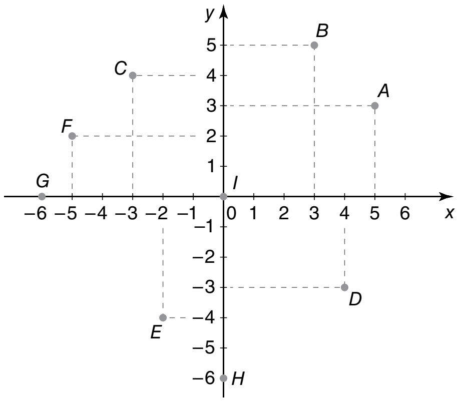
Capítulo 2
Introdução ao estudo das funções

Para pensar

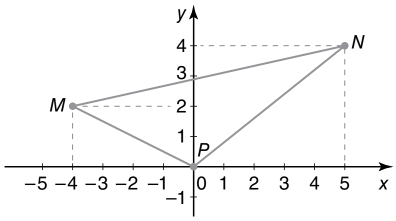
1. Resposta pessoal.

Exercícios propostos

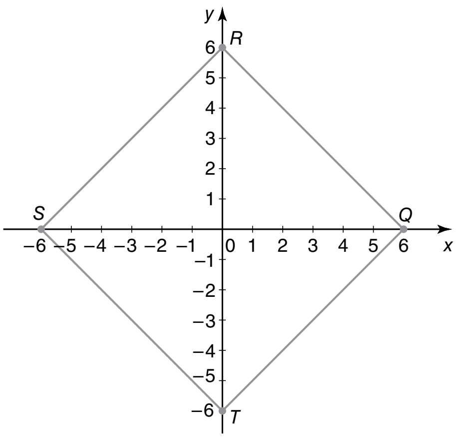
1. a)



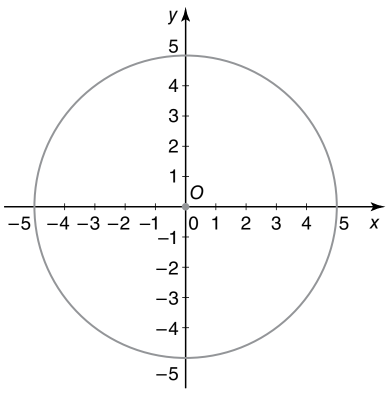
b)



c) Se $QRST$ é um quadrado, então o ponto T está em $(0, -6)$. Assim:



d)



2. a) Para que A pertença ao eixo das ordenadas, $2p - 6$ deve ser zero. Portanto:

$2p - 6 = 0 \Rightarrow 2p = 6$

$\therefore p = 3$

b) Para que B pertença ao eixo das abcissas, $3q^2 - 12$ deve ser zero. Logo:

$3q^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3q^2 = 12$

$\therefore q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

c) Para que C pertença ao primeiro quadrante, tanto a abscissa quanto a ordenada devem ser positivas. No caso, a abscissa já é maior que zero. Resta, então, que:

$3r - 2 > 0 \Rightarrow 3r > 2$

$\therefore r > \frac{2}{3}$

d) Para que D pertença ao segundo quadrante, a abscissa deve ser negativa e a ordenada, positiva. Assim:

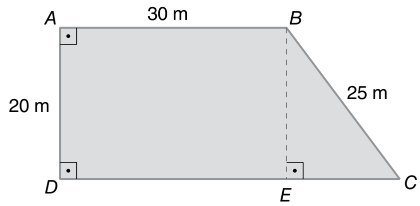
$$\begin{cases} 6s + 5 < 0 \\ 4 - 2s > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s < -\frac{5}{6} \\ s < 2 \end{cases}$$

$\therefore s < -\frac{5}{6}$

3. $\begin{cases} 3a - 2b = 10 \\ a + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{32}{5}$ e $b = \frac{23}{5}$

4. Fixando o ponto D na origem do plano cartesiano, com $\overline{DC}$ contido no semieixo real positivo Ox, temos: $A(0, 20)$, $B(30, 20)$, $D(0, 0)$

Resta determinar as coordenadas do ponto C.



Considerando o triângulo retângulo BCE, chamando de x a medida EC e usando o teorema de Pitágoras, temos:

$20^2 + x^2 = 25^2 \Rightarrow x^2 = 625 - 400$

$\therefore x^2 = 225 \Rightarrow x = \pm 15$

Como EC não pode ser negativo, $EC = 15$ m. Então, a medida CD é $(30 + 15)$ m $= 45$ m. Então, $C(45, 0)$. Logo, $A(0, 20)$, $B(30, 20)$, $C(45, 0)$, $D(0, 0)$.

5. Considerando um triângulo retângulo de hipotenusa AB e de catetos sobre a malha do mapa, temos:

$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

A escala do mapa é 1 : 10.000.

Logo, $AB = 50.000$ cm $= 500$ m.

6. I. a) $B(-30°, -60°)$
b) $D(0°, +30°)$
c) $C(+30°, -90°)$
d) $F(+30°, +90°)$
e) $A(+60°, +30°)$
f) $E(-30°, +120°)$

II. Ásia

7. A área do retângulo é determinada pelo produto entre seu comprimento e sua largura. Como o comprimento é 30 m e a largura é x, temos:

$y = 30x$

8. a) Ele consumiu 900 L − 300 L = 600 L durante o mergulho. Como o consumo foi de 15 litros por minuto, o número de minutos é determinado por $\frac{600}{15} = 40$.
Assim, ele esteve submerso por 40 minutos.

b) Como o consumo foi de 15 litros por minuto, então $C = 15t$.

c) Como o total era 900 litros e o consumo, de 15 litros por minuto, então $Q = 900 - 15t$.

d) Queremos $C = Q$. Então:
$15t = 900 - 15t \Rightarrow t = 30$
Então, depois de 30 minutos as quantidades se igualaram.

9. a) Como a velocidade de *B* é 200 km/h maior que a de *A*, então $y = 200x$.

b) Nesse caso, temos $x = 6$. Então, $y = 200 \cdot 6 = 1.200$.
Portanto, a distância é 1.200 metros.

c) Aqui, temos $y = 500$. Logo: $500 = 200x \Rightarrow x = 2{,}5$
Assim, a distância entre os carros era de 500 m depois de 2,5 minutos da ultrapassagem.

10. Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$(AB)^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow AB = 4$
A área do triângulo *ACE* é equivalente à área do retângulo *ABCD* menos as áreas dos triângulos *ADE* e *ABC*. Então:

$$y = 3 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{3x}{2} \Rightarrow y = 12 - 6 - \frac{3x}{2}$$

$$\therefore\ y = 6 - \frac{3x}{2}$$

11. a) Sim, pois para cada dia do mês há apenas um nome do dia da semana correspondente.

b) Não, pois para cada nome de dia da semana há mais de um dia do mês correspondente.

12. a) $(0{,}9)^3 \cdot 20.000 = 14.580$
Logo, após 3 anos de uso o automóvel valia R$ 14.580,00.

b) $(0{,}9)^x \cdot 20.000$

c) $y = 20.000 \cdot (0{,}9)^x$

d) Sim, pois a cada tempo de uso (em ano) associa-se um único valor de mercado do automóvel.

13. a)

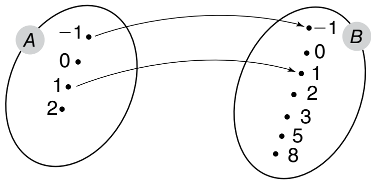
Horas semanais trabalhadas	Ganho pelas horas trabalhadas (R$)
20	$20 \cdot 12{,}00 = 240{,}00$
32	$32 \cdot 12{,}00 = 384{,}00$
44	$44 \cdot 12{,}00 = 528{,}00$
46	$44 \cdot 12{,}00 + 2 \cdot 15{,}60 = 559{,}20$
50	$44 \cdot 12{,}00 + 6 \cdot 15{,}60 = 621{,}60$

b) Sim, pois a cada número de horas semanais trabalhadas associa-se um único valor ganho.

c) $y = 12x$, com $0 \leqslant x \leqslant 44$

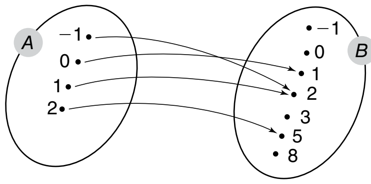
d) $y = 12 \cdot 44 + 15{,}60 \cdot (x - 44)$, com $x > 44 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 528 + 15{,}60(x - 44)$, com $x > 44$

14. a)



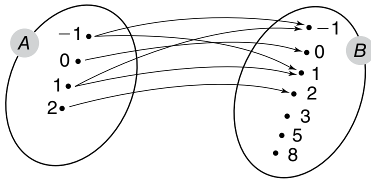
Não é função de *A* em *B*, pois há elemento de *A* sem correspondente em *B*.

b)



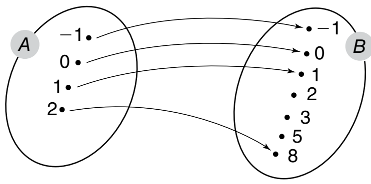
É função de *A* em *B*.

c)



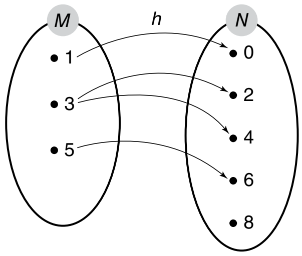
Não é função de *A* em *B*, pois há elemento de *A* com mais de um correspondente em *B*.

d)



É função de *A* em *B*.

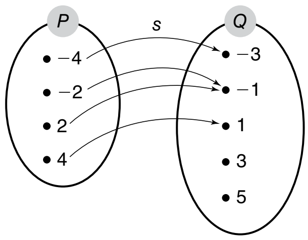
15. a)



b) $D(h) = M = \{1, 3, 5\}$
$CD(h) = N = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
$Im(h) = \{0, 2, 4, 6\}$

c) A relação *h* não é função de *M* em *N*, pois existe elemento em *M* (o elemento 3) que está associado, por *h*, a mais de um elemento de *N*.

16. a)



b) $D(s) = P = \{-4, -2, 2, 4\}$
$CD(s) = Q = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$
$Im(s) = \{-3, -1, 1\}$

c) A relação s é função de P em Q, pois qualquer elemento de P está associado, por s, a um único elemento de Q.

17. a) $f(-2) = -7$
b) $f(0) = -1$
c) $f(3) + f(5) = 6 + 6 = 12$
d) $f(x) = -7 \Rightarrow x = -2$
e) $f(x) = 6 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 5$

18. a) $f(0) = 6 - 2 \cdot 0 = 6 - 0 = 6$
b) $f(3) = 6 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$
c) $f(-5) = 6 - 2 \cdot (-5) = 6 + 10 = 16$
d) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 6 - 1 = 5$
e) $6 - 2x = 8 \Rightarrow -2x = 2$
$\therefore x = -1$
f) $6 - 2x = -4 \Rightarrow -2x = -10$
$\therefore x = 5$
g) $6 - 2x = x \Rightarrow 6 = 3x$
$\therefore x = 2$

19. a) $f(-1) = \frac{6-(-1)}{(-1)^2} = \frac{7}{1} = 7$
b) $f(3) = \frac{6-3}{3^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
c) $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{6 - \frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{9}{16}} = \frac{21}{4} \cdot \frac{16}{9} = \frac{28}{3}$
d) $\frac{6-x}{x^2} = 1 \Rightarrow 6 - x = x^2$
$\therefore x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -3$
e) $\frac{6-x}{x^2} = 0 \Rightarrow 6 - x = 0$
$\therefore x = 6$
f) $\frac{6-x}{x^2} = -2 \Rightarrow 6 - x = -2x^2$
$\therefore -2x^2 + x - 6 = 0$
Não existe valor para x que satisfaça a situação, pois $\Delta = -47$.

20. Vamos calcular a imagem de cada elemento do domínio:
$g(1) = 1^3 - 1 + 1 = 1$
$g(-1) = (-1)^3 - (-1) + 1 = 1$
$g(2) = 2^3 - 2 + 1 = 7$
$g(-2) = (-2)^3 - (-2) + 1 = -5$
$g(0) = 0^3 - 0 + 1 = 1$
$g(3) = 3^3 - 3 + 1 = 25$
Logo: $Im(g) = \{-5, 1, 7, 25\}$

21. $\frac{x-1}{x+5} = 2 \Rightarrow x = -11$
$\frac{x-1}{x+5} = 0 \Rightarrow x = 1$
$\frac{x-1}{x+5} = -\frac{41}{7} \Rightarrow x = -\frac{33}{8}$
Logo, o domínio é: $A = \left\{-11, 1, -\frac{33}{8}\right\}$

22. a) V, pois: $x = 3 \Rightarrow f(3) = \frac{3}{3^2+1} = \frac{3}{10}$
b) V, pois: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0}{0^2+1} = 0$
c) F, pois: $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$
d) V, pois: $\frac{a}{a^2+1} = 2 \Rightarrow 2a^2 + 2 = a$
$\therefore 2a^2 - a + 2 = 0$
Como o discriminante é negativo ($\Delta = -15$), essa equação não possui raízes reais.
e) V, pois: $\frac{k}{k^2+1} = \frac{2}{5} \Rightarrow 2k^2 + 2 = 5k$
$\therefore 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Rightarrow k = 2$ ou $k = \frac{1}{2}$

23. a) Para $x = 100$, temos:
$P = 50 + \frac{200}{100} = 52$
Logo, o comprador deve pagar 52 dólares por saca.
b) Para $x = 200$, temos:
$P = 50 + \frac{200}{200} = 51$
Logo, o comprador deve pagar 51 dólares por saca.
c) Para $P = 54$, temos:
$54 = 50 + \frac{200}{x} \Rightarrow x = 50$
Logo, o comprador adquiriu 50 sacas.

24. a) $N(4) = \frac{200 \cdot 4^2}{5 + 3 \cdot 4} = \frac{3.200}{17} \approx 188$
Portanto, em 4 minutos são enviados aproximadamente 188 *spams*.
b) $\frac{200t^2}{5+3t} = 250 \Rightarrow 200t^2 = 1.250 + 750t$
$\therefore 4t^2 - 15t - 25 = 0 \Rightarrow t = 5$ ou $t = -1{,}25$
Assim, 250 *spams* são enviados em 5 minutos.

25. Temos $L_T(q) = F_T(q) - C_T(q)$, $F_T(q) = 5q$ e $C_T(q) = 2q + 12$. Então:
$L_T(q) = 5q - (2q + 12) \Rightarrow L_T(q) = 5q - 2q - 12$
$\therefore L_T(q) = 3q - 12$
Para que não tenha prejuízo, o lucro tem que ser no mínimo igual a zero. Logo:
$0 = 3q - 12 \Rightarrow q = 4$
Alternativa **d**.

26. $\begin{cases} f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 = 16 \\ f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) = 7 \end{cases}$
Temos, portanto, o sistema:
$\begin{cases} 4a + 2b = 16 \\ a - b = 7 \end{cases}$
Resolvendo-o, obtemos: $a = 5$ e $b = -2$

27. a) $f(3 \cdot 1) = f(3) + f(1) \Rightarrow f(3) = f(3) + f(1)$
$\therefore 1 = 1 + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$
b) $f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) \Rightarrow f(9) = 2 \cdot f(3)$
$\therefore f(9) = 2 \cdot 1 \Rightarrow f(9) = 2$
c) $f(3 \cdot 9) = f(3) + f(9) \Rightarrow f(27) = 1 + 2$
$\therefore f(27) = 3$

d) $f\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f(1) = f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$\therefore\ 0 = 1 + f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = -1$

e) $f(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{3}) \Rightarrow f(3) = 2 \cdot f(\sqrt{3})$

$\therefore\ 1 = 2 \cdot f(\sqrt{3}) \Rightarrow f(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$

28. a) $f(-4) = 8$
b) $f(-2) = 0$
c) $f(0) = -4$
d) $f(1) = 5$
e) $f(3)$ não está definida, pois $3 \notin D(f)$.

29. a) 7%
b) 5%
c) 3%
d)

Mês	Taxa de inflação (%)
1	6
2	8
3	9
4	7
5	6
6	9
7	9
8	9
9	8
10	6
11	5
12	9

e) Sim, pois cada mês está associado a um único valor da taxa de inflação.

30. Calculando o lucro (valor da venda menos o valor da compra) de cada investidor, temos:

Investidor 1: $460 - 150 = 310$

Investidor 2: $200 - 150 = 50$

Investidor 3: $460 - 380 = 80$

Investidor 4: $100 - 460 = -360$

Investidor 5: $200 - 100 = 100$

Portanto, o investidor 1 fez o melhor negócio.

Alternativa **a**.

31. a) Aplicando o teorema de Tales:

$\frac{v - 20}{15} = \frac{48 - v}{20} \Rightarrow 20v - 400 = 720 - 15v$

$\therefore\ 35v = 1.120 \Rightarrow v = 32$

O volume após 30 s de abastecimento era de 32 litros.

b) Chamando de x a quantidade inicial de combustível, temos:

$\frac{48 - 20}{50 - 15} = \frac{20 - x}{15 - 0} \Rightarrow \frac{28}{35} = \frac{20 - x}{15}$

$\therefore\ 35x = 280 \Rightarrow x = 8$

Então, havia 8 litros de combustível no tanque no início do abastecimento.

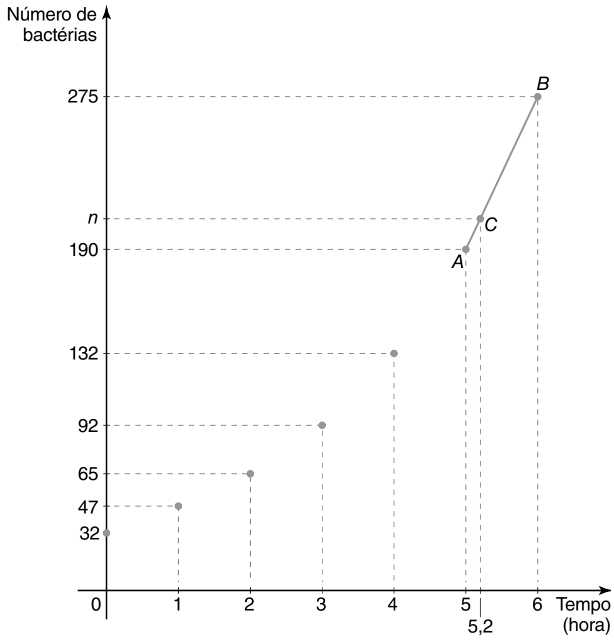
32. a) (0, 32) é um ponto do gráfico; logo, no instante zero havia 32 bactérias.

b) $275 - 190 = 85$
Logo, da 5ª para a 6ª hora, a população aumentou em 85 bactérias.

c) $190 - 92 = 98$
Logo, da 3ª para a 5ª hora, a população aumentou em 98 bactérias.

d) Sim, pois a cada instante está associado a um único número de bactérias.

e) O número n de bactérias no instante 5 h 12 min, que equivale a 5,2 h, pode ser obtido aproximando-se o gráfico por um segmento de reta que una os pontos de abscissas 5 e 6, conforme mostra a figura:



As retas paralelas ao eixo Ox pelos pontos A, B e C concorrem com as transversais Oy e $\overleftrightarrow{AB}$. Assim, pelo teorema de Tales, temos:

$\frac{AC}{AB} = \frac{n - 190}{275 - 190}$ (I)

Analogamente, as retas paralelas ao eixo Oy pelos pontos A, B e C concorrem com as transversais Ox e $\overleftrightarrow{AB}$. Assim, pelo teorema de Tales, temos:

$\frac{AC}{AB} = \frac{5{,}2 - 5}{6 - 5}$ (II)

De (I) e (II) concluímos:

$\frac{n - 190}{275 - 190} = \frac{5{,}2 - 5}{6 - 5} \Rightarrow \frac{n - 190}{85} = \frac{0{,}2}{1}$

$\therefore\ n - 190 = 17 \Rightarrow n = 207$

Logo, 5 horas e 12 minutos após o início da contagem havia, aproximadamente, 207 bactérias.

33. Observando o gráfico, temos:

a) O nível da superfície do rio começou a subir após 1 hora.

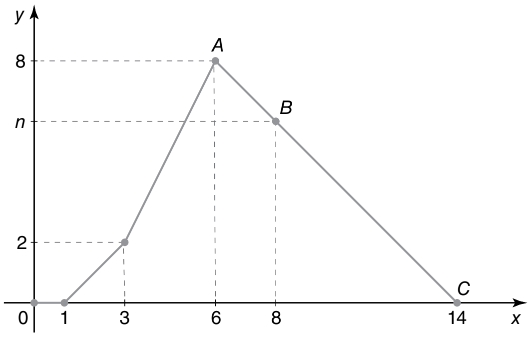
b) O nível do rio 3 horas após o início da chuva estava 2 metros acima do normal.

c) O rio atingiu o nível máximo 6 horas após o início da chuva.

d) O nível máximo do rio chegou a 8 metros acima do normal.

e) O nível do rio voltou ao normal 8 horas após ter atingido o nível máximo.

f) Vamos considerar o gráfico abaixo:



Se o rio esteve n metros acima do nível normal, 8 horas após o início da chuva, temos, pelo teorema de Tales:

$$\begin{cases} \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{14-6}{8-6} \\ \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{8-0}{8-n} \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{2} = \frac{8}{8-n}$$

$\therefore\ n = 6$

Logo, 8 horas após o início da chuva, o nível do rio estava 6 m acima do nível normal.

34. Não, porque o elemento 0 (zero) do domínio está associado a mais de um elemento do contradomínio (ele está associado aos elementos 2 e 4).

35. **a)** Sim, pois cada número real está associado a um único número, que é o 4.

b) Não, pois o elemento 10, único elemento do domínio, está associado a mais de um número real (está associado a infinitos números reais).

c) Sim, pois cada número real está associado a um único número real.

36. **a)** $D(f) =]-1, 6]$; $Im(f) = \{-2\} \cup [0, 7]$

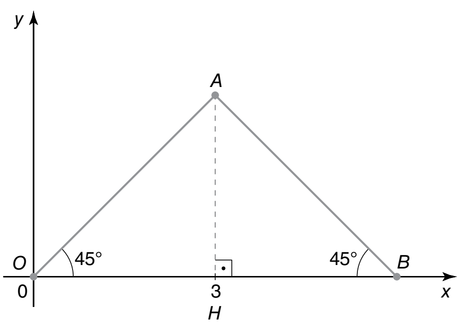
b) $D(g) =]1, 7]$; $Im(g) = [-2, 4] \cup [5, 11[$

37. Resposta pessoal. É possível escolher, por exemplo, o seguinte domínio:

$D(f) = [-2, 3[\cup]4, 6]$

38. O triângulo é isósceles, então a abscissa de B é 6.

Considerando o triângulo ABH na figura abaixo, nota-se que ele também é isósceles, pois o ângulo $H\widehat{A}B$ mede 45°, já que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Portanto, $AH = BH = 3$, ou seja, a ordenada do ponto A é 3.



Portanto, $D(f) = [0, 6]$ e $Im(f) = [0, 3]$.

39. **a)** Condição de existência: $x \geqslant 0$. Logo: $D(f) = \mathbb{R}_+$

b) Existe $f(x)$ para qualquer x real. Logo: $D(f) = \mathbb{R}$

c) Existe $f(x)$ para qualquer x real. Logo: $D(f) = \mathbb{R}$

d) Condição de existência: $x \neq 3$ e $x \neq -3$.

Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ e } x \neq -3\}$

e) Existe $f(x)$ para qualquer x real. Logo: $D(f) = \mathbb{R}$

f) Condição de existência: $x \neq 6$ e $x \neq -6$ e $x \geqslant 2$

Essa condição pode ser expressa, simplesmente, por $x \geqslant 2$ e $x \neq 6$.

Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2 \text{ e } x \neq 6\}$

g) Condição de existência: $x \neq 0$. Logo: $D(f) = \mathbb{R}^*$

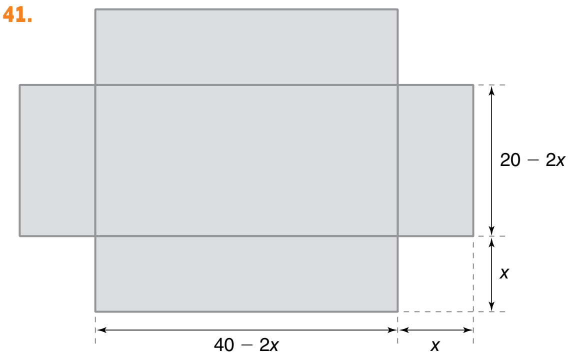
40. Devemos ter $x^2 - 2x + k \neq 0$ para qualquer x real. Ou seja, a equação $x^2 - 2x + k = 0$ não deve ter raízes reais. Para isso, seu discriminante deve ser negativo:

$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k < 0 \Rightarrow 4 - 4k < 0$

$\therefore\ 4k > 4 \Rightarrow k > 1$

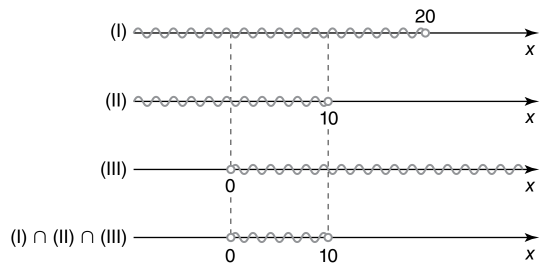
Alternativa **a**.

41.



a) $V(x) = (40 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x$

b) $\begin{cases} 40 - 2x > 0 \\ 20 - 2x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 20 \text{ (I)} \\ x < 10 \text{ (II)} \\ x > 0 \text{ (III)} \end{cases}$



Portanto, $D(V) =]0, 10[$.

42. **a)** $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 3$

Logo, as raízes de f são 1 e 3.

b) $5x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{5}$

Logo, a única raiz da função é $-\dfrac{3}{5}$.

c) $\sqrt{x^2 - 9} = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$

$\therefore\ x = 3$ ou $x = -3$

Logo, as raízes de f são 3 e -3.

d) $x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0$

$\therefore\ x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$

Logo, as raízes de f são 0, 2 e -2.

e) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$
Logo, a função não tem raiz real, pois o quadrado de um número real nunca é negativo.

f) $x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0$
Logo, as raízes de f são 0, 2 e 4.

g) $y = -3$ é uma função constante, isto é, paralela ao eixo das abscissas.
Logo, a função não tem raiz, pois não existe x tal que $f(x) = 0$.

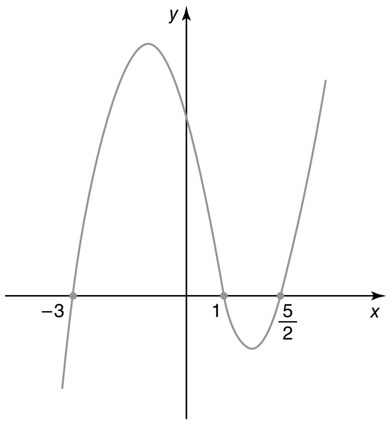
43. Observando o gráfico, temos: $f(-6) = 0$, $f(-3) = 0$, $f(0) = 0$, $f(3) = 0$ e $f(6) = 0$
Logo, as raízes de f são: -6, -3, 0, 3 e 6.

44. a) As abscissas dos pontos onde o gráfico intercepta o eixo Ox são as raízes da equação:
$x^2 - 6x + 5 = 0$
$\therefore x = 1$ ou $x = 5$

b) A ordenada do ponto onde o gráfico intercepta o eixo Oy é $f(0)$, ou seja:
$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$

c) Pelo item **a**, as raízes são: $x = 1$ ou $x = 5$

45. Resposta possível:



46. a) $h(t) = 0 \Rightarrow 3t - t^2 = 0$
$\therefore t = 0$ ou $t = 3$
Logo, as raízes da função h são 0 e 3.

b) As raízes indicam os instantes em que a altura da bola, em relação ao campo, foi igual a zero. Assim, no momento do chute ($t = 0$) e 3 segundos após o chute ($t = 3$), a bola esteve em contato com o campo.

c) $h(1{,}5) = 3 \cdot 1{,}5 - (1{,}5)^2 = 2{,}25$
Logo, a altura da bola em relação ao campo, 1,5 segundo após o chute, era 2,25 m.

d) $h(t) = 4 \Rightarrow 3t - t^2 = 4$
$\therefore t^2 - 3t + 4 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7$
Como $\Delta < 0$, concluímos que a equação não possui raiz real, o que significa que a bola não atingiu 4 m de altura.

47. a) $h(0) = \dfrac{200 + 60 \cdot 0 - 20 \cdot 0^2}{0 + 1} \Rightarrow h(0) = 200$
Logo, o avião estava a 200 m de altitude quando iniciou o processo de descida.

b) $\dfrac{200 + 60t + 20t^2}{t + 1} = 0 \Rightarrow 200 + 60t - 20t^2 = 0$
$\therefore t^2 - 3t - 10 = 0 \Rightarrow t = 5$ ou $t = -2$
Como a variável t representa o tempo, convém apenas a raiz positiva 5.

c) A raiz 5 obtida no item **b** representa o tempo, em minuto, decorrido do início do processo de descida ao momento do pouso (quando sua altitude é nula).

48. a) $f(x) = 0$ quando $x = -4$ ou $x = 1$ ou $x = 3$ ou $x = 5$.
b) $f(x) > 0$ se $x \in\ ]-4, 1[\ \cup\ ]3, 5[$.
c) $f(x) \geqslant 0$ se $x \in [-4, 1] \cup [3, 5]$.
d) $f(x) < 0$ se $x \in [-6, -4[\ \cup\ ]1, 3[$.
e) $f(x) \leqslant 0$ se $x \in [-6, -4] \cup [1, 3]$.

49. a) F
b) V
c) V
d) V
e) F
f) V
g) V
h) F
i) V
j) V
k) V

50. a) Para que $f(x) \cdot g(x) < 0$, devemos ter:
I. $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$ ou
II. $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$

Pelo gráfico, temos:
I. acontece quando $-\dfrac{7}{4} < x < \dfrac{3}{2}$.
II. acontece quando $\dfrac{3}{2} < x \leqslant 4$.

Assim, $x \in \left]-\dfrac{7}{4}, \dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}, 4\right]$.

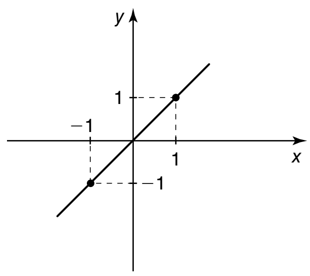
b) Para que $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$, devemos ter:
I. $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ ou
II. $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$

Pelo gráfico, temos:
I. acontece quando $-2 \leqslant x < -\dfrac{7}{4}$
II. não acontece.

Assim, $x \in \left[-2, -\dfrac{7}{4}\right[$.

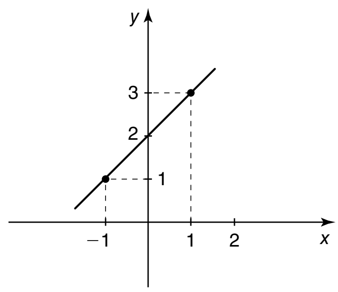
51. a)

x	y
−1	−1
0	0
1	1



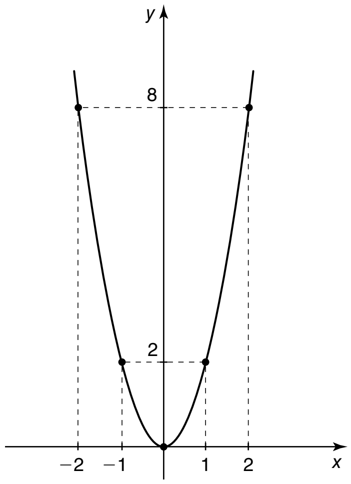
b)

x	y
−1	1
0	2
1	3



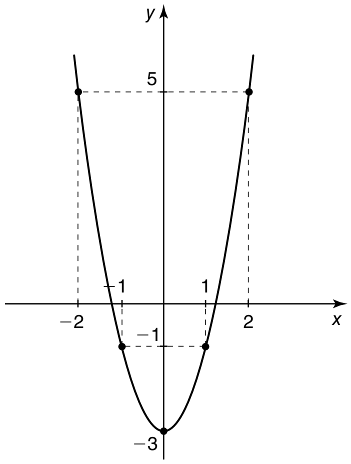
c)

x	y
-2	8
-1	2
0	0
1	2
2	8



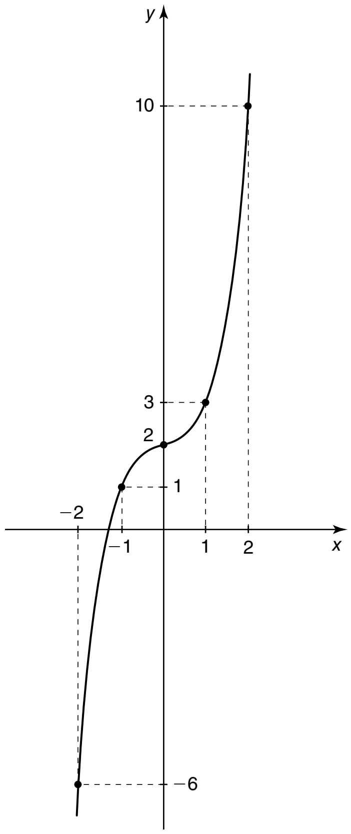
d)

x	y
-2	5
-1	-1
0	-3
1	-1
2	5



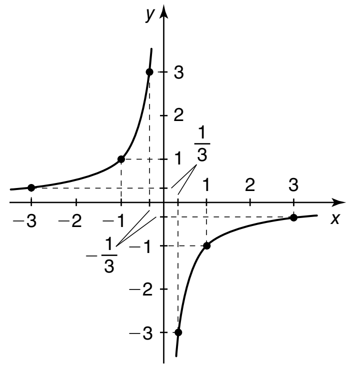
e)

x	y
-2	-6
-1	1
0	2
1	3
2	10



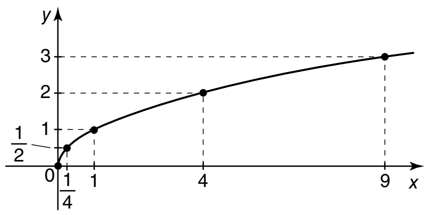
f)

x	y
-3	$\frac{1}{3}$
-1	1
$-\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{3}$	-3
1	-1
3	$-\frac{1}{3}$



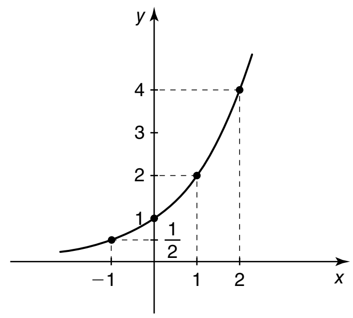
g)

x	y
0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	1
4	2
9	3



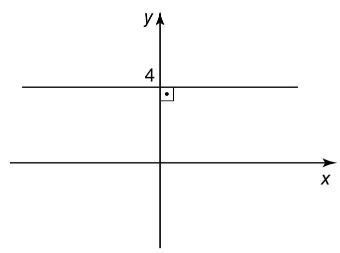
h)

x	y
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4



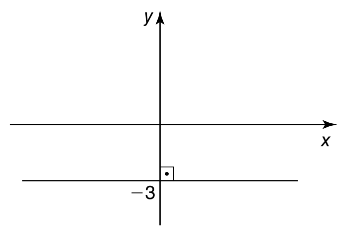
i) $y = 4$

x	y
0	4
2	4



j) $y = -3$

x	y
0	-3
2	-3



52. a) **I.** Se $x = 0$, então $y = 5 \cdot 0 = 0$

II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = 5$

Logo, em f, x e y são diretamente proporcionais.

b) **I.** Se $x = 0$, então $y = \frac{0}{3} = 0$

II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$

Logo, em g, x e y são diretamente proporcionais.

c) **I.** Se $x = 0$, então $y = 0 + 3 = 3 \neq 0$

Logo, em h, x e y não são diretamente proporcionais.

d) $0 \notin D(s)$

O fato de $0 \notin D(s)$ não descarta a possibilidade de x e y serem diretamente proporcionais, pois (I) é condicional, isto é, se $x = 0$, então $y = 0$.

Como, neste caso, x não pode ser zero, as variáveis x e y serão diretamente proporcionais se for obedecida apenas a condição II.

Temos:

Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = 4$

Logo, em s, x e y são diretamente proporcionais.

e) (Ver comentário no item **d**.)

Como, neste caso, x não pode ser zero, as variáveis x e y serão diretamente proporcionais se for obedecida apenas a condição II.

Temos:

Se $x \in [1, 10]$, então $\frac{y}{x} = \frac{1}{5}$

Logo, em t, x e y são diretamente proporcionais.

f) **I.** Se $x = 0$, então $y = 0^2 = 0$

II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = x$, em que x é variável.

Logo, em u, x e y não são diretamente proporcionais.

g) **I.** Se $x = 0$, então $y = 0$

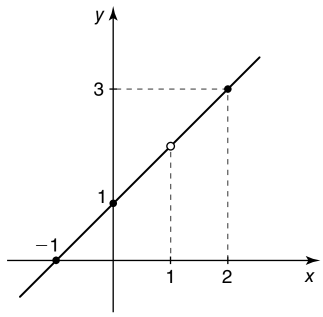
II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = 0$

Logo, em v, x e y são diretamente proporcionais.

53. O gráfico de uma função $y = f(x)$, em que x e y são diretamente proporcionais, está contido em uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano.

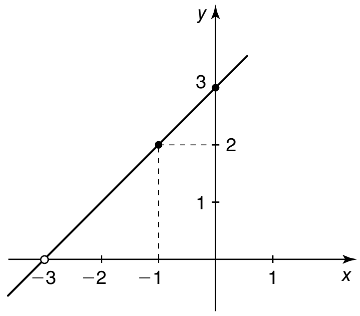
54. a) $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$, se $x \neq 1$

Logo, $f(x) = x + 1$, com $x \neq 1$.



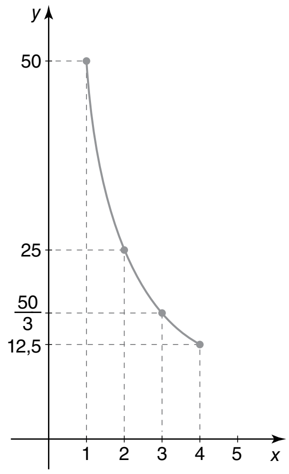
b) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} = x + 3$, se $x \neq -3$

Logo, $g(x) = x + 3$, com $x \neq -3$.



55. a) $C = \frac{50}{V}$, sendo $1 \leqslant V \leqslant 4$.

b)



56. a) f é crescente em $[-1, 1]$.

b) f é decrescente em $[-3, -1]$ e $[1, 3]$.

c) f é constante em $[3, 5]$.

57. a) f é constante.

b) g é crescente.

c) h é decrescente.

58. a) $t_1 > t_2 \Rightarrow 6t_1 > 6t_2$

$\therefore 6t_1 + 60 > 6t_2 + 60 \Rightarrow v(t_1) > v(t_2)$

b) acelerado

59. a) $t_1 > t_2 \Rightarrow -10t_1 < -10t_2$

$\therefore 90.000 - 10t_1 < 90.000 - 10t_2 \Rightarrow v(t_1) < v(t_2)$

b) esvaziada

60. Na época citada, a função era decrescente, ou seja, o preço diminuía ao longo do tempo. Portanto, a oferta do feijão-preto era maior que a demanda.

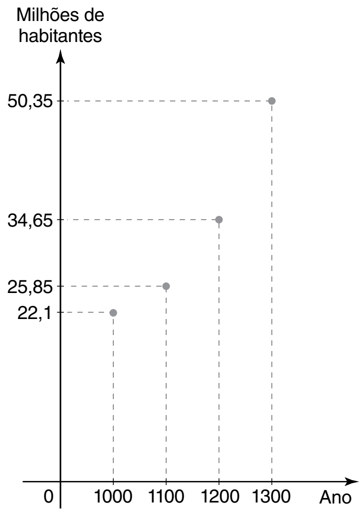
61. A taxa média de variação é dada por:

$\frac{50 - 32}{10,5 - 10}$ km/h $= 36$ km/h

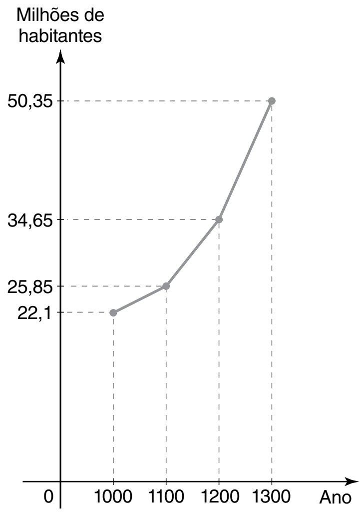
62. A taxa média de variação é dada por:

$\frac{2 - 8}{23 - 19}$ °C/h $= -1,5$ °C/h

63. a)



b)



c) $\dfrac{25{,}85 - 22{,}1}{1.100 - 1.000} = \dfrac{3{,}75}{100} = 0{,}0375$

Logo, a taxa média anual de crescimento nesse período foi de 0,0375 milhões de habitantes por ano, ou 37,5 mil habitantes por ano.

d) $\dfrac{34{,}65 - 25{,}85}{1.200 - 1.100} = \dfrac{8{,}8}{100} = 0{,}088$

Logo, a taxa média anual de crescimento nesse período foi de 0,088 milhões de habitantes por ano, ou 88 mil habitantes por ano.

e) $\dfrac{50{,}35 - 34{,}65}{1.300 - 1.200} = \dfrac{15{,}7}{100} = 0{,}157$

Logo, a taxa média anual de crescimento nesse período foi de 0,157 milhões de habitantes por ano, ou 157 mil habitantes por ano.

64. O primeiro gráfico é o que melhor representa a situação, pois mostra um maior crescimento entre 10 e 17 anos, que diminui no decorrer do tempo, até ficar constante.

Alternativa **a**.

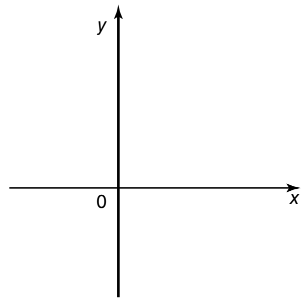
Exercícios complementares

Exercícios técnicos

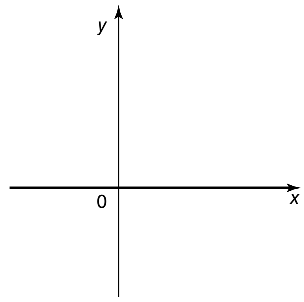
1. A pertence ao eixo Oy se, e somente se, $\dfrac{4t}{5} + 1 = 0$.

Logo, $t = -\dfrac{5}{4}$.

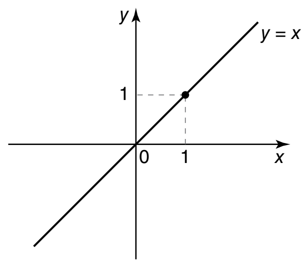
2. a) Os pontos (x, y) do plano cartesiano, com x = 0, são representados pelo eixo das ordenadas:



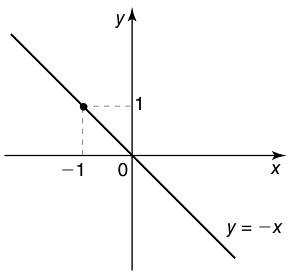
b) Os pontos (x, y) do plano cartesiano, com y = 0, são representados pelo eixo das abscissas:



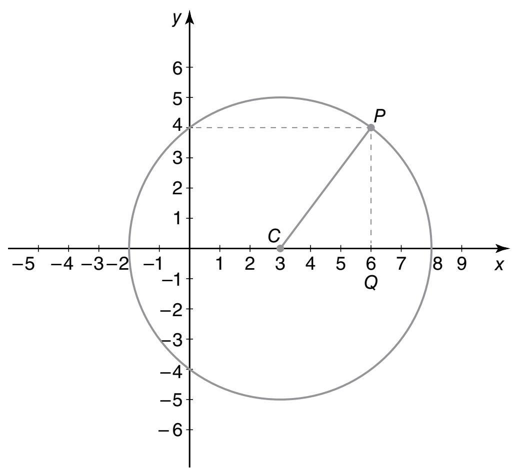
c) Os pontos (x, y) do plano cartesiano, com y = x, são representados pela bissetriz dos quadrantes ímpares:



d) Os pontos (x, y) do plano cartesiano, com y = −x, são representados pela bissetriz dos quadrantes pares:



3. Considerando o triângulo CPQ da figura, sabemos que ele é retângulo em Q e que CQ = 3 e PQ = 4.



Sendo x a medida CP (que é o raio da circunferência), temos:

$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 25$

$\therefore\ x = 5$ ou $x = -5$ (não convém)

Logo, o raio da circunferência mede 5.

4. Como $B(0,10)$, o raio da circunferência é 10.
Considerando o triângulo OSP, retângulo em P, temos que $OS = 10$ (raio) e que $PS = 8$ (lado do quadrado). Sendo x a medida OP e aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow x = 6$

Assim:

$A(10, 0)$, $P(6, 0)$, $Q(14, 0)$, $R(14, 8)$ e $S(6, 8)$.

5. $\dfrac{f(2)}{f(4) - f(3)} = f(-1) \Rightarrow \dfrac{5}{k - 8} = 5$

$\therefore\ 5k - 40 = 5 \Rightarrow k = 9$

6. a) $f(5) = 3 \cdot 5^2 - 5 = 70$

b) $3x^2 - x = 2 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{6} \Rightarrow x = 1$ ou $x = -\dfrac{2}{3}$

7. a) $f(2 \cdot 3) = f(2) \cdot f(3) \Rightarrow f(6) = 5 \cdot 8$

$\therefore\ f(6) = 40$

b) $f(2 \cdot 2) = f(2) \cdot f(2) \Rightarrow f(4) = 5 \cdot 5$

$\therefore\ f(4) = 25$

c) $f(3 \cdot 3) = f(3) \cdot f(3) \Rightarrow f(9) = 8 \cdot 8 = 64$

$\therefore\ f(9 \cdot 3) = f(9) \cdot f(3) \Rightarrow f(27) = 64 \cdot 8$

$\therefore\ f(27) = 512$

d) $f(2 \cdot 4) = f(2) \cdot f(4) \Rightarrow f(8) = 5 \cdot 25 = 125$

$\therefore\ f(8 \cdot 9) = f(8) \cdot f(9) \Rightarrow f(72) = 125 \cdot 64$

$\therefore\ f(72) = 8.000$

e) $f(2 \cdot 1) = f(2) \cdot f(1) \Rightarrow 5 = 5 \cdot f(1)$

$\therefore\ f(1) = 1$

f) $f\left(4 \cdot \dfrac{1}{4}\right) = f(4) \cdot f\left(\dfrac{1}{4}\right) \Rightarrow f(1) = f(4) \cdot f\left(\dfrac{1}{4}\right)$

$\therefore\ 1 = 25 \cdot f\left(\dfrac{1}{4}\right) \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{25}$

8. a) V
b) V
c) F
d) V
e) F
f) V

9. O gráfico que não representa uma função é aquele que possui pelo menos um valor de x associado a mais de um valor de y.
Alternativa **c**.

10. Não, pois há mais de um valor de y associado a um único valor de x.

11. O diâmetro da circunferência é 8, logo, seu raio é 4 e o valor máximo de y no gráfico é 4.
Portanto, $D(f) = [0, 8]$ e $Im(f) = [0, 4]$.

12. a) $\dfrac{3}{x^4 - 5x^2 + 4} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $x^4 - 5x^2 + 4 \neq 0$

Vamos encontrar as raízes da equação:

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Fazendo $x^2 = y$, temos:

$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y = 4$ ou $y = 1$

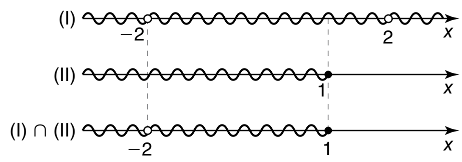
Como $x^2 = y$, temos:

- $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4$
  $\therefore\ x = 2$ ou $x = -2$
- $y = 1 \Rightarrow x^2 = 1$
  $\therefore\ x = 1$ ou $x = -1$

Logo: $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$

b) $\dfrac{5}{x^4 - 16} + \sqrt{1 - x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e

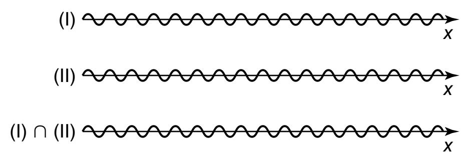
$\underbrace{x^4 - 16 \neq 0}_{\text{(I)}}$ e $\underbrace{1 - x \geqslant 0}_{\text{(II)}}$



$\therefore\ D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ e } x \neq -2\}$

c) $\dfrac{1}{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e

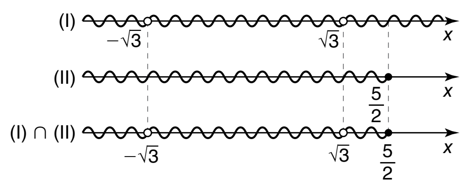
$\underbrace{x^2 + 3 \neq 0}_{\text{(I)}}$ e $\underbrace{x^2 + 1 \geqslant 0}_{\text{(II)}}$



$\therefore\ D(u) = \mathbb{R}$

d) $\dfrac{7}{x^2 - 3} + \sqrt{5 - 2x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e

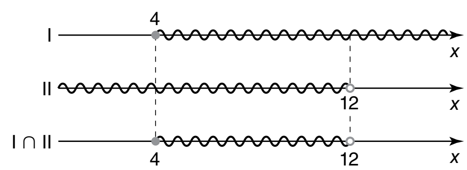
$\underbrace{x^2 - 3 \neq 0}_{\text{(I)}}$ e $\underbrace{5 - 2x \geqslant 0}_{\text{(II)}}$



$\therefore\ D(v) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{5}{2} \text{ e } x \neq -\sqrt{3} \text{ e } x \neq \sqrt{3}\right\}$

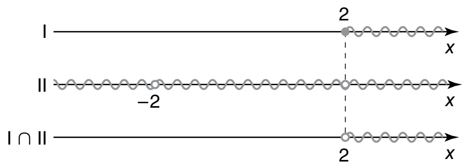
e) $h(x) = \sqrt{2x - 8} - \dfrac{5x}{\sqrt{12 - x}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e

$2x - 8 \geqslant 0$ (I) e $12 - x > 0$ (II)



$\therefore\ D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leqslant x < 12\}$

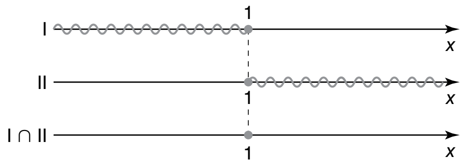
13. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 2}}{x^2 - 4} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $x - 2 \geqslant 0$ (I) e $x^2 - 4 \neq 0$ (II)



$\therefore D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

Alternativa **b**.

14. $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $1 - x \geqslant 0$ (I) e $x - 1 \geqslant 0$ (II)



$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1\}$

$f(x) = \sqrt{1 - 1} + \sqrt{1 - 1} = 0$

$Im(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\}$

Alternativa **d**.

15. Para que o domínio de $f(x) = \dfrac{5x}{2x^2 - 6x + k}$ seja o conjunto $\mathbb{R}$, devemos ter $2x^2 - 6x + k \neq 0$, ou seja, o discriminante deve ser negativo. Assim:

$(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k < 0 \Rightarrow 36 < 8k$

$\therefore k > \dfrac{36}{8} \Rightarrow k > \dfrac{9}{2}$

Portanto, $k > \dfrac{9}{2}$.

16. $f(1) = a \cdot 1 + b = -2$

$f(3) = a \cdot 3 + b = 2$

Então, $\begin{cases} a + b = -2 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2$ e $b = -4$

17. Como o gráfico intercepta o eixo Ox em 1 e 2, temos dois pontos do gráfico: (1, 0) e (2, 0). Além disso, intercepta o eixo Oy em -2, determinando o terceiro ponto do gráfico: (0, −2). Então:

$$\begin{cases} 1 + b + c + d = 0 & \text{(I)} \\ 8 + 4b + 2c + d = 0 & \text{(II)} \\ 0 + 0 + 0 + d = -2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Por (III), $d = -2$. Substituindo d por -2 em (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} 1 + b + c - 2 = 0 \\ 8 + 4b + 2c - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 1 \\ 4b + 2c = -6 \end{cases}$$

$\therefore b = -4$ e $c = 5$

Assim: $b - c = -4 - 5 = -9$

Alternativa **b**.

18. **a)** Condição de existência: $x \neq 3$ e $x \neq -3$.

$\dfrac{2}{x - 3} - \dfrac{x}{x + 3} = 0 \Rightarrow 2(x + 3) - x(x - 3) = 0$

$\therefore -x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 6$

Logo, as raízes são -1 e 6.

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Sendo $x^2 = y$, temos:

$y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$

$\therefore y = 4$ ou $y = -1$

Como $x^2 = y$, temos:

- $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4$
  $\therefore x = -2$ ou $x = 2$
- $y = -1 \Rightarrow x^2 = -1$
  $\therefore x \notin \mathbb{R}$

Logo, as raízes são -2 e 2.

c) $(x^2 - 5x + 4)(x^4 - 16) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$ (I) ou $x^4 - 16 = 0$ (II)

$\therefore$ (I) $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 4$ e

(II) $x = -2$ ou $x = 2$

Logo, as raízes de y são -2, 1, 2 e 4.

d) $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0 \Rightarrow x^2(x + 1) - 3(x + 1) = 0$

$\therefore (x + 1)(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$ ou $x^2 - 3 = 0$

$\therefore x = -1$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

Logo, as raízes de $h(x)$ são -1, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$.

e) $\sqrt{x + 6} - x = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x + 6}\right)^2 = x^2$

$\therefore x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$\therefore x = -2$ ou $x = 3$

Verificação:

- Para $x = -2$:
  $\sqrt{-2 + 6} - (-2) = 0 \Rightarrow \sqrt{4} + 2 = 0$
  $\therefore 4 = 0$ (F)
- Para $x = 3$:
  $\sqrt{3 + 6} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{9} - 3 = 0$
  $\therefore 0 = 0$ (V)

Logo, apenas 3 é raiz da função.

f) $\sqrt{x} + 9 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = -9$

Não existe x real tal que $\sqrt{x} = -9$.

Logo, a função não tem raiz real.

g) Não existe x tal que $f(x) = 0$; logo, a função não tem raízes reais.

h) Qualquer x, com $x \in \mathbb{R}$, obedece à condição $g(x) = 0$; logo, todo número real é raiz da função.

19. Para descobrir o valor da ordenada de P, é preciso calcular os valores de a e b. Usando os pontos (1, 0) e (2, 0) do gráfico:

$$\begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 8 + 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = -8 \end{cases}$$

$\therefore a = -7$ e $b = 6$

Então, $f(x) = x^3 - 7x + 6$

Em P, temos $x = 0$; assim:

$f(0) = 0^3 - 7 \cdot 0 + 6 \Rightarrow f(0) = 6$

$\therefore P(0, 6)$

20. **a)** Temos $f(x) = 0$ no ponto em que o gráfico de f intercepta o eixo Ox, ou seja, para $x = \dfrac{12}{5}$.

b) Temos $g(x) = 0$ nos pontos em que o gráfico de g intercepta o eixo Ox, ou seja, para $x = 0$ e $x = 6$.

c) Temos $f(x) > 0$ nos pontos em que o gráfico de f está acima do eixo Ox, ou seja, para $-3 \leqslant x < \dfrac{12}{5}$.

d) Temos $f(x) < 0$ nos pontos em que o gráfico de f está abaixo do eixo Ox, ou seja, para $\dfrac{12}{5} < x \leqslant 6$.

e) Temos $g(x) > 0$ nos pontos em que o gráfico de g está acima do eixo Ox, ou seja, para $0 < x < 6$.

f) Temos $g(x) < 0$ nos pontos em que o gráfico de g está abaixo do eixo Ox, ou seja, para $-3 \leqslant x < 0$.

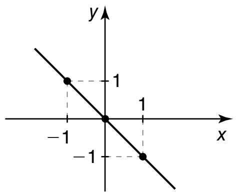
g) Temos $f(x) \cdot g(x) < 0$ nos pontos em que:
(I) $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$ ou
(II) $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$
Logo, $-3 \leqslant x < 0$ ou $\frac{12}{5} < x < 6$.

h) Temos $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ nos pontos em que:
(I) $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ ou
(II) $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$
Logo, $0 < x < \frac{12}{5}$.

21. $f(x) \cdot g(x) < 0$ se $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$ (I) ou $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$ (II).
Pelo gráfico:
(I) $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$ quando $x \in]2, 3[$
(II) $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$ quando $x \in]5, 6[$.
Então, $f(x) \cdot g(x) < 0$ se $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3 \text{ ou } 5 < x < 6\}$.
Alternativa **a**.

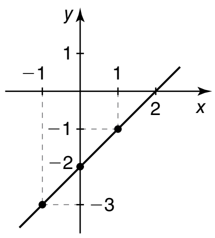
22 a)

x	y
-1	1
0	0
1	-1



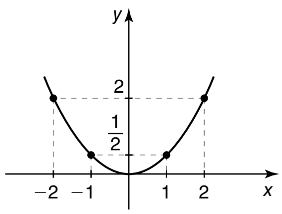
b)

x	y
-1	-3
0	-2
1	-1



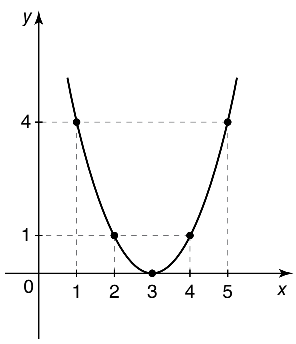
c)

x	y
-2	2
-1	$\frac{1}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	2



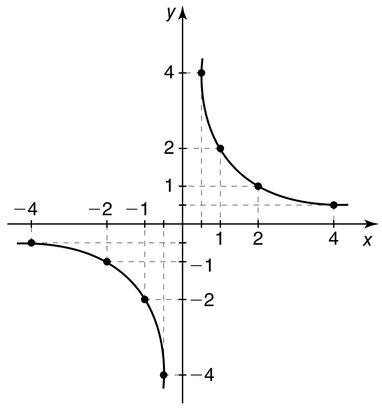
d)

x	y
1	4
2	1
3	0
4	1
5	4



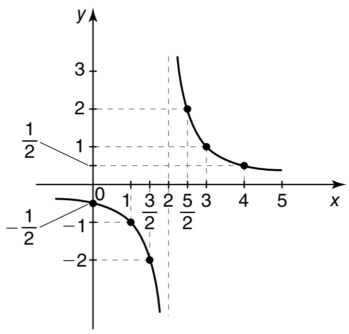
e)

x	y
-4	$-\frac{1}{2}$
-2	-1
-1	-2
$-\frac{1}{2}$	-4
$\frac{1}{2}$	4
1	2
2	1
4	$\frac{1}{2}$



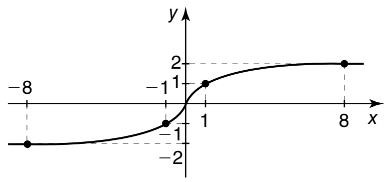
f)

x	y
0	$-\frac{1}{2}$
1	-1
$\frac{3}{2}$	-2
$\frac{5}{2}$	2
3	1
4	$\frac{1}{2}$



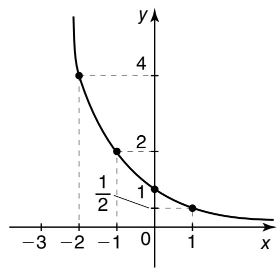
g)

x	y
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2



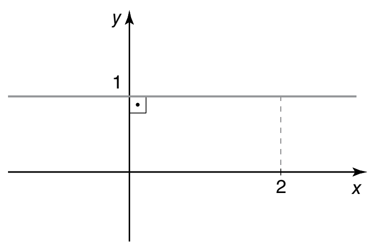
h)

x	y
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$



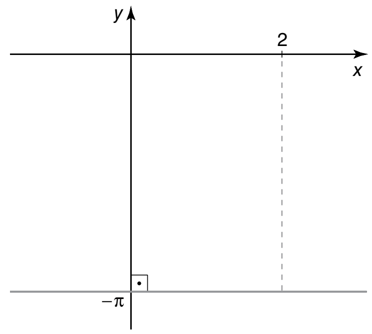
i)

x	y
0	1
2	1

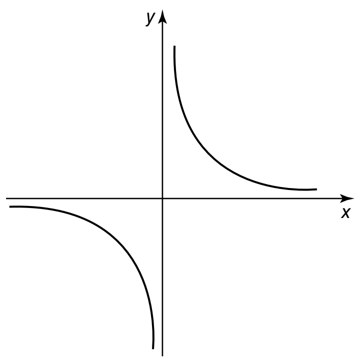


j)

x	y
0	$-\pi$
2	$-\pi$



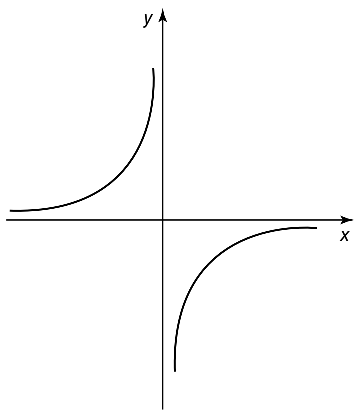
23. a)



$k > 0$

O gráfico é uma hipérbole equilátera cujos ramos estão no 1º e 3º quadrantes.

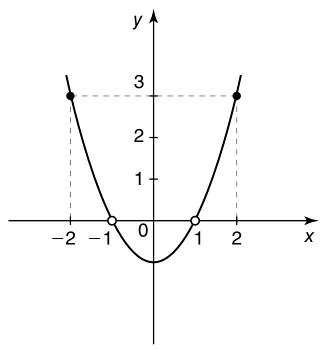
b)



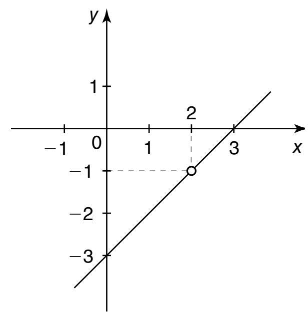
$k < 0$

O gráfico é uma hipérbole equilátera cujos ramos estão no 2º e 4º quadrantes.

24. a) $h(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = x^2 - 1$, se $x \neq -1$ e $x \neq 1$



b) $s(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = x - 3$, se $x \neq 2$



25. • Sejam x_1 e x_2 reais não negativos quaisquer, com $x_2 > x_1$ (I).

Multiplicando por x_2 ambos os membros de (I), obtemos:

$x_2^2 > x_1 \cdot x_2$ (II)

Multiplicando por x_1 ambos os membros de (I), obtemos:

$x_1 \cdot x_2 \geqslant x_1^2$ (III)

De (II) e (III), resulta:

$\underbrace{x_2^2}_{f(x_2)} > \underbrace{x_1^2}_{f(x_1)}$

Logo, $f(x) = x^2$ é crescente para $x \geqslant 0$.

• x_1 e x_2 reais não positivos quaisquer, com $x_2 > x_1$ (I).

Multiplicando por x_2 ambos os membros de (I), obtemos:

$x_2^2 \leqslant x_1x_2$ (II)

Multiplicando por x_1 ambos os membros de (I), obtemos:

$x_1 \cdot x_2 < x_1^2$ (III)

De (II) e (III), resulta:

$\underbrace{x_2^2}_{f(x_2)} < \underbrace{x_1^2}_{f(x_1)}$

Logo, $f(x) = x^2$ é decrescente para $x \leqslant 0$.

26. a) $\dfrac{4{,}8 - 3{,}6}{2 - 1} = \dfrac{1{,}2}{1} = 1{,}2$

b) $\dfrac{-2{,}4 - 4{,}2}{6 - 3} = \dfrac{-6{,}6}{3} = -2{,}2$

Exercícios contextualizados

27. Como $B(-2, 5)$ e está a 8 km a leste e a 6 km a norte de A, então A está 8 unidades a esquerda de B considerando o eixo leste-oeste (eixo Ox) e a 6 unidades abaixo de B considerando o eixo norte-sul (eixo Oy). Logo, $A(-2 - 8, 5 - 6)$, ou seja, $A(-10, -1)$.

28. $PQ = \sqrt{(4 - 1)^2 + (11 - 7)^2} = \sqrt{25} = 5$

Logo, a distância percorrida pelo trem é 5 km.

29. a) Em 8 dias o consumo é:

$C = 400 \cdot 8 = 3.200$

Logo, o consumo em 8 dias é 3.200 kWh.

b) $400t = 4.800 \Rightarrow t = 12$

Serão necessários 12 dias para o consumo atingir 4.800 kWh.

c) A equação $C = 400t$ mostra que o consumo diário é 400 kWh.
Adicionando 200 kWh por dia, a nova equação será:
$C = 600t$

30. a) $V(3) = -2 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 120$
$\therefore V(3) = 78$
Logo, após 3 horas, restaram 78.000 L.

b) $V(0) = -2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 120$
$\therefore V(0) = 120$
Logo, a capacidade do reservatório é 120.000 L.

c) $V(t) = 0 \Rightarrow -2t^2 - 8t + 120 = 0$
$\therefore t^2 + 4t - 60 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{256}}{2}$
$\therefore t = 6$ ou $t = -10$ (não convém)
Logo, serão necessárias 6 horas para esvaziar o reservatório.

d) 80% de 120 = 96
$V(t) = 96 \Rightarrow -2t^2 - 8t + 120 = 96$
$\therefore t^2 + 4t - 12 = 0$
$t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$
$\therefore t = 2$ ou $t = -6$ (não convém)
Logo, os técnicos deverão realizar o conserto em até 2 horas para salvar 80% da gasolina.

31. a) $n(1) = 3 \cdot 1^3 - 14 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 4 = 8$
Logo, depois de 1 dia havia 8.000 bactérias vivas.

b) $n(2) = 3 \cdot 2^3 - 14 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 4 = 2$
Logo, depois de 2 dias havia 2.000 bactérias vivas.

c) Primeiro é preciso saber o número de indivíduos no instante $t = 0$.
$n(0) = 3 \cdot 0^3 - 14 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + 4 = 4$
Para saber em quais outros instantes o número de indivíduos vivos é 4, resolvemos a equação:
$3t^3 - 14t^2 + 15t + 4 = 4 \Rightarrow 3t^3 - 14t^2 + 15t = 0$
$\therefore t(3t^2 + 14t + 15) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 0$ ou $3t^2 - 14t + 15 = 0$
$\therefore t = 0, t = 3$ ou $t = \dfrac{5}{3}$
$\dfrac{5}{3}$ de dia $= \dfrac{5}{3} \cdot 24$ horas $= 40$ horas $=$
$= 1$ dia e 16 horas
Logo, o número de bactérias vivas foi o mesmo que o número inicial após 1 dia e 16 horas e após 3 dias de aplicação do antibiótico.

32. Sendo x a altura da menina, temos:
$25 = \dfrac{64}{x^2} \Rightarrow 25x^2 = 64$
$\therefore x = -1{,}6$ (não convém) ou $x = 1{,}6$
Como 1,6 m = 160 cm, temos:
$RIP = \dfrac{160}{\sqrt[3]{64}} = \dfrac{160}{4} = 40$
O RIP da menina é 40 cm/kg$^{1/3}$.
Alternativa **e**.

33. a) Se o boleto for pago em 11/01/2015, serão 6 dias de atraso. Como a taxa é de 0,2% ao dia, o valor pago, em real, seria:
$330 + 330 \cdot 0{,}002 \cdot 6 = 333{,}96$

b) Para que os juros cobrados sejam de R$ 13,20, devemos ter:
$13{,}20 = 330 \cdot 0{,}002 \cdot t \Rightarrow t = 20$
Logo, a data de pagamento seria 25/01/2015.

c) A lei de associação é dada por:
$y = 330 + 330 \cdot 0{,}002 \cdot x \Rightarrow y = 330 + 0{,}66x$

34. a) Sendo r a medida procurada, em centímetro, temos:
$\dfrac{6}{24} = \dfrac{r}{36} \Rightarrow r = 9$
Logo, quando a distância entre a lâmpada e a parede é 36 cm, o raio do círculo iluminado é 9 cm.

b) Temos:
$\dfrac{6}{24} = \dfrac{r}{d} \Rightarrow r = \dfrac{d}{4}$

35. I. F, pois $800 + 6x$ é o custo e não o valor recebido.
II. V, pois: $L(x) = 10x - 800 - 6x = 4x - 800$
III. F, pois: $L(500) = 4 \cdot 500 - 800 = 1.200$
IV. F, pois: $2.500 = 4x - 800 \Rightarrow x = 825$
V. V, pois para não haver prejuízo o lucro deve ser pelo menos zero. Portanto: $4x - 800 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 200$

36. a) $A = 0{,}11 \cdot m^{\frac{2}{3}}$
Se $m = 70$, então $A = 0{,}11 \cdot 70^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}9$
Logo, a área é aproximadamente 1,9 m^2.

b) $1{,}5 = 0{,}11 \cdot m^{\frac{2}{3}} \Rightarrow m^{\frac{2}{3}} \approx 13{,}6$
$\therefore \sqrt[3]{m^2} \approx 13{,}6 \Rightarrow m^2 \approx (13{,}6)^3$
$\therefore m^2 \approx 2515{,}456 \Rightarrow m \approx 50$
Assim, a massa é de aproximadamente 50 kg.

c) $A = 0{,}11 \cdot m^{\frac{2}{3}} \Rightarrow m^{\frac{2}{3}} = \dfrac{A}{0{,}11}$
$\therefore m = \sqrt[3]{m^2} = \dfrac{A}{0{,}11} \Rightarrow m^2 = \left(\dfrac{A}{0{,}11}\right)^3$
$\therefore m = \sqrt{\left(\dfrac{A}{0{,}11}\right)^3}$

37. a) $v = 331{,}3 \cdot \sqrt{1 + \dfrac{0}{273}} = 331{,}3 \cdot \sqrt{1} = 331{,}3$
Assim, a velocidade é 331,3 m/s.

b) $v = 331{,}3 \cdot \sqrt{1 + \dfrac{30}{273}} \approx 331{,}3 \cdot 1{,}0535 \approx 349$
Assim, a velocidade é 349 m/s.

c) $337{,}926 = 331{,}3 \cdot \sqrt{1 + \dfrac{t}{273}}$
$\therefore 1{,}02 = \sqrt{1 + \dfrac{t}{273}} \Rightarrow (1{,}02)^2 = 1 + \dfrac{t}{273}$
$\therefore 1{,}0404 = 1 + \dfrac{t}{273} \Rightarrow 0{,}0404 = \dfrac{t}{273}$
$\therefore t \approx 11$
A temperatura é aproximadamente 11 °C.

38. Para uma conta de R$ 19,00, o consumo x do morador ficou entre 15 e 20 m^3. Como o trecho do gráfico nessa faixa é um segmento de reta, podemos aplicar o teorema de Tales:
$\dfrac{25 - 15}{19 - 15} = \dfrac{20 - 15}{x - 15} \Rightarrow \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{x - 15}$
$\therefore x = 17$
Assim, o consumo foi de 17 m^3.
Alternativa **b**.

39. Mesmo com o acréscimo, o salário de João continua no trecho $\overline{CD}$ do gráfico. Então, podemos calcular diretamente, por meio do teorema de Tales, qual foi o aumento x no imposto a pagar, correspondente ao acréscimo de R$ 1.000,00 em sua renda.

$$\frac{4.237{,}50 - 2.100{,}00}{x} = \frac{47.000{,}00 - 37.500{,}00}{1.000{,}00} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.137{,}50}{x} = \frac{9.500{,}00}{1.000{,}00}$$

$\therefore\ x = 225{,}00$

Logo, a diferença entre os valores foi de R$ 225,00.

Alternativa **c**.

40. a) Pelo gráfico $f(0) = 0$, $f(2) = 2$ e $f(4) = 6$. Então:

$$\begin{cases} 0^2 \cdot a + 0b + c = 0 \\ 2^2 \cdot a + 2b + c = 2 \\ 4^2 \cdot a + 4b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 16a + 4b + c = 6 \end{cases}$$

Como $c = 0$, temos:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 2 \\ 16a + 4b = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 0{,}25 \text{ e } b = 0{,}5$$

Assim, $a = 0{,}25$, $b = 0{,}5$ e $c = 0$

b) $f(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}5x + 0 \Rightarrow f(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}5x$

c) $f(3) = 0{,}25 \cdot 3^2 + 0{,}5 \cdot 3 = 0{,}25 \cdot 9 + 1{,}5 =$
$= 2{,}25 + 1{,}5 = 3{,}75$

Logo, a distância será de 3,75 km.

41. Os meses em que o nível esteve em seu valor médio correspondem às raízes da seguinte função:

$f(t) = t^3 - 9t - 9t^2 + 81$

$\therefore\ t^3 - 9t - 9t^2 + 81 = 0 \Rightarrow t(t^2 - 9) - 9(t^2 - 9) = 0$

$\therefore\ (t - 9) \cdot (t^2 - 9) = 0 \Rightarrow t = 9$ ou $t = 3$ ou $t = -3$

Como o domínio da função é $1 \leqslant t \leqslant 12$, concluímos que o nível da água do rio esteve em seu valor médio nos meses 3 e 9, ou seja, em março e setembro.

42. a) Os horários em que a temperatura atingiu 0 °C são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo Ox; logo, os horários foram 2 horas e 8 horas.

b) Os horários em que a temperatura foi positiva são as abscissas dos pontos do gráfico que estão acima do eixo Ox; logo, a temperatura esteve positiva no intervalo [0, 2[e no intervalo]8, 24].

c) Os horários em que a temperatura foi negativa são as abscissas dos pontos do gráfico que estão abaixo do eixo Ox; logo, a temperatura esteve negativa no intervalo]2, 8[.

43. a)

Tempo (min)	0	1	2	3	4	5
Produção (m)	0	2	4	6	8	10

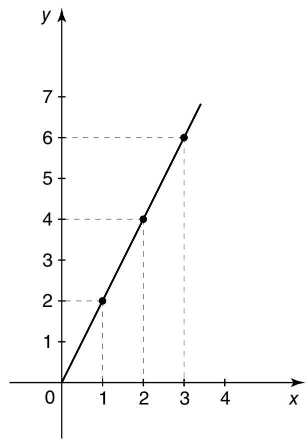
b) Os valores t de tempo e os correspondentes valores p da produção são diretamente proporcionais, pois:

I. Para $t = 0$, temos $p = 0$;

II. Para $t \neq 0$, temos que a razão $\frac{p}{t}$ é constante.

c) $y = 2x$

d)



44. a) $\frac{x}{2.200} = \frac{28.800}{1.600} \Rightarrow x = 39.600$

Logo, o gasto com óleo diesel em novembro foi de R$ 39.600,00.

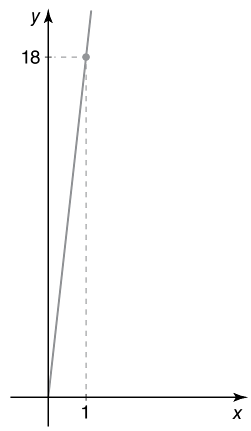
b) $\frac{y}{x} = \frac{28.800}{1.600} \Rightarrow y = 18x$

c) Sim, porque:

I. Se $x = 0$, então $y = 0$;

II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = k$, sendo k uma constante real (no caso, $k = 18$).

d)



45. a) [0, 2] b) [7, 10] c) [2, 7]

46. a) $25 = 8{,}5 + 0{,}75 \cdot T_A \Rightarrow T_A = 22$

Logo, a temperatura do ambiente é 22 °C.

b) O maior valor possível para T_E ocorre quando T_A atinge seu valor máximo de 30 °C, pois a função é crescente. Então:

$T_E = 8{,}5 + 0{,}75 \cdot 30 = 31$

Portanto, o maior valor de T_E é 31 °C.

47. Temos:

$$p(t) = \frac{t + 1}{t} \Rightarrow p(t) = \frac{t}{t} + \frac{1}{t}$$

$$\therefore\ p(t) = 1 + \frac{1}{t}$$

Sendo t_1 e t_2 dois instantes quaisquer do período que durou a experiência, com $t_2 > t_1$, temos:

$$t_2 > t_1 \Rightarrow \frac{1}{t_2} < \frac{1}{t_1}$$

Adicionando 1 a ambos os membros dessa desigualdade, obtemos:

$$1 + \frac{1}{t_2} < 1 + \frac{1}{t_1} \Rightarrow \underbrace{\frac{t_2 + 1}{t_2}}_{p(t_2)} < \underbrace{\frac{t_1 + 1}{t_1}}_{p(t_1)}$$

Assim, concluímos:

$t_2 > t_1 \Rightarrow p(t_2) < p(t_1)$, para quaisquer t_1 e t_2 do período que durou a experiência. Logo, a função p é decrescente em todo o seu domínio.

48. $\dfrac{90\ \text{km/h} - 36\ \text{km/h}}{2\ \text{minutos}} = \dfrac{25\ \text{m/s} - 10\ \text{m/s}}{120\ \text{s}} =$

$= \dfrac{15\ \text{m/s}}{120\ \text{s}} = 0{,}125\ \text{m/s}^2$.

Logo, a taxa média de variação da velocidade do veículo foi de $0{,}125\ \text{m/s}^2$.

49. $\dfrac{1.200 - 2.560}{4} = \dfrac{-1.360}{4} = -340$

A taxa média de variação do saldo foi de -340 reais por dia.

50. De acordo com o gráfico:

a) 251,20 L

b) 301,44 L

c) $\dfrac{301{,}44 - 251{,}20}{8 - 5} \approx 16{,}75$

Logo, a taxa média de variação é de aproximadamente 16,75 L/dm.

51. a) Pelo gráfico, a altura da planta era 30 cm.

b) O crescimento da planta foi:
30 cm − 25 cm = 5 cm

c) O desenvolvimento na primeira semana foi:
15 cm − 0 cm = 15 cm
Já na segunda semana, foi:
25 cm − 15 cm = 10 cm
E na terceira semana foi:
30 cm − 25 cm = 5 cm
Logo, o maior desenvolvimento ocorreu na primeira semana.

d) A taxa de variação representa o crescimento da planta, em centímetro, na primeira semana.

Pré-requisitos para o capítulo 3

1. a) $T = 6{,}60 + 10 \cdot 0{,}95 + 6 \cdot 2{,}50 = 31{,}10$
O total a pagar será R$ 31,10.

b) $T = 6{,}60 + 10 \cdot 0{,}95 + 10 \cdot 2{,}50 + 5 \cdot 2{,}60 = 54{,}10$
O total a pagar será R$ 54,10.

c) $T = 6{,}60 + 10 \cdot 0{,}95 + 10 \cdot 2{,}50 + 10 \cdot 2{,}60 + 60 \cdot 2{,}80 = 235{,}10$
O total a pagar será R$ 235,10.

2. a) V, pois $f(-x) = 3 \cdot (-x)^4 + 5 \cdot (-x)^2 = 3x^4 + 5x^2 = f(x)$.

b) F, pois $-f(x) = -(3x^4 + 5x^2) = -3x^4 - 5x^2 \neq f(x)$.

c) F, pois $g(-x) = 2 \cdot (-x)^3 + 4 \cdot (-x) = -2x^3 - 4x \neq g(x)$.

d) F, pois $-g(x) = -(2x^3 + 4x) = -2x^3 - 4x \neq g(x)$.

e) F, pois $h(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3 \neq h(x)$.

f) F, pois $-h(x) = -(x^2 + x^3) = -x^2 - x^3 \neq h(x)$.

3. a) Dois números, pois: $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$

b) Apenas um, pois: $x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$

4. $x = 7y - 2 \Rightarrow x + 2 = 7y$

$\therefore y = \dfrac{x + 2}{7}$

5. $x = \dfrac{2y + 5}{3 + 4y} \Rightarrow x(3 + 4y) = 2y + 5$

$\therefore 3x + 4xy = 2y + 5 \Rightarrow 4xy - 2y = 5 - 3x$

$\therefore y(4x - 2) = 5 - 3x \Rightarrow y = \dfrac{5 - 3x}{4x - 2}$

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. $f(t) = 0{,}058t + 15$

2. Temos:
$f(t) = 0{,}058t + 15$
$f(100) = 0{,}058 \cdot 100 + 15 \Rightarrow f(100) = 20{,}8$
Logo, a temperatura do planeta daqui a 100 anos será 20,8 °C.

3. Diminuir as queimadas das florestas, reduzir a emissão de gases poluentes (carros, indústrias etc.), reduzir o consumo, reciclar, entre outras medidas.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno considerou que o número de pilastras é igual ao número de vãos entre elas, o que é incorreto, pois sempre haverá um vão a menos que o número de pilastras. Por exemplo, existem 4 vãos entre 5 pilastras.

Resolução correta:

O comprimento da ferrovia equivale a y larguras de 2 m (pilastras) mais $(y - 1)$ larguras de 30 m (vãos entre as pilastras). Como a extensão x da ferrovia, em quilômetro, equivale a $1.000x$, em metro, temos:

$1.000x = 2y + 30(y - 1) \Rightarrow y = \dfrac{(550x + 15)}{16}$