EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Existem diversas situações que são modeladas por polinômios ou então estes são as melhores aproximações para o contexto. Em muitos deles, a resolução do problema está associada a encontrar valores que ao serem calculados para determinado polinômio a resposta obtida seja o valor , ou seja, queremos determinar os valores de x de modo que $P(x)=0$. Este tipo de relação é o que denominamos de ***equação polinomial ou equação algébrica.***

Uma equação polinomial é a igualdade de dois polinômios, no qual buscamos determinar os valores de que satisfazem os dois polinômios simultaneamente. Por exemplo, sejam $P(x)=x^2+4$ *e* $Q(x)=5x-2$. Quando igualamos $P(x)=Q(x)$ queremos determinar os valores que tornam essa igualdade verdadeira.

$$P(x)=Q(x)$$

$$x^2+4=5x-2$$

Perceba que se sairmos testando valores não é uma boa alternativa. Aqui, basta notarmos que, ao "passarmos" todos os termos do segundo para o primeiro membro, temos uma equação polinomial do segundo grau:

$$x^2+4-5x+2=0$$

$$x^2-5x+6=0$$

a qual podemos resolver utilizando a nossa tão conhecida ***Fórmula de Bhaskara***. O resultado obtido pelo uso dessa fórmula, ou de qualquer outro método, será:

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 2$$

Portanto, os únicos valores em que se tem $P(x)=Q(x)$ são para $x=3$ *e* $x=2$. Essas também são as raízes dos polinômios $T(x)= x^2-5x+6$. Aqui cabem algumas indagações: Primeiro, eu sempre utilizo equações para encontrar raízes de polinômios? Segundo, o polinômio $T(x)$ é de grau 2 e encontramos **duas raízes diferentes** para ele, isso sempre ocorre? A resposta da primeira pergunta é sim, a da segunda é nem sempre.

Dado um polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ a equação $P(x)=0$ determina as raízes de $P(x)$, ou seja, todos os valores $\alpha \in \mathbb{C}$ que substituídos no lugar do x resultam em 0. Por exemplo, 3 e 2 são raízes de $T(x)$, pois:

$$T(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = -6 + 6 = 0$$

$$T(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = -6 + 6 = 0$$

Nenhum outro número complexo quando substituído em $T(x)$ resulta em 0. Uma coisa muito importante quando estamos resolvendo equações cujo conjunto solução está contido nos complexos é que quando identificamos que um determinado número complexo é raiz de uma equação qualquer, então o seu conjugado também o será, ou seja, se $\alpha_1=a+bi$ é uma raiz de um polinômio $P(x)$, então $\alpha_2=a-bi$ também será.

O Teorema Fundamental da Álgebra nos garante que qualquer polinômio de grau 1 ou maior $(n\geq1)$ possui ao menos uma raiz complexa. Lembre-se sempre que os reais estão contidos no conjunto dos números complexos, deste modo, se a solução de uma equação for um número real, então ele também é um número complexo. Deste teorema, decorre a afirmação de que um polinômio de grau n possuí **exatamente** n raízes. Mas nem sempre essas raízes são todas distintas, em diversos casos o mesmo número pode ser raiz duas vezes.

Sabendo que um polinômio $P(x)$ tem n raízes e tendo-as em posse, podemos reescrever $P(x)$ do seguinte modo:

$$P(x)=a\cdot(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n).$$

Por exemplo, o polinômio $M(x)=2x^2-14x+24$, cujas raízes são os valores 3 e 4, logo, $M(x)$ será:

$$M(x) = 2x^2 - 14x + 24 = 2(x-3)(x-4)$$

Por exemplo, o polinômio $M(x)=2x^2-14x+24$, cujas raízes são os valores 3 e 4, logo, $M(x)$ será:

$$P(x) = (x-2)(x-2)(x+3)$$

Para um segundo exemplo, dado o polinômio $P(x)=x^3-x^2-8x+12$ ele tem como raízes os valores $2, 2$ e -3. Neste caso, sabendo que estas são as raízes, podemos reescrever $P(x)$ como:

$$P(x)=(x-2)(x-2)(x+3)$$

Assim, $P(x)=0$ se $(x-2)(x-2)(x+3)=0$, ou seja, $x-2=0$ ou $x-2=0$ ou $x+3=0$. Perceba que o fator $x-2$ apareceu duas vezes, deste modo, dizemos que 2, raiz deste fator, é raiz de multiplicidade dois no polinômio $P(x)$, pois é raiz duas vezes. Sempre que o mesmo fator aparecer mais de uma vez, diremos que a raiz tem multiplicidade igual à quantidade de fatores iguais que apareceu.

Com as raízes dadas, vemos que é bem simples escrever o polinômio como fatores de primeiro grau, mas e quando não forem dadas as raízes? Um dos métodos utilizados para encontrá-las são as Relações de Girard, popularmente conhecida como soma e produto.

Vamos considerar uma equação do segundo grau qualquer $ax^2+bx+c=0$. A solução $ax^2+bx++c=0$ satisfaz que a soma das raízes dessa equação é igual o quociente entre $-b$ e a e o produto das raízes é o quociente entre c e a, ou seja, assumindo que x_1 e x_2

sejam as raízes da equação, temos que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Analogamente, podemos determinar as relações de Girard para equações do terceiro grau. A solução de $ax^3+bx^2+cx+d=0$ satisfaz que a soma das raízes dessa equação é igual o quociente entre $-b$ e a, a soma do produto das raízes, duas a duas, é igual ao quociente entre c e a, e o produto das raízes é o quociente entre $-d$ e a, ou seja, assumindo que x_1, x_2 e x_3 sejam as raízes da equação acima, temos que:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

Podemos estender essa relação para equações de quarto grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ cujas raízes são x_1, x_2, x_3 e x_4 será:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a}$$

Por exemplo, para a equação do segundo grau $2x^2 - 14x + 24 = 0$, temos que as relações são:

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-14)}{2} = 7$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{24}{2} = 12$$

Queremos determinar dois números cuja soma é *7* e o produto é *12*. Alguns pares que satisfazem a soma ser *7* são *1* e *6*, *2* e *5*, *3* e *4*. Contudo, o único par que satisfaz é *3* e *4*, pois a multiplicação de *1* por *6* resulta em *6* e de *2* por *5* resulta em *10*. Logo, as raízes da equação segundo o método de Girard é *3* e *4*. Perceba que já encontramos esse resultado anteriormente ao calcularmos a raiz do polinômio $M(x)=2x^2-14x+24=2(x-3)(x-4)$.

Por fim, temos uma outra forma de encontrar raízes de equações polinomiais estabelecida pelo ***Teorema das Raízes Racionais***. Ele nos diz que se uma equação admite raízes racionais, ou seja, um número racional $\frac{p}{q}$, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. Em posse desse teorema conseguimos limitar as possíveis soluções de uma equação polinomial, sendo divididas em dois grupos: Possíveis Raízes Racionais Fracionárias *(PRRF)* e Possíveis Raízes Racionais Inteiras *(PRRI)*. Vamos considerar uma equação geral de grau n

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0.$$

Deste modo, todos os números que são divisores inteiros de a_0 são as **possíveis raízes racionais inteiras**. Contudo, nem sempre as raízes são números inteiros. Neste caso, para encontrarmos as **possíveis raízes racionais fracionárias** devemos realizar o quociente entre os divisores de a_0 pelos divisores de a_n. Para facilitar a compreensão, vamos utilizar como exemplo a equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

Primeiro devemos identificar que se trata de uma equação do terceiro grau, ou seja, $n=3$. Na sequência devemos determinar o conjunto de divisores do termo independente $a_0=6$. Logo, $D(6)=\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$. Esse conjunto representa as *PRRI*, ou seja, se a equação $x^3-4x^2+x+6=0$ possui raízes inteiras, então elas estarão entre os valores listados no conjunto dos divisores de a_0: $D(6)=\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$. Para saber quais delas são raízes, basta testar uma a uma. Com o tempo, você terá tanta prática que será capaz de eliminar algumas opções. Após testarmos todas as raízes, encontramos que os valores -1, 2 e 3 são raízes da equação acima. Note que, como já encontramos 3 raízes, não há necessidade, para este caso, de encontrar as *PRRF*, pois como já vimos anteriormente, uma equação tem no máximo n raízes reais e exatamente n raízes complexas e aqui já encontramos as 3.

Na verdade, sempre que todos os coeficientes da equação forem número inteiros e $a_n=\pm 1$ as raízes serão números inteiros. Logo, quando temos $a_n \neq \pm 1$, as raízes podem ser valores fracionários. Por exemplo, para a equação $9x^3+9x^2-x-1=0$ temos que $a_3=9$, logo existe a possibilidade de existir raízes fracionárias. Começamos então calculando os divisores do a_0 obtemos $D(-1)=\{-1,1\}$. Ao testarmos esses valores na equação concluímos que -1 é raiz. Agora, para calcular as PRRF, devemos encontrar os divisores de $a_3=9$, encontrando assim o conjunto $D(9)=\{-9,-3,-1,1,3,9\}$.

Por fim, devemos calcular o quociente dos divisores de a_0 pelos divisores de a_3 encontrando o conjunto $PRRF = \{-\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, -1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}\}$. Após testados os valores desse

ANOTAÇÕES