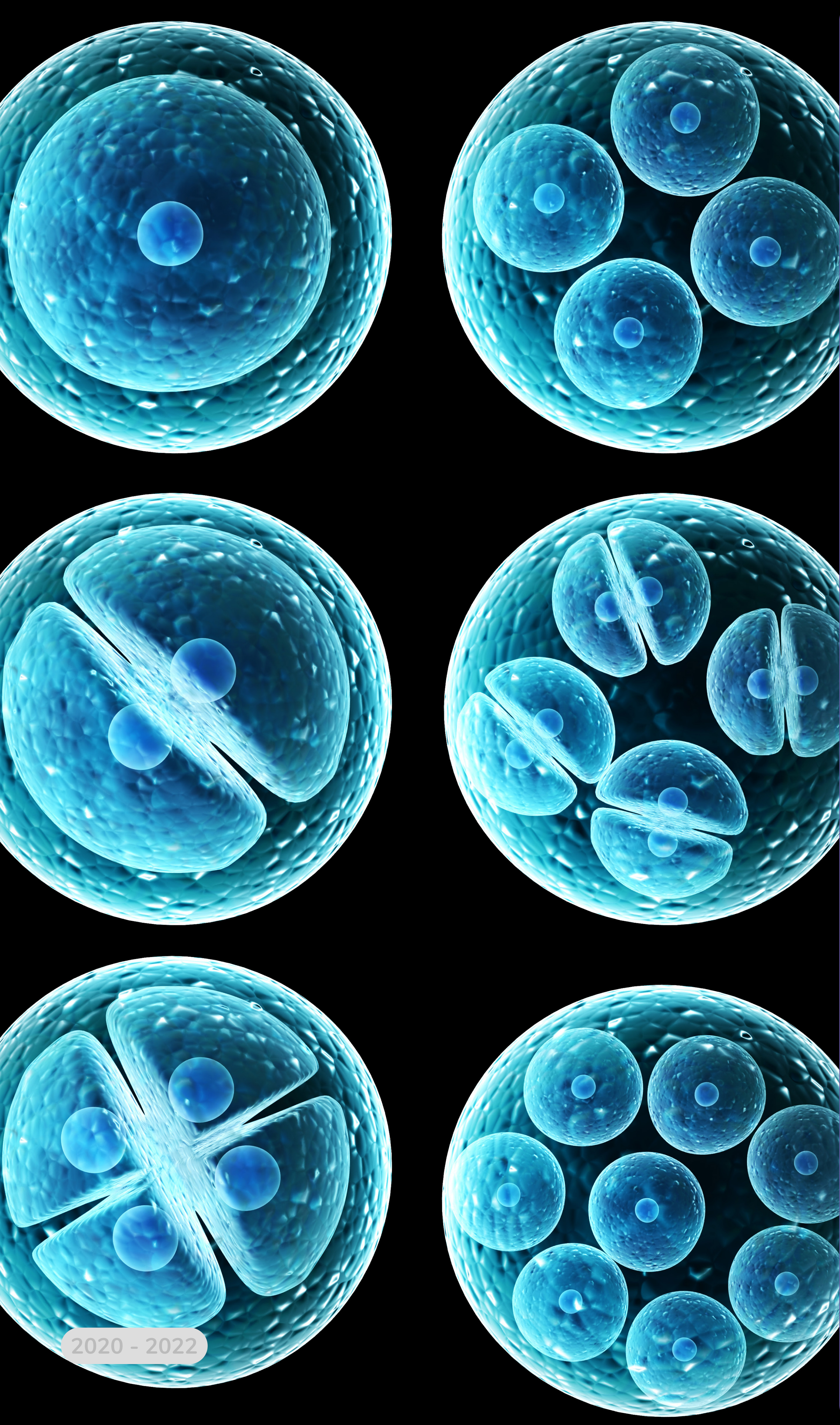
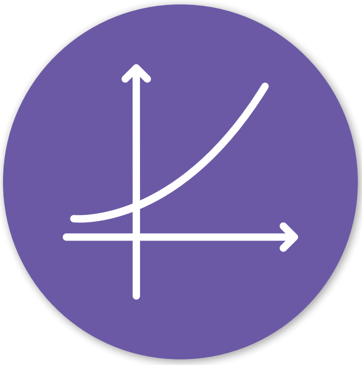
EXPONENCIAL E LOGARITMO



2020 - 2022



EXPONENCIAL E LOGARITMO

Quer aumentar exponencialmente o seu conhecimento de matemática? Os assuntos de função exponencial e logaritmo vão te ajudar nesta tarefa!

Esta subárea é composta pelos módulos:

1. Função Exponencial
2. Logaritmos
3. Função Logarítmica
4. Equação e Inequação Logarítmica

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Nesta apostila iremos aprender sobre função exponencial, equações e inequações exponenciais. Mas antes de falarmos sobre função, que tal relembrarmos as principais propriedades de potenciação? Para isso, considere a e b números reais quaisquer e m e n números naturais não nulos. Temos então as seguintes propriedades:

- $a^m . a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m.n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (para\ a\neq 0\ e\ m > n)$
- $(a.b)^m = a^m . a^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m} \quad (para\ b\neq 0)$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}\ (para\ a \neq 0)$
- $a^0 = 1$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\ (para\ n > 1)$

Convém também revisarmos as propriedades de radiciação. Para isso continuaremos considerando a e b números reais quaisquer e m, n e p números naturais não nulos. Temos, portanto:

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ (para\ m, n > 1)$
- $\sqrt[n]{a} = b \;\Rightarrow\; b^n = a$
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|, caso\ n\ for\ par$
- $\sqrt[n]{a^n} = a, caso\ n\ for\ ímpar$
- $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$
- $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[p.n]{a^m}$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Agora que já revisamos os conteúdos de potenciação e radiciação vamos entrar no conteúdo de função exponencial. Você sabia que há vários fenômenos do nosso cotidiano que podem ser descritos por uma função exponencial? Exemplos disso são o montante a ser pago em uma dívida, que cresce exponencialmente; o crescimento de uma colônia de bactérias, que dobra a cada hora que passa. Mas afinal, o que é uma função exponencial? É justamente o que vamos definir agora:

Função exponencial é a função do tipo $f(x)= a^x$, onde a simboliza um número real constante e maior que zero e diferente de 1, x simboliza a variável $(x \in \mathbb{R})$ e $f(x)$ é a imagem desta função.

Note que a imagem desta função não conta com o número zero, pois não há nenhum número que elevado a outro que resulte em zero, e compreende somente os números reais positivos. Em resumo, o domínio e a imagem da função $f(x)= a^x$, simbolizados por D e Im, respectivamente, são dados por:

$$D= \mathbb{R}$$

$$Im= \mathbb{R}_+^*$$

O gráfico da função exponencial depende muito do parâmetro a:

Caso $a > 1$:

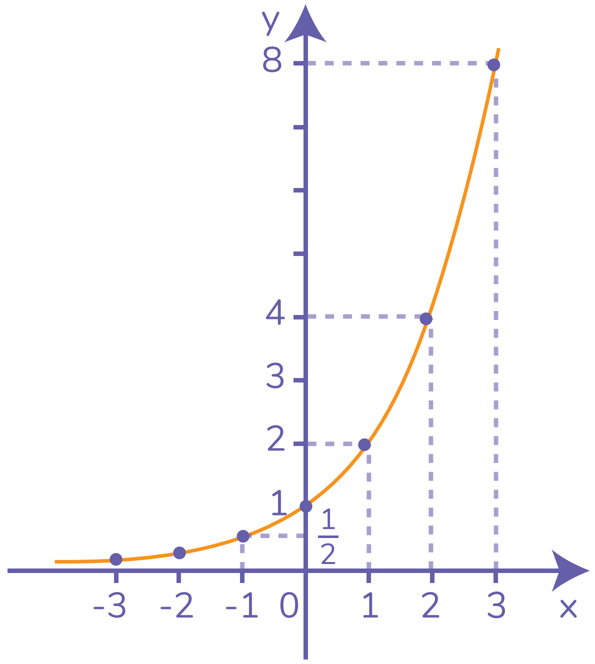
Na função do tipo $f(x)= a^x$, sempre que o parâmetro a for maior que um, o gráfico será crescente, cortará o eixo y em 1 e a curva nunca tocará o eixo horizontal.

Para exemplificar o gráfico dessa função vamos considerar $a=2$, teremos então a função $f(x)= 2^x$ e para construir o gráfico utilizamos uma tabela, que relaciona os valores de x com os valores de $f(x)$.

Observação: Podemos utilizar tanto $f(x)$ quanto y para simbolizar os valores da imagem de funções.

Veja abaixo a tabela e o gráfico da função $f(x)= 2^x$:

x	2^x	$y = 2^x$
-3	2^{-3}	$\frac{1}{8}$
-2	2^{-2}	$\frac{1}{4}$
-1	2^{-1}	$\frac{1}{2}$
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8

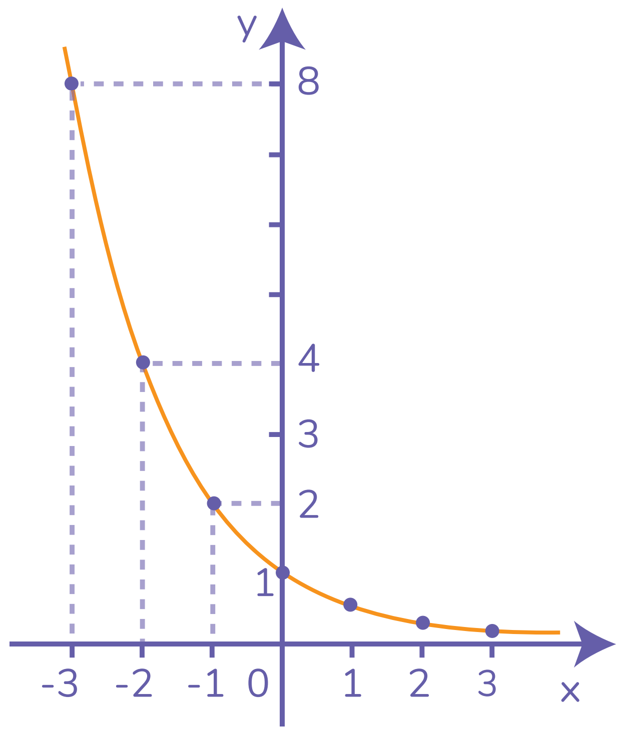


Caso $0 < a < 1$:

Caso o parâmetro a estiver entre zero e um, o gráfico da função $f(x) = a^x$ será decrescente, tocará o eixo vertical quando $y = 1$ e assim como no caso anterior, nunca tocará o eixo horizontal.

Para ilustrar o gráfico da função pegaremos como exemplo a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Veja abaixo a tabela utilizada para construção do gráfico e logo abaixo o gráfico da função.

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	8
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	4
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	2
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$	1
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$	$\frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$	$\frac{1}{4}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$	$\frac{1}{8}$



EQUAÇÃO EXPONENCIAL

As equações exponenciais são as equações cuja **incógnita aparece no expoente**. Para resolvê-las utilizamos as propriedades de potenciação para transformá-la em uma igualdade entre **potências de mesma base.**

Portanto, considerando a, b e c números reais, com $a \neq 0$ e $a > 0$ a temos:

$$\boldsymbol{a^b = a^c \Rightarrow b = c}$$

Exemplos: Resolva as equações exponenciais abaixo:

1) $2^x = 64$

Solução: Para solucionar essa equação, precisamos encontrar uma base comum para ambos os lados da igualdade. Neste caso, como $64 = 2^6$, claramente a base comum é o número dois. Temos então:

$$2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$$

Portanto, o conjunto solução dessa equação é: $S = \{6\}$.

2) $\left(\frac{1}{125}\right)^x = 25$

Solução: Perceba que os números 125 e 25 são divisíveis por 5, e que $125 = 5^3$ e $25 = 5^2$. Temos, portanto:

$$\left(\frac{1}{125}\right)^x = 25 \Rightarrow \left(\frac{1}{5^3}\right)^x = 5^2$$

$$(5^{-3})^x = 5^2 \Rightarrow (5)^{-3x} = 5^2$$

$$5^{-3x} = 5^2 \Rightarrow -3x = 2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

A solução dessa equação é $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{27}\right)^x = 81$

Solução: Note que tanto $\sqrt{3}$ quanto 27 e 81 podem ser escritos em função de potências de 3. Logo:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{27}\right)^x = 81 \Rightarrow \left(\frac{(3)^{1/2}}{3^3}\right)^x = 3^4$$

$$\left(3^{\left(\frac{1}{2}-3\right)}\right)^x = 3^4 \Rightarrow 3^{\left(-\frac{5}{2}x\right)} = 3^4$$

$$-\frac{5}{2}x = 4 \Rightarrow x = -\frac{2}{5} \cdot 4$$

$$x = -\frac{8}{5} \Rightarrow S = \left\{-\frac{8}{5}\right\}$$

INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

Inequações exponenciais são inequações cuja **incógnita aparece no expoente.** Para resolvê-las utilizamos as propriedades de potenciação para transformá-la em uma desigualdade entre **potências de mesma base.** Posteriormente verificamos se a base b é maior ou menor que um. Caso $b>1$ mantemos o sinal da desigualdade e se $0<b<1$ invertemos o sinal da desigualdade.

Considerando a, b e c números reais, com $a \neq 0$ e $a > 1$ temos que:

- $a^b > a^c \Rightarrow b > c$
- $a^b \geq a^c \Rightarrow b \geq c$
- $a^b < a^c \Rightarrow b < c$
- $a^b \leq a^c \Rightarrow b \leq c$

Considerando a, b e c números reais, com $a \neq 0$ e $0 < a < 1$ temos que:

- $a^b > a^c \Rightarrow b < c$
- $a^b \geq a^c \Rightarrow b \leq c$
- $a^b < a^c \Rightarrow b > c$
- $a^b \leq a^c \Rightarrow b \geq c$

Exemplos: Resolva as seguintes inequações:

1) $8^x \geq \dfrac{1}{32}$

Solução: Começamos a solucionar a inequação transformando os números 8 e $\frac{1}{32}$ em potências de base 2.

$$(2^3)^x \geq \frac{1}{2^5} \Rightarrow (2^3)^x \geq 2^{-5} \Rightarrow 2^{3x} \geq 2^{-5}$$

Como a base é maior que um, mantemos o sinal da desigualdade. Encontramos assim os valores de x:

$$3x \geq -5 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{3}$$

Logo, o conjunto solução dessa inequação é: $S = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq -\frac{5}{3}\right\}$

2) $\left(\dfrac{9}{25}\right)^x \geq \left(\dfrac{5}{3}\right)^7$

Solução:

$$\left(\frac{9}{25}\right)^x \geq \left(\frac{5}{3}\right)^7 \Rightarrow \left(\frac{3^2}{5^2}\right)^x \geq \left(\frac{5}{3}\right)^7 \Rightarrow$$

$$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^x \geq \left(\frac{5}{3}\right)^7 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^7 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} \geq \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^7 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{-7}$$

Como a base é menor que um, invertemos a desigualdade e encontramos o valor de x:

$$2x \leq -7 \Rightarrow x \leq -\frac{7}{2}$$

Logo, o conjunto solução dessa inequação é: $S = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq -\frac{7}{2}\right\}$.

3) $3^x + 3^{x+1} - 2.3^{x+2} + 3^{x+3} < 13$

Para resolver essa inequação precisamos recordar a propriedade de potenciação que diz que, por exemplo, $3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1$.

Solução:

$$3^x + 3^{x+1} - 2.3^{x+2} + 3^{x+3} < 13$$

$$3^x + 3^x \cdot 3^1 - 2.(3^x \cdot 3^2) + 3^x \cdot 3^3 < 13$$

Colocando 3^x em evidência temos:

$$3^x\ (1 + 3^1 - 2.3^2 + 3^3) < 13$$

$$3^x\ (1 + 3 - 2.9 + 27) < 13$$

$$3^x\ (31-18) < 13$$

$$3^x\ (13) < 13$$

Dividindo os dois lados da igualdade por 13 temos:

$$3^x < 1$$

$$3^x < 3^0$$

Como a base é maior que um, mantemos o sinal da desigualdade e encontramos os valores do x:

$$x < 0$$

Logo, o conjunto solução dessa inequação é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.