24 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Considere os seguintes problemas:

- De quantos modos distintos oito pessoas podem se sentar lado a lado em uma fila de cinema?
- Quantas placas de automóveis podem ser formadas sem repetição de letras e de algarismos?
- De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Mega Sena?
- De quantas maneiras diferentes pode-se definir as chaves de seleções da primeira fase de uma Copa do Mundo de futebol?

Todas as questões levantadas definem um problema de contagem.

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que desenvolve técnicas e métodos de contagem que nos permitem resolver tais questões.

Princípio fundamental da contagem (PFC)

exemplo 1

Um quiosque de praia em Florianópolis lançou a seguinte promoção durante uma temporada de verão:

"Combinado de sanduíche natural e suco a R$ 5,00"

Nesse combinado, constam quatro opções de sanduíche (frango, atum, vegetariano e queijo branco) e três opções de suco (laranja, uva e morango).

De quantas formas distintas uma pessoa pode escolher o seu combinado?

- Em primeiro lugar, a pessoa deverá optar pelo sabor do lanche. Há quatro opções: frango (*F*), atum (*A*), vegetariano (*V*) e queijo branco (*Q*).
- Para cada uma das possibilidades anteriores, a escolha do suco pode ser feita de três maneiras possíveis: laranja (*L*), uva (*U*) ou morango (*M*).

A representação dessas possibilidades pode ser feita por meio de um diagrama seqüencial, conhecido como diagrama da árvore.

Observe:

1ª etapa (escolha do sanduíche)	2ª etapa (escolha do suco)	combinado
frango	laranja	→ (F, L)
	uva	→ (F, U)
	morango	→ (F, M)
atum	laranja	→ (A, L)
	uva	→ (A, U)
	morango	→ (A, M)
vegetariano	laranja	→ (V, L)
	uva	→ (V, U)
	morango	→ (V, M)
queijo branco	laranja	→ (Q, L)
	uva	→ (Q, U)
	morango	→ (Q, M).

Observe que cada combinado consta de um par ordenado (x, y), em que $x \in \{F, A, V, Q\}$ e $y \in \{L, U, M\}$.

O número de combinados possíveis é $4 \cdot 3 = 12$.

exemplo 2

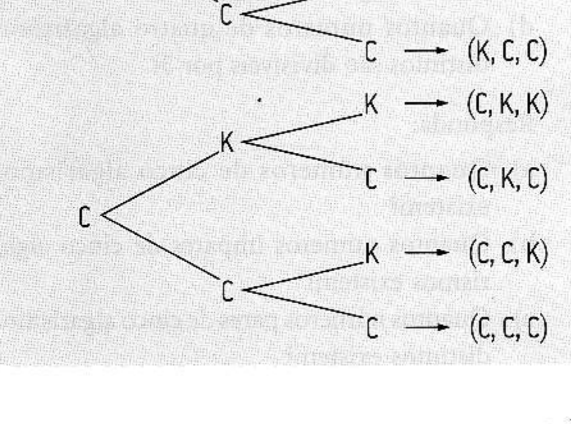
Uma moeda não viciada é lançada três vezes sucessivamente. Quais são as seqüências possíveis de faces obtidas nesses lançamentos?

Vamos representar cara por *K* e coroa por *C*.

Há três etapas (lançamentos) a serem analisadas:

- O primeiro lançamento pode resultar em cara ou coroa.
- Para cada resultado obtido na primeira vez que a moeda for lançada, o segundo lançamento poderá resultar em cara ou coroa.
- A partir de cada um dos resultados anteriores, o terceiro lançamento pode resultar em cara ou coroa.

Vamos representar essas possibilidades no seguinte diagrama:



Cada seqüência obtida é uma tripla ordenada de faces (f_1, f_2, f_3), em que $f_1 \in \{K, C\}$, $f_2 \in \{K, C\}$ e $f_3 \in \{K, C\}$.

O número de triplas ordenadas possíveis é $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Suponha que uma seqüência ordenada seja formada por *k* elementos $(a_1, a_2, ..., a_k)$, em que:

- a_1 pode ser escolhido de n_1 maneiras distintas;
- a_2 pode ser escolhido de n_2 formas diferentes, a partir de cada uma das possibilidades anteriores;
- a_3 pode ser escolhido de n_3 modos diferentes, a partir de cada uma das escolhas anteriores;

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- a_k pode ser escolhido de n_k maneiras distintas, a partir das escolhas anteriores.

Então, o número de possibilidades para se construir a seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$ é:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$$

Esse resultado é conhecido como princípio fundamental da contagem (PFC) e serve de base para a resolução de problemas de contagem.

exemplo 3

Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

Trata-se de construir uma seqüência ordenada de três algarismos (a, b, c), respeitadas as condições: $a \neq b$, $b \neq c$ e $a \neq c$, com $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Há três etapas a serem analisadas:

- Para a escolha do algarismo da centena (*a*) há sete opções.
- Para a escolha do algarismo da dezena (*b*) há seis opções, uma vez que o algarismo escolhido para a centena não pode se repetir.
- Para a escolha do algarismo da unidade (*c*) há cinco opções, pois devemos excluir os algarismos já escolhidos para *a* e *b*.

Assim, pelo PFC, a quantidade de números é $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

exemplo 4

A seleção brasileira de futebol irá disputar um torneio internacional com outras cinco seleções, no sistema "todos jogam contra todos uma única vez". Quais as possíveis seqüências de resultados — vitória (V), empate (E) e derrota (D) — da equipe brasileira nesse torneio?

A seqüência de resultados dos jogos pode ser representada por $(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)$, e, em cada jogo, pode ocorrer V, D ou E.

Pelo PFC, o número de seqüências possíveis é $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$.

exemplo 5

Considerando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, responda:

a) Quantos números de três algarismos podemos formar?

Devemos construir uma tripla ordenada (x, y, z) de modo que:

- x pode ser escolhido de seis modos distintos, pois o número que será formado não pode começar por zero. Note que $034 = 34$;
- y pode ser escolhido de sete formas diferentes, pois pode haver repetição de algarismos;
- z pode ser escolhido de sete maneiras distintas, pois não há restrições.

Assim, pelo PFC, a quantidade de números é $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$.

b) Quantos números ímpares de três algarismos distintos podemos formar?

Devemos construir uma tripla ordenada (x, y, z), respeitadas as restrições. Já que um número é ímpar quando termina por algarismo ímpar, é mais prático iniciar a discussão do problema pela "última casa" (das unidades):

- z pode ser escolhido de três modos distintos (1, 3 ou 5);
- x pode ser escolhido de cinco maneiras diferentes, pois não podemos escolher o zero nem o algarismo escolhido para z;
- y pode ser escolhido de cinco formas distintas, pois devemos excluir os dois algarismos já escolhidos para x e para z.

Assim, pelo PFC, o resultado é $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$.

exercícios

1. Um restaurante oferece almoço a R$ 20,00, incluindo: entrada, prato principal e sobremesa. De quantas formas distintas um cliente pode fazer seu pedido, se existem quatro opções de entrada, três de prato principal e duas de sobremesa?

2. Uma prova consta de oito questões, do tipo C/E (*certo* ou *errado*).
   a) Quantas seqüências de respostas são possíveis na resolução dessa prova?
   b) Em quantas dessas seqüências a resposta da primeira questão é assinalada como *certo*?

3. Em um laboratório, um professor de Química tem disponíveis nove ácidos diferentes e seis bases diferentes. Se, em uma aula, o professor prepara três reações de neutralização (ácido + + base ⟶ sal + água), determine o número de aulas necessárias para que ele demonstre todas as possíveis reações.

4. Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, responda:
   a) Quantos números de quatro algarismos podemos formar?
   b) Quantos números pares de quatro algarismos podemos formar?
   c) Quantos números ímpares de quatro algarismos distintos podemos formar?
   d) Quantos números de quatro algarismos distintos são divisíveis por 5?

5. Responda:
   a) Quantos números de cinco algarismos existem?
   b) Quantos números ímpares de cinco algarismos existem?
   c) Quantos números pares de cinco algarismos distintos existem?

6. Em uma excursão, o passageiro deve escolher a categoria de hotel em que se hospedará (turística, turística superior, primeira, luxo) e o regime de alimentação (só café da manhã ou café da manhã + jantar). De quantos modos distintos o turista poderá fazer a escolha, se os hotéis de luxo só oferecem café da manhã?

7. Pode-se ir da cidade A à cidade C pagando ou não o pedágio. Existem duas rodovias que ligam A a C diretamente, com cobrança de pedágio. Quem quer "fugir" do pedágio deve passar obrigatoriamente pela cidade B. De A a B há três ligações distintas e de B a C existem quatro ligações distintas. De quantas formas diferentes pode-se ir de A até C?

8. Em uma festa, há 32 rapazes e 40 moças; 80% das moças e $\frac{3}{8}$ dos rapazes sabem dançar. Quantos pares podem ser formados de modo que:

a) ninguém saiba dançar?

b) apenas uma pessoa do par saiba dançar?

9. Uma moeda é lançada duas vezes sucessivamente. Quantas seqüências de faces podem ser obtidas? Quais são elas?

10. Uma moeda foi lançada n vezes sucessivamente. Se o número de seqüências de resultados possíveis é 256, qual é o valor de n?

11. Um dado foi lançado n vezes sucessivamente. Sabendo-se que o número de seqüências de faces possíveis de se obter é 36^8, qual é o valor de n?

12. Para acessar os serviços de um portal de vendas pela Internet, o usuário deve cadastrar uma senha formada por quatro algarismos distintos. O sistema, entretanto, não aceita as senhas que contenham um ou mais algarismos correspondentes ao ano de nascimento do cliente. Determine o número de senhas que podem ser cadastradas por alguém que nasceu em:

a) 1966 b) 1954 c) 1999

13. Uma senha bancária é composta de duas letras distintas (considere o alfabeto com 26 letras) seguidas de quatro algarismos.

a) Quantas senhas podem ser formadas?

b) Quantas senhas contêm apenas algarismos ímpares?

c) A senhora Alzira Borges Costa, nascida em 27/06/1953, foi ao banco fazer um saque e esqueceu sua senha. Ela se lembra, no entanto, que usou, sem repetição, letras referentes às iniciais de seu nome completo e algarismos distintos referentes à data de seu nascimento. Quantas tentativas, no máximo, ela deve fazer até acertar a senha?

14. (U. F. Ouro Preto-MG) No primeiro semestre de 2003 serão oferecidas quatro turmas de Cálculo I, três turmas de Geometria Analítica, duas turmas de Fundamentos de Matemática Elementar e apenas uma turma de Introdução à Lógica Matemática. Sabendo-se que um calouro aprovado para o curso de Matemática deverá cursar todas as disciplinas acima mencionadas, de quantas maneiras distintas ele poderá se matricular nas mesmas, levando-se em consideração que as turmas de uma mesma disciplina são oferecidas num mesmo horário e não existe coincidência de horários entre as disciplinas?

15. Para os hóspedes que desejam tomar café da manhã no quarto, um hotel oferece as seguintes opções:

- bebidas quentes: chocolate, café puro, chá e café com leite.
- sucos: laranja e abacaxi.
- pães: *croissant*, pão francês, pão de fôrma e pão integral.
- queijo: branco, mussarela e queijo prato.

O hóspede X fez a seguinte solicitação: um suco, um pão e um tipo de queijo. O hóspede Y pediu: uma bebida quente ou um suco, um pão e um tipo de queijo.
De quantas formas distintas cada hóspede poderá ser servido?

16. (UF-PE) De quantas maneiras podemos classificar os quatro empregados de uma microempresa nas categorias A ou B, se um mesmo empregado pode pertencer às duas categorias?

17. Dispondo dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, determine:

a) a quantidade de números pares de três algarismos que podemos formar;

b) a quantidade de números divisíveis por 5, compostos por três algarismos distintos que podemos formar;

c) a quantidade de números de três algarismos distintos maiores que 321 que podemos formar.

18. Um estudante escolheu as vogais *A*, *I* e as consoantes *B*, *C*, *F*, *G* para formar uma seqüência ordenada de três letras.

a) Quantas seqüências podem ser formadas?
b) Quantas seqüências são formadas por letras distintas?
c) Quantas seqüências de letras diferentes são formadas apenas por consoantes?
d) Quantas seqüências de letras distintas apresentam as vogais intercaladas com as consoantes?

19. Um encontro anual de pecuaristas será realizado durante cinco anos consecutivos. A sede do encontro, em cada ano, deverá ser escolhida entre sete cidades candidatas.

a) De quantas formas distintas podem ser escolhidas as sedes do encontro, se a organização do evento não pretende realizar o encontro em uma mesma cidade mais de uma vez?
b) De quantas formas distintas pode ser feita a escolha das cidades, se a sede do encontro, em um determinado ano, *não* pode ser a mesma que a do encontro do ano anterior?

20. (UF-SC) Um grupo formado por 4 rapazes e uma senhorita vai visitar uma exposição de arte. Um dos rapazes é um perfeito cavalheiro e, portanto, não passa pela porta da sala de exposições sem que a senhorita já o tenha feito.
Considerando que a entrada é de uma pessoa por vez, então haverá 72 diferentes possibilidades para a ordem de entrada do grupo.
Julgue como verdadeira (*V*) ou falsa (*F*) essa conclusão e justifique sua resposta.

21. Um programador de computadores criou um código especial que utiliza apenas três símbolos: "$\cdot$", "–", "×". Os diferentes códigos são seqüências formadas por esses símbolos. Quantos códigos:

a) de cinco símbolos começam por "$\cdot$"?
b) contêm de dois a quatro símbolos?
c) são formados por três símbolos, sendo um de cada tipo?
d) com quatro símbolos apresentam, pelo menos, três "$\cdot$"?

22. Quantos divisores positivos tem o número:

a) 120 b) 3 780

(Sugestão: Faça a decomposição em fatores primos.)

23. (UF-PE) O número $N = 6^3 \cdot 10^4 \cdot 15^x$, sendo x um inteiro positivo, admite 240 divisores inteiros e positivos. Indique x.

24. (UF-PR, adaptado) O mapa abaixo representa as regiões em que está dividido o Brasil.

Cada região do mapa deve ser colorida de modo que regiões com uma fronteira comum tenham cores distintas (por exemplo, as regiões Sul e Sudeste devem ter cores diferentes, enquanto as regiões Sul e Nordeste podem ter a mesma cor). Tendo como base essa condição, assinale *V* para a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) e *F* para a(s) falsa(s), fazendo a devida correção:

a) Três cores diferentes são suficientes para colorir o mapa.
b) Estando disponíveis cinco cores, existem $5 \times 4 \times 3 \times 2$ modos diferentes de colorir o mapa se, em cada um desses modos, forem aplicadas as cinco cores.
c) Estando disponíveis cinco cores, e colorindo-se as regiões Nordeste e Sul com a mesma cor, existem somente $4 \times 3 \times 3$ modos diferentes de colorir o mapa.
d) Estando disponíveis cinco cores, e colorindo-se as regiões Nordeste e Sul com a mesma cor, assim como as regiões Norte e Sudeste, existem $5 \times 4 \times 3$ modos diferentes de colorir o mapa.

25. Sejam *A* e *B* dois conjuntos, com 6 e 8 elementos, respectivamente. Quantas funções $f : A \rightarrow B$ podem ser definidas?

Fatorial de um número natural

Definição

Dado um número natural *n*, definimos o fatorial de *n* (indicado por $n!$) através das relações:

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ para $n \geqslant 2$ ①
Se $n = 1$, $1! = 1$ ②
Se $n = 0$, $0! = 1$ ③

Notemos que, em ①, o fatorial de *n* representa o produto dos *n* primeiros naturais positivos, escritos desde *n* até 1.

Assim, temos, por exemplo:

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \qquad 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

À medida que *n* aumenta, o cálculo de *n*! torna-se mais trabalhoso. Notemos, então, as seguintes simplificações:

- $6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!} = 6 \cdot 5!$
- $9! = 9 \cdot \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{8!} = 9 \cdot 8!$ ou ainda

$9 \cdot 8 \cdot \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{7!} = 9 \cdot 8 \cdot 7!$

Esses exemplos sugerem a seguinte relação de recorrência:

$\boxed{n! = n \cdot (n-1)!}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geqslant 2$

observação

O fatorial de um número natural é uma ferramenta de cálculo importante em Análise Combinatória. Conforme vimos nos exercícios anteriores, cálculos envolvendo produto de números naturais consecutivos são comuns em problemas de contagem.

exemplo 6

Para calcularmos o valor de $\frac{10!}{7!}$, podemos desenvolver o fatorial do número maior (10) até chegarmos ao fatorial do menor (7).

Temos:

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

exemplo 7

Qual é o valor de $\frac{4! + 5!}{6!}$?

Temos:

$$\frac{4! + 5!}{6!} = \frac{4! + 5 \cdot 4!}{6 \cdot 5 \cdot 4!} = \frac{\cancel{4!}(1+5)}{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}} = \frac{6}{6 \cdot 5} = \frac{1}{5}$$

exemplo 8

Vamos resolver a equação $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 6$.

Notando que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n + 1 > n - 1$, desenvolvemos $(n+1)!$ da seguinte forma:

$$\frac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 6$$

$$n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow n = 2 \text{ ou } n = -3$$

$n = -3$ não convém, pois só existe fatorial de número natural. Portanto, $S = \{2\}$.

exercícios

26. Calcule:

a) $6!$
b) $4!$
c) $0! + 1!$
d) $3! - 2!$
e) $7! - 5!$

27. Calcule o valor de:

a) $\frac{8!}{6!}$
b) $\frac{15!}{12!}$
c) $\frac{9!}{10!}$
d) $\frac{3!}{4!} + \frac{4!}{5!}$
e) $\frac{2\,008!}{2\,007!}$

28. Calcule o valor de:

a) $\dfrac{7!}{5! \cdot 2!}$

b) $\dfrac{8! \cdot 6!}{7! \cdot 7!}$

c) $\dfrac{20!}{18! \cdot 2!}$

d) $\dfrac{15! \cdot 4!}{13! \cdot 3!}$

e) $\dfrac{2! \cdot 3!}{4!}$

29. Efetue:

a) $\dfrac{11! + 9!}{10!}$

b) $\dfrac{40! - 39!}{41!}$

c) $\dfrac{2 \cdot 7! + 6!}{5!}$

d) $\dfrac{21! - 3 \cdot 20!}{19!}$

e) $17! - 17 \cdot 16!$

30. Simplifique as expressões seguintes, admitindo que todos os fatoriais estejam definidos:

a) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}$

b) $\dfrac{(n-1)!}{n!}$

c) $\dfrac{(n+1)! + n!}{n!}$

d) $\dfrac{n! - (n+1)!}{n!}$

e) $\dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{n-1}{n!}$

f) $\dfrac{n! - (n-1)!}{(n-1)! + (n-2)!}$

31. Resolva as seguintes equações:

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!} = 4$

b) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 42$

c) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 90$

d) $n! = 24$

e) $(n-5)! = 1$

f) $\dfrac{(n-1)!\,(n+1)!}{(n!)^2} = \dfrac{5}{4}$

32. Resolva a equação:

$(n!)^2 - 100n! = 2\,400$

Agrupamentos

O princípio fundamental da contagem (PFC) é a principal técnica para a resolução de problemas de contagem. Muitas vezes, porém, se só utilizarmos o PFC, a resolução desses problemas pode se tornar trabalhosa.

Vamos, então, desenvolver métodos de contagem de determinados agrupamentos, baseados no PFC, os quais simplificarão a resolução de muitos problemas.

Inicialmente faremos o estudo dos agrupamentos simples — grupos de *k* elementos distintos, escolhidos entre *n* disponíveis ($k \leq n$). São eles: arranjos, permutações e combinações.

Arranjos

Vamos formalizar os conceitos relativos a um tipo de agrupamento já bastante caracterizado no princípio fundamental da contagem.

> **Dado um conjunto com *n* elementos distintos, chama-se arranjo dos *n* elementos, tomados *k* a *k*, a qualquer seqüência ordenada de *k* elementos distintos escolhidos entre os *n* existentes.**

Como podemos encontrar a quantidade de arranjos formados por *k* elementos, escolhidos entre *n* disponíveis?

Vamos usar o PFC:

- O primeiro elemento da seqüência pode ser escolhido de *n* formas possíveis.
- O segundo elemento da seqüência pode ser escolhido de $n - 1$ maneiras distintas, pois já fizemos a escolha anterior e não há repetição de elementos.
- Feitas as duas primeiras escolhas, há $n - 2$ maneiras diferentes de escolher o terceiro elemento da seqüência, pois não pode haver repetição.

⋮ ⋮ ⋮

- Para escolher o k-ésimo elemento, a partir das $k - 1$ escolhas anteriores, sobram $n - (k - 1) = n - k + 1$ opções.

Assim, pelo PFC, a quantidade de arranjos possíveis (indicada por $A_{n,k}$) é:

$$\boxed{A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)} \quad ①$$

Podemos obter uma expressão equivalente a ① se multiplicarmos e dividirmos tal expressão por $(n-k)! = (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Temos:

$$\overbrace{A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}^{n!}$$

Notando que o numerador da expressão acima é $n!$, obtemos uma expressão para $A_{n,k}$: $(n \geqslant k)$.

Portanto:

$$\boxed{A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

exemplo 9

Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, vamos escrever todos os arranjos desses quatro elementos tomados dois a dois.

Devemos escrever todas as seqüências ordenadas de dois elementos distintos escolhidos entre os elementos de A. Assim, temos:

(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 3); (2, 4);
(3, 1); (3, 2); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3)

Observe que cada arranjo difere dos demais:

- pela natureza dos elementos escolhidos:

$$(1, 2) \neq (3, 4)$$

ou

- pela ordem dos elementos escolhidos:

$$(1, 2) \neq (2, 1)$$

A quantidade de arranjos pode ser feita de duas maneiras:

- Usando o PFC:

$$4 \cdot 3 = 12$$

nº de opções para a escolha do 1º elemento do par — nº de opções para a escolha do 2º elemento do par

- Usando a fórmula:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

exemplo 10

No Campeonato Mundial de basquete feminino de 2006, disputado no Ibirapuera, em São Paulo, as quatro seleções semifinalistas foram: Brasil, Austrália, Rússia e EUA. De quantas maneiras distintas poderia ter sido definido o pódio (ouro, prata e bronze)?

Cada maneira possível de se formar um pódio é uma seqüência ordenada de três seleções escolhidas entre as quatro semifinalistas.

Observe:

$$(\underset{1º}{\text{Austrália}}, \underset{2º}{\text{Rússia}}, \underset{3º}{\text{Brasil}})$$
$$\neq$$
$$(\underset{1º}{\text{Brasil}}, \underset{2º}{\text{Austrália}}, \underset{3º}{\text{Rússia}})$$

A quantidade de arranjos possíveis é:

$$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

Usando o PFC, chegamos ao mesmo resultado:

$$\underset{\text{ouro}}{4} \cdot \underset{\text{prata}}{3} \cdot \underset{\text{bronze}}{2} = 24$$

exercícios

33. Para ocupar os cargos de presidente e vice-presidente do grêmio de um colégio, candidataram-se dez alunos. De quantos modos distintos pode ser feita essa escolha?

34. No campeonato brasileiro de futebol de 2006 participaram 20 equipes. Cada time jogou com todos os outros duas vezes: uma no seu campo e a outra no campo do time adversário. De acordo com as regras, quem somasse mais pontos seria o campeão. Quantas partidas foram disputadas naquele campeonato?

35. A senha de acesso a uma rede de computadores é formada por uma seqüência de quatro letras distintas seguida por dois algarismos distintos.

a) Quantas são as possíveis senhas de acesso?

b) Quantas senhas apresentam simultaneamente apenas consoantes e algarismos maiores que 5?

(Considere as 26 letras do alfabeto.)

36. Calcule:

a) $A_{7,3}$

b) $A_{11,2}$

c) $A_{5,1}$

d) $A_{5,5}$

e) $\dfrac{A_{6,3}}{A_{8,6}}$

37. Sabe-se que as cinco pessoas de uma família (pai, mãe e três filhos) nasceram em meses diferentes do ano. Quantas são as seqüências que representam os possíveis meses de nascimento dos membros dessa família?

38. (U. F. Ouro Preto-MG) No meio da "invasão tecnológica" que toma conta de nossas vidas, dona Antônia esqueceu sua senha bancária justamente na hora de efetuar um saque. Ela lembra que essa senha é formada por quatro algarismos distintos, sendo o primeiro 5 e o algarismo 6 aparece em alguma outra posição.
Qual é o número máximo de tentativas que o banco deveria permitir para que dona Antônia consiga realizar o saque?

39. Em uma pesquisa encomendada por uma operadora turística com o objetivo de descobrir os destinos nacionais mais cobiçados pelos brasileiros, o entrevistado deve escolher, em ordem de preferência, três destinos entre os dez apresentados pelo entrevistador.

a) Quantas respostas diferentes podem ser obtidas?

b) Quantas respostas possíveis apresentam a cidade de Natal como a mais votada?

c) Quantas respostas possíveis *não* contêm Natal entre os destinos mencionados?

40. Em relação ao exercício anterior, determine o número de respostas diferentes que podem ser obtidas se o entrevistado puder escolher, em ordem de preferência, de um a quatro destinos turísticos, entre os dez apresentados.

41. Durante um ano, os estagiários da empresa X passam pelos setores financeiro, comercial, de recursos humanos e *marketing* da empresa, não necessariamente nessa ordem. De quantas formas distintas pode ser determinada a ordem desses setores?

42. Resolva as equações seguintes:

a) $A_{n,2} = 110$

b) $A_{n+1,1} = 8$

c) $A_{n+2,n+1} = 120$

43. Em um torneio internacional de natação participam cinco atletas europeus, dois americanos e um brasileiro.

a) De quantos modos distintos poderão ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?

b) Em quantos resultados só aparecem atletas europeus nas três primeiras posições?

c) Em quantos resultados o atleta brasileiro recebe medalha?

d) Supondo que o atleta brasileiro não recebeu medalha, determine o número de resultados em que há mais atletas europeus do que americanos no pódio.

44. Seis amigos participam de uma brincadeira de futebol, que consiste em cobrança de pênaltis. Cada um escolhe, de todas as formas possíveis, um colega para bater o pênalti e um outro para tentar defendê-lo.

a) Quantas cobranças de pênalti são feitas nessa brincadeira?

b) Quantas cobranças haveria se o grupo resolvesse convidar um sétimo amigo para que ele escolhesse, de todas as formas possíveis, o cobrador e o defensor do pênalti?

Permutações

Vamos imaginar uma situação particular em que devemos escolher n elementos distintos, entre os n disponíveis, para formar uma seqüência ordenada.

O número de seqüências que podem ser assim formadas é:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

nº de opções para a escolha do 1º elemento; nº de opções para a escolha do 2º elemento; nº de opções para a escolha do penúltimo elemento; nº de opções para a escolha do último elemento

O produto acima corresponde exatamente ao fatorial de *n*.

Quando a seqüência ordenada (arranjo) é formada por todos os elementos disponíveis, dizemos que se trata de uma permutação.

Assim, o número de permutações de *n* elementos distintos (indica-se P_n) é dado por:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Observe que a permutação é um caso particular do arranjo estudado no item "Agrupamentos". De fato:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

exemplo 11

Vamos formar os anagramas obtidos a partir de *P, A, T, O*.

Um anagrama formado com *P, A, T, O* corresponde a qualquer permutação dessas letras, de modo a formar ou não uma palavra.

Assim:

PATO	PAOT	POTA	POAT	PTOA	PTAO
APTO	APOT	ATPO	ATOP	AOTP	AOPT
TAPO	TAOP	TOPA	TOAP	TPAO	TPOA
OAPT	OATP	OPTA	OPAT	OTPA	OTAP

A quantidade de formações ou seqüências possíveis é $P_4 = 4! = 24$.

exemplo 12

Giba e Gina têm três filhos: Carla, Luís e Daniel. A família quer tirar uma foto de recordação de uma viagem na qual todos apareçam lado a lado.

a) De quantas formas distintas os membros da família podem se distribuir?

Cada forma de dispor as cinco pessoas lado a lado corresponde a uma permutação entre elas, uma vez que a seqüência ordenada é formada por todos os membros da família.
O número de posições possíveis é, portanto, $P_5 = 5! = 120$.

b) Em quantas possibilidades o casal aparece junto?

Para que Giba e Gina apareçam juntos (lado a lado), devemos considerá-los como uma "única pessoa" que irá permutar com as outras três, num total de $P_4 = 4! = 24$ possibilidades.

Giba e Gina

Carla

Daniel

Luís

Porém, para cada uma dessas 24 possibilidades, Giba e Gina podem trocar de lugar entre si, de $P_2 = 2! = 2$ maneiras distintas.
Assim, o resultado procurado é:

$$\underbrace{P_4}_{\text{entre os blocos}} \cdot \underbrace{P_2}_{\text{dentro do bloco}} = 24 \cdot 2 = 48.$$

exercícios

45. Determine o número de anagramas formados a partir de:

a) LUA
b) GATO
c) ESCOLA
d) REPÚBLICA

46. Um dado foi lançado quatro vezes sucessivamente e as faces obtidas foram 2, 3, 5 e 6, não necessariamente nessa ordem. De quantas formas distintas pode ter ocorrido a seqüência de resultados?

47. Considere os anagramas formados a partir de CONQUISTA.

a) Quantos são?
b) Quantos começam por vogal?
c) Quantos começam e terminam por consoante?
d) Quantos têm as letras CON juntas e nessa ordem?
e) Quantos apresentam a letra *C* antes da letra *A*?

48. Uma vez por ano, dona Fátima, que mora no Recife, visita parentes em Caruaru, João Pessoa, Petrolina, Maceió e Garanhuns.

a) De quantas formas distintas ela pode escolher a seqüência de cidades para visitar?
b) De quantos modos diferentes a ordem das cidades pode ser definida se dona Fátima pretende encerrar as visitas em Petrolina?

49. (U. F. Pelotas-RS) Tomando como base a palavra UFPEL, resolva as questões a seguir.

a) Quantos anagramas podem ser formados de modo que as vogais estejam sempre juntas?
b) Quantos anagramas podem ser formados com as letras UF juntas?
c) Quantos anagramas podem ser formados com as letras PEL juntas e nessa ordem?

50. Calcule:

a) P_5
b) P_7
c) $P_3 + P_2$
d) $\dfrac{P_8}{P_{10}}$

51. De quantos modos distintos seis homens e seis mulheres podem ser colocados em fila indiana:

a) em qualquer ordem?
b) iniciando com homem e terminando com mulher?
c) se os homens devem aparecer juntos, o mesmo ocorrendo com as mulheres?
d) de modo que apareçam, do início para o final da fila, 2 homens, 2 mulheres, 3 homens, 3 mulheres, 1 homem e 1 mulher?

52. Dona Lola tem três filhos: Pedro, Paulo e Pérsio. Os três casaram-se e têm, respectivamente, 1, 3 e 2 filhos. Em um domingo, dona Lola recebeu, para o almoço, seus três filhos, acompanhados das respectivas esposas, além de todos os netos. Como recordação, ela fotografou todos os familiares, lado a lado, mas pediu que cada filho aparecesse junto de sua família. De quantas formas distintas a foto poderia ter sido feita?

53. Resolva as equações seguintes:

a) $P_n = 24$
b) $\dfrac{P_n}{P_{(n-2)}} = 506$

54. Em quantos anagramas da palavra QUEIJO as vogais *não* aparecem juntas?

55. Permutando-se as letras T, R, A, P, O, S, são formados 720 anagramas. Esses anagramas são colocados em ordem alfabética. Qual é a posição correspondente a PRATOS?

56. (Vunesp-SP) Considere todos os números formados por seis algarismos distintos obtidos permutando-se, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

a) Determine quantos números é possível formar (no total) e quantos números se iniciam com o algarismo 1.
b) Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512 346 e que número ocupa a 242ª posição.

Combinações

Uma montadora de veículos planeja iniciar suas operações no Brasil. De início, pretende construir em território nacional duas fábricas com o mesmo padrão em cidades localizadas em diferentes regiões do país. De quantos modos distintos poderão ser escolhidas as duas regiões?

Observe que escolher, por exemplo, as regiões Sul e Centro-Oeste é o mesmo que escolher Centro-Oeste e Sul, pois independentemente da ordem em que as regiões são escolhidas, as duas fábricas serão construídas em cidades dessas regiões.

Assim, basta construir todos os subconjuntos ou agrupamentos não ordenados de dois elementos do conjunto {Sul, Sudeste, Centro-Oeste, Nordeste e Norte}. Portanto, temos:

{Sul, Sudeste}
{Sul, Centro-Oeste}
{Sul, Nordeste}
{Sul, Norte}
{Sudeste, Centro-Oeste}
{Sudeste, Nordeste}
{Sudeste, Norte}
{Centro-Oeste, Norte}
{Centro-Oeste, Nordeste}
{Norte, Nordeste}

Observe que cada escolha difere das demais somente pela natureza dos elementos (regiões) escolhidos.

Cada possibilidade anterior corresponde a uma combinação das cinco regiões tomadas duas a duas (escolhemos duas entre cinco).

Dado um conjunto A com n elementos distintos, chama-se combinação dos n elementos de A, tomados k a k, qualquer subconjunto de A formado por k elementos.

exemplo 13

Maria quer escolher dois sabores de torta doce para servir em sua festa de aniversário. A doceira oferece os seguintes sabores: limão (L), chocolate (C), morango (M), abacaxi (A), floresta-negra (F) e quindim (Q). De quantas formas distintas Maria poderá fazer essa escolha?

Inicialmente, notamos que não importa a ordem em que os sabores são escolhidos. Escolher, por exemplo, torta de chocolate e limão {C, L} é o mesmo que escolher torta de limão e chocolate {L, C}. Cada possível escolha de Maria representa, portanto, uma combinação dos seis sabores tomados dois a dois.

Para contar o número de combinações, podemos proceder da seguinte maneira:

- Usamos o PFC para definir as seqüências ordenadas de dois sabores.

$$\underset{1^{\circ}\text{ sabor}}{6} \cdot \underset{2^{\circ}\text{ sabor}}{5} = 30$$

- Esse cálculo, como vimos, inclui escolhas repetidas.
  {C, L} = {L, C}, {L, M} = {M, L}, {A, F} = {F, A}, e assim por diante.

  Usamos, então, o PFC para saber o número de ordens possíveis em que dois sabores podem ser escolhidos.

$$2 \cdot 1 = 2 \text{ ordens}$$

Como cada escolha foi contada duas vezes, o número de combinações possíveis é $\frac{30}{2} = 15$.

exemplo 14

Quantas seriam as possibilidades de escolha das tortas, se Maria decidisse comprar três sabores diferentes?

É fácil perceber novamente que escolher {C, L, F} é o mesmo que escolher {F, C, L}, por exemplo. Cada escolha é, portanto, uma combinação de seis sabores tomados três a três.

Vamos determinar a quantidade de combinações:

- Usamos o PFC para obter o número de seqüências ordenadas de três sabores.

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

- Imaginemos uma possível escolha: chocolate, limão e floresta-negra. Pelo PFC, o número de seqüências ordenadas formadas por esses sabores é:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = \underset{\text{permutações dos três sabores}}{6}$$

permutações dos três sabores:
(C, L, F) = (C, F, L) = (F, C, L) = (F, L, C) = (L, C, F) = (L, F, C)

Como as seis permutações definem a mesma escolha, o número de combinações é $\frac{120}{6} = 20$.

Em geral, como podemos obter o número de combinações de n elementos tomados k a k? Indicaremos por $C_{n,k}$.

- Usamos o PFC para contar o número de seqüências ordenadas (arranjos) formadas por k elementos distintos:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)] = A_{n,k}$$

- Usamos o PFC para contar o número de seqüências ordenadas que podem ser formadas com k elementos escolhidos. A quantidade de permutações possíveis para k elementos distintos é:

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = k!$$

- Como qualquer permutação de uma determinada seqüência ordenada dá origem a uma única combinação, o número de combinações de n elementos tomados k a k é:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

exemplo 15

Em um curso de espanhol estudam vinte alunos, sendo doze rapazes e oito moças. O professor quer formar uma equipe de quatro alunos para intercâmbio em outro país. Quantas equipes de dois rapazes e duas moças podem ser formadas?

O número de maneiras de escolher os rapazes é $C_{12,2} = \frac{12!}{2!\,10!} = 66$.

Para cada uma dessas 66 maneiras, o número de opções existentes para a escolha das moças é $C_{8,2} = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$.

Assim, pelo PFC, o resultado procurado é $66 \cdot 28 = 1\,848$.

exercícios

57. De quantos modos distintos Lucas pode escolher quatro entre as nove camisetas regata que possui para levar em uma viagem?

58. Um curso de idiomas oferece turmas para iniciantes em inglês, espanhol, alemão, italiano e japonês.
    a) De quantas formas distintas um estudante pode matricular-se em três desses cursos?
    b) De quantas formas distintas ele poderá matricular-se em três desses cursos, incluindo obrigatoriamente o de inglês?

59. Para montar uma cesta de café-da-manhã estão disponíveis os seguintes itens: quatro tipos de pães, três tipos de queijo, três tipos de frutas, cinco sabores de geléia e quatro sabores de tortas doces. De quantos modos distintos a cesta poderá ser montada se um cliente pedir dois tipos de pães, um tipo de queijo, duas frutas, dois sabores de geléia e uma torta doce?

Considere as informações a seguir para resolver as questões 60 e 61.

Um baralho comum possui 52 cartas, 13 de cada naipe — ouro, paus, espadas e copas —, e cada naipe contém 13 cartas — ás (A), 2, ..., 10, valete (J), dama (Q) e rei (K).

60. Sorteadas simultaneamente quatro cartas, determine:
    a) o número de maneiras distintas de ocorrer o resultado do sorteio;
    b) o número de maneiras distintas de o resultado do sorteio conter uma carta de cada naipe;
    c) de quantas formas distintas é possível escolher as quatro cartas de copas.

61. Escolhem-se três cartas, sucessivamente, e sem reposição. Sem levar em conta a ordem em que elas são extraídas, determine de quantas formas distintas é possível obter:
    a) dois setes e um ás;
    b) pelo menos um sete;
    c) o sete de espadas;
    d) todas as cartas diferentes de sete.

62. Calcule:

a) $C_{11,3}$
b) $C_{9,6}$
c) $C_{6,3}$
d) $C_{17,7} - C_{17,10}$
e) $C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5}$

63. (UE-RJ) Para montar um sanduíche, os clientes de uma lanchonete podem escolher:

- um entre os tipos de pão: calabresa, orégano e queijo;
- um entre os tamanhos: pequeno e grande;
- de um até cinco entre os tipos de recheio: sardinha, atum, queijo, presunto e salame, sem possibilidade de repetição de recheio num mesmo sanduíche.

Calcule:

a) quantos sanduíches distintos podem ser montados;
b) o número de sanduíches distintos que um cliente pode montar, se ele não gosta de orégano, só come sanduíches pequenos e deseja dois recheios em cada sanduíche.

64. O vencedor de um concurso de redação de um colégio poderá, como prêmio, escolher cinco livros entre dez de Machado de Assis, sete de Érico Veríssimo e cinco de Clarice Lispector. De quantos modos distintos o vencedor poderá fazer a escolha de modo que:

a) sejam selecionados dois de Machado de Assis, dois de Érico Veríssimo e um de Clarice Lispector?
b) nenhum livro escolhido seja de Machado de Assis?
c) pelo menos quatro livros de Clarice Lispector sejam escolhidos?

65. Um casal curitibano decidiu que a viagem de lua-de-mel seria feita pelo Nordeste, visitando exatamente três das nove capitais.

a) De quantos modos distintos poderão ser escolhidas as três capitais?
b) Se o casal pretendesse conhecer obrigatoriamente Salvador, de quantos modos poderia ser feita a escolha?
c) Se, por motivos logísticos, Fortaleza só pudesse ser visitada se São Luís também o fosse e vice-versa, determine de quantas maneiras a escolha poderia ser feita.

66. Resolva as seguintes equações:

a) $C_{n,2} = 136$
b) $C_{n,2} + C_{n+1,n-1} = 25$
c) $\dfrac{A_{n,3}}{C_{n,2}} = 16$

67. Uma equipe de dez pesquisadores é formada por sete brasileiros e três estrangeiros. Para apresentar um projeto a uma empresa, será necessário escolher cinco pesquisadores, dos quais no mínimo um deve ser estrangeiro. De quantas formas distintas poderá ser feita essa escolha?

68. Sobre uma circunferência marcam-se dez pontos.

a) Qual é o número de segmentos de reta que podemos traçar com extremidades em dois desses pontos?
b) Quantos triângulos podemos construir com vértices em três desses pontos?
c) Quantos polígonos com 4, 5, 6 ou 7 lados podem ser traçados com vértices nesses pontos?

69. Marcam-se cinco pontos sobre uma reta *r*. Sobre outra reta *s*, paralela a *r*, marcam-se mais quatro pontos. Quantos triângulos podem ser formados com vértices em três quaisquer desses pontos?

70. (U. F. Juiz de Fora-MG) Um jornalista foi designado para cobrir uma reunião de ministros de Estado. Ao chegar ao local da reunião, descobriu que esta havia terminado. Perguntou ao porteiro o número de ministros presentes e ele disse: "Ao saírem, todos os ministros se cumprimentaram mutuamente, num total de 15 apertos de mão".
Com base nessa informação, qual foi o número de ministros que estiveram presentes na reunião?

71. Em um almoço estavam reunidos 45 executivos, dos quais 15 eram da empresa *X*, 18 da empresa *Y* e 12 da empresa *Z*. Sabendo que cada executivo de uma empresa saudou com um aperto de mão todos os executivos das outras duas empresas, determine o número total de apertos de mão dados nesse almoço.

72. No *site* de uma agência de turismo, o internauta que pretende viajar pela Europa deve selecionar quatro cidades entre Paris, Londres, Madri, Roma, Praga, Berlim, Veneza, Atenas e Lisboa. Em seguida, deve escolher, em ordem de preferência, dois meios de transporte a partir das opções: carro, avião, ônibus e trem.

a) De quantos modos distintos podem ser preenchidos esses campos?

b) Se um turista pretende conhecer Praga obrigatoriamente e não quer andar de trem, de quantos modos ele poderá fazer a escolha?

73. (UF-MG) Um baralho é composto por 52 cartas divididas em quatro naipes distintos. Cada naipe é constituído por 13 cartas — 9 cartas numeradas de 2 a 10, mais valete, dama, rei e ás, representadas, respectivamente, pelas letras *J*, *Q*, *K* e *A*. Um par e uma trinca consistem, respectivamente, de duas e de três cartas de mesmo número ou letra. Um *full hand* é uma combinação de cinco cartas, formada por um par e uma trinca. Considerando essas informações, calcule:

a) de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de reis e uma trinca de 2.

b) de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de reis.

c) de quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand*.

74. Para montar o seu enxoval, Priscila foi a uma loja onde a vendedora lhe mostrou sete jogos de cama, oito jogos de banho e n jogos de mesa. Priscila achou que seria suficiente comprar dois jogos de cama, dois de mesa e quatro de banho. Sabendo que para fazer uma escolha com esse número de jogos havia 66 150 possibilidades distintas, determine o valor de n.

75. (UF-RJ) Em todos os 53 finais de semana de um certo ano, Júlia irá convidar duas de suas amigas para sua casa em Teresópolis, sem repetir o mesmo par de amigas durante o ano. Determine:

a) o maior número possível de amigas que Júlia poderá convidar;

b) o menor número possível de amigas que ela poderá convidar.

Permutações com elementos repetidos

Considere os seguintes problemas:

- Quantos são os anagramas formados a partir de FELICIDADE?
- Um dado foi lançado seis vezes sucessivamente, e foram obtidas três vezes a face 2, duas vezes a face 5 e uma vez a face 6. De quantos modos distintos pode ter ocorrido a seqüência de resultados?

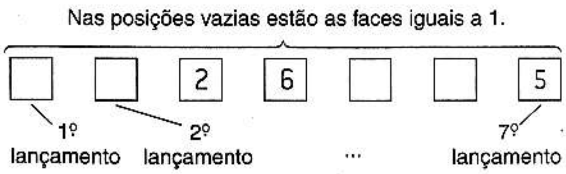
Nesses casos, cada resultado possível é uma seqüência ordenada, nas quais ocorre repetição de elementos. Por exemplo, duas possíveis seqüências de resultados no lançamento do dado são (2, 2, 5, 5, 2, 6) e (6, 2, 5, 2, 2, 5).

Dizemos que se trata de permutação com elementos repetidos.

1º caso: Apenas um elemento se repete

Um dado é lançado sete vezes sucessivamente. De quantas formas distintas pode ser obtida uma seqüência com quatro faces iguais a 1 e as demais faces iguais a 2, 5 e 6?

- Vamos escolher, de início, as posições (ordem dos resultados) que as faces 2, 5 e 6 podem ocupar. Para fixar idéias, veja o esquema seguinte, em que está representada uma possível escolha de posições:



Observe que, fixadas as posições das faces 2, 6 e 5, as posições das faces iguais a 1 ficam determinadas de maneira única, uma vez que qualquer permutação de faces 1 gera a mesma seqüência. Trata-se, então, de escolher três entre sete posições. Isso pode ser feito de $C_{7,3} = 35$ maneiras distintas.

- Para a escolha anterior (3º, 4º e 7º lançamentos), as faces 2, 5 e 6 podem ser permutadas entre si, num total de $P_3 = 3! = 6$ maneiras distintas.

Os passos anteriores sugerem que o número de seqüências possíveis é:

$$C_{7,3} \cdot P_3 = \frac{7!}{\cancel{3!}4!} \cdot \cancel{3!} = \frac{7!}{4!}$$

7 é o número total de faces
4 é o número de vezes que a face 1 ocorre

Indicaremos esse número por $\overset{(3)}{P_7}$.

exemplo 16

Qual é o número de anagramas formados a partir de VENEZUELA?

Cada anagrama formado é uma seqüência de nove letras, das quais três são iguais a *E*.

Temos, então, $\overset{(3)}{P_9} = \frac{9!}{3!} = \frac{362\,880}{6} = 60\,480$.

2º caso: Dois elementos diferentes se repetem

Suponha, agora, que um dado seja lançado nove vezes sucessivamente. De quantas formas distintas pode ser obtida uma seqüência com quatro faces iguais a 1, duas faces iguais a 3 e as demais faces iguais a 2, 5 e 6?

- Inicialmente, vamos determinar as possíveis posições em que as faces distintas de 1 podem ocorrer. Há $C_{9,5} = 126$ possibilidades, pois devem ser escolhidas cinco entre nove posições. Acompanhe uma possível escolha:

1º lançamento	2º lançamento							9º lançamento
	3		2	3		5		6

As quatro faces 1 entram nas posições vazias.

- Para tal escolha de lugares (2º, 4º, 5º, 7º e 9º lançamentos), as faces 2 (uma vez), 3 (duas vezes), 5 (uma vez) e 6 (uma vez) podem trocar de lugar entre si. Usando o resultado obtido no 1º caso, sabemos que o número de possibilidades é $\overset{(2)}{P_5} = \frac{5!}{2!}$.

Assim, reunindo os dois passos anteriores, podemos concluir que o número de permutações possíveis é dado por:

$$C_{9,5} \cdot \overset{(2)}{P_5} = \frac{9!}{\cancel{5!}4!} \cdot \frac{\cancel{5!}}{2!} = \frac{9!}{4!\,2!}$$

9 é o número total de faces
2 é o número de faces iguais a 3
4 é o número de faces iguais a 1

Indicaremos esse número por $\overset{(4,2)}{P_9}$.

Caso geral

De modo geral, se temos n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1 (a_1 representa, por exemplo, uma letra), n_2 são iguais a a_2 (a_2 representa outra letra), n_3 são iguais a a_3, ..., n_r são iguais a a_r, o número de permutações possíveis é dado por:

$$\boxed{\overset{(n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_r)}{P_n} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}}$$

exemplo 17

Determinemos o número de anagramas formados a partir de:

a) CACHORRO
Há oito letras, das quais duas são iguais a *C*, duas são iguais a *O* e duas são iguais a *R*.
Temos, então:

$$\overset{(2,2,2)}{P_8} = \frac{8!}{2!\,2!\,2!} = 5\,040 \text{ anagramas}$$

b) BANANA
São seis letras, das quais três são iguais a *A* e duas são iguais a *N*.
Temos, portanto:

$$\overset{(3,2)}{P_6} = \frac{6!}{3!\,2!} = 60 \text{ anagramas}$$

exercícios

76. Determine o número de anagramas formados a partir de:

a) MORANGO
b) FALTA
c) AROMA
d) OURO
e) CASCAVEL
f) MATEMÁTICA
g) MARROCOS
h) COPACABANA

(Desconsidere o acento gráfico.)

77. Uma prova é constituída de dez testes do tipo *V* ou *F*.

a) Quantas seqüências de respostas são possíveis?

b) Quantas seqüências apresentam três respostas *V* e sete respostas *F*?

78. Um dado é lançado quatro vezes sucessivamente. Determine o número de seqüências de resultados em que:

a) as quatro faces são iguais a 5.

b) três faces são iguais a 2 e uma face é igual a 4.

c) duas faces são iguais a 3, uma face é igual a 4 e a outra é igual a 5.

79. Permutando os algarismos 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3 e 4, quantos números de 10 algarismos podemos formar?

80. Uma equipe de futebol disputou oito jogos em um torneio: venceu quatro, perdeu dois e empatou dois.

a) De quantos modos distintos pode ter ocorrido a seqüência de resultados?

b) Supondo que a equipe estreou no torneio com vitória e o encerrou também com vitória, de quantos modos distintos pode ter ocorrido a seqüência dos outros resultados?

81. Considere os anagramas formados a partir de PIRATARIA.

a) Quantos começam por *A*?

b) Quantos começam por vogal?

c) Quantos apresentam as letras RAT juntas?

d) Quantos apresentam as letras IRI juntas?

82. Uma pessoa se encontra no ponto P(8, 10) de um sistema de eixos cartesianos e quer chegar à origem desse sistema. Sabe-se que ela dá um passo por vez, para a esquerda ou para baixo. Quantos caminhos distintos podem conduzi-la à origem?

testes de vestibulares

1. (Unirio-RJ) Um aluno do curso de Teatro da Unirio participará de algumas apresentações. Devido à falta de recursos comum nas universidades federais, o figurino criado para essa produção teatral e, colocado à sua disposição, é composto de duas camisas, duas calças e três gravatas. De quantas maneiras diferentes esse aluno poderá entrar em cena, numa mesma apresentação, sabendo-se que ele deverá usar uma camisa, uma calça e uma gravata desse figurino?

a) 14
b) 12
c) 10
d) 8
e) 6

2. (UE-PI) Quantos números com três dígitos distintos podem ser formados usando-se os algarismos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

a) 60
b) 120
c) 140
d) 180
e) 200

3. (UE-PA) Luciano realizou uma pesquisa para verificar a opinião dos paraenses a respeito de quem seriam os três primeiros colocados na corrida do Círio de 2003, na seguinte ordem: vencedor, 2º colocado e 3º colocado. No momento da pesquisa, Luciano apresentava, para escolha dos entrevistados, uma lista contendo o nome dos dez favoritos entre os atletas participantes. Desconsiderando qualquer possibilidade de empate, o número de formas diferentes de respostas é:

a) 120
b) 240
c) 360
d) 540
e) 720

4. (UFF-RJ) Niterói é uma excelente opção para quem gosta de fazer turismo ecológico. Segundo dados da prefeitura, a cidade possui oito pontos turísticos dessa natureza.
Um certo hotel da região oferece de brinde a cada hóspede a possibilidade de escolher três dos oito pontos turísticos ecológicos para visitar durante a sua estada. O número de modos diferentes com que um hóspede pode escolher, aleatoriamente, três destes locais, independentemente da ordem escolhida, é:

a) 8
b) 24
c) 56
d) 112
e) 336

5. (UF-RN) Um fenômeno raro em termos de data ocorreu às 20h02min de 20 de fevereiro de 2002. No caso, 20:02 20/02 2002 forma uma seqüência de algarismos que permanece inalterada se reescrita de trás para a frente. A isso denominamos *capicua*.
Desconsiderando as capicuas começadas por zero, a quantidade de capicuas formadas com cinco algarismos não necessariamente diferentes é:

a) 120
b) 720
c) 900
d) 1 000

6. (Enem-MEC) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe abaixo um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.

Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001. Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010.
No sistema de código de barras, para organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.
Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é:

a) 14
b) 12
c) 8
d) 6
e) 4

7. (PUC-RJ) O número de possibilidades diferentes de se ter 10 reais em notas de 1, 2, 5 e 10 é:

a) 24
b) 11
c) 1
d) 5
e) 10

8. (UE-PA) Para a formação de uma equipe de trabalho, uma empresa realizou um concurso para preenchimento de vagas em seu setor de informática, sendo duas vagas para analista de sistemas e três para técnico. O primeiro colocado no cargo de analista de sistemas terá função de coordenador da equipe e os aprovados no cargo de técnico terão funções idênticas. Todos os aprovados no concurso serão chamados juntos, independentemente da classificação de cada um.
Inscreveram-se cinco pessoas para concorrer ao cargo de analista de sistemas e seis ao cargo de técnico. Então, o número de maneiras distintas que essas cinco vagas podem ser preenchidas, para a formação da equipe de trabalho, pelos candidatos é:

a) 200
b) 400
c) 800
d) 1 200
e) 2 400

9. (Enem-MEC) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura abaixo.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

10. (Unifesp-SP) O corpo clínico da pediatria de um certo hospital é composto por 12 profissionais, dos quais três são capacitados para atuação junto a crianças que apresentam necessidades educacionais especiais. Para fins de assessoria, deverá ser criada uma comissão de três profissionais, de tal maneira que um deles, pelo menos, tenha a capacitação referida. Quantas comissões distintas podem ser formadas nessas condições?

a) 792
b) 494
c) 369
d) 136
e) 108

11. (Mackenzie-SP) Um *hacker* está tentando invadir um *site* do Governo e, para isso, utiliza um programa que consegue testar 16^3 diferentes senhas por minuto. A senha é composta por 5 caracteres escolhidos entre os algarismos de 0 a 9 e as letras de *A* a *F*. Sabendo que o programa testa cada senha uma única vez e que já testou, sem sucesso, 75% das senhas possíveis, o tempo decorrido desde o início de sua execução é de:

a) 2 horas e 16 minutos.
b) 1 hora e 40 minutos.
c) 3 horas e 48 minutos.
d) 3 horas e 12 minutos.
e) 2 horas e 30 minutos.

12. (U. F. Juiz de Fora-MG) Um cientista recebeu cinco cobaias para usar em seu estudo sobre uma nova vacina. Seus cálculos indicaram que o número de maneiras possíveis de escolher pelo menos três cobaias é:

a) 10
b) 16
c) 50
d) 120
e) 60

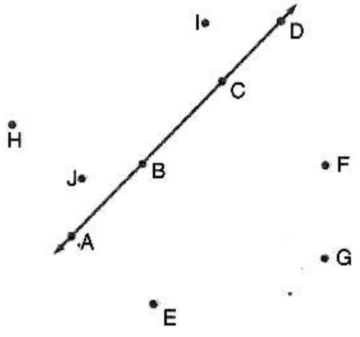
13. (UMC-SP) Numa competição de canoagem, cujas canoas possuem cinco lugares de cada lado, a equipe Xingu tem dez remadores e não dispõe de reservas. Sabendo-se que cinco dos remadores só remam do lado direito e que o capitão da equipe rema do lado esquerdo e tem posição fixa, então o número de posições distintas em que os remadores poderão ser dispostos na canoa para participarem da competição é de:

a) 2 880
b) 1 440
c) 1 160
d) 576
e) 144

14. (UF-AL, adaptado) Analise as afirmativas que seguem, classificando cada uma como verdadeira (*V*) ou falsa (*F*).

a) Se $(n!)^2 = 18 \cdot n! + 144$, então n é um quadrado perfeito.
b) O número de anagramas que podem ser formados com as letras da palavra MACEIÓ, de modo que as consoantes não fiquem juntas, é igual a 480.
c) O número de segmentos de reta determinados pelos vértices de um decágono regular é 90.
d) O número de triângulos determinados pelos vértices de um decágono regular é 720.

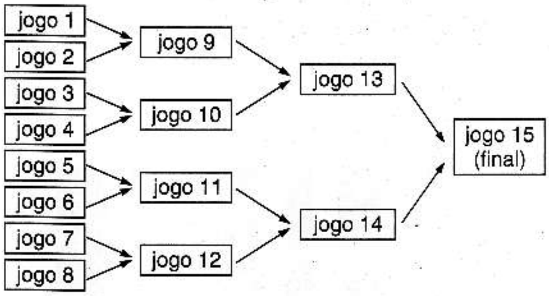
15. (Fatec-SP) Marcam-se, num plano, dez pontos, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J*, dos quais quatro estão sobre a mesma reta e três outros pontos quaisquer nunca estão alinhados, conforme a figura abaixo.



O número total de triângulos que podem ser formados, unindo-se três quaisquer desses pontos, é:

a) 24
b) 112
c) 116
d) 120
e) 124

16. (Enem-MEC) Os alunos de uma escola organizaram um torneio individual de pingue-pongue nos horários dos recreios, disputado por 16 participantes, segundo o esquema abaixo:



Foram estabelecidas as seguintes regras:

- Em todos os jogos, o perdedor será eliminado.
- Ninguém poderá jogar duas vezes no mesmo dia.
- Como há cinco mesas, serão realizados, no máximo, cinco jogos por dia.

Com base nesses dados, é correto afirmar que o número mínimo de dias necessário para chegar ao campeão do torneio é:

a) 8
b) 7
c) 6
d) 5
e) 4

17. (Udesc-SC) A soma dos valores de m e n, que são soluções do sistema $\begin{cases} A_{m,2} - 2C_{n,2} = 14 \\ C_{m,1} + A_{n,2} = 11 \end{cases}$, é:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 5
e) 3

18. (Fuvest-SP) Participam de um torneio de voleibol 20 times distribuídos em 4 chaves, de 5 times cada. Na 1ª fase do torneio, os times jogam entre si uma única vez (um único turno), todos contra todos em cada chave, sendo que os dois melhores de cada chave passam para a 2ª fase. Na 2ª fase, os jogos são eliminatórios; depois de cada partida, apenas o vencedor permanece no torneio. Logo, o número de jogos necessários até que se apure o campeão do torneio é:

a) 39
b) 41
c) 43
d) 45
e) 47

19. (Unifesp-SP) As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é:

a) PROVA
b) VAPOR
c) RAPOV
d) ROVAP
e) RAOPV

20. (UF-MG) A partir de um grupo de 14 pessoas, deseja-se formar uma comissão de oito integrantes, composta de um presidente, um vice-presidente, um secretário, um tesoureiro e quatro conselheiros. Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode compor essa comissão?

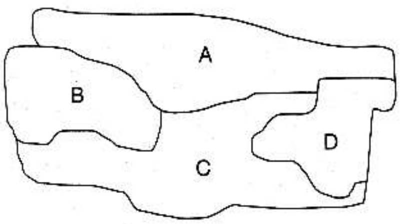
a) $\frac{14!}{4!6!}$

b) $\frac{14!}{(4!)^2}$

c) $\frac{14!}{6!8!}$

d) $\frac{14!}{4!10!}$

21. (UF-MS) Considere o mapa da região formada pelos países A, B, C e D.



Ao colorir um mapa, pode-se usar uma mesma cor mais de uma vez, desde que dois países vizinhos tenham cores diferentes. De acordo com essa informação e usando apenas quatro cores, pode-se colorir o mapa acima de L maneiras distintas. Então, é correto afirmar que L vale:

a) 24
b) 36
c) 40
d) 48
e) 32

22. (U. E. Londrina-PR) Na formação de uma Comissão Parlamentar de Inquérito (CPI), cada partido indica um certo número de membros, de acordo com o tamanho de sua representação no Congresso Nacional. Faltam apenas dois partidos para indicar seus membros. O partido A tem 40 deputados e deve indicar três membros, enquanto o partido B tem 15 deputados e deve indicar um membro. Assinale a alternativa que apresenta o número de possibilidades diferentes para a composição dos membros desses dois partidos nessa CPI.

a) 55
b) $(40 - 3) \cdot (15 - 1)$
c) $\frac{40!}{37!3!} \cdot 15$
d) $40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 15$
e) $40!37!15!$

23. (UF-MG) Num grupo constituído de 15 pessoas, cinco vestem camisas amarelas, cinco vestem camisas vermelhas e cinco vestem camisas verdes. Deseja-se formar uma fila com essas pessoas de forma que as três primeiras vistam camisas de cores diferentes e que as seguintes mantenham a seqüência de cores dada pelas três primeiras. Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode fazer tal fila?

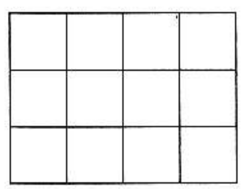
a) $3(5!)^3$
b) $(5!)^3$
c) $(5!)^3(3!)$
d) $\frac{15!}{3!5!}$

24. (Fuvest-SP) Em uma certa comunidade, dois homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um aperto de mão e se despedem (na saída) com outro aperto de mão. Um homem e uma mulher se cumprimentam com um aperto de mão, mas se despedem com um aceno. Duas mulheres só trocam acenos, tanto para se cumprimentarem quanto para se despedirem.

Em uma comemoração, na qual 37 pessoas almoçaram juntas, todos se cumprimentaram e se despediram na forma descrita acima. Quantos dos presentes eram mulheres, sabendo que foram trocados 720 apertos de mão?

a) 16
b) 17
c) 18
d) 19
e) 20

25. (ESPM-SP) Três dos doze quadrinhos da figura abaixo deverão ser pintados de preto, de modo que não ocupem três posições consecutivas, nem na horizontal, nem na vertical.



O número de maneiras diferentes de isso ser feito é:

a) 190
b) 200
c) 210
d) 220
e) 230

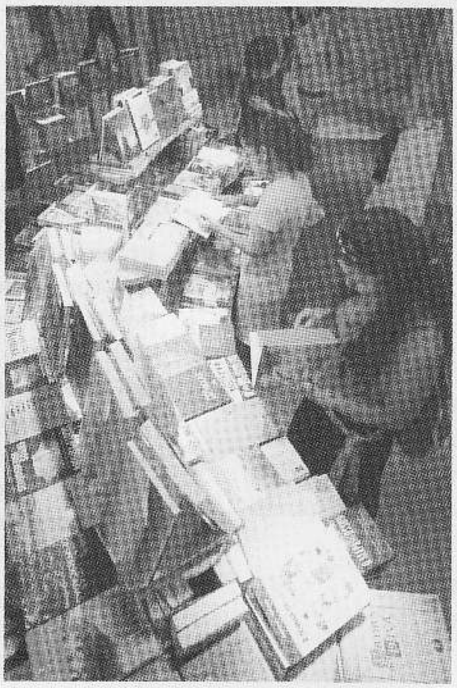
desafios

1. Um dado é lançado três vezes sucessivamente. Quantas seqüências de resultados apresentam soma dos pontos:

a) menor que 8?

b) maior que 13?

2. Uma livraria promoveu uma liquidação, colocando à venda 45 livros, todos distintos, sendo 20 livros ao preço de R$ 15,00 cada, 15 livros ao preço de R$ 20,00 cada e 10 livros ao preço unitário de R$ 10,00. Emília foi à livraria durante a liquidação, pretendendo gastar exatamente a quantia de R$ 50,00. De quantos modos distintos Emília poderá escolher os livros que irá comprar?



Fernando Donasci/Folha Imagem

3. (Fuvest-SP) Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?