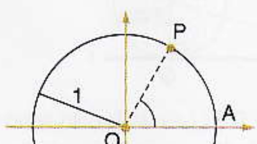
14 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

Uma vez conhecido o ciclo trigonométrico e feita a restrição inicial de valores para x no intervalo $[0, 2\pi[$, com cada um destes números reais x correspondendo a um ponto P sobre a circunferência, podemos tomar o arco $\widehat{AP}$ (ou o ângulo central $A\hat{O}P$, já que os dois possuem a mesma medida) para estudar as primeiras razões trigonométricas para ângulos na circunferência. Estas razões já foram vistas para triângulos nos capítulos 11 e 12.

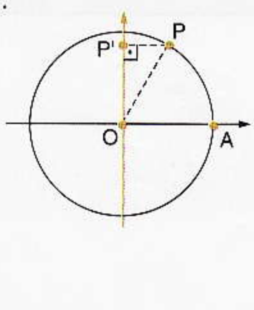
No caso de P corresponder ao número $\frac{\pi}{3}$, por exemplo, teríamos sen $\frac{\pi}{3}$, cujo valor é $\frac{\sqrt{3}}{2}$, dado que a medida $\frac{\pi}{3}$ rad corresponde a 60° $\left(\text{lembre-se: sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

med (AÔP) = med ($\widehat{AP}$)



Seno de um ângulo (ou de um arco)

Seja P um ponto sobre a circunferência, por exemplo, no 1º quadrante. Ao projetarmos ortogonalmente esse ponto P sobre o eixo vertical, obtemos o ponto P'.



Daqui por diante, o eixo vertical será chamado eixo dos senos.

À medida algébrica do segmento $\overline{OP'}$ damos o nome de seno de $\widehat{AP}$. Assim, sen $\widehat{AP} = OP'$.

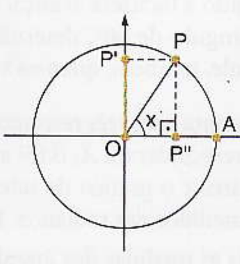
É claro que, como o raio do ciclo trigonométrico é unitário, o segmento $\overline{OP'}$ correspondente ficará sempre interno ao círculo, qualquer que seja a posição assumida por P sobre a circunferência. Daí:

$$\boxed{-1 \leqslant \text{sen } \widehat{AP} \leqslant 1}$$

dada a orientação "para cima" do eixo dos senos.

observação

É fácil ver, através da figura abaixo, que essa definição confirma a apresentada no capítulo 11:



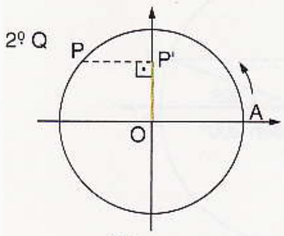
$$\text{sen } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Traçando o segmento $PP'' \,//\, OP'$, temos no $\triangle OPP''$:

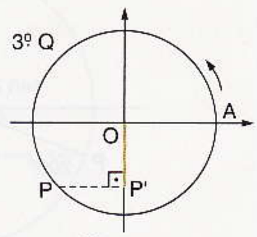
$$\text{sen } A\hat{O}P = \text{sen } x = \frac{PP''}{OP} = \frac{PP''}{1} = PP'' = OP'$$

pois trata-se de um retângulo.

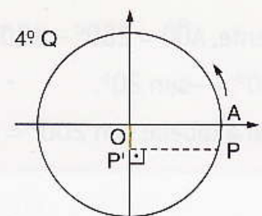
O mesmo procedimento é utilizado quando *P* ocupa posições nos demais quadrantes:



$\text{sen}\ \widehat{AP} = OP' > 0$

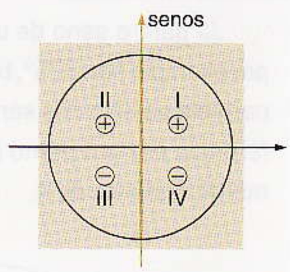


$\text{sen}\ \widehat{AP} = OP' < 0$



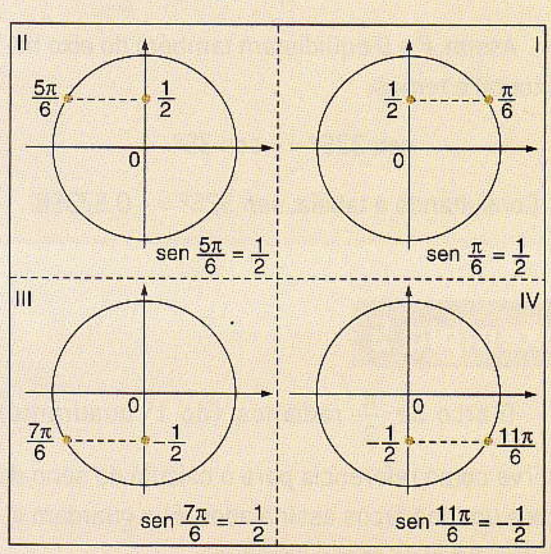
$\text{sen}\ \widehat{AP} = OP' < 0$

Os sinais que o seno assume nos quadrantes podem ser resumidos na figura ao lado.



exemplo 1

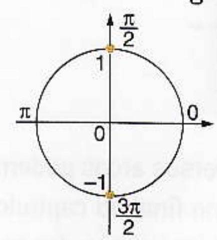
Lembrando que $\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$, vamos estabelecer os sinais dos senos para pontos simétricos de $\frac{\pi}{6}$.



Valores notáveis

Já apresentamos neste capítulo alguns valores com que estamos familiarizados: $\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$, $\text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Além desses, conhecemos $\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \text{sen}\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Observe na figura abaixo que:



$\text{sen}\ 0 = \text{sen}\ \pi = 0,$

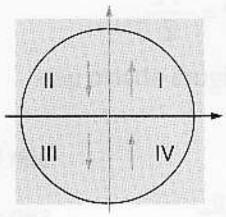
$\text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1$ e

$\text{sen}\ \frac{3\pi}{2} = -1$

Considerando as simetrias conhecidas, completamos a tabela dos senos de arcos notáveis:

	Arco (ângulo)	Seno	
1º quadrante	0	0	crescente
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	
	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
	$\frac{\pi}{2}$	1	
2º quadrante	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	decrescente
	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	
	π	0	
3º quadrante	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	decrescente
	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
	$\frac{3\pi}{2}$	-1	
4º quadrante	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	crescente
	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	

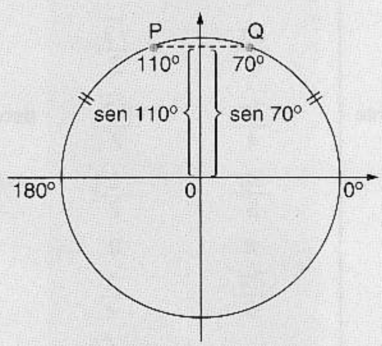
Note que, à medida que *P* avança no 1º quadrante, os valores dos senos dos arcos correspondentes aumentam — não linearmente — de 0 a 1; já entre o 2º e o 3º quadrantes, os valores dos senos decrescem, de 1 a –1, para voltar a crescer, no 4º quadrante, de –1 a 0.



Os valores dos senos dos diversos arcos podem ser obtidos na tabela completa, no final do capítulo 12. Embora dela constem apenas os valores das razões trigonométricas de ângulos agudos, ou seja, ângulos do 1º quadrante, veremos como utilizar a tabela para obtenção do seno de um arco de qualquer um dos demais quadrantes.

exemplo 2

Para achar o valor de sen 110°, é necessário rebater o ponto *P* em torno do eixo dos senos, obtendo o ponto *Q*, associado ao arco de 70°, do 1º quadrante.

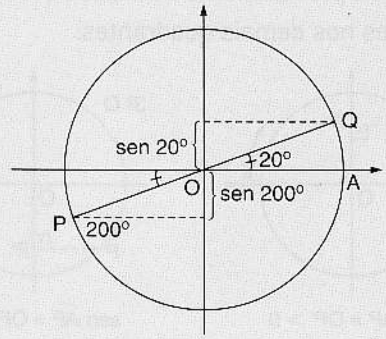


Temos sen 110° = sen 70°.

Consultando a tabela: sen 110° = 0,93969.

exemplo 3

No cálculo de sen 200° podemos traçar, a partir do ponto *P*, o diâmetro do círculo, obtendo o ponto *Q* do 1º quadrante.



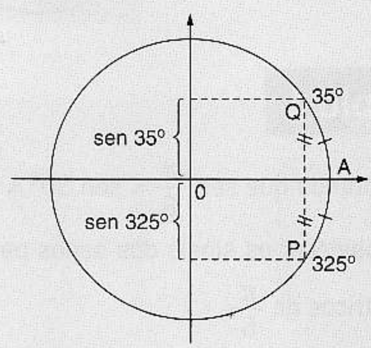
Evidentemente, $A\hat{O}Q = 200° - 180° = 20°$.

Daí, sen 200° = –sen 20°.

Consultando a tabela: sen 200° = – 0,34202.

exemplo 4

Já para o seno de um arco do 4º quadrante, por exemplo sen 325°, basta "levantar" uma linha paralela ao eixo dos senos, a qual corta a circunferência em um ponto *Q* do 1º quadrante, igualmente distante de *A*.



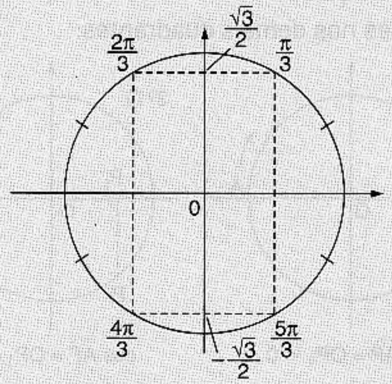
Assim, *P* e *Q* eqüidistam também do eixo horizontal e temos:

sen 325° = – sen 35°

Consultando a tabela: sen 325° = – 0,57358.

exemplo 5

O arco de $\frac{\pi}{3}$ radianos (do 1º quadrante) serve como referência para o cálculo do seno de cada um dos arcos assinalados, que guardam alguma simetria com o primeiro.



Temos:

$$\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = \text{sen}\,\frac{5\pi}{3} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

observação

O processo utilizado nos exemplos 2, 3, 4 e 5 é caracterizado como redução ao 1º quadrante, pois, como se pode perceber, a partir de um quadrante diferente do 1º, em cada caso procura-se calcular o seno de um ângulo em função dos valores conhecidos (ou acessíveis por meio de consulta à tabela completa) dos senos dos ângulos do 1º quadrante.

Esse procedimento justifica a recomendação para que se memorizem os valores notáveis apresentados.

exercícios

1. Simplifique cada expressão:

a) $y = \dfrac{\text{sen}\,0 + \text{sen}\,\frac{\pi}{2} - \text{sen}\,\frac{5\pi}{6}}{\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}}$

b) $E = \dfrac{\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} - \text{sen}\,\pi + \text{sen}\,\frac{\pi}{6}}{2 \cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{6} + \text{sen}\,0}$

2. Dê o valor de:

a) sen 120°
b) sen 150°
c) sen 210°
d) sen 240°
e) sen 270°
f) sen 300°
g) sen 330°
h) sen 90°

3. Dê o valor de:

a) $\text{sen}\,\frac{\pi}{4}$
b) $\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}$
c) sen 225°
d) $\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}$

4. Simplifique a expressão:

$$y = 6\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} + 3\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} + 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + 4\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}$$

5. Quanto vale a soma $\text{sen}\,\frac{\pi}{7} + 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} - \text{sen}\,\frac{6\pi}{7}$?

6. Identifique os pares de medidas de arcos que possuem o mesmo seno:

$\frac{2\pi}{3}$ rad $\quad \frac{4\pi}{3}$ rad $\quad \frac{5\pi}{3}$ rad $\quad \frac{7\pi}{4}$ rad $\quad \frac{5\pi}{4}$ rad $\quad$ 60°

7. Disponha em ordem crescente os números reais:

sen π, $\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}$, $\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}$, $\text{sen}\,\frac{\pi}{2}$, sen 0, $\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}$

8. Obtenha o valor de *m* para que se possa ter:

a) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{m+1}{2}$
b) $\text{sen}\,x = \dfrac{3-2m}{4}$
c) $\text{sen}\,y = \dfrac{2-m}{m}$

9. Com auxílio da tabela, calcule:

a) sen 130°
b) sen 230°
c) sen 320°
d) $\text{sen}\,\frac{\pi}{5}$

10. Compare:

a) sen 75° e sen 85°
b) sen 100° e sen 170°
c) sen 260° e sen 250°
d) sen 300° e sen 290°

11. Seja x um arco tal que $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$. Sendo sen $x = 1 + 3m$, qual é o intervalo de variação do real *m*?

12. (UF-ES, adaptado) Em um triângulo ABC tem-se AB = AC = b e BC = a; o ângulo oposto ao lado $\overline{BC}$ mede $\frac{\pi}{5}$ rad.

a) Justifique esta afirmação: Existe um ponto *D* sobre o lado $\overline{AB}$, tal que os triângulos BCD e ACD são isósceles.

b) Justifique a igualdade: $a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5} = b \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$.

13. Determine $x \in [0, 2\pi[$ tal que:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

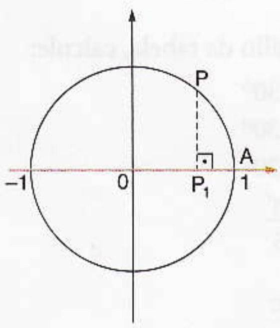
b) $\operatorname{sen} x = 0$

c) $\operatorname{sen} x = -1$

d) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Cosseno de um ângulo (ou de um arco)

Seja *P* um ponto sobre a circunferência do ciclo trigonométrico, no seu 1º quadrante, por exemplo. A projeção ortogonal de *P* sobre o eixo horizontal conduz ao ponto P_1. A partir desse momento, o eixo horizontal será chamado eixo dos cossenos.



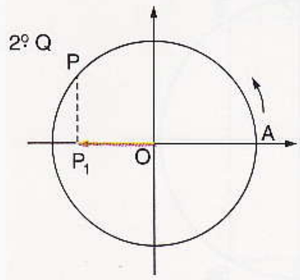
À medida do segmento orientado $\overline{OP_1}$ damos o nome de cosseno de $\widehat{AP}$. Assim:

$$\cos \widehat{AP} = OP_1$$

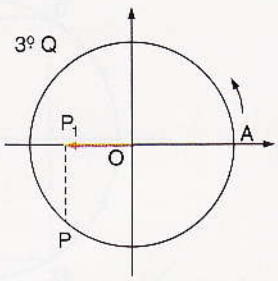
Para qualquer posição de *P*, temos:

$$\boxed{-1 \leqslant \cos \widehat{AP} \leqslant 1}$$

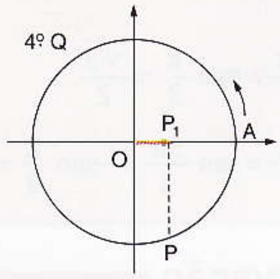
O mesmo procedimento é utilizado quando *P* ocupa posições nos demais quadrantes:



$\cos \widehat{AP} = OP_1 < 0$

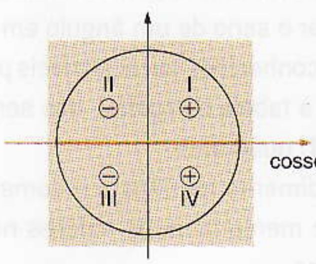


$\cos \widehat{AP} = OP_1 < 0$



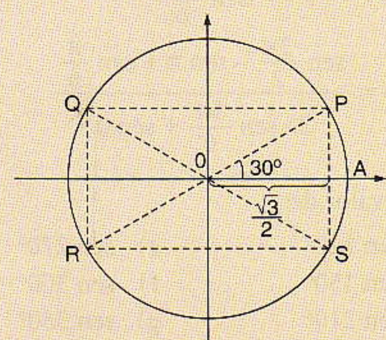
$\cos \widehat{AP} = OP_1 > 0$

O sentido da orientação (à direita) do eixo dos cossenos garante este quadro de sinais dos cossenos, de acordo com os quadrantes:



exemplo 6

Da mesma forma que com os senos, já conhecemos os valores de cossenos de alguns ângulos. Já sabemos, por exemplo, que $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Assim, temos:

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e}$$

Q R

extremidades

S P

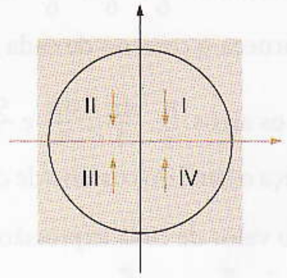
$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Valores notáveis

Por meio das simetrias apresentadas e dos valores já conhecidos, podemos construir a tabela dos valores dos cossenos de arcos notáveis:

	Arco (ângulo)	Cosseno	
1º quadrante	0	1	decrescente
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	
	$\frac{\pi}{2}$	0	
2º quadrante	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	decrescente
	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
	π	-1	
3º quadrante	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	crescente
	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	
	$\frac{3\pi}{2}$	0	
4º quadrante	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	crescente
	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	

Os valores apresentados na tabela sugerem o seguinte quadro de crescimento dos cossenos.



A tabela completa das razões trigonométricas fornece os valores dos cossenos dos arcos de medidas menores que 90°. Contudo, por meio das simetrias e do quadro de sinais dos cossenos, é possível, através da tabela, obter o cosseno de um arco de qualquer quadrante. Basta reduzir o arco dado ao 1º quadrante.

exemplo 7

Vamos calcular cos 140° e cos 220°.

Rebatendo sobre o eixo vertical, vemos que cos 140° = −cos 40°.

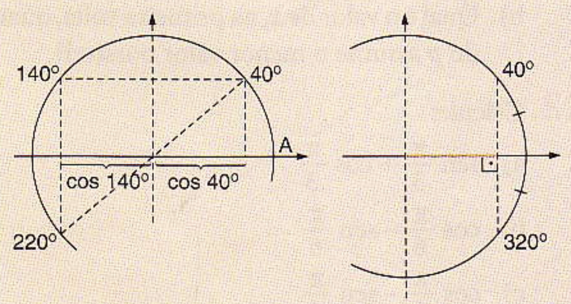
Consultando a tabela: cos 140° = −0,76604.

O ponto diametralmente oposto à extremidade do arco de 40° acima é o ponto correspondente ao arco de 220°, contado — como sempre — a partir de *A*.

Podemos notar que:

$$\cos 220° = -\cos 40° = -0{,}76604$$

Podemos calcular também o cos 320°.



Pela figura, observamos que:

$$\cos 320° = \cos 40° = 0{,}76604$$

exercícios

14. Localize os arcos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$. Em seguida, forneça o cosseno de cada um deles.

15. Localize os arcos $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ e $\frac{9\pi}{5}$. Em seguida, forneça o sinal do cosseno de cada um deles.

16. Calcule o valor de cada expressão:

a) $y = \dfrac{\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2}}$

b) $y = \dfrac{\cos\frac{3\pi}{2} - \text{sen}\,\frac{\pi}{3}}{\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3}}$

17. Utilize a tabela completa para calcular:

a) $\cos 110°$
b) $\cos 170° - \cos 10°$
c) $\cos 40° + \cos 140°$
d) $\cos 290°$

18. Compare:

a) $\cos 65°$ e $\cos 70°$
b) $\cos 100°$ e $\cos 260°$
c) $\cos 50°$ e $\cos 340°$
d) $\cos 91°$ e $\cos 89°$

19. Determine, em cada caso, o valor real de m:

a) $\cos x = 2m - 1$
b) $\cos x = \dfrac{m+2}{2}$
c) $\cos x = \dfrac{m-2}{m}$

20. Seja x um arco do 3º quadrante. Se $\cos x = 2m + 1$, qual é o intervalo de variação do real m?

21. a) Quais são os valores reais de p para que se tenha $1 + \cos x = \dfrac{2p-3}{5}$?

b) Qual é o valor de x, na primeira volta, quando p assume o menor valor possível?

22. Calcule:

a) $\text{sen}\,\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}$

b) $\cos\frac{\pi}{6} - \text{sen}\,\frac{\pi}{6}$

c) $\cos\frac{\pi}{4} - \text{sen}\,\frac{\pi}{4}$

d) $\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2$

23. Forneça o sinal de cada expressão:

a) $y_1 = \text{sen}\,\frac{\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7}$

b) $y_2 = \text{sen}\,100° + \cos 100°$

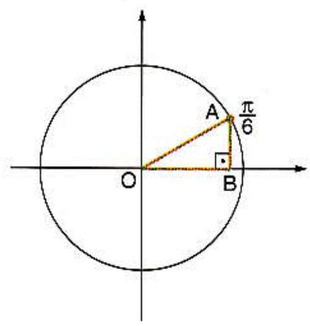
c) $y_3 = \text{sen}\,160° + \cos 160°$

d) $y_4 = \text{sen}\,\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}$

24. (Unicamp-SP, adaptado) Considere a função quadrática $f(x) = x^2 + x\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha$. Resolva a equação $f(x) = 0$, para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

25. Tome no ciclo trigonométrico um raio $\overline{OB}$, cujo ponto médio é A, localizado no 1º quadrante. Seja $\overline{A'B'}$ a projeção de $\overline{AB}$ sobre o eixo dos cossenos, o qual forma ângulo α com o raio $\overline{OB}$. Calcule, em função de α, a medida de $\overline{A'B'}$.

26. Observando a figura abaixo, encontre o perímetro do triângulo OAB situado no 1º quadrante do ciclo trigonométrico.



27. (Vunesp-SP) No hemocentro de um certo hospital, o número de doações de sangue tem variado periodicamente. Admita que, nesse hospital, no ano de 2001, esse número, de janeiro ($t = 0$) a dezembro ($t = 11$), seja dado, aproximadamente, pela expressão $S(t) = \lambda - \cos\left[\frac{(t-1)\pi}{6}\right]$, sendo λ uma constante positiva, $S(t)$ em milhares e t em meses, com $0 \leqslant t \leqslant 11$. Determine:

a) a constante λ, sabendo que no mês de fevereiro houve 2 mil doações de sangue;

b) em quais meses houve 3 mil doações de sangue.

Relações entre senos e cossenos

Quando estudamos a Trigonometria no triângulo retângulo, apresentamos duas importantes relações entre senos e cossenos. Vamos retomá-las.

Arcos complementares

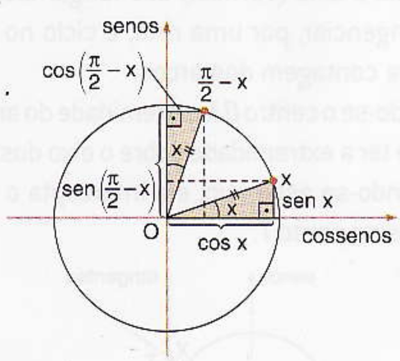
A relação sen x = cos (90° − x) ou cos x = sen (90° − x) passa a ser escrita como:

$\boxed{\text{sen } x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$, válida para $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\boxed{\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$, válida para $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

e significa "o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complemento", ou "o cosseno de um ângulo é igual ao seno do seu complemento".

Essa verificação também é imediata no ciclo trigonométrico: basta observar que os dois triângulos retângulos da figura são congruentes, por possuírem, além das hipotenusas (raios unitários), ângulos agudos congruentes.



exemplo 8

Verifique na tabela que:

- sen 40° = 0,64279 = cos 50°
- sen 11° = 0,19087 = cos 79°
- cos 34° = 0,82904 = sen 56°
- cos 2° = 0,99939 = sen 88°
- sen 45° = cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}70711$

Relação fundamental I

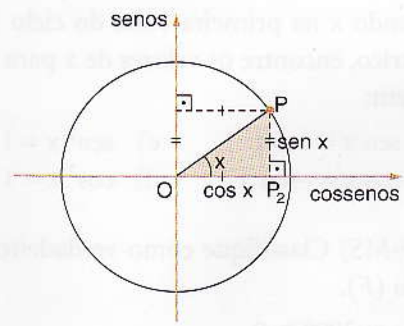
Seja *x* um arco do 1º quadrante. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OPP_2, temos:

$$(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = (OP)^2, \text{ ou seja,}$$

$\boxed{\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$, válida para $\forall\, x \in [0, 2\pi[$

Mesmo que *x* não seja arco do 1º quadrante, vale a relação fundamental I (verifique esse fato nos diversos casos possíveis!).

Assim, dado o seno de um arco qualquer, é possível, por meio da relação fundamental I, obter o cosseno desse mesmo arco, e vice-versa.



exemplo 9

Dado sen x = $\frac{1}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, para obtermos cos x, usamos a relação fundamental I:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, notamos que *x* está no 2º quadrante e, conseqüentemente, cos x < 0. Assim, temos cos x = $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

exercícios

28. Sendo cos x = $\frac{3}{5}$, com *x* no 4º quadrante, determine sen x.

29. Se $\text{sen } x = -\frac{12}{13}$, com x no 3º quadrante, determine cos x.

30. Com x no 2º quadrante, é possível termos $\cos x = -\frac{7}{25}$? Nessas condições, quanto valeria sen x?

31. Se $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ e $4 \text{ sen } x + 1 = 0$, calcule cos x.

32. Sabendo que $\text{sen } x + 3 \cos x = 0$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, obtenha sen x e cos x.

33. Estando x na primeira volta do ciclo trigonométrico, encontre os valores de x para os quais se tem:

a) $\text{sen } x = \cos x$
b) $\cos x = -\text{sen } x$
c) $\text{sen}^2 x = 1$
d) $\cos^2 x = 1$

34. (UF-MS) Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F).

a) $\text{sen } 300° > 0$
b) $\text{sen}^2 70° + \text{sen}^2 160° = 1$
c) Os possíveis valores reais de m para que se possa ter $\cos x = \frac{5 - m}{3}$ são tais que $2 \leqslant m \leqslant 8$.

35. Dado $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{2}$, calcule cos a. Em seguida, determine a da primeira volta.

36. Sendo $\cos \frac{\pi}{12} = p$, calcule $\text{sen } \frac{5\pi}{12}$.

37. É verdade que $\text{sen}^2 65° + \text{sen}^2 25° = 1$? Justifique sua resposta.

38. Se $0 \leqslant x < 2\pi$, determine x, sabendo que $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 0$.

39. Sabe-se que $\text{sen } \frac{3\pi}{5} = p$.

a) Qual é o sinal de p?
b) Determine $\text{sen } \frac{2\pi}{5}$.

40. (UF-SC) Sejam a e b os ângulos centrais associados, respectivamente, aos arcos AN e AM na circunferência trigonométrica da figura 1 e considere x na figura 2, a seguir.

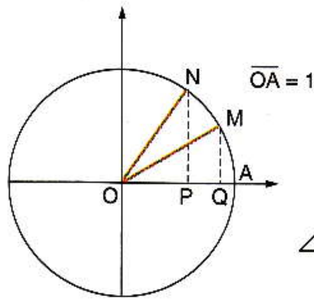


figura 1

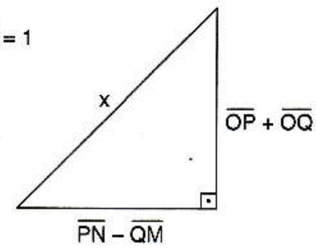


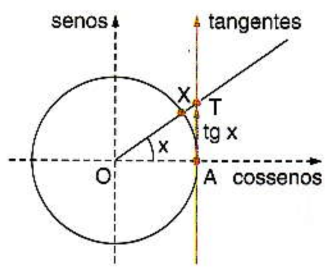
figura 2

Determine o valor de $y = 15x^4$, sabendo que $a + b = \frac{\pi}{2}$.

Tangente de um ângulo (ou de um arco)

Para estabelecer a tangente de um arco x, é necessário acrescentar um terceiro eixo ao ciclo trigonométrico. O eixo (vertical) das tangentes é obtido ao se tangenciar, por uma reta, o ciclo no ponto A, origem da contagem dos arcos.

Unindo-se o centro O à extremidade do arco x, que não pode ter a extremidade sobre o eixo dos senos, e prolongando-se esse raio, ele intercepta o eixo das tangentes no ponto T.



Por definição, a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ é a tangente do arco de x rad.

A orientação do eixo das tangentes é para cima. Sendo A sua origem e, como no caso presente, sendo x do 1º quadrante, temos:

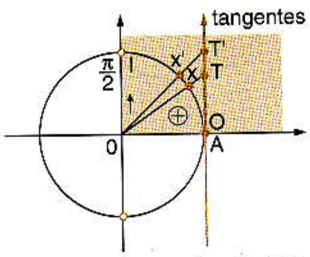
$$\text{tg } x = AT > 0$$

Façamos variar a posição de P nos diversos quadrantes.

- 1º quadrante

  Podemos verificar que tg $0 = 0$ (pois T coincidiria com A); além disso, à medida que x aumenta dentro do 1º quadrante, o ponto T afasta-se gradativamente do ponto A, no sentido positivo do eixo. Assim, o valor da tangente vai crescendo indefinidamente e assumindo todos os valores reais positivos, até que a tangente deixa de existir quando $x = \frac{\pi}{2}$.

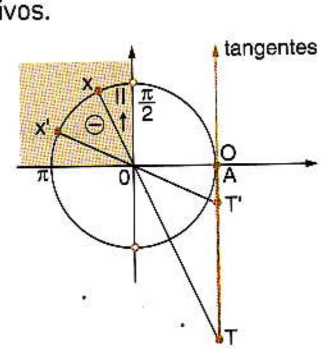
  Logo, no 1º quadrante, as tangentes crescem, assumindo valores positivos.



x' > x ⇒ tg x' > tg x

- 2º quadrante

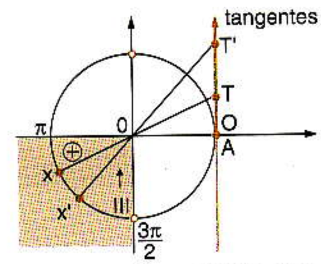
  Quando x passa para o 2º quadrante, o ponto T reaparece (na parte negativa do eixo das tangentes) e, à medida que x aumenta dentro do quadrante, o ponto T se aproxima de A, embora ainda na parte negativa do eixo. O ponto T volta a coincidir com A quando x assume o valor π : tg $\pi = 0$. Desse modo, podemos escrever que, no 2º quadrante, as tangentes crescem, assumindo valores negativos.



x' > x ⇒ tg x' > tg x

- 3º quadrante

  O ponto T volta a ocupar a parte positiva do eixo das tangentes, afastando-se de A à medida que x aumenta dentro do 3º quadrante. Nele, as tangentes crescem assumindo valores positivos, até que tg x deixa novamente de existir para $x = \frac{3\pi}{2}$.

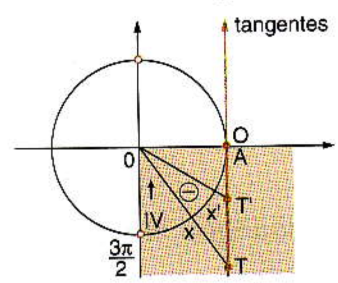


x' > x ⇒ tg x' > tg x

- 4º quadrante

  Como ocorre no 2º quadrante, o ponto T reaparece na parte negativa do eixo das tangentes e, à medida que x aumenta, o valor de tg x também aumenta, tendendo a anular-se.

  No 4º quadrante, então, as tangentes ainda crescem, assumindo valores negativos.



x' > x ⇒ tg x' > tg x

Resumindo, os valores da tangente crescem em cada quadrante e são positivos nos quadrantes ímpares e negativos nos quadrantes pares.

exercícios

41. Forneça o sinal da expressão:

$$y = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg}\pi}{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}}$$

42. Disponha em ordem decrescente os números reais tg $\frac{\pi}{3}$, tg $\frac{\pi}{4}$, tg $\frac{\pi}{6}$, tg $\frac{3\pi}{4}$, tg 0 e tg $\frac{2\pi}{3}$.

43. Calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{\operatorname{tg}\pi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\pi}{\cos\frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}$$

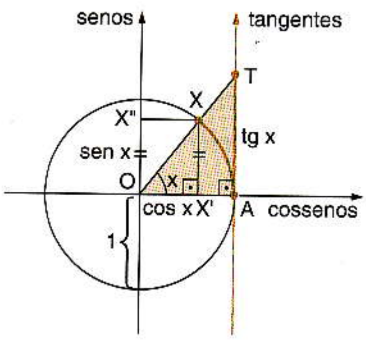
44. Determine geometricamente o valor de $\text{tg}\ \frac{\pi}{4}$.

Em seguida, forneça o valor de $\text{tg}\ \frac{5\pi}{4}$.

45. Justifique a igualdade $\text{tg}\ \frac{3\pi}{4} = \text{tg}\ \frac{7\pi}{4}$.

Relação fundamental II

Seja um arco de x rad com extremidade no ponto *X*.



Observando a figura, temos:

$OX' = \cos x$

$X'X = \text{sen}\ x$

$AT = \text{tg}\ x$

$OX = 1$ (raio)

Os triângulos retângulos OX'X e OAT são semelhantes, pois possuem um ângulo agudo comum. Assim, podemos escrever a relação:

$$\frac{OX'}{OA} = \frac{XX'}{AT} \Rightarrow \frac{\cos x}{1} = \frac{\text{sen}\ x}{\text{tg}\ x} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos x}}$$

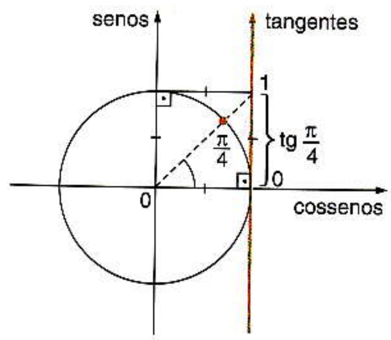
válida para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, pois nesses pontos $\cos x \neq 0$.

Essa importante relação já foi vista no estudo do triângulo retângulo. Ela será utilizada a seguir para a obtenção de alguns valores notáveis de tangentes de arcos, as quais aparecem com freqüência.

Valores notáveis

Iniciaremos calculando $\text{tg}\ \frac{\pi}{4}$. Pela relação fundamental II, temos:

$$\text{tg}\ \frac{\pi}{4} = \frac{\text{sen}\ \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

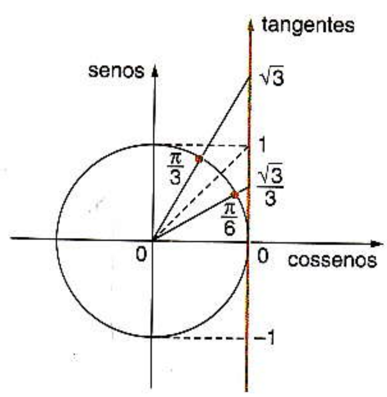


Observemos que o quadrilátero apresentado na figura é um quadrado, o que confirma que $\text{tg}\ \frac{\pi}{4} = 1$ (raio do ciclo) (veja exercício 44).

No cálculo de $\text{tg}\ \frac{\pi}{3}$ e $\text{tg}\ \frac{\pi}{6}$, fazemos:

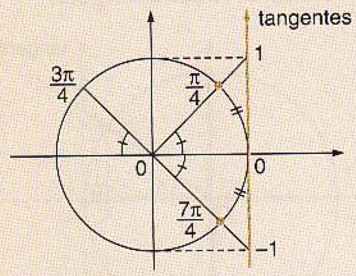
$$\text{tg}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\text{sen}\ \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{tg}\ \frac{\pi}{6} = \frac{\text{sen}\ \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



exemplo 10

Para calcular $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4}$, devemos unir o centro à extremidade do arco, prolongando esse segmento até o eixo das tangentes.



Notando a congruência entre os três ângulos assinalados, concluímos que:

$$\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = -\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = -1$$

Do mesmo modo, $\text{tg}\,\frac{7\pi}{4} = -1$ (veja exercício 45).

Podemos resolver também pela relação fundamental II:

$$\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}}{\cos\,\frac{3\pi}{4}} = \frac{+\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

$$\text{tg}\,\frac{7\pi}{4} = \frac{\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}}{\cos\,\frac{7\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{+\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

exercícios

46. Determine, se existir:

a) $\text{tg}\,\frac{4\pi}{3}$ c) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{6}$

b) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{3}$ d) $\text{tg}\,\frac{7\pi}{6}$

47. Calcule, se existir:

a) $\text{tg}\,\frac{2\pi}{3}$ c) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{4}$

b) $\text{tg}\,\frac{3\pi}{2}$ d) $\text{tg}\,\pi$

48. Calcule o valor da expressão:

$$y = 2\,\text{tg}\,\frac{\pi}{3} \cdot \text{tg}\,\frac{\pi}{6} - 2\,\text{tg}\,\frac{\pi}{4}$$

49. Sendo $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, dado $|\,\text{sen}\,x\,| = \frac{1}{3}$, calcule $\cos x$ e $\text{tg}\,x$.

50. Sendo $x \in [0, 2\pi[$, calcule os valores de x para os quais temos:

a) $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\text{tg}^3\,x = 0$

b) $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$ d) $\text{tg}^2\,x = 1$

51. Sendo $\text{tg}\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, encontre $\text{sen}\,x$ e $\cos x$.

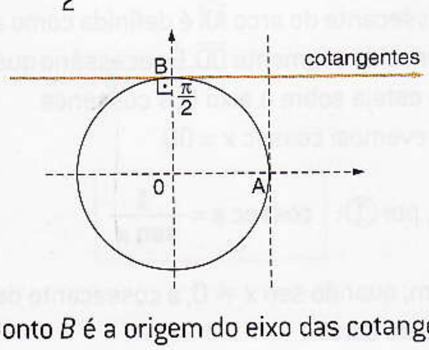
52. Sendo $x = 30°$, calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{2\,\text{sen}\,x - 4\cos x + \text{tg}\,2x}{\cos 4x - \text{sen}\,2x}$$

Outras razões trigonométricas na circunferência

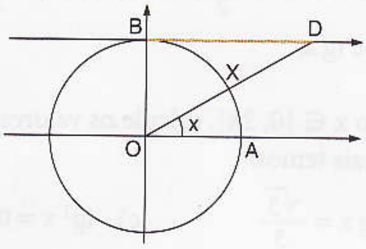
Cotangente de um ângulo (ou de um arco)

Como para as tangentes, também para a leitura das cotangentes é necessário acoplar um eixo, externo ao ciclo, porém tangente a ele no ponto B, correspondente a $\frac{\pi}{2}$ radianos.



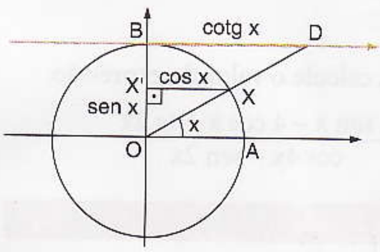
O ponto B é a origem do eixo das cotangentes.

Sendo o ponto X a extremidade do arco de x radianos, devemos unir o centro ao ponto X, prolongando esse raio até tocar o eixo das cotangentes no ponto D. É necessário que a extremidade do arco não esteja sobre o eixo dos cossenos.



A medida algébrica do segmento $\overline{BD}$ recebe o nome de cotg x.

Observe na figura abaixo a semelhança entre os triângulos OBD e OX'X:



$$\begin{cases} B\hat{O}D \equiv X'\hat{X}O \\ O\hat{B}D \equiv O\hat{X}'X \end{cases}$$

Daí:

$$\frac{OB}{OX'} = \frac{OD}{OX} = \frac{BD}{X'X} \Rightarrow \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{\text{cotg } x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}}$$

Cossecante de um ângulo (ou de um arco)

Retome a semelhança entre triângulos expressa na figura anterior:

$$\frac{OB}{OX'} = \frac{OD}{OX} \Rightarrow \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{OD}{1} \Rightarrow OD = \frac{1}{\text{sen } x} \quad (1)$$

A cossecante do arco $\overset{\frown}{AX}$ é definida como a medida algébrica do segmento $\overline{OD}$. É necessário que o ponto X não esteja sobre o eixo dos cossenos.

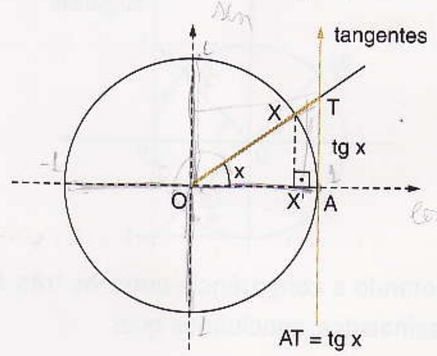
Escrevemos: cossec x = OD.

Mas, por (1): $\boxed{\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}}$

Assim, quando sen x $\neq$ 0, a cossecante de x vale o inverso de sen x.

Secante de um ângulo (ou de um arco)

Quando vimos a tangente de um ângulo, construímos uma figura que, reproduzida aqui, presta-se à definição da secante do mesmo ângulo.



À medida algébrica do segmento $\overline{OT}$ damos o nome de secante de x.

Escrevemos: sec x = OT.

Por outro lado, marcando cos x por meio do segmento $\overline{OX'}$, os triângulos OX'X e OAT são semelhantes:

$$\frac{OT}{OX} = \frac{OA}{OX'} \Rightarrow \frac{\sec x}{1} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$$

Mantém-se a restrição feita na definição da tangente: o ponto X não pode pertencer ao eixo dos senos. Nesses casos, a sec x vale o inverso do cos x.

exemplo 11

Por meio dos valores notáveis conhecidos, veja a resolução de:

a) $\text{cossec } \frac{5\pi}{4} = \frac{1}{\text{sen } \frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}$

b) $\sec \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{\cos \frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

c) $\text{cotg } \frac{5\pi}{6} = \frac{\cos \frac{5\pi}{6}}{\text{sen } \frac{5\pi}{6}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

exercícios

53. Forneça os arcos x da primeira volta para os quais não está definida:

a) $\text{tg } x$
b) $\text{cotg } x$
c) $\sec x$
d) $\text{cossec } x$

54. Analise, quanto ao crescimento em cada quadrante, cada razão:

a) tangente
b) cotangente
c) secante
d) cossecante

55. Para quais arcos da primeira volta define-se a expressão $y = \text{tg } x + \text{cotg } x$?

56. Calcule, se existir:

a) $\text{cotg } \frac{3\pi}{2}$
b) $\text{cotg } \frac{2\pi}{3}$
c) $\text{cotg } \pi$
d) $\sec \frac{3\pi}{2}$
e) $\sec \frac{2\pi}{3}$
f) $\sec \pi$
g) $\text{cossec } \frac{3\pi}{2}$
h) $\text{cossec } \frac{2\pi}{3}$
i) $\text{cossec } \pi$

57. Calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{\text{cotg } \frac{\pi}{3} + \text{tg } \frac{\pi}{3}}{\text{tg } \frac{\pi}{6} + \text{cotg } \frac{\pi}{6}}$$

58. Forneça os valores de x, na primeira volta, para os quais:

a) $\sec x = \cos x$
b) $\text{cossec } x = \text{sen } x$
c) $\text{cotg } x = \text{tg } x$

59. Sendo x um arco do 3º quadrante, qual é o sinal da expressão $y = \frac{\text{sen } x \cdot \cos x \cdot \sec x}{\text{tg } x \cdot \sec (x - \pi)}$?

60. É possível termos $\frac{3}{2} \leq \sec x < \frac{5}{2}$? E termos $-\frac{1}{2} < \sec x < \frac{1}{2}$?

61. Compare:

a) $\text{sen } 65°$ e $\text{sen } 70°$
b) $\cos 65°$ e $\cos 70°$
c) $\text{tg } 65°$ e $\text{tg } 70°$
d) $\text{cotg } 65°$ e $\text{cotg } 70°$
e) $\sec 65°$ e $\sec 70°$
f) $\text{cossec } 65°$ e $\text{cossec } 70°$

62. Dado $x \in [0, 2\pi[$, certo número natural pode ser escrito como o produto:

$$\text{sen } x \cdot \cos x \cdot \text{tg } x \cdot \text{cotg } x \cdot \sec x \cdot \text{cossec } x$$

desde que todas as razões envolvidas existam. Forneça:

a) as condições de existência;
b) o número natural.

testes de vestibulares

1. (Cefet-MG) Os valores de x, de modo que a expressão $\cos \alpha = \frac{2x^2 - 3}{5}$ exista, são:

a) $-1 \leq x \leq 1$
b) $-2 \leq x \leq 2$
c) $-1 \leq x \leq 2$
d) $1 \leq x \leq 2$
e) $-2 \leq x \leq -1$ ou $1 \leq x \leq 2$

2. (Unifor-CE) Sendo $\text{sen } x = -\frac{1}{3}$ e $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, conclui-se que, dos intervalos a seguir, o único ao qual x pode pertencer é:

a) $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$
b) $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$
c) $\left[\pi, \frac{7\pi}{6}\right]$
d) $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$

3. (UF-PB) Qual o maior valor da constante real k, para que a equação $3 \text{ sen } x + 13 = 4k$ possua solução?

a) $\frac{5}{2}$
b) 3
c) $\frac{7}{2}$
d) $\frac{11}{2}$
e) 4

4. (PUC-PR) Os valores reais de z que satisfazem a equação $\text{sen } x = z^2 - 6z + 9$ pertencem ao intervalo:

a) $0 \leq z \leq 3$
b) $-1 \leq z \leq 1$
c) $-1 \leq z \leq 3$
d) $2 \leq z \leq 4$
e) $-3 \leq z \leq 3$

5. (UF-PI) O menor valor de $\dfrac{3}{5 + \text{sen } x}$, para x real, é:

a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{3}{4}$

c) $\dfrac{1}{5}$

d) 1

e) $\dfrac{2}{7}$

6. (FEI-SP) A seqüência de valores sen $\dfrac{\pi}{2}$, sen $\dfrac{\pi}{3}$, sen $\dfrac{\pi}{4}$, ..., sen $\dfrac{\pi}{n}$, ...:

a) é estritamente crescente.
b) é estritamente decrescente.
c) possui valores negativos.
d) possui valores iguais.
e) é uma progressão aritmética.

7. (Unama-PA) O psiquiatra Içami Tiba diz que amor em excesso não é bom na educação dos filhos. A revista *Veja* quis saber se os leitores concordam com essa afirmação. O resultado:

Total de participantes: 3 700

O seno do ângulo central do setor circular, correspondente aos que *discordam* do psiquiatra, é um número compreendido entre:

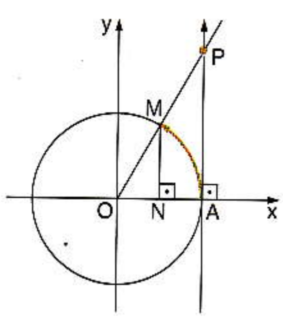
a) 0 e $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e 1

8. (Fatec-SP) Na circunferência trigonométrica abaixo, considere o arco $\widehat{AM}$, de medida $\dfrac{\pi}{3}$ radianos.



Então:

a) $AP = 1$

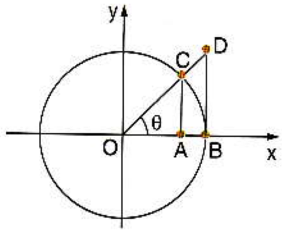
b) $MN = \sqrt{3}$

c) $ON = \sqrt{2}$

d) $AN = \dfrac{1}{3}$

e) $OP = 2$

9. (U. F. Juiz de Fora-MG) A figura abaixo mostra, no plano cartesiano, uma circunferência centrada na origem, de raio igual a 1, passando pelos pontos B e C.



Nessa figura, os pontos O, C e D são colineares, os segmentos de retas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são paralelos ao eixo y e θ é o ângulo que o segmento de reta $\overline{OD}$ faz com o eixo x.

Com respeito a essa figura, é *correto* afirmar que:

a) $\overline{OA} = \text{sen } \theta$

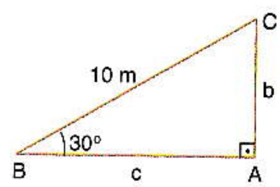
b) $\overline{OC} = \cos \theta$

c) $\overline{BD} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{OA}}$

d) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$

e) $\overline{OB}^2 + \overline{BD}^2 = 1$

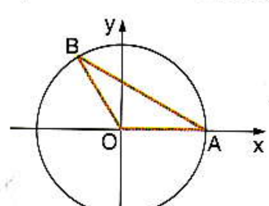
10. (Unicap-PE) No triângulo retângulo ABC da figura, o lado $\overline{BC}$ mede 10 m.



Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F) cada item a seguir:

a) $b = 10 \cdot \text{sen } 30°$
b) $c = 10 \cdot \text{sen } 60°$
c) $b = c \cdot \text{cotg } 60°$
d) $\sec 30° = \dfrac{1}{\text{sen } 60°}$
e) $\text{sen}^2\, 30° + \text{sen}^2\, 60° = 1$

11. (Unifor-CE, adaptado) Na figura abaixo tem-se o triângulo OAB, inscrito em um ciclo trigonométrico.



Se o ponto B é a extremidade do arco de medida $\dfrac{2\pi}{3}$ rad, o perímetro do triângulo OAB, em unidades de comprimento, é:

a) $2 + \sqrt{3}$

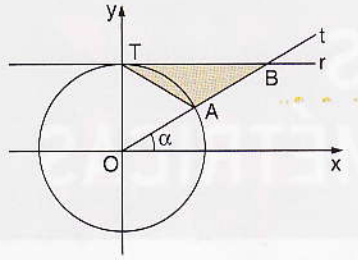
b) $3 + \sqrt{3}$

c) $1 + 2\sqrt{3}$

d) $2 + 2\sqrt{3}$

e) $4 + 2\sqrt{3}$

12. (Fuvest-SP) Na figura a seguir, a reta r passa pelo ponto $T = (0, 1)$ e é paralela ao eixo Ox. A semi-reta Ot forma um ângulo α com o semi-eixo Ox ($0° < \alpha < 90°$) e intercepta a circunferência trigonométrica e a reta r nos pontos A e B, respectivamente.



A área do $\triangle TAB$, como função de α, é dada por:

a) $\dfrac{1 - \text{sen}\,\alpha}{2} \cdot \cos\alpha$

b) $\dfrac{1 - \cos\alpha}{2} \cdot \text{sen}\,\alpha$

c) $\dfrac{1 - \text{sen}\,\alpha}{2} \cdot \text{tg}\,\alpha$

d) $\dfrac{1 - \text{sen}\,\alpha}{2} \cdot \text{cotg}\,\alpha$

e) $\dfrac{1 - \text{sen}\,\alpha}{2} \cdot \text{sen}\,\alpha$

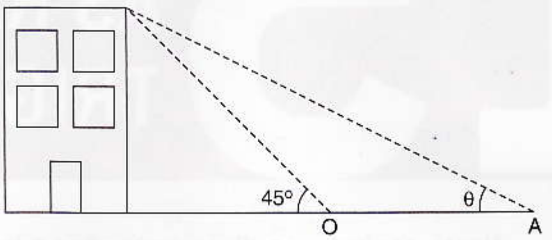
13. (Cefet-MG) Dados os números reais α e β, com $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \pi$, é *falso* afirmar que:

a) $\text{tg}\,\alpha < \text{tg}\,\beta$
b) $\cos\alpha > \cos\beta$
c) $\text{sen}\,\alpha > \text{sen}\,\beta$
d) $\sec\alpha > \sec\beta$
e) $\text{cossec}\,\alpha < \text{cossec}\,\beta$

14. (Mackenzie-SP) Se x e y são as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, tais que $\cos^2 x = 3\cos^2 y$, então a diferença $y - x$ é igual a:

a) 15°
b) 30°
c) 45°
d) 60°
e) 75°

15. (Unifor-CE) Na figura abaixo tem-se um observador O que vê o topo de um prédio sob um ângulo de 45°. A partir desse ponto, afastando-se do prédio 8 metros, ele atinge o ponto A, de onde passa a ver o topo do mesmo prédio sob um ângulo θ tal que $\text{cotg}\,\theta = \dfrac{7}{6}$.



A altura do prédio, em metros, é:

a) $30\sqrt{3}$
b) 48
c) $20\sqrt{3}$
d) 24
e) $10\sqrt{3}$

16. (Unifor-CE) Encontre o valor da expressão:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \dots\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{27} + \dots\right)$$

a) -1
b) 0
c) 1
d) $\dfrac{1}{2}$
e) $-\dfrac{3}{2}$

17. (Unit-SE) Seja ABC um triângulo retângulo em A. Sobre a hipotenusa, considere um ponto D tal que $BD = DC$ e $AB = AD$. Se β é a medida do ângulo interno $A\hat{B}D$, então $\text{tg}\,2\beta$ é igual a:

a) $2\sqrt{3}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
e) $-\sqrt{3}$

desafios

1. Para que valores de x, na primeira volta, define-se a expressão $y = \dfrac{\text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$?

2. Observando o ciclo trigonométrico abaixo, determine $\cos\alpha + 3\,\text{sen}\,\alpha$.