos nessa!

Observação: Quando você for indicado a fazer uma questão e encontrar dificuldades, pule-a e continue a resolver outras questões. É interessante que você não olhe a resolução desse exercício logo de primeira, use as outras questões mais fáceis como subsídio para resolver as questões mais complexas. Se mesmo assim você continuar com esse problema, verifique a resolução. Seguir dessa forma irá ajudá-lo a absorver a matéria.

Análise da aula

Essa Disciplina no Vestibular

Funções é uma matéria que exige muita atenção na hora da prova, na verdade é uma das que mais exige atenção. Essa exigência vem do fato de que muitos detalhes compõem esse assunto, detalhes que, caso não analisados passo a passo, podem custar uma questão. Desde a análise do domínio e da imagem, até a análise de composição, paridade, sobrejeção e injeção. Nesse sentido é muito comum encontrar questões sobre afirmações desse assunto na prova. Se você encontrar questões puramente algébricas desse tema, fique contente, pois geralmente esse tipo de questão exige pouco raciocínio e a questão pode ser resolvida de forma rápida.

Roteiro da Aula

- Ao começar a aula, nos deparamos com a definição de par ordenado. Está ai mais por questão de contextualização, pule essa parte.
- Em **1.2**, temos o produto cartesiano. Essa parte da matéria já caiu no ITA e pode cair de novo. O mais importante são as propriedades do tópico **1.2.2**, que podem ser cobradas em provas. Perceba que P3, P4 e P5 são bem intuitivas. Também podemos afirmar que $(A-B)\times C = A\times C - B\times C$. Você pode tentar demonstrar essa última propriedade com o que foi aprendido na aula!
- No tópico **1.3**, temos a parte de relação binária. Apesar de ter caído poucas vezes questões sobre esse assunto, classificação das relações, é bom saber, pois são conceitos muito conhecidos.
- Todas as propriedades de relações que foram listadas são importantes. Após terminar essa parte, fazer a questão 1.
- Se você já é familiarizado com os conceitos de funções, então já deve pular para o tópico **2.2** e fazer a questão **02**. É interessante resumir que, para uma relação ser uma função, cada elemento do domínio deve "mandar flecha" para outro elemento do contradomínio e não deve haver elementos do domínio que não mandam flechas.
- Em **3.5** temos o desenvolvimento do sinal de funções afim. Quando a curva está acima do eixo x, o sinal é positivo naquele intervalo que ela está acima. Quando está abaixo, é negativo. Isso é aplicável para qualquer função. Você acha as raízes da equação e analisa os sinais.
- Lembre-se que uma das raízes pode ter multiplicidade maior que 1. Nesse caso, você só conta uma vez essa raiz para fazer a análise de sinal.
- Em inequações, é interessante lembrar dois pontos. Primeiro, NUNCA, ao ter algo do tipo $\frac{f(x)}{g(x)} > h(x)$, faça $f(x) > h(x)g(x)$. O CORRETO é sempre zerar o lado direito da igualdade, assim $\frac{f(x)}{g(x)} - h(x) > 0 \Rightarrow \frac{f(x)-h(x)g(x)}{g(x)} > 0$, e a partir daqui você faz a análise de sinal. Segundo, a maneira como você resolve inequações-produto e inequações-quociente é a mesma, porém atentando que nas inequações-quociente você tem a condição de existência no denominador.
- No capítulo **05** temos a parte mais importante de funções. Em **5.1.1** temos o tópico de função injetora. Para saber se a função é injetora em determinado intervalo dado o gráfico, basta traçar uma reta horizontal. Se essa reta corta a função em um único ponto, então ela é injetora no intervalo dos valores de x em que isso acontece.
- Para provar que uma função é injetora, você vai supor que $f(x_1) = f(x_2)$. Caso você chegue que $x_1 = x_2$, a função é injetora. Caso contrário, se houver outra relação entre x_1 e x_2 que satisfaça a relação acima, então a função não é injetora.
- Para a função ser sobrejetora, é só olhar o seu contradomínio. Caso no seu contradomínio não sobre qualquer elemento, ou seja, se ele for igual à imagem da função, então a função será sobrejetora.

- Para a função ser bijetora, ela deve ser sobrejetora e injetora ao mesmo tempo. É interessante notar que a única forma disso acontecer é quando o domínio tem o mesmo número de elementos do contradomínio!
- Função par e função ímpar não tem segredo! Vale lembrar dois pontos: A função constante e igual a 0 é uma função par e ímpar ao mesmo tempo e toda função pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar! $f(x) = h(x) + g(x)$, em que $h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ e $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, em que h é par e g é ímpar!
- Na parte de função composta (**5.3**), o mais importante é saber como montar um diagrama para função composta. Nesse tópico, temos a demonstração da composição entre funções para quando $B \neq B'$ e a conclusão para quando $B = B'$, que é o caso da maioria das questões. B e B' são ilustrados na aula.
- E então chegamos em uma das partes mais importantes da aula, nos tópicos **5.3.1** e **5.3.2**. Essas propriedades caem muito na prova e entendê-las bem é dever de qualquer vestibulando de ITA. Sugiro que você tente demonstrar cada uma das propriedades de **5.3.2**.
- Da mesma maneira que a função composta, **5.4.2** e **5.4.3** são muito importantes. A função inversa também cai muito, então sugiro você tentar demonstrar cada uma das propriedades de **5.4.3** e depois fazer a questão 08, prestando atenção nas restrições do domínio e contradomínio do item b.
- As questões de vestibulares anteriores você pode fazer na ordem de dificuldade ou na ordem que as questões aparecem se você já estuda pro ITA há um tempo e já está mais experiente. Nesse segundo caso, sugiro que faça as questões de forma rápida a cada 5 exercícios e depois veja se você acertou tudo, isso ajuda a treinar velocidade de resolução sem perder a atenção.

Questões da Aula Separadas por Nível

Aqui separei as questões da aula por nível de dificuldade. Não se preocupe se você não conseguiu ou não entendeu uma questão difícil logo de primeira, a maior parte das questões de funções que caem no ITA são fáceis e médias. Porém, no longo prazo, é importante que você domine todas as questões da aula e as ideias que foram descritas ali, para que aprofunde seus conhecimentos na matéria e minimize, assim, as chances de cair alguma questão desse assunto que você não saiba resolver na hora da prova.

Não se preocupe caso você tenha encontrado dificuldade em alguma questão considerada fácil, pois você pode estar destreinado na matéria. Verá que, com um pouco mais de prática, você, provavelmente, vai concordar comigo!

Questão 07:

Fáceis: a, b, c, d, e, g

Médias: f, h, i, j

Fáceis	Médias	Difíceis
02, 03, 04, 05, 06, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 45, 46, 49, 65, 74, 76	01, 40, 41, 42, 43, 44, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 75	73, 77, 78

Bizus

- (Austrália) $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$, encontre $\sum_{i=1}^{1994} \frac{i}{1995}$. Em que o símbolo $\sum \frac{i}{1995}$ representa a soma dos valores de $\frac{i}{1995}$ de 1 até 1994. Tente resolver essa questão. O bizu pra isso é você perceber que $f(x) + f(1-x) = 1$. Dessa forma você consegue somar sempre os números das extremidades! Perceba que $\frac{1}{1995} + \frac{1994}{1995} = 1$. A resposta é 997. Esse tipo de ideia é bem comum no vestibular e de grande valia.
- (Austrália) Qual o menor valor de $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(y-x)^2+4} + \sqrt{(z-y)^2+1} + \sqrt{(10-z)^2+9}$? Tente resolver essa questão. A ideia pra isso é bem interessante. Monte um plano cartesiano. Observe que o número representa uma reta partindo da origem até o ponto de coordenadas $(x, 1)$. Já o número $\sqrt{(y-x)^2+4}$ representa uma reta partindo do ponto de coordenada $(x, 1)$ até o ponto de coordenada $(y, 3)$, pois $2^2 = (3-1)^2$. E assim você vai construindo um gráfico até chegar no ponto de coordenada $(10, 7)$. Ora, como ele quer a menor distância, então é a reta que cruza o ponto inicial (0,0) com o final $(10{,}7)$. Dessa forma, você encontra que a resposta é $\sqrt{10^2+7^2} = \sqrt{149}$. Esse é um raciocínio interessante e pode cair na prova! Fique ligado.

- Em **1.3.3** foi abordada a classificação das relações. Esse assunto já caiu no IME, então é bom dominar.
- Em funções do tipo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ é comum perguntar a expressão de $fofof \dots fof(x)$. Quando for assim, não se assunte. Na aula de matrizes aprenderemos um jeito muito bom de resolver isso. Por enquanto, vá substituindo as funções e veja se aparece algum padrão.
- Um tipo de questão que já caiu no ITA é para calcular o valor de f(x) uma vez que f(x) + f(a-x) = g(x). Para calcular esse tipo de coisa basta fazer que $a \leftarrow a - x$, ou seja, $a = a - x$, a seta é usada por questões de formalismo, uma vez que a variável a recebe o valor de $a - x$ para que você faça a análise. Com essa substituição você terá duas equações e duas incógnitas. E ai então só achar o valor de $f(x)$!
- É bom dominar os conceitos de injeção, sobrejeção e bijeção, pois no capítulo de combinatória você vai calcular o número de funções que satisfazem cada uma delas!
- Saiba bem como analisar se uma composição de funções é par ou ímpar, se é sobrejetora e\ou injetora. Isso é bem importante.
- Vamos analisar os seguintes itens, que já caíram no ITA.

  I. Se f e g são impares, então f + g ímpar

  II. Se f e g são estritamente crescentes, então f + g é crescente

  III. Se f e g são invertíveis, então f + g é invertível.

  Tente provar as afirmações acima.

  I – Verdadeira. Conforme visto no bizu acima, você pode definir uma função $h(x)$ e analisar $h(-x)$ e assim analisar o resultado da função.

  II – Verdadeiro. $f(x_2) > f(x_1)$ para $x_2 > x_1$ e $g(x_2) > g(x_1)$ para $x_2 > x_1$. Assim, somando as equações, $(f+g)(x_2) > (f+g)(x_1) \Rightarrow x_2 > x_1$, tornando verdadeira a afirmação.

III – Falso. Podemos fazer $f(x) = -x$ e $f(x) = x$, e $f(x) + g(x) = 0$. Função constante e igual a zero não é invertível, mas $f(x)$ e $g(x)$ são, logo a afirmação está falsa.