PRÉ-VESTIBULAR
EXTENSIVO

DOM BOSCO
by Pearson

4

MATERIAL DO PROFESSOR

• **Matemática**

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

DOM BOSCO
by Pearson

PRÉ-VESTIBULAR
EXTENSIVO 4

MATERIAL DO PROFESSOR

Matemática

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

DOM BOSCO - SISTEMA DE ENSINO
PRÉ-VESTIBULAR 4
Matemática e suas tecnologias.

Vice-presidência de Educação Juliano Melo Costa
Gerência editorial nacional Alexandre Mattioli
Gerência de produto Silvana Afonso
Autoria Rafael Schaffer e Edilson Sousa Santos
Coordenação editorial Luiz Molina Luz
Edição de conteúdo Paulo Roberto de Jesus Silva
Assistência editorial Felipe Gabriel
Leitura crítica Fernando Manenti
Preparação e revisão Igor Debiasi e Sérgio Nascimento
Gerência de Design Cleber Figueira Carvalho
Coordenação de Design Diogo Mecabo
Edição de arte Alexandre Silva
Coordenação de pesquisa e licenciamento Maiti Salla
Pesquisa e licenciamento Cristiane Gameiro, Heraldo Colon, Andrea Bolanho, Maricy Queiroz, Sandra Sebastião, Shirlei Sebastião
Ilustrações Carla Viana, Dayane Cabral
Projeto Gráfico Apis design integrado
Diagramação Editorial 5
Capa Apis design integrado
Imagem de capa mvp64/istock
Produtor multimídia Cristian Neil Zaramella
PCP George Baldim, Paulo Campos

Av. Santa Marina, 1193 - Água Branca
São Paulo, SP – CEP 05036-001
Tel. (11) 3521-3500

www.pearson.com.br

APRESENTAÇÃO

Um bom material didático voltado ao vestibular deve ser maior que um grupo de conteúdos a ser memorizado pelos alunos. A sociedade atual exige que nossos jovens, além de dominar conteúdos aprendidos ao longo da Educação Básica, conheçam a diversidade de contextos sociais, tecnológicos, ambientais e políticos. Desenvolver as habilidades a fim de obterem autonomia e entenderem criticamente a realidade e os acontecimentos que os cercam são critérios básicos para se ter sucesso no Ensino Superior.

O Enem e os principais vestibulares do país esperam que o aluno, ao final do Ensino Médio, seja capaz de dominar linguagens e seus códigos; construir argumentações consistentes; selecionar, organizar e interpretar dados para enfrentar situações-problema em diferentes áreas do conhecimento; e compreender fenômenos naturais, processos histórico-geográficos e de produção tecnológica.

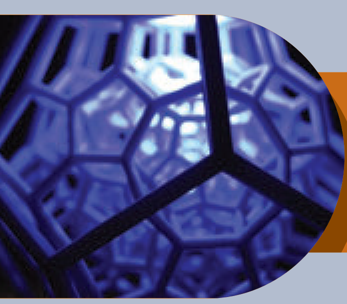
O Pré-Vestibular do Sistema de Ensino Dom Bosco sempre se destacou no mercado editorial brasileiro como um material didático completo dentro de seu segmento educacional. A nova edição traz novidades, a fim de atender às sugestões apresentadas pelas escolas parceiras que participaram do Construindo Juntos – que é o programa realizado pela área de Educação da Pearson Brasil, para promover a troca de experiências, o compartilhamento de conhecimento e a participação dos parceiros no desenvolvimento dos materiais didáticos de suas marcas.

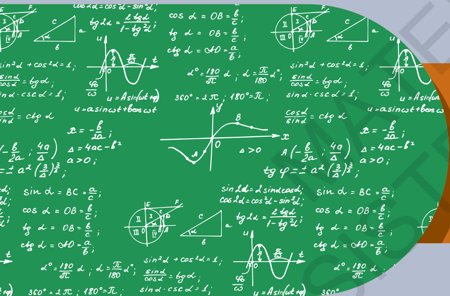
Assim, o Pré-Vestibular Extensivo Dom Bosco by Pearson foi elaborado por uma equipe de excelência, respaldada na qualidade acadêmica dos conhecimentos e na prática de sala de aula, abrangendo as quatro áreas de conhecimento com projeto editorial exclusivo e adequado às recentes mudanças educacionais do país.

O novo material envolve temáticas diversas, por meio do diálogo entre os conteúdos dos diferentes componentes curriculares de uma ou mais áreas do conhecimento, com propostas curriculares que contemplem as dimensões do trabalho, da ciência, da tecnologia e da cultura como eixos integradores entre os conhecimentos de distintas naturezas; o trabalho como princípio educativo; a pesquisa como princípio pedagógico; os direitos humanos como princípio norteador; e a sustentabilidade socioambiental como meta universal.

A coleção contempla todos os conteúdos exigidos no Enem e nos vestibulares de todo o país, organizados e estruturados em módulos, com desenvolvimento teórico associado a exemplos e exercícios resolvidos que facilitam a aprendizagem. Soma-se a isso, uma seleção refinada de questões selecionadas, quadro de respostas e roteiro de aula integrado a cada módulo.

SUMÁRIO





WITTAYAYUT/SHUTTERSTOCK

MATEMÁTICA 1

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

45 INTRODUÇÃO A MATRIZES

- O que são matrizes?
- Representação de uma matriz
- Matrizes especiais
- Matriz transposta
- Igualdade entre matrizes

HABILIDADES

- Reconhecer uma matriz.
- Representar de diferentes formas uma matriz, bem como em sua forma geral.
- Identificar matrizes especiais.
- Obter a matriz transposta a partir de uma matriz fornecida.
- Reconhecer as condições para que duas matrizes sejam iguais.

ALF RIBEIRO/DREAMSTIME.COM

A Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa) influencia diretamente a economia nacional, até mesmo mercados internacionais. É comum utilizar tabelas para facilitar a comunicação entre os profissionais que trabalham nessa área.

Introdução

O uso de tabelas em nosso cotidiano é bastante comum. Elas estão presentes na apresentação da classificação dos times de um campeonato, com a inserção dos pontos e de outras informações de cada equipe. Tabelas estão, também, em notas fiscais, que recebemos ao comprar um eletrodoméstico, ou mesmo na representação de dados econômicos.

A aplicação de tabelas para representar as mais diversas situações organiza dados e facilita a transmissão dessas informações.

MATRIZES

Matrizes são uma poderosa ferramenta matemática usada para calcular equações com mais de um parâmetro e mais de uma equação. Elas possibilitam chegar a conclusões mais facilmente.

Para iniciarmos nossos estudos sobre o tema, vamos considerar a situação a seguir.

Em uma editora, a venda de livros de Matemática, Física e Química no primeiro trimestre de um ano pode ser expressa pela tabela a seguir:

	Janeiro	Fevereiro	Março
Matemática	20 000	18 000	45 000
Física	15 000	18 000	25 000
Química	16 000	17 000	23 000

Observe que o uso da tabela organiza os dados e resulta em mais rapidez e praticidade na obtenção de informações. Assim, podemos organizar os dados na forma de matriz.

Note que uma matriz **m** $\times$ **n** (m por n) é uma tabela composta de **m** linhas e **n** colunas, a qual tem **m** $\cdot$ **n** elementos.

São exemplos de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

REPRESENTAÇÃO DE MATRIZES

Matrizes são representadas por letras maiúsculas do alfabeto latino. Essas são acompanhadas por sua ordem, ou seja, pela quantidade de linhas e colunas que a matriz tem.

$A_{4\times2}$ representa uma matriz A com quatro linhas e duas colunas. Já a matriz $B_{3\times6}$ representa uma matriz B de três linhas e seis colunas. Cada elemento de uma matriz, por sua vez, é representado pela mesma letra utilizada na representação da matriz, porém em letra minúscula. Tal representação é acompanhada de seu índice, que indica a posição da linha e da coluna que o elemento ocupa na matriz. Assim, as matrizes A e B mencionadas podem ser assim representadas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \end{pmatrix}$$

O elemento a_{31} pertence à matriz A e está localizado na terceira linha e na primeira coluna. O elemento b_{15}, por sua vez, pertence à matriz B e está localizado na primeira linha e na quinta coluna.

De modo geral, representamos o elemento de uma matriz como a_{ij}, localizado na i-ésima linha e na j-ésima coluna.

Com base no exemplo inicial, podemos representar os dados de venda de livros de Matemática, Física e Química no primeiro trimestre de um ano da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 20\,000 & 32\,000 & 45\,000 \\ 15\,000 & 18\,000 & 25\,000 \\ 16\,000 & 16\,000 & 23\,000 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} 20\,000 & 32\,000 & 45\,000 \\ 15\,000 & 18\,000 & 25\,000 \\ 16\,000 & 16\,000 & 23\,000 \end{pmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 20\,000 & 32\,000 & 45\,000 \\ 15\,000 & 18\,000 & 25\,000 \\ 16\,000 & 16\,000 & 23\,000 \end{Vmatrix}$$

utilizando colchetes | utilizando parênteses | utilizando barras duplas

Geralmente uma matriz A é representada por $A = (a_{ij})_{m\times n}$, em que $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, com $i, j, m, n \in \mathbb{N}$, ou ainda:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

MATRIZES ESPECIAIS

Algumas matrizes são chamadas **especiais**, pois apresentam propriedades particulares em sua representação.

Matriz nula

É toda matriz cujos elementos são iguais a zero.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nula de ordem 4×3. Pode ser indicada por $B_{4\times 3}$.

Matriz linha

É toda matriz de apenas uma linha.

A matriz $C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$ é uma matriz linha de ordem 1×4.

Matriz coluna

É toda matriz com apenas uma coluna.

A matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna de ordem 3×1.

Matriz quadrada

É toda matriz com a mesma quantidade de linhas e colunas.

A matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2.

Pode ser chamada ainda de matriz de ordem 2. Assim, podemos representá-la simplesmente por A_2.

Já a matriz $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada 4×4, ou matriz de ordem 4. Também pode ser representada por B_4.

Em toda matriz quadrada, os elementos cujas posições da linha e da coluna são iguais, ou seja, $i = j$, formam a **diagonal principal**. A outra diagonal, na qual os elementos satisfazem à condição $i + j = n + 1$, é chamada **diagonal secundária**.

Na matriz a seguir, indicamos a diagonal principal (ou primária) e a secundária.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 18 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 21 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária ← → Diagonal primária

Matriz identidade

É toda matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são unitários (ou seja, iguais a 1) e em que os demais elementos são nulos (ou seja, iguais a zero). Sua representação é sempre dada por I_n, sendo n a ordem da matriz.

A matriz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 4. Pode ser representada por I_4.

Matriz transposta

A partir de uma matriz A, podemos inverter ordenadamente as linhas pelas colunas, e assim obter a **matriz transposta** de A, representada por A^T.

Ou seja, a partir da matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, definimos a matriz transposta de A como a matriz $A^T = \left(a^t_{ij}\right)_{n\times m}$, sendo $a^t_{ij} = a_{ji}$. Dessa forma, as linhas da matriz A^T são, ordenadamente, iguais às colunas da matriz A. Por sua vez, as colunas da matriz A^T são, ordenadamente, iguais às linhas da matriz A.

Observe este exemplo: com base na matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & -9 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 3}$, obtemos sua transposta

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & -9 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$

Igualdade entre matrizes

Para que duas matrizes sejam iguais, é preciso que apresentem a mesma ordem e que seus elementos de mesma posição sejam iguais. Representamos a igualdade entre as matrizes A e B por $A = B$.

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ y & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 5 & x \end{bmatrix}$.

Para que sejam iguais, é preciso que:

- $a_{11} = b_{11} \rightarrow a = 1$
- $a_{21} = b_{21} \rightarrow y = 5$
- $a_{12} = b_{12} \rightarrow b = 2$
- $a_{22} = b_{22} \rightarrow x = 7$

ROTEIRO DE AULA

MATRIZES

Matrizes especiais

- matriz nula
- matriz linha
- matriz coluna
- matriz quadrada
- matriz identidade

Matriz transposta

- Inverte-se ordenadamente as linhas pelas colunas.
- Representada por A^T.

Igualdade entre matrizes

- Apresentam a mesma ordem e seus elementos de mesma posição são iguais.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RS C5-H21

Num jogo, foram sorteados 6 números para compor uma matriz $M = (m_{ij})$ de ordem 2×3. Após o sorteio, notou-se que esses números obedeceram à regra $m_{ij} = 4i - j$. Assim, a matriz M é igual a

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Do enunciado, temos que $m_{ij} = 4i - j$. Assim:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot1-1 & 4\cdot1-2 & 4\cdot1-3 \\ 4\cdot2-1 & 4\cdot2-2 & 4\cdot2-3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

2. Uerj (adaptado) – Observe a matriz A, quadrada e de ordem três.

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,47 & 0,6 \\ 0,47 & 0,6 & x \\ 0,6 & x & 0,77 \end{pmatrix}$$

Considere que cada elemento a_{ij} dessa matriz é o valor do logaritmo decimal de $(i + j)$.

Qual é o valor de x?

Do enunciado, temos que $a_{ij} = \log(i+j)$. Assim:

$a_{11} = \log(1+1) = 0,3 \rightarrow \log 2 = 0,3$

$x = a_{23} = a_{32} = \log(2+3) = \log 5$

Sabendo que $\log 10 = 1$, então:

$X = \log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) \rightarrow x = \log 10 - \log 2 \rightarrow$
$\rightarrow x = 1 - 0,3 \rightarrow x = 0,70.$

3. IFSul – A temperatura da cidade de Porto Alegre-RS foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante 6 dias. Cada elemento a_{ij} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9,4 & 8,1 & 12,4 & 15,7 & 13 & 11,7 \\ 12,2 & 10,5 & 15 & 18,2 & 14,2 & 13,1 \\ 15,7 & 13,2 & 17,5 & 21 & 16,3 & 18,5 \end{pmatrix}$$

corresponde à temperatura observada no tempo i do dia j. Com base nos dados da matriz A, analise as seguintes proposições:

I. A temperatura mínima registrada está na posição a_{12}.
II. A maior variação de temperatura registrada entre os tempos 1 e 2 aconteceu no primeiro dia.
III. A temperatura máxima registrada está na posição a_{34}.

Estão corretas as afirmativas

a) I e III, apenas.
b) I e II, apenas.
c) II e III, apenas.
d) I, II e III.

Analisando os itens, temos:

[I] A temperatura registrada na posição a_{12} é o menor valor dentre todos os presentes na matriz. Ou seja, $8,1 = a_{12} < a_{ij}$, $i \neq 1$ e $j \neq 2$. Portanto, correta.

[II] A maior variação entre os tempos 1 e 2 está registrada no primeiro dia, já que as variações do primeiro ao sexto dia são, respectivamente: 2,8; 2,4; 2,6; 2,5; 1,2; 1,4. Logo, a maior variação é 2,8. Portanto, correta.

[III] A temperatura registrada na posição a_{34} é o maior valor dentre todos os presentes na matriz. Ou seja, $21 = a_{34} > a_{ij}$, $i \neq 3$ e $j \neq 4$. Portanto, correta.

4. Ifal – A matriz A_{ij} (2 × 3) tem elementos definidos pela expressão $a_{ij} = i^3 - j^2$. Portanto, a matriz A é:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 26 \\ -3 & 4 & 23 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 4 \\ 26 & 23 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 4 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Do enunciado, temos $a_{ij} = i^3 - j^2$. Assim:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1^3-1^2) & (1^3-2^2) & (1^3-3^2) \\ (2^3-1^2) & (2^3-2^2) & (2^3-3^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 7 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

5. UEG-GO – Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} e^{2x^2} & 0 \\ 0 & |y+x| \end{pmatrix}$ e seja B matriz identidade de ordem 2, os valores de x e y não negativos, tal que as matrizes A e B sejam iguais, são respectivamente

a) 0 e 1

b) 1 e 1

c) 0 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Do enunciado, temos que $A = \begin{pmatrix} e^{2x^2} & 0 \\ 0 & |y+x| \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como A e B são iguais:

$$A = \begin{pmatrix} e^{2x^2} & 0 \\ 0 & |y+x| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $2x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ e $|y+x| = 1 \rightarrow y = \pm 1$.
Como x e y devem ser inteiros e positivos, x = 0 e y = 1.

6. Eear (adaptado) – Se $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b & -1 \\ x & 2k \end{pmatrix}$ são matrizes opostas, quais os valores de a, b, x e k?

Do enunciado, temos que as matrizes são opostas. Logo:
$a = -(-1) \rightarrow a = 1$
$b = -1$
$x = -(-1) \rightarrow x = 1$
$2k = -2 \rightarrow k = -1$
Assim, a = 1; b = –1; x = 1; k = –1.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

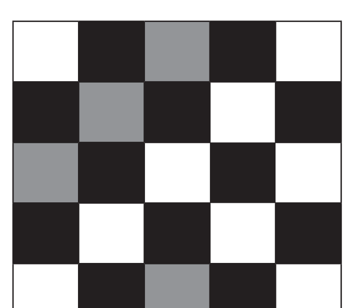
7. Fatec – Leia o texto para responder à questão a seguir.

Uma tela de computador pode ser representada por uma matriz de cores, de forma que cada elemento da matriz corresponda a um *pixel*[1] na tela.

Numa tela em escala de cinza, por exemplo, podemos atribuir 256 cores diferentes para cada pixel, do preto absoluto (código da cor: 0), passando pelo cinza intermediário (código da cor: 127), ao branco absoluto (código da cor: 255)

[1]Menor elemento em uma tela ao qual é possível atribuir-se uma cor.

Suponha que na figura estejam representados 25 pixels de uma tela.



A matriz numérica correspondente às cores da figura apresentada é dada por:

$$\begin{bmatrix} 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \\ 0 & 127 & 0 & 255 & 0 \\ 127 & 0 & 255 & 0 & 127 \\ 0 & 255 & 0 & 127 & 0 \\ 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \end{bmatrix}$$

Uma matriz M = (a_{ij}), quadrada de ordem 5, em que i representa o número da linha e j representa o número da coluna, é definida da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 127, \text{ se } i > j \\ 255, \text{ se } i < j \end{cases}$$

A matriz M corresponde a uma matriz de cores em escala de cinza, descrita pelo texto, em uma tela.

Sobre essa matriz de cores, pode-se afirmar que ela:

a) terá o mesmo número de pixels brancos e cinza.
b) terá o mesmo número de pixels brancos e pretos.
c) terá o mesmo número de pixels pretos e cinza.
d) terá uma diagonal com cinco pixels brancos.
e) terá uma diagonal com cinco pixels cinza.

8. Cefet-MG – Cinco amigos, A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5, viajaram juntos num fim de semana e, durante a viagem, as despesas foram divididas igualmente entre eles. Entretanto, para facilitar o troco, algumas vezes um emprestava dinheiro para o outro. Considere que nas matrizes S e D, abaixo, estão registrados os valores, em reais, que cada um emprestou para o outro no sábado e no domingo, respectivamente, sendo que o elemento da linha i e da coluna j representa o que o amigo Ai emprestou ao amigo A_j nesse dia, com i e j variando de 1 a 5.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & 10 & 2 \\ 15 & 0 & 11 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 0 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 7 & 10 \\ 15 & 8 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 18 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Ao final da viagem, o amigo A_4 ainda devia aos demais amigos, em reais, a quantia de

a) 10.
b) 15.
c) 31.
d) 41.
e) 72.

9. ESPM-SP – A distribuição dos n moradores de um pequeno prédio de apartamentos é dada pela matriz $\begin{bmatrix} 4 & x & 5 \\ 1 & 3 & y \\ 6 & y & x+1 \end{bmatrix}$, onde cada elemento a_{ij} representa a quantidade de moradores do apartamento j do andar i. Sabe-se que, no 1º andar, moram 3 pessoas a mais que no 2º e que os apartamentos de número 3 comportam 12 pessoas ao todo. O valor de **n** é:

a) 30
b) 31
c) 32
d) 33
e) 34

10. IFPE (adaptado) – Anselmo (1), Eloi (2), Pedro (3) e Wagner (4) são matemáticos e, constantemente, se desafiam com exercícios. Com base na matriz

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

, que enumera cada elemento a_{ij} representando o número de desafios que "i" fez a "j". Assim sendo, qual matemático mais desafiou e qual foi mais desafiado?

11. Mackenzie – Se a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & x+y+z & 3y-z+2 \\ 4 & 5 & -5 \\ y-2z+3 & z & 0 \end{bmatrix}$$

é simétrica, o valor de x é

a) 0
b) 1
c) 6
d) 3
e) –5

12. Unicamp – Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz à equação $A^2 = aA + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a

a) –2.
b) –1.
c) 1.
d) 2.

13. UEM-PR (adaptado) – Em uma região, populações de espécies de insetos pertencentes às ordens Hymenoptera (abelhas, E_1, e formigas, E_2) e Isoptera (cupins, E_3) vivem em três locais diferentes (1, 2 e 3), com os organismos de cada população mantendo algum grau de cooperação e de divisão de trabalho. Considere a matriz que representa o número de populações desses insetos, em que a entrada a_{ij} dessa matriz é a população da espécie E_j no local i, e julgue os itens

$$\begin{bmatrix} 24 & 19 & 21 \\ 15 & 11 & 18 \\ 12 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

I. O número de populações de insetos dessa região é 150.
II. A quantidade de populações de cupins dessa região é 53.
III. Nessa região, o número de populações de insetos pertencentes à ordem Hymenoptera é 97.

a) Apenas o item I está correto.
b) Apenas os itens I e II estão corretos.
c) Apenas os itens II e III estão corretos.
d) Apenas os itens I e III estão corretos.
e) Todos os itens estão corretos.

14. Uerj – Considere a sequência de matrizes $(A_1, A_2, A_3, ...)$, todas quadradas de ordem 4, respectivamente iguais a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 & 33 & 34 & 35 \\ 36 & 37 & 38 & 39 \\ 40 & 41 & 42 & 43 \\ 44 & 45 & 46 & 47 \end{pmatrix}, \ldots$$

Sabendo que o elemento $a_{ij} = 75\,432$ é da matriz A_n, determine os valores de n, i e j.

15. UEM-PR (adaptado) – Os fungos são organismos uni ou pluricelulares cujo processo de reprodução depende do meio no qual se desenvolvem. Considere a matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} M_1 & M_2 & M_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ F = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to F_1 \\ \to F_2 \\ \to F_3 \end{array} \end{array}$$

Nela os valores a_{ij}, $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$ indicam a capacidade de reprodução do fungo F_i no meio M_j. Suponha, ainda, que $a_{ij} = 0$ significa que o fungo não consegue se reproduzir, e que $a_{ij} = 1$ é capaz de se reproduzir com sucesso nesse meio. Assim, analise os itens a seguir e assinale a alternativa correta.

I. Se F for a matriz identidade, então isso significa que somente o fungo da espécie F_1 tem capacidade de reprodução em um qualquer dos três meios.

II. Se F for uma matriz simétrica, então podemos afirmar que a espécie F_1 tem a mesma capacidade de reprodução no meio M_2 que a da espécie F_2 no meio M_1.

III. Se F_2 não se reproduz no meio M_1, e F_3 não se reproduz nos meios M_1 e M_2, então a matriz F que representa a capacidade de reprodução desses fungos é uma matriz triangular superior.

a) Apenas os itens I e II estão corretos.

b) Apenas os itens II e III estão corretos.

c) Apenas os itens I e III estão corretos.

d) Apenas o item III está correto.

e) Todos os itens estão corretos.

16. ITA – Seja $A = (a_{ij})_{5x5}$ a matriz tal que $a_{ij} = 2^{i-1}(2j - 1)$, $1 \leqslant i, j \leqslant 5$. Considere as afirmações a seguir:

I. Os elementos de cada linha i formam uma progressão aritmética de razão 2^i .

II. Os elementos de cada coluna j formam uma progressão geométrica de razão 2.

III. tr A é um número primo.

É(são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) apenas I e III.

e) I, II e III.

17. Unicamp (adaptado) – Em uma matriz, chamam-se elementos internos aqueles que não pertencem à primeira nem à última linha ou coluna. Sendo assim, qual é o número de elementos internos em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas?

ESTUDO PARA O ENEM

18. Imed C6-H25

Em uma grande cidade, para estudar o nível de ruído a que estavam expostos os habitantes, a prefeitura realizou quatro medições diárias durante cinco dias em um cruzamento de grande movimento. Cada elemento a_{ij} da matriz a seguir representa o nível de ruído, em decibéis (dB), registrado na medição i do dia j.

$$\begin{bmatrix} 45 & 62 & 68 & 44 & 63 \\ 51 & 49 & 72 & 48 & 68 \\ 39 & 52 & 71 & 52 & 62 \\ 51 & 45 & 63 & 40 & 69 \end{bmatrix}$$

De acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), 50 dB é o nível máximo recomendável à exposição do ouvido humano. Com as informações apresentadas, determine o nível médio de ruídos registrados no quarto dia e assinale a alternativa correta:

a) 46 dB **b)** 46,5 dB **c)** 52 dB **d)** 65,5 dB **e)** 68,5 dB

19. FGV C1-H2

Os marcos A, B, C e D de uma cidade estão conectados por pistas de rodagem, conforme mostra a malha viária indicada no diagrama da figura 1. A figura 2 indica uma matriz que representa as quantidades de caminhos possíveis de deslocamento entre os marcos (dois a dois).

Considera-se um caminho entre dois marcos qualquer percurso que não viole o sentido da pista, que não passe novamente pelo marco de onde partiu e que termine quando se atinge o marco de destino final pela primeira vez. As flechas da figura 1 indicam o sentido das pistas de rodagem.

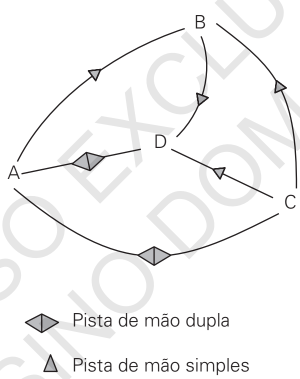


Figura 1

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 2

Durante período de obras na malha viária descrita, a pista de rodagem entre os marcos A e D passou a ser de mão simples (sentido de A para D), e a pista do marco C para o marco D, ainda que tenha permanecido com mão simples, teve seu sentido invertido, passando a ser de D para C. Comparando os 16 elementos da matriz da figura 2 com seus correspondentes na matriz da nova configuração de malha viária, a quantidade de elementos que mudarão de valor é igual a

a) 5. **b)** 6. **c)** 7. **d)** 8. **e)** 9.

20. UEL-PR (adaptado) C6-H25

O levantamento sobre a dengue no Brasil tem como objetivo orientar as ações de controle, que possibilitam aos gestores locais de saúde antecipar as prevenções a fim de minimizar o caos gerado por uma epidemia. O Ministério da Saúde registrou 87 mil notificações de casos de dengue entre janeiro e fevereiro de 2014, contra 427 mil no mesmo período em 2013. Apesar do resultado expressivo de diminuição da doença, o Ministério da Saúde ressalta a importância de serem mantidos o alerta e a continuidade das ações preventivas. Os principais criadouros em 2014 são apresentados na tabela a seguir.

Região	Armazenamento de água (%)	Depósitos domiciliares (%)	Lixo (%)
Norte	20,2	27,4	52,4
Nordeste	75,3	18,2	6,5
Sudeste	15,7	55,7	28,6
Centro-Oeste	28,9	27,3	43,8
Sul	12,9	37,0	50,1

BVS Ministério da Saúde. Disponível em: <www.brasil.gov.br/saude/2014>.
Acesso em: 21 abr. 2015. (Adaptado)

Seja A a matriz formada pelos elementos a_{ij}, em que i são as regiões e j, os tipos de criadouros apresentados na tabela. Considerando que cada região tenha seus tipos de criadouros aumentados em 10%, devido a um desequilíbrio ambiental, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a matriz B resultante.

a) $B_{3\times5} = k \cdot A_{3\times5}$, em que k = 10,0
b) $B_{3\times5} = (1+k) \cdot A_{3\times5}$, em que k = 0,1
c) $B_{5\times3} = (1+k) \cdot A_{5\times3}$, em que k = 0,1
d) $B_{5\times3} = (10+k) \cdot A_{5\times3}$, em que k = 0,1
e) $B_{5\times3} = k \cdot A_{5\times3}$, em que k = 0,1

46

OPERAÇÕES COM MATRIZES

- Adição de matrizes
- Subtração de matrizes
- Multiplicação de um número real por uma matriz
- Multiplicação de matrizes

HABILIDADES

- Efetuar a adição e a subtração de matrizes.
- Realizar a multiplicação de um número real por uma matriz.
- Efetuar a multiplicação entre matrizes.
- Identificar aplicações relacionadas a operações entre matrizes.

Clube		Pts	PJ	VIT	E	D	GP	GC	SG
1	Time A	80	38	23	11	4	64	26	38
2	Time B	72	38	21	9	8	59	29	30
3	Time C	69	38	19	12	7	51	29	22
4	Time D	66	38	18	12	8	48	27	21
5	Time E	63	38	16	15	7	46	34	12

Tabela de pontos de uma liga de futebol.

Introdução

Em quase todos os esportes, são utilizadas tabelas para representar a classificação e a pontuação das equipes. Como já estudamos, tabelas podem ser expressas na forma de matrizes. Além disso, vimos que é possível realizar operações entre matrizes.

Neste módulo, nos aprofundaremos no cálculo e nas operações matriciais.

ADIÇÃO DE MATRIZES

Para realizarmos a adição entre duas ou mais matrizes, efetuamos essa operação com matrizes de mesma ordem. O procedimento é feito elemento a elemento correspondente. Ou seja, é necessário realizarmos a adição entre elementos de mesmo índice.

Essa operação envolvendo matrizes pode ser assim definida:

Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, dizemos que a soma de A + B é dada pela matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, sendo $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $1 < i < m$ e $1 < j < n$.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = C$$

Exemplo

Vamos considerar as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Para calcular a matriz C = A + B, basta somarmos seus elementos correspondentes:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 & 2+5 \\ 0+3 & -1+2 \\ 3+1 & 4+7 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, $C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 1 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$.

MATRIZ OPOSTA

Denominamos **matriz oposta de uma matriz A**, a matriz que, somada a ela, resulta em uma matriz nula. Representamos a matriz oposta de A por –A. Ou seja:

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo

Se $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, então $-B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Isso ocorre porque:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

Obtemos a subtração entre duas matrizes A e B, ambas de mesma ordem, por meio da soma entre a matriz A e a matriz oposta de B. Ou seja, A – B = A + + (–B). Assim:

$$C = A + (-B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Exemplo

Vamos considerar as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Para obter a matriz C = A – B, realizamos os seguintes cálculos:

$C = A - B \rightarrow C = A + (-B) \rightarrow$

$$\rightarrow C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -2 \\ -1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow C = \begin{pmatrix} 5+2 & 2-5 \\ 0-3 & -1-2 \\ 3-1 & 4-7 \end{pmatrix} \rightarrow C = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO DE MATRIZES

Considerando as matrizes A, B, C e 0 (matriz nula), ambas de mesma ordem, valem as seguintes propriedades:

- A + B = B + A (comutativa).
- (A + B) + C = A + (B + C) (associativa).
- A + 0 = 0 + A = A (existência do elemento neutro).
- A + (–A) = (–A) + A = 0 (existência do elemento oposto).
- A + C = B + C ↔ A = B (cancelamento).

MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO REAL POR UMA MATRIZ

Para multiplicarmos um número real **k** por uma matriz, efetuamos a multiplicação de cada elemento da matriz por **k**.

Essa operação pode ser assim definida:

> Se A é uma matriz m × n, de elementos a_{ij}, e k é um número real, kA é uma matriz m × n, cujos elementos são $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Assim:

$$kA = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & 4 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, qual o resultado da multiplicação de A por 2?

Considerando que, neste exemplo, k = 2:

$$k \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & 4 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot \frac{1}{2} & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot \sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 10 \\ 2 & 8 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Para multiplicarmos duas matrizes A e B, o produto AB entre elas só pode ser possível se a quantidade de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

Além disso, a matriz resultante tem como ordem o número de linhas de A e o número de colunas de B.

Assim, podemos efetuar a operação da seguinte forma:

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, o produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$, na qual cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos de cada elemento da linha i de A pelo correspondente elemento da coluna j de B.

Dadas $A_{3\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ e $B_{2\times3} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$, a multiplicação de $A \cdot B$ será a matriz C, tal que:

$$C_{3\times3} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Obtemos os elementos de C da seguinte forma:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$
$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}$$
$$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21}$$
$$\vdots$$
$$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22}$$
$$c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23}$$

Portanto, é possível definirmos a multiplicação de A por B como:

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Considerando as matrizes A, B e C, temos as seguintes propriedades:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (associativa).
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (distributiva).

ROTEIRO DE AULA

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Adição

Matrizes de mesma ordem.

$A(a_{ij})_{mxn} + B(b_{ij})_{mxn} = C(c_{ij})_{mxn}$

onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Subtração.

Matrizes de mesma ordem.

Obtida a partir da soma entre a matriz A e a oposta de B.

Multiplicação

$A(a_{ij})_{mxn} \times k = B(b_{ij})_{mxn}$

onde $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

$A_{mxn} \cdot B_{nxp} = AB_{mxp.}$.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Sistema Dom Bosco – Sabendo que $\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ y & z^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$, os valores de x, y e z são, respectivamente:

a) 1, 3 ou –3 e 3.
b) 1, 3 e –3.
c) 1 ou –1, 3 ou –3 e 3 ou –3.
d) 1 ou –1, 3 e 3 ou –3.
e) 1, –3 e 3 ou –3.

Dadas $\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ y & z^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$, temos:

$x^2 - 2 = -1 \rightarrow x^2 = 1$.
Logo, $x = +1$ ou -1. Então:
$y - (-5) = 8 \rightarrow y = 8 - 5 \rightarrow y = 3$
$z^2 - (-1) = 10 \rightarrow z^2 = 10 - 1 \rightarrow z^2 = 9$
$z = +3$ ou -3

2. UEG-GO – Tatiana e Tiago comunicam-se entre si por meio de um código próprio dado pela resolução do produto entre as matrizes A e B, ambas de ordem 2 × 2, onde cada letra do alfabeto corresponde a um número, isto é, a = 1, b = 2, c = 3, ..., z = 26. Por exemplo, se a resolução de A · B for igual a $\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$, logo a mensagem recebida é **amor**. Dessa forma, se a mensagem recebida por Tatiana foi **flor** e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, então qual é a matriz A?

Do enunciado, sabemos que a mensagem recebida é **flor**. Logo, por analogia com a matriz obtida para **amor**, temos:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 6 = x \cdot 1 + y \cdot 2 \\ 12 = x \cdot (-1) + y \cdot 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6 = x + 2y \\ 12 = -x + y \end{cases} \rightarrow 18 = 3y \rightarrow x = -6 \text{ e } y = 6$$

$$\begin{cases} 15 = z \cdot 1 + w \cdot 2 \\ 18 = z \cdot (-1) + w \cdot 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 15 = z + 2w \\ 18 = -z + w \end{cases} \rightarrow 33 = 3w \rightarrow z = -7 \text{ e } w = 11$$

Portanto, a matriz $A = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$.

3. IFPE **C6-H24**

Rodrigo, Otávio e Ronaldo gostam muito de comida japonesa e saíram para comer *temaki*, também conhecido como um *sushi* enrolado à mão cujo formato lembra o de um cone. Foram então visitando vários restaurantes tanto no sábado quanto no domingo. As matrizes a seguir resumem quantos *temakis* cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$S - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } D - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

S refere-se às quantidades de *temakis* de sábado e D, às de domingo. Cada elemento a_{ij} nos dá o número de cones que a pessoa i pagou para a pessoa j, sendo Rodrigo o número 1, Otávio o número 2 e Ronaldo o número 3 ((a_{ij}) representa o elemento da linha i e da coluna j de cada matriz).

Assim, por exemplo, no sábado, Rodrigo pagou 3 *temakis* que ele próprio consumiu (a_{11}), 2 *temakis* consumidos por Otávio (a_{12}) e nenhum por Ronaldo (a_{13}), que corresponde à primeira linha da matriz S. Quantos *temakis* Otávio ficou devendo para Rodrigo neste fim de semana?

a) nenhum
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Somando as matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 2+3 & 0+0 \\ 1+0 & 1+2 & 2+1 \\ 0+1 & 3+0 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Assim, Rodrigo pagou para Otávio 5 *temakis* (a_{12}), e Otávio pagou para Rodrigo apenas 1 (a_{21}). Portanto, Otávio deve 4 *temakis* a Rodrigo.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

4. UFRN – Considere, a seguir, uma tabela com as notas de quatro alunos em três avaliações e a matriz M formada pelos dados dessa tabela.

	Avaliação 1	Avaliação 2	Avaliação 3
Thiago	8	9	6
Maria	6	8	7
Sônia	9	6	6
André	7	8	9

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 7 \\ 9 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

O produto $\frac{1}{3}M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ corresponde à média

a) de todos os alunos na Avaliação 3.
b) de cada avaliação.
c) de cada aluno nas três avaliações.
d) de todos os alunos na Avaliação 2.

Realizando o produto $\frac{1}{3}M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, temos:

$$\frac{1}{3}M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{9}{3} & \frac{6}{3} \\ \frac{6}{3} & \frac{8}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{9}{3} & \frac{6}{3} & \frac{6}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \frac{9}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8+9+6}{3} \\ \frac{6+8+7}{3} \\ \frac{9+6+6}{3} \\ \frac{7+8+9}{3} \end{pmatrix}$$

Assim, o produto corresponde à média de cada aluno nas três avaliações.

5. Udesc – Analise as proposições abaixo.

I. O produto de uma matriz linha por uma matriz linha é uma matriz linha.
II. Uma matriz identidade elevada ao quadrado é uma matriz identidade.
III. O produto de uma matriz por sua transposta é a matriz identidade.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Somente a afirmativa II é verdadeira.
d) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

Analisando cada item, temos:

I – Considerando as matrizes linha $A = [1 \quad -1]$ e $B = [1 \quad 0 \quad 1]$, como as ordens delas são respectivamente 1×2 e 1×3, o produto $A \cdot B$ não existe, uma vez que o número de colunas da matriz A difere do número de linhas de B. Portanto, falsa.

II – Sabendo que I_n é a matriz identidade de ordem n e sendo A uma matriz quadrada de ordem n, temos $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$. Assim, se $A = I_n$, então $I_n^2 = I_n \cdot I_n = I_n$. Logo, verdadeira.

III – Considerando $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e sua transposta $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, temos:

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$A \cdot A^t \neq I_2$. Logo, falsa.

6. Sistema Dom Bosco – Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Obtenha a matriz dada por A + B + C.
b) Qual será a matriz obtida calculando A + B – C?

a) Sabendo as matrizes A, B e C, a operação A + B + C será:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Fazendo A + B – C, temos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UFPR – Um criador de cães observou que as rações das marcas A, B, C e D contêm diferentes quantidades de três nutrientes, medidos em miligramas por quilograma, como indicado na primeira matriz abaixo. O criador decidiu misturar os quatro tipos de ração para proporcionar um alimento adequado para seus cães. A segunda matriz abaixo dá os percentuais de cada tipo de ração nessa mistura.

$$\begin{array}{l} \\ \text{Nutriente 1} \\ \text{Nutriente 2} \\ \text{Nutriente 3} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 210 & 370 & 450 & 290 \\ 340 & 520 & 305 & 485 \\ 145 & 225 & 190 & 260 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Percentuais de mistura} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array}\begin{bmatrix} 35\% \\ 25\% \\ 30\% \\ 10\% \end{bmatrix} \end{array}$$

Quantos miligramas do nutriente 2 estão presentes em um quilograma da mistura de rações?

a) 389 mg.
b) 330 mg.
c) 280 mg.
d) 210 mg.
e) 190 mg.

8. Uern – Sejam duas matrizes A e B: $A = (a_{ij})_{3x3}$, tal que

$a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j, \text{ se } i \leq j \\ i + j, \text{ se } i > j \end{cases}$ e $B = A^2$. Assim, a soma dos elementos da diagonal secundária de B é

a) 149.
b) 153.
c) 172.
d) 194.

9. UEL-PR – Uma reserva florestal foi dividida em quadrantes de $1 m^2$ de área cada um. Com o objetivo de saber quantas samambaias havia na reserva, o número delas foi contado por quadrante da seguinte forma:

Número de samambaias por quadrante

$$A_{7\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Número de quadrantes

$$B_{7\times1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 7 \\ 16 \\ 14 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O elemento a_{ij} da matriz A corresponde ao elemento b_{ij} da matriz B, por exemplo, e 8 quadrantes contêm 0 (zero) samambaia, 12 quadrantes contêm 1 samambaia. Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a operação efetuada entre as matrizes A e B, que resulta no número total de samambaias existentes na reserva florestal.

a) $A^t \times B$
b) $B^t \times A^t$
c) $A \times B$
d) $A^t + B^t$
e) $A + B$

10. FGV – Um determinado produto deve ser distribuído a partir de 3 fábricas para 4 lojas consumidoras. Seja $C = (c_{ij})_{3\times4}$ a matriz do custo unitário de transporte da fábrica i para a loja j, com $c_{ij} = (2i - 3j)^2$. Seja $B = (b_{ij})_{3\times4}$ a matriz que representa a quantidade de produtos transportados da fábrica i para a loja j, em milhares de unidades, com $b_{ij} = i + j$.

a) Determine as matrizes $C = (c_{ij})_{3\times4}$ e B^t, uma vez que B^t é a transposta da matriz $B = (b_{ij})_{3\times4}$.

b) Sendo $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times1}$ e $E = [1 \ \ 0 \ \ 0]_{1\times3}$, determine as matrizes $X = (x_{ij})_{3\times1}$ e $Y = (y_{ij})_{1\times3}$, tais que $X = B \cdot D$ e $Y = E \cdot (C \cdot B^t)$. Em seguida, determine o significado econômico de x_{ij} e de y_{ij}.

11. Fac. Albert Einstein – Uma matriz B possui i linhas e j colunas e seus elementos são obtidos a partir da expressão $b_{ij} = i - 2j$. Seja uma matriz $A = (a_{ij})_{2\times3}$, cujos elementos da primeira coluna são nulos, e I_2 a matriz identidade de ordem 2, tal que $AB = I_2$. O valor numérico do maior elemento da matriz A é igual a:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

12. Unioeste-PR – Sendo A uma matriz quadrada e n um inteiro maior ou igual a 1, define-se A^n como a multiplicação de A por A, n vezes. No caso de A ser a matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, é correto afirmar que a soma $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{39} + A^{40}$ é igual à matriz

a) $\begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 20 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 40 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & -40 \\ -40 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 40 & -40 \\ -40 & 40 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

13. Unicamp – Sendo a um número real, considere a matriz

$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Então, A^{2017} é igual a

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & a^{2017} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

14. Uema – Uma matriz A ($m \times n$) é uma tabela retangular formada por $m \times n$ números reais (a_{ij}), dispostos em m linhas e n colunas. O produto de duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$ é uma matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$, em que o elemento c_{ij} é obtido da multiplicação ordenada dos elementos da linha i, da matriz A, pelos elementos da coluna j, da matriz B, e somando os elementos resultantes das multiplicações. A soma de matrizes é comutativa, ou seja, $A + B = B + A$.

Faça a multiplicação das matrizes A e B e verifique se esse produto é comutativo, ou seja: $A + B = B + A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15. Uern (adaptado) – Considere a seguinte operação entre matrizes: $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot K = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Qual é a soma de todos os elementos da matriz K?

16. UEM-PR (adaptado) – Sobre matrizes, verifique os itens a seguir:

I. A matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, com $a_{ij} = 0$, se $i < j$, é uma matriz triangular inferior.

II. Uma matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ é chamada matriz diagonal se $a_{ij} = 0$, sempre que $i = j$.

III. Considere uma matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 5}$ Ela será a matriz identidade se $\begin{cases} a_{ij} = 1, & i = j \\ a_{ij} = 1, & i \neq j \end{cases}$.

IV. Ao somarmos uma matriz 3×2 com uma 2×3, teremos uma matriz 3×3.

V. Se A é uma matriz $m \times n$, então a multiplicação da matriz A por sua transposta A^t será uma matriz $n \times m$.

Os itens corretos são:

a) Apenas os itens I e II.

b) Apenas os itens II e III.

c) Apenas os itens I e V.

d) Apenas os itens II e IV.

e) Apenas os itens I, III e V.

17. UEPG (adaptado) – Considerando as matrizes abaixo, onde a, b, c e θ são números reais, verifique se as afirmações são verdadeiras.

$$A = \begin{bmatrix} c & 5^b \\ \cos\theta & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \ln\sqrt[3]{e} & \frac{10}{50} \\ \ln\sqrt{e} & 7^{a+2b} \end{bmatrix}$$

a) Se $a = 2$, $c = \frac{1}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $b = -1$, então $A = B$.

b) Se $b = 0$ e $c = -1$, então o elemento da 1ª linha e da 1ª coluna da matriz $A \cdot B$ é $\ln\sqrt[6]{e}$.

ESTUDO PARA O ENEM

18. UEL-PR C6-H25

Atualmente, com a comunicação eletrônica, muitas atividades dependem do sigilo na troca de mensagens, principalmente as que envolvem transações financeiras. Os sistemas de envio e recepção de mensagens codificadas chamam-se Criptografia. Uma forma de codificar mensagens é trocar letras por números, como indicado na tabela-código a seguir.

	1	2	3	4	5
1	Z	Y	X	V	U
2	T	S	R	Q	P
3	O	N	M	L	K
4	J	I	H	G	F
5	E	D	C	B	A

Nessa tabela-código, uma letra é identificada pelo número formado pela linha e pela coluna, nessa ordem. Assim, o número 32 corresponde à letra N. A mensagem final M é dada por A + B = M, onde B é uma matriz fixada, que deve ser mantida em segredo, e A é uma matriz enviada ao receptor legal. Cada linha da matriz M corresponde a uma palavra da mensagem, sendo o 0 (zero) a ausência de letras ou o espaço entre palavras. José tuitava durante o horário de trabalho quando recebeu uma mensagem do seu chefe, que continha uma matriz A. De posse da matriz B e da tabela-código, ele decodificou a mensagem. O que a chefia informou a José?

Dados:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 20 & 13 & 8 & 50 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 34 & 32 & 3 & 4 & 0 \\ 45 & 26 & 13 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 45 & 16 & 20 & 11 & 17 & 0 \\ 1 & 50 & 21 & 3 & 35 & 42 & 11 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 10 & 15 & -8 & 30 & -1 \\ 14 & 31 & 19 & 19 & -3 & -4 & 0 \\ 6 & -4 & 8 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & 16 & 32 & 20 & -17 & 0 \\ 44 & -8 & 13 & 30 & 20 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

a) Sorria, você está sendo advertido.
b) Sorria, você está sendo filmado.
c) Sorria, você está sendo gravado.
d) Sorria, você está sendo improdutivo.
e) Sorria, você está sendo observado.

19. Uema C6-H25

Uma empresa da construção civil faz 3 tipos de casa: tipo 1, para casal sem filhos; tipo 2, para casal com até 2 filhos; e tipo 3, para casal com 3 ou mais filhos. A empresa de material de construção Barateiro Umbizal fornece ferro, madeira, telha e tijolo para a primeira etapa da construção, conforme tabelas de material e de preço.

	Quantidade de material fornecido pela empresa Barateiro Umbizal			
Tipo da casa	Ferro (feixe)	Madeira (m^3)	Telha (milheiro)	Tijolo (milheiro)
Tipo 1	3	2	2	3
Tipo 2	4	4	3	5
Tipo 3	5	5	4	6

	Preço por unidade de material fornecido em reais		
Feixe de ferro	Madeira (m^3)	Telha (milheiro)	Tijolo (milheiro)
500,00	600,00	400,00	300,00

Sabendo que a empresa construirá 2, 4 e 5 casas dos tipos 1, 2 e 3, respectivamente, o preço unitário de cada tipo de casa e o custo total do material fornecido, para esta primeira etapa de construção, pela empresa, em reais, é de

a)

Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Custo total
5.200,00	7.100,00	8.900,00	83.300,00

b)

Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Custo total
4.400,00	7.100,00	9.100,00	82.700,00

c)

Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Custo total
4.400,00	7.100,00	8.900,00	81.700,00

d)

Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Custo total
4.400,00	7.400,00	8.900,00	82.900,00

e)

Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Custo total
4.500,00	7.100,00	8.800,00	82.400,00

20. Enem C6-H25

Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4 × 4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

47

MATRIZ INVERSA E EQUAÇÃO MATRICIAL

- Matriz inversa
- Equação matricial

HABILIDADES

- Calcular a matriz inversa com base em uma matriz dada.
- Resolver equações matriciais.
- Identificar aplicações relacionadas a operações entre matrizes.

ALEXANDER YAKIMOV/DREAMSTIME.COM

Os números binários são utilizados para proteger dados na internet e mantê-los em segurança, por meio de criptografia, técnica de codificação e decodificação em que é possível usar matrizes.

Introdução

Desde o Antigo Egito, as sociedades têm necessidade de codificar e decodificar mensagens. Atualmente, a criptografia é largamente utilizada em transações eletrônicas, como em compras realizadas pela internet. Além disso, ela é aplicada em muitas outras situações do cotidiano que exigem confidencialidade no tráfego de dados.

Há muitas técnicas usadas para criptografar e decodificar um conjunto de caracteres. Um desses métodos aplica as matrizes.

MATRIZ INVERSA

Uma matriz quadrada **B** de ordem n é a inversa da matriz quadrada **A**, também de ordem n, se satisfizer à seguinte condição:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Representamos a matriz inversa de A como A^{-1}.

Vamos considerar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Podemos obter a inversa de A calculando:

$$A \cdot (A^{-1}) = I_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade entre matrizes, chegamos aos seguintes sistemas:

$$\begin{cases} a+3c=1 \\ 2a+c=0 \end{cases} \rightarrow a = -\frac{1}{5} \text{ e } c = \frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} b+3d=0 \\ 2b+d=1 \end{cases} \rightarrow b = \frac{3}{5} \text{ e } d = -\frac{1}{5}$$

Ou seja, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

Exemplo

Verificaremos se a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ é inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Temos que:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot6+5\cdot(-1) & 1\cdot(-5)+5\cdot1 \\ 1\cdot6+6\cdot(-1) & 1\cdot(-5)+6\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6\cdot1+(-5)\cdot1 & 6\cdot5+(-5)\cdot6 \\ (-1)\cdot1+1\cdot1 & (-1)\cdot5+1\cdot6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela definição $A \cdot B = B \cdot A = I_2$, a matriz B é inversa da matriz A. Ou seja, $B = A^{-1}$.

Além disso, A também é inversa de B (ou seja, $A = B^{-1}$). Sendo assim, $A = (A^{-1})^{-1}$.

PROPRIEDADES

Vamos considerar as matrizes quadradas A e B, de ordem n e invertíveis. Então, são válidas as seguintes propriedades:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^{t} = (A^{t})^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Dada uma matriz A, se A^{-1} existir, então A^{-1} é única.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule sua inversa.

Resolução

$$A \cdot (A^{-1}) = I \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade entre matrizes, obtemos:

$$\begin{cases} 2a+3c=1 \\ a+2c=0 \end{cases} \rightarrow a = 2 \text{ e } c = -1$$

$$\begin{cases} 2b+3d=0 \\ b+2d=1 \end{cases} \rightarrow b = -3 \text{ e } d = 2$$

Ou seja, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Sistema Dom Bosco – Calcule a inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Resolução

Como $B \cdot (B^{-1}) = I$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ a+3d+g & b+3e+h & c+3f+i \\ a+2d & b+2e & c+2f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela igualdade entre matrizes, obtemos:

$a = 1$
$b = 0$
$c = 0$

Na linha 3, substituindo os valores calculados, podemos encontrar as demais incógnitas:

$$a + 2d = 0 \rightarrow 1 + 2d = 0 \rightarrow 2d = -1 \rightarrow d = -\frac{1}{2}$$

$$b + 2e = 0 \rightarrow 0 + 2e = 0 \rightarrow 2e = 0 \rightarrow e = 0$$

$$c + 2f = 1 \rightarrow 0 + 2f = 1 \rightarrow f = \frac{1}{2}$$

Fazendo o mesmo processo para a segunda linha, temos:

$a + 3d + g = 0 \rightarrow 1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + g = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 1 - \frac{3}{2} + g = 0 \rightarrow g = -1 + \frac{3}{2} \rightarrow g = \frac{1}{2}$

$b + 3e + h = 1 \rightarrow 0 + 3 \cdot 0 + h = 1 \rightarrow h = 1$

$c + 3f + i = 0 \rightarrow 0 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + i = 0 \rightarrow \frac{3}{2} + i = 0 \rightarrow$

$\rightarrow i = -\frac{3}{2}$

Ou seja, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

EQUAÇÕES MATRICIAIS

Uma vez definidas as operações entre matrizes, conseguimos resolver equações em que as incógnitas são matrizes. Essas equações são chamadas **matriciais**.

Para solucionar uma equação matricial, aplicamos nossos conhecimentos envolvendo as equações.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Se $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$, resolva a equação matricial $2X + A = 3B$.

Resolução

Manipulando a equação, obtemos:

$2X + A = 3B \rightarrow 2X = 3B - A \rightarrow X = \frac{1}{2}(3B - A)$

Obtendo a matriz $3B - A$, temos:

$$3B - A = 3\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 12 \\ -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Por fim, determinamos X:

$$X = \frac{1}{2}(3B - A) \rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 18 \\ 10 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Logo, a solução para a equação matricial é $X = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

2. Sistema Dom Bosco – Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$, resolva a equação matricial $AX = B$.

Resolução

Observando as operações envolvidas na equação, concluímos que X é de ordem 2.

Como A está sendo multiplicada por X (nessa ordem), necessariamente a quantidade de linhas de X é igual à quantidade de colunas de A (ou seja, 2).

Por outro lado, o resultado dessa multiplicação é a matriz B, também de ordem 2. Assim, concluímos que a quantidade de linhas de X é 2.

Representando X por $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

Dessa forma:

$$\begin{cases} 2a + 3c = 4 \\ -a = -7 \end{cases} \rightarrow a = 7 \text{ e } c = -\frac{10}{3}$$

$$\begin{cases} 2b + 3d = 3 \\ -b = -3 \end{cases} \rightarrow b = 3 \text{ e } d = -1$$

Ou seja, $X = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -\frac{10}{3} & -1 \end{bmatrix}$.

ROTEIRO DE AULA

MATRIZES

Matriz inversa

$A \cdot B = B \cdot A =$ I_n .

Dada uma matriz A, representamos sua inversa como A^{-1}.

Equações matriciais

Equações em que as incógnitas são matrizes .

Para resolver as equações matriciais utilizamos as operações entre matrizes .

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Mackenzie – Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e os inteiros x e y são tais que $A^2 +$

$+ x \cdot A + y \cdot B = C$, então

a) $x = 0$
b) $x = 1$
c) $x = -2$
d) $x = -1$
e) $x = 2$

Do enunciado, sabemos que $A^2 + x \cdot A + y \cdot B = C$. Assim:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então:

$A^2 + x \cdot A + y \cdot B = C \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & x & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1+x+y & 2+x & 0 \\ 0 & 1+x+y & 0 \\ 0 & 0 & 1+x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim:

$1+x+y=0$

$2+x=0 \rightarrow x=-2$

2. PUC-RS (adaptado) – Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e a função f, definida no conjunto das matrizes 2×2 por $f(X) =$ $= X^2 - 2X$, então f(A) é?

Do enunciado, sabemos que $f(X) = X^2 - 2X$. Logo, f(A) será:

$f(A) = A^2 - 2A$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Uesb-BA C6-H25

Sabe-se que existem muitas técnicas para codificar e decodificar mensagens, dentre elas as que fazem uso das matrizes. Admitindo-se que, na transmissão da informação de certo valor, se utilize a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, matriz codificadora, e que a decodificação seja feita pelas matrizes A e B, por meio da relação $A^{-1}(AB)$, em que $AB = \begin{bmatrix} 50 & 111 \\ 9 & 20 \end{bmatrix}$, é correto afirmar que o termo de maior valor da matriz B é

a) 74
b) 82
c) 96
d) 102
e) 120

Supondo AB = C, temos:

$A^{-1}(AB) = A^{-1}C \rightarrow B = A^{-1}C$

Como $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50 & 111 \\ 9 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 82 \\ -14 & 31 \end{bmatrix}$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

4. Unicamp – Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, onde a e b são números reais. Se $A^2 = A$ e A é invertível, então

a) a = 1 e b = 1.
b) a = 1 e b = 0.
c) a = 0 e b = 0.
d) a = 0 e b = 1.

$A^2 = A \rightarrow A \cdot A = A$

Sabendo que $A \cdot I_2 = A$ e $A \cdot A^{-1} = I_2$, com I_2 sendo a matriz identidade de segunda ordem, temos:

$A^2 = A \rightarrow A \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} \rightarrow A \cdot I_2 = I_2 \rightarrow A = I_2$

Logo, a = 1 e b = 0.

5. FGV – Dada a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ e sabendo que a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ é a matriz inversa da matriz A, podemos concluir que a matriz X, que satisfaz à equação matricial AX = B, tem como soma de seus elementos o número

a) 14
b) 13
c) 15
d) 12
e) 16

$AX = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$
$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow (I) \cdot X = A^{-1} \cdot B$
Assim, $X = A^{-1} \cdot B$. Logo:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4) \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Portanto, a soma dos elementos de X será 10 + 3 = 13.

6. Efomm (adaptado) – Determine uma matriz invertível P que satisfaça à equação $P^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Dada a equação $P^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, supondo que $P = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, temos:

$$P^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow P \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = A \rightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos a equação matricial $\begin{bmatrix} 5x & -2y \\ 5z & -2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Logo:

$5x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{5}$

$-2y = -2 \rightarrow y = 1$

$5z = 3 \rightarrow z = \frac{3}{5}$

$-2w = 3 \rightarrow w = -\frac{3}{2}$

Dessa forma, a matriz P será:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. FGV – Sabendo que a inversa de uma matriz A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ e que a matriz X é solução da equação matricial $X \cdot A = B$, em que $B = [8 \ \ 3]$, podemos afirmar que a soma dos elementos da matriz X é

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

8. UEM-PR – Considere as matrizes $A = [x \quad y \quad 1]$ e

$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ -1 & 9 & -2 \\ 8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$, a transposta de A denotada por A^t e um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy. Considerando esses dados, é correto afirmar que

I. o produto AB é uma matriz linha.

II. o produto BA^t é uma matriz linha.

III. A^t é uma matriz coluna.

IV. a equação $ABA^t = 0$ é equivalente à equação $4x^2 + 9y^2 - 16x - 12 = 0$.

V. a equação $ABA^t = 0$ é a equação de uma cônica em xOy.

a) Apenas I, II e V estão corretas.

b) Apenas II, III e IV estão corretas.

c) Apenas III, IV e V estão corretas.

d) Apenas I, III e V estão corretas.

e) Todas estão corretas.

9. EsPCEx – Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} x & y+4 \\ y & 3 \end{bmatrix}$.

Se x e y são valores para os quais B é a transposta da inversa da matriz A, então o valor de x + y é

a) –1

b) –2

c) –3

d) –4

e) –5

10. Esc. Naval (adaptado) – Considere as seguintes matrizes:

$R = \begin{bmatrix} 4 & (16)^y & -1 \\ 9^x & a & 0 \end{bmatrix}$; $S = \begin{bmatrix} 1 & (4)^{(2y-1)} & 2^{-1} \\ 3^x & b & 1 \end{bmatrix}$ e

$T = \begin{bmatrix} b & (2)^{(2y-1)} - 10 & c \\ 27 & 13 & -6 \end{bmatrix}$.

Qual é a soma dos quadrados das constantes reais x, y, a, b, c que satisfazem à equação matricial R – 6S = T?

11. UPF-RS – Dadas as matrizes quadradas A, B e C, de ordem n, e a matriz identidade I_n, de mesma ordem, considere as proposições a seguir, verificando se são **verdadeiras** (**V**) ou **falsas** (**F**).

( ) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

( ) $(A - B)^2 = A^2 - B^2$

( ) $CI = C$

a) V – V – V
b) V – F – V
c) F – V – V
d) F – F – V
e) F – F – F

12. Fuvest-SP – Sejam α e β números reais com $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \beta < \pi$. Se o sistema de equações, dado em notação matricial, $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{tg}\,\alpha \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$, for satisfeito, então $\alpha + \beta$ é igual a

a) $-\frac{\pi}{3}$
b) $-\frac{\pi}{6}$
c) 0
d) $\frac{\pi}{6}$
e) $\frac{\pi}{3}$

13. Insper-SP – Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}$. Se x e y são as soluções não nulas da equação $A \cdot Y + B \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, então $x \cdot y$ é igual a

a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

14. Fac. Albert Einstein-SP – Uma matriz quadrada se diz ortogonal se sua inversa é igual à sua transposta. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} x-3 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & x-3 \end{pmatrix}$, em que $x \in \mathbb{C}^*$, a soma dos valores de x que a tornam uma matriz ortogonal é igual a

a) 6 + 4i
b) 6 – 4i
c) 6
d) 4

15. FGV – Os pontos de coordenadas (x, y) do plano cartesiano que satisfazem à equação matricial $[x,\ y]\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [1]$ representam:

a) uma elipse com centro no ponto (0, 0).
b) um par de retas paralelas com declividade – 3.
c) uma hipérbole com um dos focos de coordenadas (–3, 0).
d) uma circunferência de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
e) uma parábola com concavidade voltada para cima.

16. Unesp – Considere a equação matricial A + BX = X + + 2C, cuja incógnita é a matriz X, e todas as matrizes são quadradas de ordem n. A condição necessária e suficiente para que essa equação tenha solução única é que:

a) B – I ≠ O, onde I é a matriz identidade de ordem n e O é a matriz nula de ordem n.
b) B seja invertível.
c) B ≠ O, onde O é a matriz nula de ordem n.
d) B – I seja invertível, onde I é a matriz identidade de ordem n.
e) A e C sejam invertíveis.

17. Unicamp – Considere a matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix}$, que depende do parâmetro real $\alpha > 0$.

a) Calcule a matriz $(A_\alpha + A_{2\alpha})^2$.

b) Um ponto no plano cartesiano com as coordenadas $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é transformado pela matriz A_α em um novo ponto da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ -\frac{1}{\alpha}x - y \end{bmatrix}.$$

Calcule o valor de α, sabendo que o sistema $A_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ admite solução.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Insper-SP (adaptado) C6-H25

A tabela a seguir será usada para a transmissão de mensagens criptografadas em matrizes. A criptografia é feita ao se multiplicar a matriz C pela matriz-mensagem M, gerando a matriz criptografada MC = C · M.

0		7	**G**	14	**N**	21	**U**
1	**A**	8	**H**	15	**O**	22	**V**
2	**B**	9	**I**	16	**P**	23	**W**
3	**C**	10	**J**	17	**Q**	24	**X**
4	**D**	11	**K**	18	**R**	25	**Y**
5	**E**	12	**L**	19	**S**	26	**Z**
6	**F**	13	**M**	20	**T**	27	**?**

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Por exemplo, a matriz-mensagem

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 19 & 20 & 15 & 21 & 0 \\ 14 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 14 & 19 & 16 & 5 & 18 \end{bmatrix}$$, que significa ESTOU NO INSPER, depois de criptografada por C, vira a matriz

$$M_C = \begin{bmatrix} 33 & 67 & 59 & 46 & 5 & 18 \\ 28 & 48 & 39 & 31 & 5 & 18 \\ 70 & 111 & 78 & 62 & 10 & 36 \end{bmatrix}.$$

Ao receber MC, o destinatário deve multiplicá-la pela matriz decodificadora D, da mesma ordem da matriz C, para recuperar a mensagem original.

Modificando-se ligeiramente a matriz C, o envio da mensagem EU ESTUDEI NO INSPER torna-se possível no sistema descrito. Uma matriz C que funcione para a transmissão dessa mensagem deve ser, necessariamente,

a) quadrada com determinante negativo.

b) quadrada e igual à sua transposta.

c) de ordem 4×4 e inversível.

d) de ordem 4×7 e inversível.

e) de ordem 7×7 e inversível.

19. Unifae-SP C6-H25

Um sistema de criptografia de mensagens usa duas matrizes para armazenar um código secreto. A matriz A contém as letras que formarão o código e a matriz B será usada como a chave para a decodificação da mensagem.

$$A = \begin{bmatrix} E & B & L & A & O & H & P \\ A & X & R & Y & M & O & A \\ G & A & D & T & I & W & O \\ O & Q & K & V & U & I & J \\ N & L & F & Z & U & C & B \\ F & S & N & I & R & G & L \\ U & P & M & A & P & V & E \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Seja $B^{-1} = (b_{ij})_{2\times2}$ a matriz inversa da matriz B, em que b_{ij} é uma fração irredutível. As letras do código secreto são obtidas localizando os elementos da matriz A cujas posições são determinadas por:

- se b_{ij} for positivo, seu numerador e seu denominador indicam, respectivamente, a linha e a coluna da matriz A;
- se o elemento for negativo, os valores absolutos do denominador e do numerador indicam, respectivamente, a linha e a coluna da matriz A.

Utilizando esse procedimento para b_{11}, b_{12}, b_{21} e b_{22}, nessa ordem, as letras assim determinadas formam o código

a) SAPO.

b) LUPA.

c) BOLO.

d) VEIA.

e) AMOR.

20. Ufam C6-H26

Para criptografar uma palavra de quatro letras um aluno de Matemática a representou como uma matriz 4×1 substituindo cada letra da palavra por números conforme o quadro a seguir.

A→1	B→2	C→3	Ç→4	D→5	E→6
F→7	G→8	H→9	I→10	J→11	K→12
L→13	M→14	N→15	O→16	P→17	Q→18
R→19	S→20	T→21	U→22	V→23	W→24
X→25	Y→26	Z→27	Ã→28	Õ→29	É→30

Em seguida multiplicou essa matriz pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

, obtendo como resultado a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

. Para descriptografar a palavra deve-se fazer o produto da matriz B pela matriz inversa de A. Então a palavra originalmente era:

a) UFAM
b) MAÇÃ
c) HEXA
d) TUDO
e) AMOR

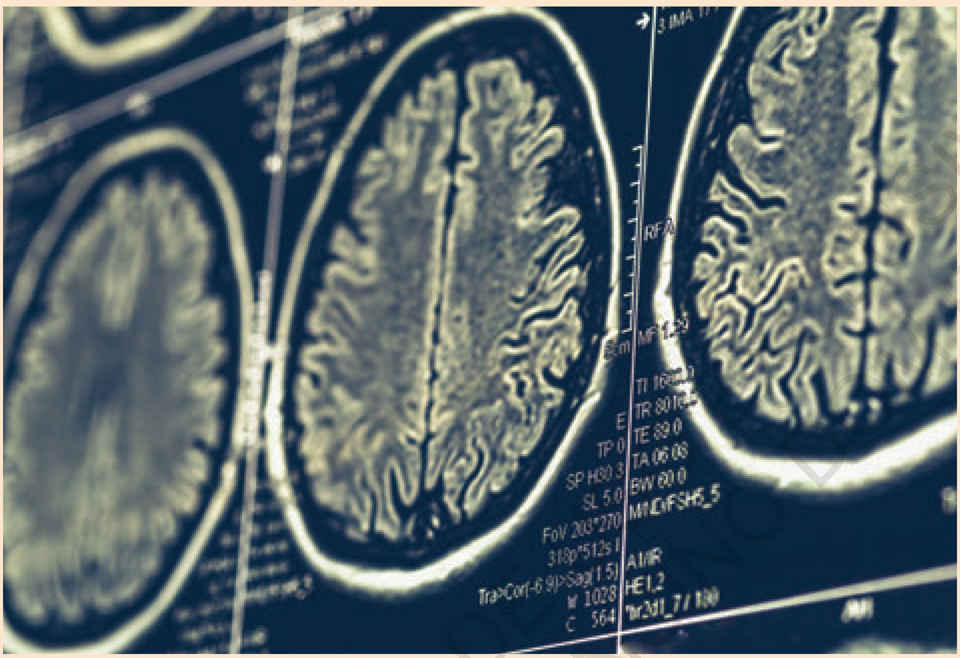
48

DETERMINANTES

- O que são determinantes?
- Determinante de matriz de ordem 1
- Determinante de matriz de ordem 2

HABILIDADES

- Identificar e reconhecer determinantes.
- Calcular determinantes de matrizes de ordem 1 e 2.



DED MITYAY/DREAMSTIME.COM

Por meio de matrizes e determinantes, conseguimos obter imagens como a de uma tomografia. Isso demonstra a importância dessa ferramenta para a sociedade.

Introdução

Determinantes estão diretamente relacionados à solução de problemas. Essa ferramenta facilita cálculos e torna tais resoluções menos árduas.

Apenas com o surgimento dos computadores foi possível usar os **determinantes** de forma mais eficiente e perceber sua utilidade de forma expandida.

É comum sistemas lineares com múltiplas variáveis serem utilizados em diversas áreas do conhecimento, a fim de solucionar problemas cotidianos. Nesse contexto, os determinantes contribuíram diretamente nas resoluções, reduzindo o tempo de cálculo.

DETERMINANTES

É possível associar a qualquer matriz quadrada um número chamado **determinante da matriz**, obtido por meio de operações que envolvem todos os seus elementos.

> Os determinantes surgiram há cerca de 300 anos, associados à resolução de equações lineares, embora existam "esboços" do que seriam determinantes na Matemática chinesa há cerca de 2000 anos.
>
> No nosso cotidiano, os determinantes são importantes ferramentas matemáticas. Sua aplicação pode ocorrer em diversos campos, como na Construção Civil, na Tecnologia e na Administração.

Determinante de matriz de ordem 1

Uma matriz quadrada de ordem 1 apresenta apenas um elemento. Dessa forma, o valor de seu determinante é o próprio valor desse elemento.

Exemplos:

- Para a matriz $A = [2]$, temos que $\det A = |2| = 2$.
- Para a matriz $B = [-10]$, temos que $\det B = |-10| = -10$.
- Para a matriz $C = [a]$, temos que $\det C = |a| = a$.

Determinante de matriz de ordem 2

Para obtermos o valor do determinante de uma matriz quadrada de ordem 2, precisamos calcular a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e dos da diagonal secundária.

De modo geral, a partir da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, obtemos seu determinante realizando o seguinte cálculo:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, obtenha det A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 4 \cdot (-5) = 3 + 20 = 23$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule seu determinante.

Resolução

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1$$

$$\det A = 4 - 3 = 1$$

2. Sistema Dom Bosco – Determine o valor de x para que o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} x & -3 \\ x+2 & x-2 \end{bmatrix}$ seja igual a 8.

Resolução

Calculando o determinante da matriz A, obtemos:

$$\det A = \begin{vmatrix} x & -3 \\ x+2 & x-2 \end{vmatrix} = [x \cdot (x-2)] - [(-3) \cdot (x+2)] =$$

$$= x^2 - 2x + 3x + 6 = x^2 + x + 6$$

Assim, se o determinante tem valor 8:

$$\det A = 8 \rightarrow x^2 + x + 6 = 8 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

A solução da equação do 2º grau é $x = -2$ ou $x = 1$.

Portanto, os valores de x que fazem o determinante da matriz A ser igual a 8 pertencem ao conjunto solução $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a - 2 \text{ ou } x = 1\}$.

ROTEIRO DE AULA

DETERMINANTES

Determinantes de ordem 1

Apresenta apenas um elemento.

Determinantes de ordem 2

det A = $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Ifal – O valor do determinante abaixo:

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\text{sen } x \\ \text{sen } x & \cos x \end{vmatrix} \text{ é:}$$

a) 1
b) cos 2x
c) sen 2x
d) tg 2x
e) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Para o calcular o determinante de $\begin{vmatrix} \cos x & -\text{sen } x \\ \text{sen } x & \cos x \end{vmatrix}$, temos:

$\det = \cos x \cdot \cos x - (-\text{sen } x) \cdot \text{sen } x = \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1.$

2. Uerj (adaptado) – Observe a matriz

$$\begin{bmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix}$$

Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de t deve ser igual a:

Temos que:

$$\begin{bmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix} = ((3+t)\cdot(t-4)) - (3\cdot(-4)) = 0$$

$3t - 12 + t^2 - 4t + 12 = 0$

$t^2 - t = 0 \rightarrow t \cdot (t - 1) = 0$

Logo, t = 0 ou t = 1. Assim, o maior valor de t será 1.

3. Sistema Dom Bosco C6-H26

Alan e Mario fizeram uma viagem de 4 dias ao Nordeste. Eles combinaram que todos os gastos seriam divididos para que eles pudessem gastar a mesma quantia ao final da viagem. No total eles fizeram 4 passeios. Quando Alan pagava o passeio, Mario pagava as refeições e vice-versa.

Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 150 \\ 3 & 20 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 200 & 120 \end{pmatrix}$$

Sabendo que os determinantes representam os gastos finais de Alan e Mario, respectivamente, assinale o que for **correto**.

a) Mario terá de pagar R$ 300,00 para Alan.
b) Alan terá de pagar R$ 625,00 para Mario.
c) Mario e Alan gastaram igualmente.
d) Mario terá de devolver 30 reais para Alan.
e) Alan terá de devolver 50 reais para Mario.

Pelo enunciado, sabemos que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 60 & 150 \\ 3 & 20 \end{vmatrix} = 1\,200 - 450 = 750 = \text{gasto de Alan}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 100 & 50 \\ 200 & 120 \end{vmatrix} = 12\,000 - 10\,000 = 2\,000 = \text{gasto de Mario}$$

Somando os valores gastos e dividindo o total por 2, temos o valor que cada um gastou:

$2\,000 + 750 = 2\,750$

$\frac{2750}{2} = \text{R\$ } 1.375{,}00$

Diminuindo o valor que Alan já pagou do total a ser pago individualmente por eles, sabemos quanto ele ainda deve a Mario:

$1\,375 - 750 = 625$

Logo, Mario gastou mais que Alan e deverá receber R$ 625,00 de volta.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

4. Unimontes-MG – Considere x um número real e as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 2x \\ -x & 3x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Se o determinante de A for igual ao determinante de B, então:

a) $x = -2$ ou $x = -1$.
b) $x = -2$ ou $x = 1$.
c) $x = 2$ ou $x = -1$.
d) $x = 2$ ou $x = 1$.

Dadas as matrizes A e B:
$\det A = 2 \cdot 3x - (-x) \cdot 2x$
$\det A = 6x + 2x^2$.
Já $\det B = 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1$
$\det B = -1 - 3$
$\det B = -4$.

Como det A = det B:
$2x^2 + 6x = -4$
$2x^2 + 6x + 4 = 0$
$x^2 + 3x + 2 = 0$.

Assim:
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$
$\Delta = 9 - 8$
$\Delta = 1$
$x = -\frac{3 \pm 1}{2}$
$x_1 = -1$
$x_2 = -2$.
Portanto, os possíveis valores de x são: $x = -2$ ou $x = -1$.

5. Mackenzie – Se i é a unidade imaginária e $M = \begin{bmatrix} (1+i)^{-1} & b \\ i-2 & -2a \end{bmatrix}$ tem determinante igual a 3i, os valores de a e b são, respectivamente:

a) 6 e 3
b) 3 e 1
c) 0 e 6
d) 2 e 4
e) 4 e 2

Calculando o determinante de M, temos:

$\det M = (1 + i)^{-1} \cdot (-2a) - ((i - 2) \cdot b) = -\frac{2a}{1+i} - bi + 2b$.

Como o determinante é igual a 3i:

$-\frac{2a}{1+i} - bi + 2b = 3i$

$-\frac{2a}{1+i} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} - bi + 2b = 3i$

$-\frac{2a+2ai}{1+i^2+i-i} - bi + 2b = 3i$, como $i^2 = -1$

$-\frac{2a+2ai}{1+1} - bi + 2b = 3i$

$a + ai - bi + 2b = 3i$
$(2b - a) + (a - b)i = 3i$.

Dessa forma:
$2b - a = 0 \rightarrow a = 2b$ (I)
$a - b = 3$ (II).

Substituindo I em II:
$2b - b = 3 \rightarrow b = 3$
$a = 2 \cdot 3 = 6$.

6. Sistema Dom Bosco – Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, quais devem ser os possíveis valores reais de n para que $\det (A - nB)$ seja 0?

Temos que $A - nB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - n \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4n & 2n \\ 3n & -n \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2-4n & 1-2n \\ 3-3n & 4+n \end{pmatrix}$

Como $\det (A - nB) = 0$:
$(2 - 4n) \cdot (4 + n) - (3 - 3n) \cdot (1 - 2n) = 0$
$10n^2 - 5n + 5 = 0 \rightarrow 2n^2 + n - 1 = 0$
Logo, $n = -1$ ou $n = \frac{1}{2}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Udesc – Sejam Y e X, B, A, matrizes quadradas de ordem 2, tais que, $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. A soma dos determinantes das matrizes Y e X, sabendo que $2X - 2Y = A \cdot B$ e $-X + 2Y = A^t$, é igual a:

a) -4
b) -72
c) -144
d) -24
e) -102

8. Uece – Se V é uma matriz quadrada e n é um número natural maior do que um, define-se $V^n = V \cdot V^{n-1}$. Com essa definição, para a matriz $V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pode-se afirmar corretamente que o valor do determinante da matriz $Y = V + V^2 + V^3 + K + V^{2016}$ é igual a

a) 2×2016
b) 2×2017
c) 2016×2016
d) 2016×2017

9. PUC-RS – Se o determinante $\Delta = \begin{vmatrix} x & 4 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix}$ e $A = \{x \in \mathbb{R};\ \Delta = 0\}$, o número de elementos do conjunto A é igual a

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

10. Sistema Dom Bosco – Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, qual é o determinante da matriz inversa de $M = A \cdot B^t$?

11. Uece – Se x é um ângulo tal que $\cos x = \frac{1}{4}$, então o valor do determinante $\begin{vmatrix} \text{sen } 2x & 2\cos^2 x \\ -\cos x & \text{sen } x \end{vmatrix}$ é

a) 1 **b)** 2 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $-\frac{1}{4}$

12. Udesc – Se A^T e A^{-1} representam, respectivamente, a transposta e a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, então o determinante da matriz $B = A^T - 2A^{-1}$ é igual a:

a) $-\frac{111}{2}$ **c)** -166 **e)** 62

b) $-\frac{83}{2}$ **d)** $\frac{97}{2}$

13. Epcar – Seja A a matriz $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Sabe-se que $A_n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ vezes}}$

Então, o determinante da matriz $S = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{11}$ é igual a

a) 1 **b)** -31 **c)** -875 **d)** -11

14. UFPR (adaptado) – Seja $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = 0{,}6$, calcule $\cos\alpha$ e o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

15. IFSul-RS – Seja a matriz $A_{2\times2}$, onde $a_{i\times j} = \begin{cases} 2^j, \text{ se } i \leq j \\ j^i, \text{ se } i > j \end{cases}$ é a matriz identidade. Sabendo que A^t é a matriz transposta de A, qual é o determinante de $(A^t + B)$?

a) 11 **b)** -11 **c)** 9 **d)** -9

16. UPF-MG – Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} \text{sen}\,x & \cos x \\ -\cos x & \text{sen}\,x \end{pmatrix}$ e avalie as seguintes afirmações:

I. A matriz A é diagonal se, e somente se, $\text{sen}\,x = \pm 1$.

II. O determinante da matriz A é um número maior do que 1.

III. A matriz A é simétrica se, e somente se, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

IV. A matriz A é invertível, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

É verdadeiro o que se afirma em:

a) I e II, apenas.
b) II e III, apenas.
c) II, III e IV, apenas.
d) I, III e IV, apenas.
e) I, II, III e IV.

17. IFCE (adaptado) – Seja A uma matriz real, tal que $A = \begin{pmatrix} \log_2 x & 1 \\ \log_2 x + 2 & \log_2 x \end{pmatrix}$. Qual é o único valor de x natural para que a matriz A não seja invertível?

ESTUDO PARA O ENEM

18. Sistema Dom Bosco C1-H3

Um aluno de Matemática que dividia seu armário na faculdade com um colega de curso trocou o cadeado de chave por um de senha, pois seu colega sempre perdia a chave. Para que ele pudesse fornecer a senha, decidiu fazer uma charada para que seu colega obtivesse a sequência dos números.

Ele informou ao colega que a senha do cadeado era o valor do determinante da matriz $\begin{pmatrix} 31 & 16 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$.

Assim, a senha do cadeado é:

a) 028
b) 145
c) 280
d) 354
e) 514

19. Sistema Dom Bosco C1-H3

Em um bairro, foi realizada uma pesquisa com cerca de 300 crianças entre 5 e 10 anos de idade com o intuito de se obter o peso médio para cada faixa etária.

Sabendo que o peso médio dado por p(x), em quilos, é uma função da idade da criança (x) e que p(x) = det A, em que $A = \begin{pmatrix} 3 & -x \\ 4 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, podemos concluir que o peso médio de uma criança de 7 anos é, em kg, igual a:

a) 18
b) 19
c) 20
d) 22
e) 26

20. Sistema Dom Bosco C1-H3

Ronaldo estava ajudando um conhecido a entender melhor o conteúdo de Matemática e resolveu passar um cálculo para ele. Sabendo que o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ representa a idade de Ronaldo, quantos anos ele tem?

a) 1 **b)** 9 **c)** 11 **d)** 12 **e)** 20

49 DETERMINANTES DE MATRIZ DE ORDEM N

- Determinante de matriz de ordem maior ou igual a 3
- Regra de Sarrus
- Matriz reduzida
- Cofator
- Teorema de Laplace

HABILIDADES

- Calcular determinante de matriz de ordem maior ou igual a 3.
- Reconhecer a Regra de Sarrus.
- Operar cofator.
- Aplicar o teorema de Laplace.

GEORGIOS KOLLIDAS/DREAMSTIME.COM

Pierre Simon Laplace (1749-1827).

Introdução

Pierre Simon Laplace foi um matemático, físico e astrônomo francês que se dedicou à pesquisa e passou grande parte da vida trabalhando com Astronomia matemática. Fez valiosas contribuições à Ciência, sendo inclusive um dos primeiros cientistas a propor a existência de buracos negros. Laplace também realizou grandes colaborações à Matemática, tendo enunciado o teorema que leva seu nome. Nele, o pesquisador francês expressa o determinante de uma matriz quadrada qualquer. E é este o foco de estudo deste módulo.

DETERMINANTE DE MATRIZ DE ORDEM N

Existem dois métodos para calcular determinantes de matrizes com ordem maior ou igual a 3. O primeiro é a **regra de Sarrus**. Embora seja um método mais prático, aconselha-se utilizar matrizes de ordens próximas a 3.

O segundo é o **teorema de Laplace**, o qual, mesmo sendo um método mais complexo, pode ser utilizado para matrizes de qualquer ordem.

Regra de Sarrus

Apresentaremos essa regra com base em um exemplo prático. Tomando a matriz A de ordem 3, adotaremos os seguintes passos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Copiamos a matriz ao lado, até a penúltima coluna.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

2. Multiplicamos os elementos da diagonal principal e repetimos o procedimento para suas paralelas à direita.

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

$3 \cdot 6 \cdot 0 = 0$
$2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$
$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$

3. Multiplicamos os elementos da diagonal secundária e repetimos o procedimento para suas paralelas à direita.

$1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$
$0 \cdot 1 \cdot 3 = 0$
$4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

4. Subtraímos as somas dos produtos obtidos nos passos 2 e 3, nessa ordem.

Assim:

$\det A = (0 + 2 + 60) - (15 + 0 + 48)$

$\det A = 62 - 63 = -1$

Para matrizes de ordem maior que 3, seguimos os mesmos passos. Para matrizes de ordens maiores, o processo é válido, porém seu cálculo se torna muito complexo.

MATRIZ REDUZIDA

Dada uma matriz quadrada A, obtemos a matriz reduzida A_{ij} eliminando a linha **i** e a coluna **j** de A.

Vamos considerar a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtemos a matriz reduzida A_{13} eliminando a primeira linha e a terceira coluna. Ou seja:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_{13} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Por sua vez, obtemos a matriz reduzida A_{21} eliminando a segunda linha e a primeira coluna:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

COFATOR

Dada uma matriz quadrada A de ordem $n \geqslant 2$, chamamos **cofator** de um elemento a_{ij} de A o número real $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$, sendo A_{ij} a matriz reduzida obtida de A ao se eliminar a linha **i** e a coluna **j**.

Observe como calculamos o cofator do elemento a_{23} da matriz A, utilizada anteriormente:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot |A_{23}| \rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow C_{23} = (-1) \cdot [(-1) \cdot 5 - (2 \cdot 2)] \rightarrow C_{23} = (-1) \cdot (-5 - 4) \rightarrow C_{23} = 9$

Portanto, o cofator do elemento a_{23} da matriz A é 9.

TEOREMA DE LAPLACE

O determinante de uma matriz A, de ordem $n \geqslant 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Para calcular o determinante da matriz A, utilizada anteriormente, por meio do teorema de Laplace, precisamos:

1. Escolher uma fila (linha ou coluna).
2. Calcular os cofatores dos elementos dessa fila.
3. Somar o produto de cada elemento dessa fila pelo respectivo cofator.
4. Com base na matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, escolhemos a terceira coluna.

Dessa forma:

$\det A = a_{13} \cdot C_{13} + a_{23} \cdot C_{23} + a_{33} \cdot C_{33}$

$\det A = 7 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$

$\det A = 7 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 0 \rightarrow \det A = 207$

Observação: se tivéssemos escolhido outra fila, o resultado seria o mesmo.

ROTEIRO DE AULA

DETERMINANTES DE ORDEM MAIOR OU IGUAL A N

- Regra de Sarrus
  - Método para calcular o determinante de matrizes de ordens próximas a 3.
- Teorema de Laplace
  - Método para calcular determinantes de matrizes de ordem maior ou igual a 2.
  - É dado pela soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos respectivos cofatores.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IME – Seja Δ o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$. O número de possíveis valores de x reais que anulam Δ é

a) 0 **c)** 2 **e)** 4
b) 1 **d)** 3

Calculando o determinante, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = (x^2 + 2x^4 + 3x^2) - (3x^3 + x^4 + 2x) = x^4 - 3x^3 +$$

$+ 4x^2 - 2x =$
$= x \cdot (x^3 - 3x^2 + 4x - 2) =$
$= x \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 2).$

Para que Δ seja nulo, $x(x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 2) = 0$.
Como $x^2 - 2x + 2$ não tem raízes reais, apenas x = 0 e x = 1 anulam Δ.
Logo, há 2 possíveis valores reais de x.

2. Uern (adaptado) – Considere a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \log_2 8 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & \log_2 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Pela regra de Sarrus, qual é o determinante dessa matriz?

Reescrevendo a matriz A, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \log_2 8 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & \log_2 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, o determinante de A será:

det A = (– 4 + 12 + 6) – (–18 + 16 + 1)
det A = – 4 + 12 + 6 + 18 – 16 – 1
det A = 15

3. ESCS C5-H21

Em determinado fim de semana, o serviço de inspeção sanitária examinou 1 800 passageiros de voos internacionais que chegaram ao Brasil. Os passageiros foram separados da seguinte forma: os saudáveis (S); aqueles com alguns sintomas, sem, contudo, confirmação de estarem com doenças contagiosas (D); e aqueles com casos confirmados de possuírem alguma doença contagiosa (C). Após a análise dos resultados, descobriu-se que os números referentes a S, D e C satisfazem à seguinte relação matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S \\ D \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz quadrada apresentada no texto é

a) superior a 10.
b) inferior a –20.
c) superior a –20 e inferior a –5.
d) superior a –5 e inferior a 10.
e) superior a –5 e inferior a –20.

Do enunciado, a matriz quadrada é:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo, o determinante é:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 + 4 - 2 - 6 - 4 = -16$$

Como –20 < –16 < –5.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. UPF-RS – Sabendo que x é um número real, o determinante da matriz abaixo é dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \text{sen } x & 0 \\ \cos x & 2 & \cos x \end{pmatrix}$$

a) det A = $\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + 4$
b) det A = sen 2x – 4
c) det A = 4 + cos 2x
d) det A = $\frac{1}{2}$ sen 2x – 2
e) det A = $2 \cdot \text{sen}^2 x + 2$

Calculando o determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \text{sen } x & 0 \\ \cos x & 2 & \cos x \end{vmatrix} = \text{sen } x \cdot \cos x - 4 + \text{sen } x \cdot \cos x =$$

$$= 2\text{sen } x \cdot \cos x - 4 = \text{sen } 2x - 4$$

5. Mackenzie – O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \log_3 3 & \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \\ 1 & \log_3 27 & \log_{\frac{1}{3}} 27 \\ 0 & \log_3 81 & \log_3 243 \end{vmatrix}$$ é

a) 0 **b)** 1 **c)** –1 **d)** 3 **e)** $\frac{1}{3}$

Calculando $\begin{vmatrix} 0 & \log_3 3 & \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \\ 1 & \log_3 27 & \log_{\frac{1}{3}} 27 \\ 0 & \log_3 81 & \log_3 243 \end{vmatrix}$, temos:

$$\begin{vmatrix} 0 & \log_3 3 & \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \\ 1 & \log_3 27 & \log_{\frac{1}{3}} 27 \\ 0 & \log_3 81 & \log_3 243 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Pela regra de Sarrus:

$$(0 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 4) - (0 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) \cdot 0 + 5 \cdot 1 \cdot 1) =$$

$$= 4 - 5 = -1.$$

6. Eear (adaptado) – Para que o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ seja 3, qual deve ser o valor de b?

Calculando o determinante pela regra de Sarrus, temos:

$$\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 0 + (-b) + 2 - (0 + 2b + (-1)) = 3$$

$2 - b + 1 - 2b = 3$

$-3b + 3 = 3$

$-3b = 0$

Logo, $b = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. FGV – Sejam $M_{3\times3}$ e $N_{4\times4}$ as matrizes quadradas indicadas a seguir, com a, b, c, d, e, f, g, h, i, j sendo números reais.

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2i & 2c \\ 0 & 0 & 2j & 0 \\ 2d & 2e & 2a & 2f \\ 2g & 2h & 2c & 2i \end{bmatrix}$$

Se o determinante de M é o número real representado por k, então o determinante de N será igual a

a) –16jk.
b) 16jk.
c) –2jk.
d) 2jk.
e) 0.

8. Uece – Uma matriz quadrada $P(a_{ij})$ é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$. Por exemplo, a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica.

Se a matriz $M = \begin{bmatrix} x+y & x-y & xy \\ 1 & y-x & 2y \\ 6 & x+1 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, pode-se afirmar corretamente que o determinante de M é igual a

a) – 1. **b)** – 2. **c)** 1. **d)** 2.

9. Insper – Matrizes de Vandermonde são matrizes quadradas em que os elementos ao longo de cada linha formam progressões geométricas de primeiro termo igual a 1, não necessariamente com a mesma razão para cada linha. Por exemplo, a matriz B a seguir, de ordem 4, é de Vandermonde:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Seja V uma matriz de Vandermonde de ordem 3 em que a PG formada com os elementos da 1ª linha tem razão 2, a PG formada com os elementos da 2ª linha tem razão 3 e a PG formada com os elementos da 3ª linha tem razão –2.

O determinante da matriz V é igual a

a) –16.
b) 0.
c) 16.
d) 20.
e) 36.

10. Sistema Dom Bosco – Por meio do teorema de Laplace, encontre o determinante de $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

11. UEPB – Se x e y são números reais não nulos e

$$\begin{vmatrix} x & y & x^2+y^2 \\ x & 0 & x^2 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$, então o valor de 2x + 3y é:

a) 10
b) 4
c) 7
d) –5
e) 5

12. EsPCEx – Considere a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} a & a^3-b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se a e b são números reais não nulos e det (M) = 0, então o valor de $14a^2 - 21b^2$ é igual a:

a) 15
b) 28
c) 35
d) 49
e) 70

13. Mackenzie – Para a matriz quadrada

$$M = \begin{bmatrix} \cos 17^\circ & 0 & \text{sen}\, 17^\circ \\ 1 & 1 & 1 \\ \text{sen}\, 28^\circ & 0 & \cos 28^\circ \end{bmatrix}$$ o valor do determinante

M^{10} é

a) $\frac{1}{16}$
b) $\frac{1}{32}$
c) $\frac{1}{64}$
d) $\frac{1}{128}$
e) $\frac{1}{256}$

14. UFPR (adaptado) – Encontre todos os valores de $\theta \in \mathbb{R}$, para os quais a matriz $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ 1 & \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ tem determinante det (B) = 1.

15. Feevale-RS – O determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(x) & 0 & 1 \\ 1 & \sec(x) & 0 \\ 0 & 0 & \text{cotg}(x) \end{bmatrix}$$ é

a) 0
b) 1
c) sen (x)
d) cos (x)
e) tg (x)

16. UEM-PR (adaptado) – Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Com base nelas, é correto afirmar que:

I. A matriz A é uma matriz invertível.
II. A primeira e a última linhas de A · B são iguais.
III. É possível calcular o determinante da matriz B.
IV. O determinante da inversa de A é $\frac{1}{10}$.
V. A · B = B · A.

a) Apenas I está correta.
b) Apenas I e II estão corretas.
c) Apenas I e IV estão corretas.
d) Apenas III e V estão corretas.
e) Apenas IV e V estão corretas.

17. ITA (adaptado) – Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ satisfaz à propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$ a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, qual é o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7+2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$?

ESTUDO PARA O ENEM

18. UnB-DF (adaptado) C6-H25

Na confecção de ursos, coelhos e elefantes de pelúcia, uma indústria utiliza três tipos de materiais: tecidos, espuma e plástico. A quantidade de material usado na fabricação de cada um desses brinquedos está indicada na tabela abaixo.

Tipo de material utilizado (em gramas)

Brinquedo	Plástico	Tecido	Espuma
Urso	200	300	500
Coelho	300	200	400
Elefante	p	500	200

Nessa indústria, um funcionário, para produzir x ursos, y coelhos e z elefantes de pelúcia em um dia de trabalho, utiliza 1,8 kg de plástico; 2,3 kg de tecido; e 2,7 kg de espuma.

Com base nas informações apresentadas, pode-se obter a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & \mathbf{p} \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Sabendo que o determinante é igual a 50, qual a quantidade de plástico utilizada pelo funcionário na confecção do elefante?

a) 25 kg
b) 2,5 kg
c) 50 kg
d) 7,5 kg
e) 1,5 kg

19. IFPE (adaptado) C1-H3

As matrizes são muito utilizadas na computação gráfica para representar translação e rotação, por exemplo. Também usamos matrizes para resolver sistemas de equações. Na engenharia elétrica, é muito difícil resolver problemas de circuitos elétricos e linhas de transmissão de energia elétrica sem matrizes. Trabalhar com uma malha de linha de transmissão e passar esse circuito para forma matricial torna o trabalho mais fácil. A rigor, determinante é uma função que associa uma matriz quadrada a um número real. Esse número real, que é a imagem, é chamado de determinante da matriz quadrada. Os determinantes simplificam e sistematizam a resolução de sistemas de equações lineares. Podemos usar determinante, também, para calcular áreas e volumes. Na geometria analítica, se conhecemos as coordenadas dos vértices de um triângulo, usamos o determinante para calcular a área desse triângulo com a seguinte fórmula: $A = \frac{|D|}{2}$. Considere um triângulo cujos vértices são os pontos A(1; 3), B(7; 1) e C(3; 5). Qual é a área do triângulo com vértices nos pontos A, B e C?

a) 8
b) 9
c) 12
d) 14
e) 16

20. Famerp-SP C1-H3

No estudo da dinâmica de populações é comum ser necessário determinar o número real λ na equação $\det(M - \lambda I) = 0$, em que M é uma matriz quadrada, I é a matriz identidade, da mesma ordem de M, e det representa o determinante da matriz $(M - \lambda I)$.

Se, em um desses estudos, tem-se $M = \begin{bmatrix} 0 & 17 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, o valor positivo de λ é igual a

a) 5.
b) 8.
c) 9.
d) 12.
e) 6.

50 PROPRIEDADES DO DETERMINANTE

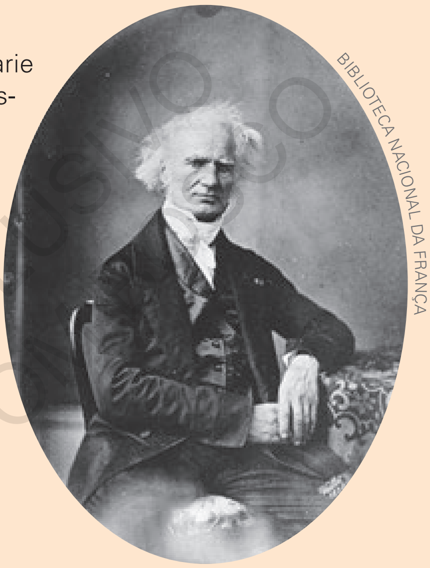
- Propriedades do determinante
- Teorema de Binet
- Teorema de Jacobi

HABILIDADES

- Identificar e aplicar as diversas propriedades do determinante.
- Reconhecer o teorema de Binet.
- Aplicar o teorema de Jacobi.

Introdução

O matemático francês Jacques Philippe Marie Binet contribuiu ativamente para a Ciência ao escrever uma série de trabalhos importantes sobre Matemática, Física e Astronomia. Binet ocupou a cadeira de Astronomia no Collège de France durante 30 anos e foi um dos precursores no estudo da teoria matricial. Em 1812, descobriu a regra para multiplicação de matrizes, o que lhe possibilitou elaborar o teorema de Binet, tema de estudo deste módulo.



Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856).

PROPRIEDADES DO DETERMINANTE

Propriedade 1

Se os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz forem nulos, seu determinante será nulo.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 0 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 \cdot 7 - (8 \cdot 4 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 0 \cdot 3) = 0$$

Propriedade 2

Se duas filas paralelas de uma matriz são iguais ou proporcionais, seu determinante será nulo.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 5 - (1 \cdot 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 5) = 0$$

Propriedade 3

O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = 2 - 15 = -13$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det A^T = 1 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 2 - 15 = -13$$

Propriedade 4

Se todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada forem multiplicados por um número real **k**, o determinante da matriz será multiplicado por **k**.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = 2 - 12 = -10$$

Ao multiplicarmos a segunda coluna de A por 3, temos que $B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $\det B = 2 \cdot 3 - 9 \cdot 4 =$ $= 6 - 36 = -30$.

Logo, $\det B = 3 \cdot \det A$.

Propriedade 5

Se a posição de duas filas (linhas ou colunas) de uma matriz quadrada for trocada, o determinante da matriz resultante será o oposto da matriz original.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 12 - 5 = 7$$

Ao invertermos as linhas da matriz A, obtemos a matriz B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \det B = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 5 - 12 = -7$$

Logo, $\det B = -\det A$.

TEOREMA DE BINET

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Exemplo:

Vamos considerar as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$, cujos determinantes são $\det A = -5$ e $\det B = 1$.

O produto das matrizes A e B é dado por:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, $\det (A \cdot B) = 12 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = -5$.

Assim, $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, já que $-5 = (-5) \cdot 1$.

Consequência do teorema de Binet

O determinante da matriz inversa de **A** é igual ao inverso do determinante da matriz **A**. Comprovamos esse fato por meio da definição de matriz inversa. Dela, sabemos que $A \cdot A^{-1} = I$. E, como $\det I = 1$ para qualquer ordem, temos que:

$\det (A \cdot A^{-1}) = \det I$

$\det A \cdot \det (A^{-1}) = \det I$

$$\det (A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

TEOREMA DE JACOBI

Dada uma matriz A quadrada, se multiplicarmos todos os elementos de uma fila de A por um mesmo número não nulo e somarmos os resultados dos elementos aos correspondentes de outra fila, temos uma matriz B cujo det A = det B.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 20 & 14 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, observamos que a segunda linha da matriz B é a soma da segunda linha de A com o triplo da terceira linha de A.

Dessa forma:

$\det A = 12 + 20 + 18 + 2 + 36 - 60 = 28$

$\det B = 120 + 56 + 0 + 20 + 0 - 168 = 28$

Assim, concluímos que os determinantes são iguais.

Regra de Chió

Trata-se de uma aplicação direta do teorema de Jacobi que possibilita simplificar o cálculo do determinante baixando a ordem deste.

Para aplicar a regra de Chió, a matriz deve ser quadrada e de ordem maior ou igual a 2, com $a_{ij} = 1$. Além disso, é necessário seguir estas etapas:

1. Escolher um elemento $a_{ij} = 1$. Caso ele não exista, aplicar as propriedades dos determinantes para surgir o elemento 1.
2. Eliminar a matriz dada à linha i e à coluna j do elemento $a_{ij} = 1$ escolhido.
3. Subtrair de cada elemento restante o produto dos elementos que foram eliminados e que se encontram em sua linha e sua coluna, obtendo uma nova matriz de ordem $(n - 1)$.
4. Multiplicar o determinante obtido na etapa 3 por $(-1)^{i1j}$, em que i e j se referem, respectivamente, à linha e à coluna às quais pertence o elemento $a_{ij} = 1$. Portanto, $\det A = (-1)^{i+j} \cdot \det B$.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução

Utilizando a regra de Chió com base no elemento $a_{24} = 1$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{2} & \boxed{1} \\ 3 & 2 & 2 & \boxed{0} \\ -1 & 2 & 3 & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

Logo, $B = \begin{bmatrix} 2-(1\cdot 0) & 3-(4\cdot 0) & -1-(2\cdot 0) \\ 3-(1\cdot 0) & 2-(4\cdot 0) & 2-(2\cdot 0) \\ -1-(1\cdot 2) & 2-(4\cdot 2) & 3-(2\cdot 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -1 \end{bmatrix}$.

Assim, $\det A = (-1)^{214} \cdot \det B = 1$.

Portanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -4-18+18-6+9+24 = 23$$

Dica:
Para tornar ainda mais fácil a aplicação da regra de Chió, utilize o elemento igual a 1 na linha ou na coluna que tiver maior quantidade de zeros.

2. Sistema Dom Bosco – Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, calcule seu determinante.

Resolução

Para utilizar a regra de Chió, precisamos que surja um elemento $a_{ij} = 1$. Assim, faremos aparecer o elemento $a_{32} = 1$ multiplicando a 1ª linha por –1 e somando o resultado com a 3ª linha. Desse modo, obtemos:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando então a regra de Chió ao elemento $a_{32} = 1$, temos:

$$\det B = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5-(-3)\cdot 2 & 3-2\cdot 2 \\ 4-(-3)\cdot 2 & 0-2\cdot 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ 10 & -4 \end{vmatrix} = -1\cdot(-44+10) = 34$$

Portanto, $\det B = 34 = \det A$.

ROTEIRO DE AULA

PROPRIEDADES DO DETERMINANTE

Propriedades

Propriedade 1

Se os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz forem nulos, seu determinante será nulo.

Propriedade 2

Se duas filas paralelas de uma matriz são iguais ou proporcionais, seu determinante será nulo.

Propriedade 3

O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

Propriedade 4

Se todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada forem multiplicados por um número real k, o determinante da matriz ficará multiplicado por k.

Propriedade 5

Trocando-se a posição de duas filas (linhas ou colunas) de uma matriz quadrada, o determinante da matriz resultante será o oposto da matriz original.

Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem, então det $(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Teorema de Jacobi

Dada uma matriz A de qualquer ordem, se adicionarmos uma fila de A a uma fila paralela, previamente multiplicada por uma constante real, teremos uma matriz B cujos determinantes serão iguais.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RS – Dadas as matrizes $A = [1\ \ 2\ \ 3]$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, qual é o det (A B)?

a) 18
b) 21
c) 32
d) 126
e) 720

$A \cdot B = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$
Logo, det $(A \cdot B) = 32$.

2. Uece (adaptado) – Se os números reais x, y, z, m, n, p, u, v, w formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q, qual o valor do determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ u & v & w \end{bmatrix}$?

Do enunciado, sabemos que os números formam uma PG de razão q. Logo:

$$M = \begin{bmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x & xq & xq^2 \\ xq^3 & xq^4 & xq^5 \\ xq^6 & xq^7 & xq^8 \end{vmatrix}$$

Como as duas primeiras colunas são proporcionais, pelas propriedades dos determinantes, sabemos que det M = 0.

3. Sistema Dom Bosco C6-H25

Uma vaga de estágio foi anunciada e dezesseis candidatos foram convocados para uma entrevista. Na sala de espera, os candidatos foram distribuídos como na representação abaixo.

Alberto	Bruno	André	Geraldo
Carlos	Denise	Márcia	Deise
Daniele	Daniel	Barone	Carla
Álvaro	Benedito	Estela	Antônio

Na tabela, se a letra inicial de cada um dos nomes dos candidatos for substituída pelo número que representa a posição ocupada em nosso alfabeto, então obtemos uma matriz, cujo determinante é

a) –192
b) –119
c) 0
d) 119
e) 192

Fazendo a substituição indicada, obtemos a matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 13 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Chió e calculando o determinante, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 13 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 10 & -17 \\ -4 & -2 & -25 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -192$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

4. Unisc – Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ o determinante da matriz $A \cdot B$ é

a) 4
b) 6
c) 8
d) 12
e) 27

Do teorema de Binet, sabemos que det $(A \cdot B)$ = det A · det B. Assim:
det $A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$
det $B = (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2$.
Logo, det $(A \cdot B) = -2 \cdot (-2) = 4$.

5. IFCE – Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 2 & \operatorname{sen}\theta \\ 3 & 1 & 3 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Sabendo-se que $\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$, em que $0 \leq \theta \leq 2\pi$, o determinante da matriz inversa de A, indicado por $\det A^{-1}$, vale:

a) –1
b) 0
c) 1
d) 2
e) –5

Calculando det A, temos que $\det A = \cos^2\theta - 6 \cdot \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta - 6\cos\theta$.
Como $\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$, $\det A = 1$.
Portanto, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = 1$.

6. Uerj – Considere uma matriz A com 3 linhas e 1 coluna, na qual foram escritos os valores 1, 2 e 13, nesta ordem, de cima para baixo.

Considere, também, uma matriz B com 1 linha e 3 colunas, na qual foram escritos os valores 1, 2 e 13, nesta ordem, da esquerda para a direita.

Calcule o determinante da matriz obtida pelo produto de A x B.

Do enunciado, sabemos que $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$ e $B = (1 \;\; 2 \;\; 13)$. Assim:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot (1 \;\; 2 \;\; 13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 26 \\ 13 & 26 & 169 \end{pmatrix}$$

Podemos verificar que as filas são proporcionais. Logo, pelas propriedades dos determinantes, o determinante é nulo.
Ou seja, $\det(A \cdot B) = 0$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UEM-PR (adaptado) – Considere as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$.

Assinale o que for **correto**.

I. A matriz A-B tem matriz inversa.

II. O sistema de equações matriciais $\begin{cases} X + Y = A - B \\ X + O = A \end{cases}$, onde X, Y e O são matrizes de ordem 2 × 2, sendo X e Y incógnitas e O a matriz nula, não tem solução.

III. O determinante da matriz inversa de A é $-\dfrac{1}{5}$.

IV. $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

a) I, II e III apenas.
b) II, III e IV apenas.
c) III e IV apenas.
d) I, III e IV apenas.
e) II, III e IV apenas.

8. ITA – Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz à igualdade $\det(2M) - \det\left(\sqrt[3]{2M^3}\right) = \dfrac{2}{9}\det(3M)$.

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

a) $\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{4}{5}$

e) $\dfrac{5}{4}$

9. Udesc – Sejam A e B duas matrizes tais que:

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(x) & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ \frac{7}{32} & \operatorname{sen}(x) & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \frac{1}{4} \\ 1 & -8 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

O conjunto solução para que o determinante da matriz $A \cdot B$ seja igual a zero é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right\}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right\}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right\}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right\}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

10. ESPM (adaptado) – Se a matriz $\begin{bmatrix} 3 & x \\ 4 & x+1 \end{bmatrix}$ for multiplicada pelo valor do seu determinante, este ficará multiplicado por 49. Quais os possíveis valores de x?

11. UEM-PR (adaptado) – Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Com relação aos conceitos de matrizes e determinantes, assinale o que for correto.

I. $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

II. $AB^t = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

III. A matriz A é invertível e a sua inversa também é invertível.

IV. $\det(A) = \det(B^t)$

V. $[\det(A) + \det(B)]^2 = \det(A^2) + \det(\sqrt{2} \cdot AB + \det(B^2)$.

a) Apenas os itens I e II estão corretos.
b) Apenas os itens I, III e IV estão corretos.
c) Apenas os itens II, IV e V estão corretos.
d) Apenas os itens II, III e V estão corretos.
e) Apenas os itens III, IV e V estão corretos.

12. UEPG-PR (adaptado) – Sobre matrizes e determinantes, assinale o que for correto:

I. Seja P uma matriz quadrada. Se det (P) = 3 e det (2P) = = 96, então P é uma matriz quadrada de ordem 6.

II. Considere as matrizes $A(a_{ij})_{4\times4}$, com $a_{ij} = 3i - j$ e $B(b_{ij})_{4\times4}$, com $b_{ij} = i + 2j$. O elemento da quarta linha e da terceira coluna da matriz 3A – 2B vale 7.

III. Se $M = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, então o determinante da matriz inversa de M vale 9.

IV. Seja qual for o valor de k, k real, o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2k & -1 \\ 3 & k \end{pmatrix}$ nunca se anula.

V. A matriz A é do tipo 6 × 8, a matriz B é do tipo m × 5 e a matriz C é do tipo n × 3. Se existe o produto (A · B) · C, então m = 5 e n = 8.

a) I e II apenas.
b) II e IV apenas.
c) IV e V apenas.
d) III e V apenas.
e) II, III e IV apenas.

13. EPCAr – Considere as seguintes simbologias em relação à matriz M:

M^t é a matriz transposta de M

M^{-1} é a matriz inversa de M

det M é o determinante da matriz M

Da equação $(X^t)^{-1} = A \cdot (B + C)$, em que A e (B + C) são matrizes quadradas de ordem n e inversíveis, afirma-se que

I. $X = (A^{-1})^t \cdot [(B + C)^{-1}]^t$

II. $\det X = \dfrac{1}{\det A} \cdot \det (B + C)$

III. $X^{-1} = (B^t + C^t) \cdot A^t$

São corretas:

a) Apenas I e II
b) Apenas II e III
c) Apenas I e III
d) I, II e III

14. ITA (adaptado) – Se $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então $MN^T - M^{-1}N$ é igual a?

15. UEPG-PR (adaptado) – Sobre a matriz $A = \begin{pmatrix} \cos 15° & -\text{sen}\,15° \\ \text{sen}\,15° & \cos 15° \end{pmatrix}$, assinale o que for correto.

I. $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\text{sen}\,30° \\ \text{sen}\,30° & \cos 30° \end{pmatrix}$

II. $\det A = 1$.

III. $A + A^t = \begin{pmatrix} \cos 30° & 0 \\ 2 & \cos 30° \end{pmatrix}$

IV. $\det(2A) = -\dfrac{1}{2}$

V. $\det A^2 = 0$

a) Apenas I e II estão corretas.
b) Apenas I e III estão corretas.
c) Apenas II e IV estão corretas.
d) Apenas I, II e V estão corretas.
e) Apenas II, III, IV e V estão corretas.

16. UEM-PR (adaptado) – Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

De acordo com conhecimentos sobre matrizes e determinantes, é correto afirmar que

I. $\det(M \cdot N) = \det(N \cdot M)$, em que N e M são matrizes quadradas de mesma ordem.

II. $\det M^t = -\det M$, em que M é matriz quadrada de ordem ímpar.

III. $\det(C) = 4$.

IV. A matriz $A \cdot B$ tem três linhas e três colunas.

V. $\det(A \cdot B) = 96$.

a) I e II apenas.
b) II e V apenas.
c) I e IV apenas.
d) III e IV apenas.
e) I e V apenas.

17. Udesc (adaptado) – Considerando que A é uma matriz quadrada de ordem 3 e inversível, se det (3A) = det (A^2), então qual será o det (A)?

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. ESPM-SP (adaptado) C6-H25

Utilizando o estudo de matrizes e determinante, César propõe ao seu primo um desafio para saber a diferença entre as suas idades. O problema foi dado da seguinte forma:

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, a diferença entre os valores de x, tais que det (A B) = 3x, pode ser igual a:

a) 3 **b)** 2 **c)** 5 **d)** 4 **e)** 1

19. Unicamp (adaptado) C6-H25

Cansado das perguntas em sala de aula sobre quanto valeria a prova, um professor decide passar um exercício teste para os alunos adivinharem quanto será a pontuação da prova.

Sabendo que a e b são números reais, considere a matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a soma dos elementos em cada linha da matriz A tem sempre o mesmo valor, então o determinante de A é igual a

a) 1. **b)** 4. **c)** 5. **d)** 10. **e)** 100.

20. FGV C5-H21

Os elementos da matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$ representam a quantidade de voos diários apenas entre os aeroportos i, de um país, e os aeroportos j, de outro país. A respeito desses voos, sabe-se que:

- quando j = 2, o número de voos é sempre o mesmo;
- quando i = j, o número de voos é sempre o mesmo;
- quando i = 3, o número de voos é sempre o mesmo;
- $a_{11} \neq 0$ e det A = 0.

De acordo com as informações, é correto afirmar que o conjunto solução com as possibilidades de a_{11} é igual a

a) $\{a_{21}, a_{13}\}$ **b)** $\{a_{21}, a_{23}\}$ **c)** $\{a_{22}, a_{13}\}$ **d)** $\{a_{21}, a_{22}\}$ **e)** $\{a_{13}, a_{22}\}$

51

INTRODUÇÃO A SISTEMAS LINEARES

- Equações lineares
- Sistemas lineares
- Sistemas equivalentes
- Classificação de sistemas
- Resolução: método da substituição

HABILIDADES

- Reconhecer um sistema linear.
- Identificar sistemas lineares equivalentes.
- Classificar sistemas lineares.
- Solucionar um sistema linear pelo método da substituição.

PEOPLEIMAGES/ISTOCKPHOTO

Velocidade é uma grandeza que podemos associar ao tempo, ao espaço e à aceleração.

Introdução

Quando pensamos em meios de transporte, como motocicleta, carro e avião, podemos sempre associar variáveis a eles. Em geral, se precisamos calcular ou comparar distância, velocidade ou outro elemento entre veículos, conseguimos expressar os cálculos por meio de uma ou mais equações, com uma ou mais variáveis. Assim é possível realizarmos as contas necessárias para chegar ao resultado correto.

EQUAÇÕES LINEARES

Em nosso dia a dia, nos deparamos com diversas situações em que é necessário utilizar equações. Porém, estamos habituados com equações que apresentam apenas uma incógnita. A equação do tipo $2x + 5 = 0$, por exemplo, é do 1º grau com apenas uma incógnita, cujo expoente é 1.

Equações do 1º grau que apresentam duas ou mais incógnitas são chamadas **equações lineares**.

De modo geral, denominamos equação linear toda equação que pode ser escrita da seguinte forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

Nela:

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as **incógnitas**;
- $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ não são números reais, chamados **coeficientes** das incógnitas;
- b é o **termo independente**.

Existem infinitas soluções para as equações lineares. Por exemplo, a solução de uma equação linear com duas incógnitas é todo par de valores que a verifica, ou seja, que a torna verdadeira.

Vamos calcular os valores de **x** e **y** que satisfazem à equação 2x + y = 6.

Note que x = 1 e y = 4 é uma solução. Realizamos a verificação ao calcular seu valor numérico para as variáveis:

$$2\mathbf{x} + \mathbf{y} = 6 \rightarrow 2 \cdot \mathbf{1} + \mathbf{4} = 6 \rightarrow 2 + 4 = 6 \rightarrow 6 = 6$$

Porém, há outras soluções para essa equação. Observe algumas na tabela:

x	2	0	3	–1	4	–2
y	2	6	0	8	–2	10

Ou seja, equações lineares com mais de uma incógnita apresentam infinitas soluções.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Trata-se de um conjunto de equações lineares. Sua representação é feita com uma chave englobando todas as equações lineares que compõem o sistema.

Exemplos:

- $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$ é um sistema linear formado por duas equações com duas incógnitas, ou seja, 22 nas incógnitas x e y.
- $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = -1 \\ x - y + z = 8 \end{cases}$ é um sistema linear de três equações com três incógnitas, ou seja, 33 nas incógnitas x, y e z.
- $\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ 3x - y + z = 6 \end{cases}$ é um sistema linear 2 × 3 nas incógnitas x, y e z.

Solução de um sistema linear

São os valores que satisfazem, ao mesmo tempo, a todas as equações que formam o sistema.

Por exemplo, vamos construir as tabelas com as soluções de cada equação envolvida no sistema $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$.

Soluções de x – y = 3:

x	1	2	3	4	5	6
y	–2	–1	0	1	2	3

Soluções de x + 2y = 9:

x	1	2	3	4	5	6
y	4	3,5	3	2,5	2	1,5

Observe que o par (1, –2) é solução de x – y = 3, mas não é de x + 2y = 9. Já o par (1, 4) é solução de x + + 2y = 9, mas não é de x – y = 3.

Porém, o par (5, 2) satisfaz ambas as equações. Dizemos que esse par de valores é a **solução do sistema**. Sua resposta é representada da seguinte forma:

S = {(5, 2)}

Lê-se: o conjunto-solução do sistema é o par (5, 2).

SISTEMAS EQUIVALENTES

Dois ou mais sistemas de equações que apresentem a mesma solução são chamados **equivalentes**.

Nesse contexto, precisamos nos atentar às seguintes observações:

- Se somarmos ou subtrairmos a mesma expressão algébrica, ou um mesmo número, aos dois membros de uma equação de um sistema, obtemos um sistema equivalente ao dado.
- Se multiplicarmos ou dividirmos por um mesmo número, diferente de zero, os dois membros de uma das equações de um sistema, obtemos um sistema equivalente ao dado.
- Se somarmos ou subtrairmos a uma equação de um sistema a outra equação multiplicada ou dividida por um número diferente de zero, obtemos um sistema equivalente ao dado.

O sistema de duas equações e duas incógnitas apresentado a seguir tem como solução x = 20 e y = 10:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 10 \end{cases} \xrightarrow{x=20 \text{ e } y=10} \begin{cases} 20 + 10 = 30 \\ 20 - 10 = 10 \end{cases}$$

Agora, observe os resultados na sequência.

- Se somarmos 3 aos dois membros da primeira equação, o novo sistema continuará apresentando como solução x = 20 e y = 10:

$$\begin{cases} x + y + 3 = 30 + 3 \\ x - y = 10 \end{cases} \xrightarrow{x=20 \text{ e } y=10} \begin{cases} 20 + 10 + 3 = 30 + 3 \\ 20 - 10 = 10 \end{cases}$$

Dizemos então que esse sistema é equivalente ao anterior.

- Se multiplicarmos por 2 os dois membros da segunda equação, o novo sistema continuará apresentando a mesma solução:

$$\begin{cases} x+y=30 \\ 2x-2y=20 \end{cases} \xrightarrow{x=20 \text{ e } y=10} \begin{cases} 20+10=30 \\ 40-20=20 \end{cases}$$

Esse sistema é equivalente ao anterior.

- Se subtrairmos a primeira equação pela soma das duas equações do sistema inicial, o novo sistema continuará apresentando a mesma solução:

$$\begin{cases} 2x=40 \\ x-y=10 \end{cases} \xrightarrow{x=20 \text{ e } y=10} \begin{cases} 2\cdot 20=40 \\ 20-10=10 \end{cases}$$

Esse sistema é equivalente ao anterior.

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS

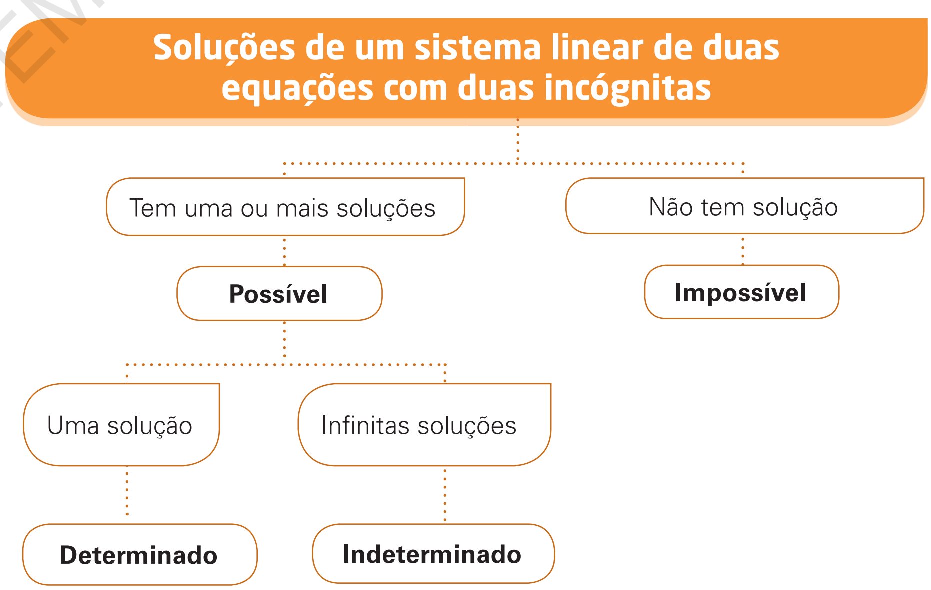
Os sistemas de equações lineares são classificados de acordo com o número de soluções que apresentam:

- **Possível e determinado –** O sistema apresenta uma única solução.
- **Possível e indeterminado –** O sistema apresenta infinitas soluções.
- **Impossível –** O sistema não tem solução.

Considere os seguintes exemplos:

- $\begin{cases} x+y=5 \\ 4y-y=1 \end{cases}$ A solução é única: $x = 4$ e $y = 1$ (sistema possível e determinado).
- $\begin{cases} x+y=5 \\ 4x+y=20 \end{cases}$ Podemos observar que a segunda equação é equivalente à primeira. Basta multiplicarmos os dois membros por 4. Dessa forma, há uma só equação e duas incógnitas, o que oferece infinitas soluções (sistema possível e indeterminado).
- $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+3y=10 \end{cases}$ Se multiplicarmos a primeira equação por 3, teremos a equação $3x+3y=15$. Se compararmos à segunda equação, notamos que ambas apresentam informações contraditórias. Portanto, não há solução para esse sistema (sistema impossível).

Podemos resumir a classificação de sistemas da seguinte maneira:



RESOLUÇÃO: MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Para solucionar um sistema linear pelo **método da substituição**, devemos seguir estes passos:

1. Isolamos uma das incógnitas em uma das equações.
2. Substituímos a expressão obtida na outra equação.
3. Solucionamos a equação obtida, agora com apenas uma incógnita.
4. Calculamos o valor da outra incógnita utilizando uma das equações iniciais.

Observação:

É importante verificarmos se os valores obtidos são, de fato, solução do sistema. Para isso, substituímos os valores para comprovar o resultado.

Exemplo:

Vamos solucionar o sistema $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$ pelo método da substituição.

1. Isolamos x na primeira equação:

$$x = 3 + y$$

2. Substituímos essa expressão na segunda equação:

$$3(3 + y) + 2y = 9$$

3. Solucionamos a equação obtida, chegando assim ao valor de y:

$$9 + 3y + 2y = 9$$
$$5y = 0$$
$$y = 0$$

4. Calculamos o valor de x com base na primeira equação:

$$x - y = 3$$
$$x - 0 = 3$$
$$x = 3$$

4. Por fim, verificamos a solução:

$$x - y = 3 \qquad\qquad x + 2y = 9$$
$$3 - 0 = 3 \qquad\qquad 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 9$$

ROTEIRO DE AULA

INTRODUÇÃO A SISTEMAS LINEARES

Equações lineares

- Apresentam duas ou mais incógnitas.
- Apresentam infinitas soluções.

Sistemas lineares

- Conjunto de equações lineares.
- A solução são valores que satisfazem, ao mesmo tempo, a todas as equações.

Sistemas equivalentes

- Dois ou mais sistemas que apresentam a mesma solução.

Classificação

- Possível e determinado.
- Possível e indeterminado.
- Impossível.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFPE – Karina foi à feira e comprou 15 frutas (maçãs e abacaxis). Karina pagou R$ 0,80 por cada maçã e R$ 4,50 por cada abacaxi, totalizando R$ 34,20. Karina comprou

a) 6 maçãs
b) 9 abacaxis
c) 9 maçãs
d) 8 abacaxis
e) 8 maçãs

m = maçãs
a = abacaxis
Podemos escrever o sistema desta forma:

$$\begin{cases} 0{,}8m + 4{,}5a = 34{,}20 \\ m + a = 15 \end{cases}$$

Assim:
$0{,}8m + 4{,}5a = 34{,}20$
$m = 15 - a$
Pelo método da substituição:
$0{,}8 \cdot (15 - a) + 4{,}5a = 34{,}20 \rightarrow 12 - 0{,}8a + 4{,}5a = 34{,}20$
$3{,}7a = 22{,}20$
$a = 6$
Logo:
$m = 15 - a \rightarrow m = 15 - 6 \rightarrow m = 9$
Assim, Karina comprou 6 abacaxis e 9 maçãs.

2. Ifal (adaptado) – Em uma turma de 49 alunos, o número de homens corresponde a $\frac{3}{4}$ do número de mulheres. Quantos homens há nessa turma?

Supondo que H seja o número de homens e M, o de mulheres, temos o sistema:

$$\begin{cases} H + M = 49 \\ H = \frac{3}{4}M \end{cases} \rightarrow M = \frac{4}{3}H$$

Pelo método da substituição:
$H + \frac{4}{3}H = 49 \rightarrow \frac{7}{3}H = 49 \rightarrow H = 21$
Portanto, há 21 homens na turma.

3. Enem C5-H19

Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros e, ao final, recebeu R$ 100,00.

Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

a) 30
b) 36
c) 50
d) 60
e) 64

Chamando x = nº de acertos e y = nº de erros, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 20x - 10y = 100 \\ x + y = 80 \end{cases} \rightarrow 2x - y = 10 \rightarrow y = 2x - 10$$

Pelo método da substituição:
$x + (2x - 10) = 80 \rightarrow 3x = 90 \rightarrow x = 30.$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

4. Ifal – A soma de dois números naturais é 13 e a diferença entre eles é 3. Qual o produto entre esses números?

a) 30
b) 36
c) 39
d) 40
e) 42

De acordo com o enunciado, podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow x = 3 + y$$

Pelo método da substituição:
$(3 + y) + y = 13 \rightarrow 3 + 2y = 13 \rightarrow 2y = 13 - 3 \rightarrow$
$\rightarrow y = \frac{10}{2} \rightarrow y = 5$
Logo, $x - y = 3 \rightarrow x - 5 = 3 \rightarrow x = 3 + 5 \rightarrow x = 8.$
Assim, $x \cdot y = 8 \cdot 5 = 40.$

5. CFTMG – Numa família com 7 filhos, sou o caçula e 14 anos mais novo que o primogênito de minha mãe. Dentre os filhos, o quarto tem a terça parte da idade do irmão mais velho, acrescidos de 7 anos. Se a soma de nossas três idades é 42, então minha idade é um número:

a) divisível por 5.
b) divisível por 3.
c) primo.
d) par.

Considerando o caçula como c, o mais velho como **p** e o quarto filho como **q**, temos:

$$\begin{cases} c = p - 14 \\ q = \frac{p}{3} + 7 \\ c + p + q = 42 \end{cases}$$

Desenvolvendo o sistema pelo método da substituição, temos:

$(p - 14) + p + \left(\frac{p}{3} + 7\right) = 42 \rightarrow 2p + \frac{p}{3} = 49$

$6\frac{p}{3} + \frac{p}{3} = 49 \rightarrow 7p = 147 \rightarrow p = 21$

Logo, $c = p - 14 \rightarrow c = 21 - 14 = 7$.

Ou seja, um número primo.

6. IFPE (adaptado) – Em um estacionamento, há triciclos e quadriciclos, totalizando 17 veículos e 61 rodas. Quantos triciclos há neste estacionamento?

Considerando t os triciclos e q os quadriciclos, temos o sistema:

$$\begin{cases} t + q = 17 \rightarrow q = 17 - t \\ 3t + 4q = 61 \end{cases}$$

Substituindo I em II:

$3 \cdot t + 4(17 - t) = 61$

$3t + 68 - 4t = 61$

$-t = -7 \rightarrow t = 7$

Portanto, há 7 triciclos no estacionamento.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. IFBA – Na Pizzaria "Massa Dez", verificou-se que o valor financeiro que os amigos Kiko, Bené e Zazá tinham, em reais, dependia de resolver o seguinte problema:

- a média aritmética dos valores financeiros dos amigos citados era R$ 30,00.
- a média aritmética dos valores financeiros de Bené e Zazá era R$ 20,00.
- Kiko tinha R$ 30,00 a mais que Bené.

A partir dessas informações, podemos afirmar que:

a) Kiko tem R$ 40,00 a mais que Zazá.
b) Bené tem R$ 10,00 a mais que Zazá.
c) Zazá tem o mesmo valor financeiro que Kiko.
d) O valor financeiro de Kiko corresponde à soma dos valores financeiros de Bené e Zazá.
e) Zazá tem o mesmo valor financeiro que Bené.

8. PUC-Camp (adaptado) – No início de um dia de coleta de lixo para reciclagem, foram usados quatro recipientes de coleta, todos vazios e de mesmo peso.

MSPOLI/ISTOCKPHOTO

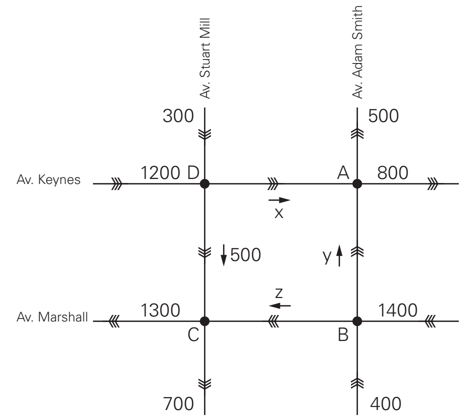
Ao final do dia, o recipiente com vidro pesava 3 kg, a soma do peso dos recipientes com metal e com plástico era igual ao peso do recipiente com papel e, por fim, o peso do recipiente com metal superava o peso do recipiente com plástico em 1,2 kg. Se a soma dos pesos dos quatro recipientes, ao final desse dia, era igual a 8 kg, então, a coleta de papel superou a de metal em

a) 500 g.
b) 450 g.
c) 1,45 kg.
d) 1,85 kg.
e) 650 g.

9. IFBA – Sendo o valor de "p" o triplo do valor de "r" e "q" o dobro do valor de "r" sendo a soma do valor de "p" com o valor de "q" o mesmo valor correspondente a 20% do valor 75, sendo $M = \dfrac{2p(3 + r)}{q^2}$, então podemos afirmar que o valor de M é?

a) 4
b) 2
c) 6
d) 5
e) 3

10. FGV – O diagrama a seguir indica o número de veículos que passaram em cada trecho de quatro avenidas de mão única na última hora. Por exemplo, 300 veículos passaram, nessa hora, pelo trecho da Av. Stuart Mill que antecede o cruzamento D. Sabe-se ainda que, nessa hora, passaram 500 veículos entre os cruzamentos de D e C, x veículos de D para A, y veículos de B para A e z veículos de B para C. Interpretando os cruzamentos do diagrama, pode-se deduzir, por exemplo, que x + y = = 1 300 (dedução a partir da análise do cruzamento A).



a) Calcule x, y e z.
b) Substitua, no diagrama original, a quantidade de 500 veículos que trafegam de D para C na hora analisada por uma quantidade desconhecida de t veículos. Considerando que x, y, z e t são inteiros positivos, determine quantos são os valores possíveis para t.

11. UCS-RS – Em um condomínio de um prédio de apartamentos houve uma despesa extra de R$ 7.200,00. Cinco condôminos não se dispuseram a pagar as suas partes desse extra e, devido a isso, para integralizar o total, os demais foram obrigados a pagar R$ 120,00 a mais cada um. Quantos são os condôminos desse prédio?

a) 15
b) 20
c) 30
d) 60
e) 120

12. IFPE – Carlos e Renata estavam prestes a se casar e decidiram conversar com o gerente do banco em que ambos possuíam conta para ver a possibilidade de fazer o financiamento de um novo apartamento. Em uma conversa informal, o gerente lhes informou que, mesmo juntando o saldo dos dois, ainda seria necessário um valor de R$ 4.100,00 para pagar a entrada no valor de R$ 12.000,00. Renata não lembrava do valor que tinha na conta, mas sabia que possuía R$ 500,00 a mais que Carlos.

É CORRETO afirmar que Carlos possuía:

a) R$ 3.500,00 em sua conta.
b) R$ 4.000,00 em sua conta.
c) R$ 4.200,00 em sua conta.
d) R$ 3.700,00 em sua conta.
e) R$ 2.800,00 em sua conta.

13. Famema-SP – Uma pessoa comprou 2 pacotes de algodão, 5 rolos de gaze e 3 rolos de esparadrapo. Na farmácia onde realizou a compra, o preço de um pacote de algodão mais um rolo de gaze e mais um rolo de esparadrapo é R$ 16,00. Um rolo de esparadrapo custa R$ 2,00 a menos que um pacote de algodão e R$ 1,00 a mais que um rolo de gaze. Sabendo que essa pessoa pagou a compra com uma nota de R$ 50,00, o valor do troco recebido foi:

a) R$ 0,50.
b) R$ 1,00.
c) R$ 1,50.
d) R$ 2,50.
e) R$ 2,00.

14. UFJF-MG – Um funcionário da UFJF gastou R$ 106,00 ao comprar 20 lápis, 4 borrachas, 10 canetas e uma mochila para seu filho. Ao chegar em casa, ele percebeu que o valor da mochila é igual a 10 vezes o valor de cada lápis mais 8 vezes o valor de cada borracha e mais 6 vezes o valor de cada caneta. Sabendo-se que o gasto com os lápis é igual ao dobro do gasto com as canetas mais o dobro do gasto com as borrachas, e que o gasto com as borrachas é igual ao gasto com as canetas, determine o preço de cada produto.

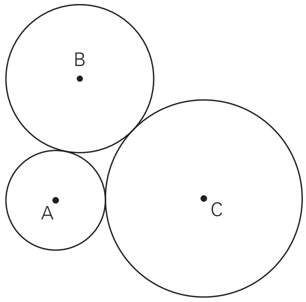
15. Unaerp – A solução do sistema $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y-z=-2 \\ x-y+z=6 \end{cases}$ é dada pelo terno ordenado:

a) (1, 2, 3)
b) (1, 2, –3)
c) (1, –2, 3)
d) (2, –1, 3)
e) (3, –2, 1)

16. UFRGS – Uma pessoa tem no bolso moedas de R$ 1,00, de R$ 0,50, de R$ 0,25 e R$ 0,10. Se somadas as moedas de R$ 1,00 com as de R$ 0,50 e com as de R$ 0,25, têm-se R$ 6,75. A soma das moedas de R$ 0,50 com as moedas de R$ 0,25 e com as de R$ 0,10 resulta em R$ 4,45. A soma das moedas de R$ 0,25 com as de R$ 0,10 resulta em R$ 2,95. Das alternativas, assinale a que indica o número de moedas que a pessoa tem no bolso.

a) 22
b) 23
c) 24
d) 25
e) 26

17. Unicamp-SP – A figura abaixo exibe três círculos no plano, tangentes dois a dois, com centros em A, B e C e raios de comprimentos a, b e c, respectivamente.



a) Determine os valores de a, b e c, sabendo que a distância entre A e B é de 5 cm, a distância entre A e C é de 6 cm e a distância entre B e C é de 9 cm.

b) Para a = 2 cm e b = 3 cm, determine o valor de c > b, de modo que o triângulo de vértices em A, B e C seja retângulo.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H19

A prefeitura de uma cidade detectou que as galerias pluviais, que possuem seção transversal na forma de um quadrado de lado 2 m, são insuficientes para comportar o escoamento da água em caso de enchentes. Por essa razão, essas galerias foram reformadas e passaram a ter seções quadradas de lado igual ao dobro das anteriores, permitindo uma vazão de 400 m^3/s. O cálculo da vazão V (em m^3/s) é dado pelo produto entre a área por onde passa a água (em m^2) e a velocidade da água (em m/s).

Supondo que a velocidade da água não se alterou, qual era a vazão máxima?

a) 25 m^3/s
b) 50 m^3/s
c) 100 m^3/s
d) 200 m^3/s
e) 300 m^3/s

19. Enem C5-H19

Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$, em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$

b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$

c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$

d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$

e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

20. CPS C5-H22

A pegada hídrica (*water footprint*) é um indicador da quantidade de água doce necessária em toda a cadeia produtiva e de consumo de um produto. Esse indicador é uma referência para o manejo dos recursos hídricos de um país, de uma região, de uma empresa ou de uma pessoa com o objetivo de usar a água de modo sustentável e responsável. No cálculo da pegada hídrica considera-se o consumo de água direta e indireta, isto é, a água consumida do produtor ao consumidor. Por exemplo, 17 000 litros de água são necessários para produzir 1 quilograma de chocolate, na média mundial.

No lanche da tarde, João comeu um pão com queijo, de massa total de 200 g. Curioso como sempre, determinou que, considerando só a produção dos dois ingredientes desse lanche (o pão e o queijo), o consumo de água foi de 830 litros. Sabendo que, em média, a pegada hídrica do pão é de 1,6 L/g e a do queijo é de 5,0 L/g, pode-se concluir corretamente que, em relação a esse consumo,

a) a quantidade de pão é igual à quantidade de queijo.

b) a quantidade de pão é o dobro da quantidade de queijo.

c) a quantidade de pão é o triplo da quantidade de queijo.

d) a quantidade de queijo é o dobro da quantidade de pão.

e) a quantidade de queijo é o triplo da quantidade de pão.

52 SISTEMAS LINEARES – MÉTODO DA IGUALDADE

- Resolução: método da igualdade

HABILIDADES

- Solucionar um sistema linear pelo método da igualdade.

ALFFOTO/ISTOCKPHOTO

A distância de segurança entre os veículos no trânsito pode ser estabelecida por meio de um sistema de equações.

Introdução

A distância entre os veículos é fundamental para evitar acidentes de trânsito. No cálculo do valor mínimo desse espaço, há muitas variáveis que influenciam no resultado, como velocidade, tempo de reação, distância de frenagem etc. No cálculo da distância de frenagem, por exemplo, é estabelecido um sistema de equações.

Neste módulo, veremos mais um método para solucionar um sistema de equações.

RESOLUÇÃO: MÉTODO DA IGUALDADE

Para solucionar um sistema pelo **método da igualdade**, seguimos estes passos:

1. Isolamos a mesma incógnita em ambas as equações.
2. Igualamos as expressões obtidas.
3. Solucionamos a equação resultante, agora com apenas uma incógnita.
4. Calculamos o valor da outra incógnita utilizando uma das equações iniciais.

Importante!

Verificamos se os valores obtidos são, de fato, solução do sistema ao substituir os valores e comprovar o resultado.

Exemplo:

Vamos solucionar o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ pelo método da igualdade.

Isolamos **x** em ambas as equações:

$x = \dfrac{8 - 3y}{2} \quad x = \dfrac{7 - 2y}{3}$

- Igualamos as duas expressões:

$\dfrac{8 - 3y}{2} = \dfrac{7 - 2y}{3}$

- Solucionamos a equação obtida:

$3 \cdot (8 - 3y) = 2 \cdot (7 - 2y)$
$24 - 9y = 14 - 4y$
$5y = 10$
$y = 2$

- Calculamos o valor de **x** com base na primeira equação:

$2x + 3y = 8$
$2x + 3 \cdot 2 = 8$
$2x = 2$
$x = 1$

- Por fim, verificamos a solução:

$2x + 3y = 8 \qquad 3x + 2y = 7$
$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8 \qquad 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Resolva o sistema $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ x - y = -4 \end{cases}$ utilizando o método da igualdade.

Resolução

Do enunciado, temos $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ x - y = -4 \end{cases}$.

Isolando x em ambas equações e fazendo a igualdade, obtemos:

$x = 8 - 3y$

$x = -4 + y$

$8 - 3y = -4 + y \rightarrow 4y = 12 \rightarrow y = 3$

Substituindo y em uma das equações:

$x = -4 + 3 \rightarrow x = -1$

Logo, $x = -1$ e $y = 3$.

2. UFC – Se um comerciante misturar 2 kg de café em pó do tipo I com 3 kg de café em pó do tipo II, ele obterá um tipo de café cujo preço é R$ 4,80 o quilograma. Mas, se misturar 3 kg de café em pó do tipo I com 2 kg de café do tipo II, a nova mistura custará R$ 5,20 o quilograma. Os preços do quilograma do café do tipo I e do quilograma do café do tipo II são, respectivamente,

a) R$ 5,00 e R$ 3,00
b) R$ 6,40 e R$ 4,30
c) R$ 5,50 e R$ 4,00
d) R$ 5,30 e R$ 4,50
e) R$ 6,00 e R$ 4,00

Resolução

Fazemos as seguintes associações:

x: preço do quilograma do café do tipo I

y: preço do quilograma do café do tipo II

Assim obtemos este sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \cdot 4,80 = 24 \\ 3x + 2y = 5 \cdot 5,20 = 26 \end{cases}$$

Isolamos y em ambas as equações e fazemos a igualdade:

$$\frac{24 - 2x}{3} = \frac{26 - 3x}{2}$$

Assim:

$48 - 4x = 78 - 9x \rightarrow 5x = 30$

Então, $x = \dfrac{30}{5} = 6$.

Ao substituirmos x em uma das equações, temos $y = 4$.

3. Enem C5-H21

Uma companhia de seguros levantou dados sobre carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y, juntas, respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca Y é

a) 20 **b)** 30 **c)** 40 **d)** 50 **e)** 60

Resolução

Consideramos que x e y representam o número de carros roubados das marcas X e Y, respectivamente. Então, pelo enunciado, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 0,6 \cdot 150 = 90 \end{cases}$$

Isolamos x em ambas as equações e fazemos a igualdade:

$2y = 90 - y \rightarrow 3y = 90$

Assim, $y = \dfrac{90}{3} = 30$.

Portanto, o número esperado de carros roubados da marca Y é 30.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

ROTEIRO DE AULA

SISTEMAS LINEARES

Passos do método da igualdade

1º Isolar a mesma incógnita em ambas as equações.

2º Igualar as expressões obtidas.

3º Solucionar a equação obtida, agora com apenas uma incógnita.

4º Calcular o valor da outra incógnita utilizando uma das equações iniciais.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Ifal – Resolvendo o sistema abaixo, encontramos os valores para x e y tais que o produto $x \cdot y$ é igual a

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Pelo sistema apresentado:
$x + 2y = 4 \rightarrow x = 4 - 2y$
$2x - y = 3 \rightarrow x = \frac{3 + y}{2}$
Aplicando o método da igualdade, temos:
$4 - 2y = \frac{3 + y}{2}$
$2(4 - 2y) = 3 + y$
$8 - 4y = 3 + y$
$5 = 5y \rightarrow y = 1$
Substituindo y em qualquer das equações, temos:
$x = 4 - 2(1) \rightarrow x = 2$
Assim, $x \cdot y = 2 \cdot 1 = 2$.

2. UTFPR (adaptado) – Determine os valores de x e y na proporção $\frac{x}{y} = \frac{8}{10}$, sabendo que $x + y = 144$.

Dado o sistema $\frac{x}{y} = \frac{8}{10}$:
$x + y = 144$
Assim:
$x = \frac{8y}{10}$
$x = 144 - y$
Pelo método da igualdade:
$\frac{8y}{10} = 144 - y \rightarrow 8y = (144 - y) \cdot 10$
$8y = 1\,440 - 10y \rightarrow 18y = 1\,440$
$y = \frac{1\,440}{18} \rightarrow y = 80$
Ao substituir y em qualquer das equações, temos:
$x = 144 - 80 \rightarrow x = 64$.

3. Enem

Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B\text{sen}\left(\frac{\pi}{12(h-12)}\right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26 °C, a mínima, 18 °C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

a) A = 18 e B = 8
b) A = 22 e B = −4
c) A = 22 e B = 4
d) A = 26 e B = −8
e) A = 26 e B = 8

Do enunciado, sabemos que:
$T(h) = A + B\text{sen}\left(\frac{\pi}{12(h-12)}\right)$
Ao substituir os valores 26 °C às 6h e 18 °C às 18h, temos:
$T(6) = 26 = A + B\text{sen}\left(\frac{\pi}{12(6-12)}\right)$
$26 = A + B\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 26 = A - B$
$T(18) = 18 = A + B\text{sen}\left(\frac{\pi}{12(18-12)}\right)$
$18 = A + B\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 18 = A + B$
Resolvemos o sistema pelo método da igualdade:
$A - B = 26 \rightarrow A = 26 + B$
$A + B = 18 \rightarrow A = 18 - B$
$26 + B = 18 - B \rightarrow 2B$
$18 - 26 \rightarrow B = -\frac{8}{2} \rightarrow B = -4$
$A = 26 + B \rightarrow A = 26 + (-4) \rightarrow A = 22$

4. UPE – A loja Bem Barato está com a seguinte promoção: "Na compra de uma geladeira, uma lava-roupa tanquinho e um forno de micro-ondas, todos da marca Elizabeth III, o cliente paga R$ 1.530,00 em 8 vezes sem juros". Se a geladeira custa o triplo do micro-ondas e custa 360 reais a mais que a lava-roupa tanquinho, quanto o cliente pagará se comprar apenas a lava-roupa tanquinho e o forno micro-ondas?

a) 840 reais
b) 805 reais
c) 780 reais
d) 750 reais
e) 720 reais

Consideramos que os preços da geladeira, da lava-roupa tanquinho e do forno micro-ondas são g, l, e f, respectivamente.

Assim:

$$\begin{cases} g + l + f = 1530 \\ g = 3f \\ g = l + 360 \end{cases}$$

Por igualdade, temos $3f = l + 360 \to l = 3f - 360$

Logo: $g + l + f = 1\,530$. Então:

$3f + 3f - 360 + f = 1\,530$

$7f = 1\,890 \to f = 270$

Então: $g = 3 \cdot 270 \to g = 810$

$l = 3f - 360 \to l = 3 \cdot 270 - 360 \to l = 450$

Desse modo, o cliente vai pagar:

f + l = R$ 270,00 + R$ 450,00 = R$ 720,00.

5. IFSul-RS – As idades de um casal são caracterizadas por dois números naturais desconhecidos, x e y. A soma das idades desse casal é de 64 anos e a diferença das idades é de 2 anos.

Dessa forma, é correto afirmar que o produto das idades é:

a) 1 021
b) 1 022
c) 1 023
d) 1 024

De acordo com o enunciado, podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y = 64 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Reescrevendo, temos:

$$\begin{cases} x = 64 - y \\ x = 2 + y \end{cases}$$

Pelo método da igualdade:

$64 - y = 2 + y \to 2y = 62 \to y = 31$

Logo, $x = 2 + 31 \to x = 33$.

Então: $x \cdot y = 31 \cdot 33 = 1\,023$.

6. UEM-PR (adaptado) – Em um pequeno bairro de três ruas – Abacaxi, Banana e Caqui – há, no total, 192 casas. Na Rua Abacaxi, a média de habitantes por casa é de quatro pessoas; na Rua Banana, de três pessoas; e na Rua Caqui, de duas pessoas. Sabe-se que a quantidade de habitantes da Rua Abacaxi é seis vezes maior que a quantidade de habitantes da Rua Caqui e que a Rua Banana tem 22 casas a mais que a Rua Caqui. Determine o número total de casas na Rua Banana.

Vamos considerar que:

- o número de casas da Rua Abacaxi é A;
- o número de casas da Rua Banana é B;
- o número de casas da Rua Caqui é C.

Além disso, vamos considerar que o número total de pessoas das ruas Abacaxi, Banana e Caqui são T_A, T_B e T_C, respectivamente.

Do enunciado, sabemos que:

I) $A + B + C = 192$

II) $B = C + 22$

Podemos isolar B na equação I e igualar com a equação II.

Isso resulta em: $A + 2C = 170$.

Com base nas médias de habitantes de cada casa:

III) $\frac{T_A}{A} = 4$

IV) $\frac{T_B}{B} = 3$

V) $\frac{T_C}{C} = 2$

Além disso:

VI) $T_A = 6\,T_C$

Com base nas equações V e VI:

$T_A = 12\,C$

Substituímos o valor de T_A da equação I:

$12\frac{C}{A} = 4 \to 4A - 12C = 0 \to A - 3C = 0$

Então, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} A + 2C = 170 \\ A - 3C = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por –1 e somamos com a primeira.

Encontramos, assim, o valor de C:

$5C = 170 \to C = 34$

Substituindo C na segunda equação, o valor de A é:

$A = 3C = 3 \cdot 34 = 102$

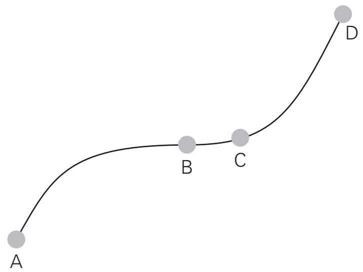
Substituindo os valores de A e C na equação, obtemos o valor de B:

$B = 192 - A - C = 192 - 102 - 34 = 56$

Portanto, o número total de casas na Rua Banana é 56.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. FGV – As cidades A, B, C e D estão ligadas por uma rodovia, como mostra a figura seguinte, feita fora de escala.



Por essa rodovia, a distância entre A e C é o triplo da distância entre C e D, a distância entre B e D é a metade da distância entre A e B, e a distância entre B e C é igual a 5 km. Por essa estrada, se a distância entre C e D corresponde a x% da distância entre A e B, então x é igual a:

a) 36
b) 36,5
c) 37
d) 37,5
e) 38

8. Uern – Pedro e André possuem, juntos, 20 cartões colecionáveis. Em uma disputa entre ambos, em que fizeram apostas com seus cartões, Pedro quadriplicou seu número de cartões, enquanto André ficou com apenas $\frac{2}{3}$ do número de cartões que possuía inicialmente. Dessa forma, o número de cartões que Pedro ganhou na disputa foi

a) 6.
b) 10.
c) 12.
d) 14.

9. UCS-RS – Sabe-se que os primeiros registros feitos pelos seres humanos eram marcados em paredes, folhas de palmeiras, tijolos de barro, tábuas de madeira. A primeira inovação foi o papiro, que tinha como matéria-prima uma planta. Depois ele foi substituído pelo pergaminho – feito de pele de animais –, que tinha maior durabilidade e que tornava a escrita mais fácil.

No século II, a partir do córtex de plantas, tecidos velhos e fragmentos de rede de pesca, os chineses inventaram o papel.

Em 1448, Johann Fust, juntamente com Gutenberg, fundou a Werk der Buchei (Fábrica de Livros), onde foi publicada a Bíblia de Gutenberg, livro que tinha 42 linhas. O aumento da oferta de papel e o aprimoramento das técnicas de impressão em larga escala ajudaram a consolidar o livro como veículo de informação e entretenimento.

Em 1971, a tecnologia inovou o mundo da leitura com os e-books, livros digitais que podem ser lidos em vários aparelhos eletrônicos.

Disponível em: <http://blog.render.com.br/diversos/a-evolucao-do-livro/>. Acesso em: 14 fev. 2017. (Parcial e adaptado)

Um livro pode ter um papel importante em narrativas de terror. Muitos escritores criam, dentro das próprias histórias, livros com determinadas características, por exemplo: conter monstros aprisionados, certas palavras que, quando pronunciadas, provocam destruição, páginas de pele humana, letras escritas em sangue. Um exemplo clássico é o *Necronomicon*, livro de presença frequente nos contos do escritor estadunidense Howard Philip Lovecraft, usado para ressuscitar mortos e contatar seres sobrenaturais. Suponha um admirador de Lovecraft que também é professor de Matemática.

Ele cria uma série de histórias sobre um livro amaldiçoado, cuja capa traz o seguinte sistema de equações escrito com sangue:

$$\frac{y}{x} = 4$$

$$5y = 12x + |d|$$

$$d = \sqrt{144}$$

A narrativa diz que o livro não deve ser aberto, pois algo terrível acontecerá àquele que o fizer. Entretanto, poderá haver aquele que decidirá abri-lo e, para tanto, será necessário descobrir o valor de y, que é

a) 4.
b) 6.
c) 14.
d) 28.
e) 36.

10. UFJF-MG – A soma dos algarismos de um número N de três algarismos é 18, e o algarismo da unidade é duas vezes maior do que o algarismo da dezena. Trocando-se o algarismo da centena com o algarismo da unidade obtemos um número M maior que N em 198 unidades. Determine o número N.

11. UFJF-MG – Um aluno da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) precisava de 30 figurinhas para completar o seu álbum da Copa do Mundo de 2014, sendo essas de jogadores do Brasil, da Espanha e da Argentina. Ele preferiu comprar as figurinhas no mercado informal do centro da cidade pagando o valor de R$ 3,00 para cada figurinha do Brasil, R$ 2,00 por cada figurinha da Espanha e R$ 1,00 por cada figurinha da Argentina. Ele gastou R$ 58,00 comprando todas as figurinhas de que precisava, sendo que o número de figurinhas do Brasil foi o triplo que o da Espanha.

Considere as seguintes afirmações:

I. Ele comprou 12 figurinhas do Brasil.
II. Ele gastou R$ 28,00 em figurinhas da Argentina.
III. O número de figurinhas da Argentina é menor que o número de figurinhas da Espanha.

Diante da análise feita, marque a opção **CORRETA**.

a) Apenas a afirmação I é verdadeira.
b) Apenas a afirmação II é verdadeira.
c) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.
d) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
e) Todas as afirmações são verdadeiras.

12. Fuvest-SP – Uma dieta de emagrecimento atribui a cada alimento um certo número de pontos, que equivale ao valor calórico do alimento ao ser ingerido. Assim, por exemplo, as combinações abaixo somam, cada uma, 85 pontos:

4 colheres de arroz + 2 colheres de azeite + 1 fatia de queijo branco.

1 colher de arroz + 1 bife + 2 fatias de queijo branco.

4 colheres de arroz + 1 colher de azeite + 2 fatias de queijo branco.

4 colheres de arroz + 1 bife.

Note e adote:

	1 colher de arroz	1 colher de azeite	1 bife
Massa de alimento (g)	20	5	100
% de umidade + macronutriente minoritário + micronutrientes	75	0	60
% de macronutriente majoritário	25	100	40

Com base nas informações fornecidas, e na composição nutricional dos alimentos, considere as seguintes afirmações:

I. A pontuação de um bife de 100 g é 45.

II. O macronutriente presente em maior quantidade no arroz são os carboidratos.

III. Para uma mesma massa de lipídeo de origem vegetal e de carboidrato, a razão $\dfrac{\text{número de pontos do lipídeo}}{\text{número de pontos do carboidrato}}$ é 1,5.

É correto o que se afirma em:

a) I, apenas.

b) II, apenas.

c) I e II, apenas.

d) II e III, apenas.

e) I, II e III.

13. ESPM – Bia é 6 anos mais velha que Carla. Há 2 anos, a idade de Bia era o triplo da idade de Ana e daqui a 1 ano será igual à soma das idades de Ana e Carla. Podemos afirmar que:

a) Ana tem 7 anos.

b) Bia tem 12 anos.

c) Ana é mais velha que Carla.

d) Carla tem 6 anos.

e) Ana e Carla têm a mesma idade.

14. Sistema Dom Bosco – A origem do "quadrado mágico" é desconhecida. Porém, há evidências de sua existência na China e na Índia que remontam ao século I. Em um "quadrado mágico", em cada uma das linhas, colunas e diagonais, a soma dos números inteiros deve ser a mesma. Dado o "quadrado mágico"

A	17	B
13	C	D
14	E	15

sendo que A, B, C e D são números inteiros, determine o valor da soma D + E.

15. EPCAr – A solução do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} - \dfrac{x-y}{6} + \dfrac{x-y}{18} - \dfrac{x-y}{54} + \ldots = -1 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

é tal que x + y é igual a

a) $\frac{11}{3}$

b) $\frac{10}{3}$

c) $-\frac{7}{3}$

d) $-\frac{8}{3}$

16. IFSC – Durante a colheita em um pomar de uvas, o proprietário verificou que às 9 horas haviam sido colhidos 730 kg de uva. Considerando que a quantidade de uvas colhidas é linear durante o dia e que às 14 horas haviam sido colhidos 3 650 kg de uva, analise as afirmativas:

I. A equação que permite calcular o número de quilogramas y em função do tempo x é dada pela expressão $y = 584x - 4\,526$.

II. Às 18 horas haviam sido colhidos 5 986 kg.

III. A colheita teve início às 8 horas.

Assinale a alternativa CORRETA.

a) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
b) Todas as afirmativas são verdadeiras.
c) Apenas as afirmativas I e IIII são verdadeiras.
d) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
e) Todas as afirmativas são falsas.

17. Sistema Dom Bosco – Em um progressão aritmética de razão r, a soma dos termos 1 ao 100 é igual a 100, e a soma dos termos 101 ao 200 é igual a 200. Determine o valor da razão r dessa progressão.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H21

Uma pessoa encheu o cartão de memória de sua câmera duas vezes, somente com vídeos e fotos. Na primeira vez, conseguiu armazenar 10 minutos de vídeo e 190 fotos. Já na segunda, foi possível realizar 15 minutos de vídeo e tirar 150 fotos. Todos os vídeos possuem a mesma qualidade de imagem entre si, assim como todas as fotos. Agora, essa pessoa deseja armazenar nesse cartão de memória exclusivamente fotos, com a mesma qualidade das anteriores.

Disponível em: <www.techlider.com.br>. Acesso em: 31 jul. 2012.

O número máximo de fotos que ela poderá armazenar é

a) 200.
b) 209.
c) 270.
d) 340
e) 475.

19. Enem C5-H21

Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

a) $5X - 3Y + 15 = 0$
b) $5X - 2Y + 10 = 0$
c) $3X - 3Y + 15 = 0$
d) $3X - 2Y + 15 = 0$
e) $3X - 2Y + 10 = 0$

20. IFPE C5-H21

De acordo com dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), na relação entre as populações masculina e feminina no Brasil, observou-se, em 2000, o total de 29 homens para 30 mulheres.

Disponível em: <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/projecao_da_populacao/2008/default.shtm>. Acesso em: 10 jan. 2009. (Adaptado)

Se, no ano de 2000, a população brasileira era de 177 milhões de habitantes, qual o número de homens e de mulheres no referido ano?

a) 75 milhões de homens e 102 milhões de mulheres.
b) 77 milhões de homens e 100 milhões de mulheres.
c) 87 milhões de homens e 90 milhões de mulheres.
d) 70 milhões de homens e 107 milhões de mulheres.
e) 65 milhões de homens e 112 milhões de mulheres.

SISTEMAS LINEARES – MÉTODO DA REDUÇÃO

53

- Resolução: método da redução
- Igualando os coeficientes da mesma incógnita

HABILIDADE

- Solucionar um sistema linear pelo método da redução.

ADIRUCH/123RF.COM

Aparelhos de GPS utilizam sistemas lineares para calcular a localização dos usuários.

Introdução

Muito provavelmente você já utilizou ou já viu alguém usando um GPS. Todos os celulares atuais já têm esse dispositivo em seu sistema. Há também diversos aplicativos que possibilitam ao usuário traçar rotas ou mesmo verificar a própria localização.

O Sistema de Posicionamento Global, mais conhecido como GPS (sigla do nome em inglês), é um sistema de navegação que opera por meio de uma rede de 24 satélites que orbitam a Terra. Estes transmitem sinais para os receptores do GPS, que, por sua vez, realizam uma triangulação para calcular a localização.

Tais cálculos envolvem a solução de sistemas lineares, tema de estudo deste módulo.

RESOLUÇÃO: MÉTODO DA REDUÇÃO

Para solucionar um sistema pelo **método da redução**, seguimos estes passos:

1. Igualamos os coeficientes de uma das incógnitas (exceto seu sinal), multiplicando os dois membros das equações por constantes não nulas.
2. Somamos ou subtraímos as duas equações do sistema equivalente. Dessa forma, reduzimos o sistema a uma equação com uma incógnita.
3. Solucionamos a equação obtida.
4. Calculamos o valor da outra incógnita utilizando uma das equações iniciais.

Importante!

Verificamos se os valores obtidos são, de fato, solução do sistema ao substituirmos os valores e comprovarmos o resultado.

Exemplo:
Vamos solucionar o sistema $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-2y=11 \end{cases}$ pelo método da redução.

1. Igualamos os coeficientes de uma incógnita, exceto seu sinal. O número pelo qual multiplicaremos ambas as equações é múltiplo comum de ambos os coeficientes.Vamos multiplicar por 2 os membros da primeira equação:

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-2y=11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x+2y=10 \\ 3x-2y=11 \end{cases}$$

2. Somamos as equações do sistema obtido. Assim, reduzimos o sistema a uma equação com uma incógnita:

$$\begin{array}{rrcrcr} & 4x & + & 2y & = & 10 \\ + & 3x & - & 2y & = & 11 \\ \hline & 7x & & & = & 21 \end{array}$$

3. Solucionamos a equação obtida:

$$7x = 21 \rightarrow x = 3$$

4. Calculamos o valor de y com base na primeira equação:

$$2x + y = 5$$
$$2 \cdot 3 + y = 5$$
$$y = 5 - 6$$
$$y = -1$$

5. Por fim, verificamos a solução:

$$2x + y = 5 \qquad\qquad 3x - 2y = 11$$
$$2 \cdot 3 + (-1) = 5 \qquad\qquad 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 11$$

IGUALANDO OS COEFICIENTES DA MESMA INCÓGNITA

Podemos utilizar um método prático para igualar os coeficientes de uma das incógnitas. Observe o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x-5y=4 \\ 3x+7y=0 \end{cases}$$

Para igualar os coeficientes de x, por exemplo, multiplicamos a primeira equação por 3 – que é justamente o coeficiente de x da segunda equação. Depois, multiplicamos por 2 a segunda equação – que é o coeficiente de x da primeira equação:

$$\begin{cases} 2x-5y=4 & \xrightarrow{\cdot 3} \\ 3x+7y=0 & \xrightarrow{\cdot 2} \end{cases} \begin{cases} 6x-15y=12 \\ 6x+14y=0 \end{cases}$$

Repare que os coeficientes de x (2 e 3, respectivamente) são primos entre si. Mas e quando tais coeficientes não são? Observe este sistema:

$$\begin{cases} 24x+13y=80 \\ 18x-7y=90 \end{cases}$$

Se queremos igualar os coeficientes de x, primeiro calculamos o MMC entre eles:

$\text{MMC}(24,\ 18) = 72$

Depois, dividimos o MMC obtido pelos coeficientes. Assim temos o número pelo qual vamos multiplicar tal equação:

- **Primeira equação**

$$\frac{\text{MMC}}{\text{coeficiente}} = \frac{72}{24} = 3 \rightarrow 3 \cdot (24x + 13y = 80) \rightarrow 72x + 39y = 240$$

- **Segunda equação**

$$\frac{\text{MMC}}{\text{coeficiente}} = \frac{72}{18} = 4 \rightarrow 4 \cdot (18x - 7y = 90) \rightarrow 72x - 28y = 360$$

Obtemos, desse modo, o sistema equivalente:

$$\begin{cases} 72x + 39y = 240 \\ 72x - 28y = 360 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. UFPR – Uma bolsa contém 20 moedas, distribuídas entre as de 5, 10 e 25 centavos, totalizando R$ 3,25. Sabendo que a quantidade de moedas de 5 centavos é a mesma das moedas de 10 centavos, quantas moedas de 25 centavos há nessa bolsa?

a) 6
b) 8
c) 9
d) 10
e) 12

Resolução

Considerando x como o número de moedas de 25 centavos e y como, o número de moedas de 10 e 5 centavos (as quais estão na mesma quantidade), obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 0{,}25 \cdot x + 0{,}15 \cdot y = 3{,}25 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por 20:

$$\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 5x + 3y = 65 \end{cases}$$

Então, multiplicamos a primeira e a segunda equações por –3 e 2, respectivamente:

$$\begin{cases} x + 2y = 20 \cdot (-3) \\ 5x + 3y = 65 \cdot (2) \end{cases}$$

Obtemos então:

$$\begin{cases} -3x - 6y = -60 \\ 10x + 6y = 130 \end{cases}$$

Assim:

$7x = 70 \rightarrow x = 10$

Portanto, há 10 moedas de 25 centavos na bolsa.

2. Unesp – Em uma sala havia certo número de jovens. Quando Paulo chegou, o número de rapazes presentes na sala ficou o triplo do número de garotas. Se, em vez de Paulo, tivesse entrado na sala Alice, o número de garotas teria ficado a metade do número de rapazes. O número de jovens que estavam inicialmente na sala (antes de Paulo chegar) era

a) 11
b) 9
c) 8
d) 6
e) 5

Resolução

Vamos considerar que x e y correspondem ao número inicial de rapazes e ao de garotas, respectivamente. Então, de acordo com o enunciado, temos o sistema:

$$\begin{cases} x + 1 = 3y \\ y + 1 = \dfrac{x}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 3y = -1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por – 1 e somamos as equações:

Substituímos y = 3 e encontramos o valor de x:

$x + 1 = 3y \rightarrow x = 3 \cdot 3 - 1 \rightarrow x = 8$

Assim, $x + y = 8 + 3 = 11$.

ROTEIRO DE AULA

SISTEMAS LINEARES

Método da redução

Passo 1 – Igualar os coeficientes de uma das incógnitas (exceto seu sinal), multiplicando os dois membros das equações por constantes não nulas.

Passo 2 – Somar ou subtrair as duas equações do sistema equivalente.

Passo 3 – Solucionar a equação obtida.

Passo 4 – Calcular o valor da outra incógnita utilizando uma das equações iniciais.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEG-GO – Cinco jovens, que representamos por a, b, c, d, e foram a um restaurante e observaram que o consumo de cada um obedecia ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a+d=20 \\ b+c-e=30 \\ a-c=15 \\ e-a=10 \\ c+e=25 \end{cases}$$

O total da conta nesse restaurante foi de

a) R$ 50,00
b) R$ 80,00
c) R$ 100,00
d) R$ 120,00
e) R$ 135,00

O total da conta corresponde à soma dos valores de a, b, c, d e e.
A soma das equações resulta exatamente na soma dessas quantias:
a + b + c + d + e = R$ 100,00.

2. Ifal (adaptado) – Resolva o sistema de equações abaixo para x e y reais e determine o valor do produto x · y.

$$\begin{cases} x+y=14 \\ 4x+2y=38 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por –2:

$$\begin{cases} -2x-2y=-28 \\ 4x+2y=38 \end{cases}$$

Somamos as equações:
$2x = 10 \rightarrow x = 5$
Logo, $x + y = 14 \rightarrow 5 + y = 14 \rightarrow y = 9$.
Assim, $x \cdot y = 5 \cdot 9 = 45$.

3. Enem C5-H21

Algumas pesquisas estão sendo desenvolvidas para se obter arroz e feijão com maiores teores de ferro e zinco e tolerantes à seca. Em média, para cada 100 g de arroz cozido, o teor de ferro é de 1,5 mg e o de zinco é de 2,0 mg. Para 100 g de feijão, é de 7 mg o teor de ferro e de 3 mg o de zinco. Sabe-se que as necessidades diárias dos dois micronutrientes para uma pessoa adulta é de aproximadamente 12,25 mg de ferro e 10 mg de zinco.

Disponível em: <http://www.embrapa.br>.
Acesso em: 29 abr. 2010. (Adaptado)

Considere que uma pessoa adulta deseja satisfazer suas necessidades diárias de ferro e zinco ingerindo apenas arroz e feijão. Suponha que seu organismo absorva completamente todos os micronutrientes oriundos desses alimentos.

Na situação descrita, que quantidade a pessoa deveria comer diariamente de arroz e feijão, respectivamente

a) 58 g e 456 g
b) 200 g e 200 g
c) 350 g e 100 g
d) 375 g e 500 g
e) 400 g e 89 g

Sendo a e f, respectivamente, as porções de 100 g de arroz e feijão a serem ingeridas, de acordo com o enunciado, temos o sistema:

$$\begin{cases} 1{,}5a+7f=12{,}25 \\ 2a+3f=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6a+28f=49 \\ -6a-9f=-30 \end{cases}$$

Somamos as equações:
$19f = 19 \rightarrow f = 1$
Logo, $2a + 3 \cdot 1 = 10 \rightarrow 2a = 7 \rightarrow a = 3{,}5$
Dessa forma, as quantidades a serem ingeridas são:
Arroz: $3{,}5 \cdot 100 = 350$ g
Feijão: $1 \cdot 100 = 100$ g.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. Ifal – Um trabalhador recebeu seu salário de R$ 880,00 em notas de R$ 50,00 e R$ 10,00. Sabendo que ao todo havia 28 notas, quantas eram as notas de R$ 10,00?

a) 11.
b) 12.
c) 13.
d) 14.
e) 15.

Consideramos que a quantidade de notas de R$ 50 = x e a de notas de R$ 10 = y. Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} x+y=28 \\ 50x+10y=880 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por –10:

$$\begin{cases} -10x-10y=-280 \\ 50x+10y=880 \end{cases}$$

Somamos as duas equações:
$40x = 600 \rightarrow x = 15$
Logo, $15 + y = 28 \rightarrow y = 28 - 15 \rightarrow y = 13$.
Assim, a quantidade de notas de R$ 10,00 é igual a 13.

5. UCS-RS – Misturando-se 200 miligramas de uma substância A e 300 miligramas de uma substância B obtém-se um produto cujo custo é de R$ 4,00 por miligrama. Porém, se forem misturados 300 miligramas da substância A com 200 miligramas da substância B, o valor do produto será de R$ 3,00 por miligrama. Qual seria o preço do produto, por miligrama, se ele fosse composto por 250 miligramas de cada uma das substâncias A e B?

a) R$ 1,50
b) R$ 1,75
c) R$ 2,00
d) R$ 3,00
e) R$ 3,50

Podemos obter o seguinte sistema linear, que expressa as condições apresentadas:

$$\begin{cases} 2A + 3B = 4 \\ 3A + 2B = 3 \end{cases}$$

Os coeficientes foram simplificados, mantendo-se a equivalência do sistema.
Multiplicamos a primeira equação por 3 e a segunda por –2:

$$\begin{cases} 6A + 9B = 12 \\ -6A - 4B = -6 \end{cases}$$

Somamos as equações:

$$5B = 6 \rightarrow B = \frac{6}{5}$$

Substituímos o valor de B na primeira equação:

$$2A + 3 \cdot \frac{6}{5} = 4 \rightarrow A = \frac{4}{2} - \frac{9}{5} = \frac{1}{5}$$

Somamos a quantidade pedida:

$$2{,}5A + 2{,}5B = 2{,}5\,(A + B) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{6}{5}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

Portanto, o valor é R$ 3,50.

6. Unicamp-SP (adaptado) – Sejam a e b números reais. Considere, então, os dois sistemas lineares abaixo, nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} x - y = a \\ z - y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = b \end{cases}$$

Sabendo que esses dois sistemas possuem uma solução em comum, determine o valor de a + b.

Como os sistemas têm uma solução em comum, podemos considerar o sistema formado pelas quatro equações:

$$\begin{cases} x - y = a \\ -y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ y + z = b \end{cases}$$

Somamos a segunda e a terceira equações:
$x + z = 3$
Somamos a primeira e a quarta equações:
$x + z = a + b$
Então, $a + b = 3$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. CFTMG – Uma senhora resolveu vender bombons e trufas na porta de uma escola para complementar a renda familiar. No primeiro dia, ela faturou R$ 107,50 com a venda de 25 bombons e 15 trufas. No dia seguinte, seu faturamento foi igual a R$ 185,00 e foram vendidos 20 bombons e 45 trufas. Um aluno que comprou, dessa senhora, 4 bombons e 3 trufas pagou a quantia de

a) R$ 19,00.
b) R$ 19,50.
c) R$ 22,50.
d) R$ 23,00.

8. IFSul-RS – O Brasil foi pioneiro na utilização de carros bicombustíveis, ou seja, veículos que podem ser abastecidos com gasolina ou com álcool. Considere que, em um determinado posto de combustíveis, o preço de 2 litros de gasolina com mais 4 litros de álcool é R$ 20,00. Também sabe-se que 1 litro de gasolina juntamente com 12 litros de álcool é vendido por R$ 40,00. É correto afirmar que, nesse posto, cada litro de álcool custa:

a) R$ 2,50
b) R$ 3,00
c) R$ 3,50
d) R$ 4,00

9. Ifal – Sabendo que Tales e Platão têm, juntos, massa de 159 kg; Platão e Fermat, 147 kg; e Tales e Fermat, 134 kg, determine a massa de Tales, Platão e Fermat juntos:

a) 200.
b) 210.
c) 220.
d) 230.
e) 240.

10. IFSC (adaptado) – Um cliente foi ao caixa do banco do qual é correntista e sacou R$ 580,00. Sabendo-se que a pessoa recebeu toda a quantia em 47 notas e que eram apenas notas de R$ 5,00 e de R$ 20,00, determine a quantidade de cada nota.

11. Ifal – Em um determinado momento, um estacionamento possui 50 veículos, entre carros, motos e triciclos. Um garoto curioso sai contando o total de rodas em contato com o chão no estacionamento e encontra o valor 165, percebendo também que a quantidade de rodas dos carros era o quádruplo do número de rodas das motos.

Considerando as informações como corretas, podemos dizer que o estacionamento possui:

a) 30 motos.
b) 15 carros.
c) 15 triciclos.
d) o número de carros igual ao dobro de triciclos.
e) o número de motos igual ao triplo de triciclos.

12. ITA – Considere o sistema de equações

$$S\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{27}{y^2}+\dfrac{8}{z^3}=3 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{81}{y^2}+\dfrac{40}{z^3}=10 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{54}{y^2}+\dfrac{24}{z^3}=7 \end{cases}$$

Se (x, y, z) é uma solução real de S, então $|x| + |y| + |z|$ é igual a

a) 0.
b) 3.
c) 6.
d) 9.
e) 12.

13. CFTMG – Se $x + y + z = \sqrt[4]{9}$ e $x + y - z = \sqrt{3}$, então o valor da expressão $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$ é

a) $3\sqrt{3}$
b) $\sqrt{3}$
c) 3
d) 0

14. Fuvest-SP – As constantes A, B, C e D são tais que a igualdade

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Dx+C}{x^2+4}$$

é válida para $x \in \mathbb{R}$.

a) Deduza, da igualdade acima, um sistema linear com quatro equações, satisfeito pelas constantes A, B, C e D.
b) Resolva este sistema e encontre os valores dessas constantes.

15. PUC-RS – Sabendo que uma bola, duas raquetes e três bonés custam R$ 100,00 e que três bolas, sete raquetes e onze bonés custam R$ 320,00, então uma bola, uma raquete e um boné custam, juntos,

a) 50.
b) 60.
c) 80.
d) 120.
e) 150.

16. UEM-PR – Uma empresa que faz doces para festas oferece três tipos de kits, conforme mostra o quadro abaixo.

	Quantidade de brigadeiro	Quantidade de beijinho	Quantidade de cajuzinho	Preço R$
KIT A	3	3	6	12,00
KIT B	2	5	4	11,00
KIT C	5	3	2	14,00

Sobre o exposto assinale o que for correto.

I. O cajuzinho é o doce mais caro dos kits.
II. O beijinho é o doce mais barato dos kits.
III. O cajuzinho custa 25% do valor do brigadeiro.
IV. O preço de cada brigadeiro é igual ao dobro do preço de cada beijinho.
V. O preço de cada beijinho é R$ 1,50.

a) Apenas I e II estão corretas.
b) Apenas II e IV estão corretas.
c) Apenas II e V estão corretas.
d) Apenas III e IV estão corretas.
e) Apenas III, IV e V estão corretas.

17. UFPR – Uma empresa de telefonia oferece três planos mensais de internet móvel, descritos abaixo.

- Plano Ilimitado: mensalidade fixa de R$ 100,00 que permite ao cliente utilizar quantos gigabytes (GB) de dados desejar, sem pagar nada a mais.

- Plano Intermediário: mensalidade fixa de R$ 28,00 mais 4,50 por GB de dados consumidos.

- Plano Simples: não há mensalidade, porém o cliente paga R$ 12,00 por GB de dados consumidos.

Por exemplo, um consumo de 5 GB de dados em um mês custa R$ 100,00 para clientes do Plano Ilimitado, custa R$ 28,00 + 5 × R$ 4,50 = R$ 50,50 para clientes do Plano Intermediário e custa 5 × R$ 12,00 = R$ 60,00 para clientes do Plano Simples.

a) A partir de quantos GB de dados consumidos por mês o Plano Ilimitado fica mais vantajoso, ou seja, mais barato, que o Plano Intermediário?

b) A empresa pretende criar um novo plano de dados, chamado Plano Básico. Esse plano terá formato semelhante ao do Plano Intermediário, consistindo também de uma mensalidade fixa mais um preço por GB de dados consumidos. Além disso, o Plano Básico deverá satisfazer a duas condições:

- Ter o mesmo valor que o Plano Simples para clientes que consumirem 3 GB de dados por mês.

- Ter o mesmo valor que o Plano Intermediário para clientes que consumirem 8 GB de dados por mês.

Quais devem ser o valor da mensalidade e o valor de cada GB de dados consumidos para que o Plano Básico cumpra as duas condições descritas?

ESTUDO PARA O ENEM

18. PUC-RS C5-H21

Nas Olimpíadas de 2016, foram disputadas 306 provas com medalhas, que foram distribuídas entre competidores de esportes masculinos, femininos e, ainda, de esportes mistos. Sabe-se que o total de competições femininas e mistas foi 145. Sabe-se, também, que a diferença entre o número de provas disputadas somente por homens e somente por mulheres foi de 25. Então, o número de provas mistas foi

a) 3.
b) 9.
c) 25.
d) 136.
e) 161.

19. IFSul-RS C5-H21

O celular, visto por muitos como um bem essencial no dia a dia, pode ocasionar danos ao corpo humano, se usado de modo excessivo. Pesquisas científicas comprovam que dores na cabeça ligadas a tensões na nuca e no pescoço são causadas pelo tempo inclinado em uma posição indevida para visualizar a tela do celular, bem como há indícios de estreita relação entre a radiação do telefone celular e a ocorrência de tumores cerebrais.

Disponível em: <http://g1.globo.com/fantastico/noticia/2015/08/estudo-mostra-que-radiacao-de-celulares-pode-ser-prejudicial-saude.html>. Acesso em: 26 out. 2015.

Considere que um cientista pretende realizar uma pesquisa sobre os danos causados ao corpo humano devido ao uso excessivo de celulares. Para tanto, ele vai entrevistar 2 438 pacientes, dividindo-os em dois grupos (x e y), de forma que a soma de 30% do grupo x com 50% do grupo y resulta em 921 pacientes. Nessas condições, a quantidade de pacientes do grupo x e do grupo y é de, respectivamente

a) 447 e 474
b) 474 e 474
c) 948 e 1 490
d) 1 490 e 948
e) 474 e 1 490

20. UEL-PR (adaptado) C5-H21

A Internet armazena uma quantidade enorme de informações. Ao fazer uma busca na rede, os sites são listados em ordem decrescente segundo o seu grau de importância. Considere que, para calcular o grau de importância, são analisados três fatores: a quantidade de pessoas que se inscrevem no site, a quantidade de atualizações do site e a quantidade de visualizações do site. Cada um desses fatores recebe uma pontuação determinada.

- Para que o site obtenha 9 000 pontos e seja considerado de grande importância, são necessárias 600 pessoas inscritas, 600 atualizações e 800 visualizações.

- Para que o site obtenha 6 300 pontos e seja considerado de média importância, são necessárias 300 pessoas inscritas, 600 atualizações e 300 visualizações.

- Para que o site obtenha 2 000 pontos e seja considerado de importância satisfatória, são necessárias 100 pessoas inscritas, 100 atualizações e 300 visualizações.

A partir dessas informações, determine a pontuação obtida por um site que apresenta 900 pessoas inscritas, 450 atualizações e 700 visualizações.

a) 2 550
b) 3 590
c) 4 580
d) 6 600
e) 8 850

SISTEMAS LINEARES – ESCALONAMENTO

04

- Sistema escalonado
- Resolução: método do escalonamento

HABILIDADES

- Identificar um sistema escalonado.
- Solucionar um sistema linear pelo método do escalonamento.

JOSÉ LLEDÓ/DREAMSTIME.COM

No transporte de cargas marítimo, os sistemas de equações são largamente utilizados para se obter a posição exata dos contêineres que precisam ser retirados ou colocados nos navios.

Introdução

Ainda hoje, grande parte dos produtos industrializados que entram ou saem do país é feito via marítima. Os navios transportam milhares de contêineres, e as movimentações de carga e descarga precisam ser controladas nos terminais portuários.

Esse controle é feito muitas vezes com a aplicação sistemas complexos de equações e por meio de sofisticados *softwares*. Essas ferramentas possibilitam determinar com exatidão a posição em que um contêiner deve ser colocado em determinado navio ou qual contêiner deve ser retirado da embarcação.

SISTEMA ESCALONADO

O método de escalonamento é um recurso bastante utilizado para solucionar sistemas lineares. No entanto, é preciso ter total compreensão da técnica, pois o menor erro pode levar a uma solução falsa.

Antes de conhecermos o método de escalonamento, veremos o que é um sistema escalonado.

Um sistema é chamado **escalonado** quando cada equação, em relação à anterior, apresenta uma incógnita a menos, de modo que a última equação apresente apenas uma incógnita.

O sistema $\begin{cases} 3x - 2y + z = 9 \\ y - 2z = -3 \\ 3z = 2 \end{cases}$ é um exemplo de **sistema escalonado**.

RESOLUÇÃO: MÉTODO DO ESCALONAMENTO

Para solucionar um sistema pelo **método do escalonamento**, seguimos estes passos:

1. Organizamos as equações de modo a deixar todas as incógnitas na mesma ordem.

2. Ordenamos as equações para que as primeiras apresentem os maiores coeficientes para as primeiras incógnitas.

3. Multiplicamos ambos os membros de uma equação linear por uma constante não nula.

4. Substituímos uma equação pela soma dela com outra equação do sistema.

Importante!

Verificamos se os valores obtidos são, de fato, solução do sistema ao substituir os valores e comprovar o resultado.

Exemplo:

Vamos solucionar o sistema $\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ -x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$ pelo método do escalonamento.

1. Organizamos as equações de modo a deixar as primeiras com os maiores coeficientes nas primeiras incógnitas.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ -x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x + 3y + 2z = 7 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

2. Anulamos os coeficientes da primeira incógnita, exceto para a primeira equação.

3. Somamos, membro a membro, a segunda e terceira equações e substituímos a terceira equação pelo resultado.

$$\begin{array}{rr} & x + 3y + 2z = 7 \\ + & -x - 2y + z = 0 \\ \hline & y + 3z = 7 \end{array}$$

4. Somamos, membro a membro, a primeira equação com a segunda multiplicada por –2. Substituímos a segunda equação pelo resultado.

$$\begin{array}{rr} & 2x + y - 3z = -5 \\ + & -2x - 6y - 4z = -14 \\ \hline & -5y - 7z = -19 \end{array}$$

O sistema, então, fica do seguinte modo:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ -5y - 7z = -19 \\ y + 3z = 7 \end{cases}$$

5. No sistema equivalente obtido, substituímos a terceira equação pela soma, membro a membro, da segunda equação com a terceira, multiplicada por 5.

$$\begin{array}{rr} & -5y-7z=-19 \\ + & 5y-15z=35 \\ \hline & 8z=16 \end{array}$$

Assim, obtemos o sistema escalonado.

$$\begin{cases} 2x+y-3z=-5 \\ -5y-7z=-19 \\ 8z=16 \end{cases}$$

6. Com base no sistema escalonado, solucionamos equação a equação, de modo a obter a solução do sistema.

- Da terceira equação, temos que $z = 2$.
- Substituindo $z = 2$ na segunda equação, obtemos $y = 1$.
- Substituindo $z = 2$ e $y = 1$ na primeira equação, obtemos $x = 0$.

Portanto, a solução do sistema é $S = \{(0, 1, 2)\}$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

Vunesp – Se a, b e c são números reais tais que
$ax^2 + b(x + 1)^2 + c(x + 2)^2 = (x + 3)^2$,
para todo x real, então o valor de $a - b + c$ é

a) –5 **c)** 1 **e)** 7
b) –1 **d)** 3

Resolução

Agrupando os coeficientes de x^2, x e do termo constante, temos

$$ax^2+b(x^2+2x+1)+c(x^2+4x+4)=x^2+6x+9 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (a+b+c)x^2+(2b+4c)x+b+4c=x^2+6x+9$$

Como os polinômios são iguais, obtemos o seguinte sistema linear para os coeficientes

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2b+4c=6 \\ b+4c=9 \end{cases}$$

Simplificando a segunda linha (dividindo por 2), resulta

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ b+2c=3 \\ b+4c=9 \end{cases}$$

Substituindo a terceira linha pelo resultado da multiplicação da segunda linha por –1 somada à terceira linha, obtemos

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ b+2c=3 \\ 2c=6 \end{cases}$$

Assim, $a = 1$, $b = -3$ e $c = 3$. Então, calculamos $a - b + c = 1 - (-3) + 3 = 7$.

ROTEIRO DE AULA

SISTEMAS LINEARES

Sistema escalonado

- Utilizado para solucionar qualquer sistema linear.
- Cada equação, em relação à anterior, apresenta uma incógnita a menos, devendo a última equação possuir apenas uma incógnita.

Método da redução

- Passo 1 – Organizar as equações para que todas fiquem com as incógnitas na mesma ordem.
- Passo 2 – Organizar as equações de modo que as primeiras apresentem os maiores coeficientes para as primeiras incógnitas.
- Passo 3 – Multiplicar ambos os membros de uma equação linear por uma constante não nula.
- Passo 4 – Substituir uma equação pela soma dela com outra equação do sistema.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unifor – A apresentação de um show de Rock gerou uma receita de R$ 11.000,00. Havia dois tipos de ingresso: um era vendido por R$ 20,00 e o outro, por R$ 40,00. Sabendo-se que foram vendidos ao todo 400 ingressos, podemos concluir que o número de ingressos vendidos a R$ 20,00 foi de

a) 150.
b) 180.
c) 200.
d) 220.
e) 250.

Vamos considerar x, e y respectivamente, a quantidade de ingressos de R$ 40,00 e R$ 20,00. Temos então, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ 40x + 20y = 11\,000 \end{cases}$$

Substituímos a segunda equação pelo resultado da multiplicação da primeira equação por –40 somado à segunda equação:

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ 0 - 20y = -5\,000 \end{cases}$$

Portanto,

$$y = -\frac{5\,000}{20} \rightarrow y = 250.$$

2. Uece (adaptado) – Um hotel possui exatamente 58 unidades de hospedagem assim distribuídas: m quartos duplos, p quartos triplos e q suítes para quatro pessoas. A capacidade máxima de lotação do hotel é 166 pessoas, sendo que, destas, 40 lotam completamente todas as suítes. Determine a diferença entre o número de quartos triplos e o número de quartos duplos.

Podemos obter o seguinte sistema linear a partir dos dados do problema:

$$\begin{cases} m + p + q = 58 \\ 2m + 3p + 4q = 166 \\ 4q = 40 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 58 \\ 2 & 3 & 4 & 166 \\ 0 & 0 & 4 & 40 \end{pmatrix}$$

Fazendo
linha 2 $\rightarrow$ –2 · linha 1 + linha 2

linha 3 $\rightarrow \frac{1}{4}$ · linha 3
resulta,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 58 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Então,
$q = 10$
$p = 50 - 2 \cdot q = 50 - 20 \rightarrow p = 30$
$m = 58 - p - q = 58 - 30 - 10 \rightarrow m = 18$

Portanto,
$p - m = 30 - 18 = 12$
isto é, a diferença entre o número de quartos triplos e o número de quartos duplos é 12.

3. Falbe C5-H21

Um parque tem 3 pistas para caminhada, X, Y e Z. Ana deu 2 voltas na pista X, 3 voltas na pista Y e 1 volta na pista Z, tendo caminhado um total de 8 420 metros. João deu 1 volta na pista X, 2 voltas na pista Y e 2 voltas na pista Z, num total de 7 940 metros. Marcela deu 4 voltas na pista X e 3 voltas na pista Y, num total de 8 110 metros. O comprimento da maior dessas pistas excede o comprimento da menor pista em

a) 1 130 metros.
b) 1 350 metros.
c) 1 570 metros.
d) 1 790 metros.

Vamos considerar que os comprimentos das pistas X, Y e Z sejam, respectivamente, x, y e z. Assim, temos que

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 8\,420 \\ x + 2y + 2z = 7\,940 \\ 4x + 3y = 8\,140 \end{cases}$$

Fazendo o escalonamento:
- Invertendo a primeira linha e a segunda linha
- Trocando a segunda linha pelo resultado de (I) –2(II)
- Trocando a terceira linha pelo resultado de –2(II) + (III)

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 7\,940 \\ -y - 3z = -7\,460 \\ -5y - 8z = -23\,650 \end{cases}$$

Trocando a segunda linha por –1 (II).
Trocando a terceira linha por 5 (II) – (III).

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 7\,940 \\ y + 3z = 7\,460 \\ 7z = 13\,650 \end{cases}$$

Assim, resulta que:

$$z = \frac{13\,650}{7} \rightarrow z = 1\,950$$

Substituindo z na (II)
$y = 7\,460 - 3z = 7\,460 - 3 \cdot 1\,950 \rightarrow y = 1\,610.$
E, finalmente, substituindo y e z na (I),
$x = 7\,940 - 2y - 2z = 7\,940 - 2 \cdot 1\,610 - 2 \cdot 1\,950 \rightarrow x = 820$
Portanto, o comprimento da maior pista (1 950 m) excede o comprimento da menor pista (820 m) em
1 950 m – 820 m = 1 130 m.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. UEG – Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, tal que o $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$, os valores de x, y e z são, respectivamente:

a) 1, –2 e –1
b) 0, –1 e 1
c) 1, 0 e –2
d) 0, –2 e 1

A partir da matriz ampliada,

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

efetua-se o escalonamento.

Trocando as linhas 1 e 2 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Nova linha 2 = (–5) · L1 + L2 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & -8 & -14 \\ 1 & -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Nova linha 3 = (–1) · L1 + L3 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & -8 & -14 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Nova linha 2 = 5 · L3 + L2 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -13 & 11 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Nova linha 3 = 2 · L2 + L3 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -13 & 11 \\ 0 & 0 & -27 & 27 \end{bmatrix}$

Assim, o seguinte sistema equivalente é obtido:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ y - 13z = 11 \\ -27z = 27 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos x = 1, y = –2 e z = –1.

5. Unioeste – Sabe-se que x , y e z são números reais. Se $(2x + 3y - z)^2 + (2y + x - 1)^2 + (z - 3 - y)^2 = 0$, então x + y + z é igual a

a) 7.
b) 6.
c) 5.
d) 4.
e) 3.

Como a soma é nula, cada um dos termos que estão elevados à potência 2 também devem se anular. Assim, cada expressão deve ser nula, o que resulta no seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2y = 1 \\ -y + z = 3 \end{cases}$$

Trocando a segunda linha pelo resultado da multiplicação da segunda linha por –2 somado à primeira linha, resulta

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 0 - y - z = -2 \\ 0 - y + z = 3 \end{cases}$$

Trocando a terceira linha pelo resultado da multiplicação da terceira linha por –1 somado à segunda linha, resulta

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 0 - y - z = -2 \\ 0 + 0 - 2z = -5 \end{cases}$$

Assim, $z = \frac{5}{2}$.

Substituindo na segunda equação, $y = -z + 2 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$.

E, pela primeira equação, $2x = -3y + z \rightarrow 2x = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \rightarrow x = 2$.

Portanto,

$x + y + z = 2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 4$.

6. UFSC – Se a terma (a, b, c) é solução do sistema $\begin{Bmatrix} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{Bmatrix}$, então calcule o valor numérico de (a + b + c).

A matriz ampliada do sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Fazemos o escalonamento:

Trocamos a segunda linha pela primeira linha multiplicada por –2 somada a ela mesma.

Substituímos a terceira linha pela primeira linha multiplicada por –3 somada a ela mesma.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{pmatrix}$$

Trocamos a terceira linha pela segunda linha multiplicada por –2 somada a ela mesma.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Alteramos a segunda e a terceira linhas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

Trocando a terceira linha pela segunda linha multiplicada por –3 e somada a ela mesma.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Assim, o sistema equivalente é

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -y + z = -1 \\ -6z = -12 \end{cases}$$

De onde resulta

$z = 2$

$y = 3$

$x = 1$

Portanto, a soma da terma é

$a + b + c = 1 + 3 + 2 = 6$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Udesc – Um supermercado publicou três anúncios:

Anúncio 1: 2 facas, 2 garfos e 3 colheres por 27 reais;

Anúncio 2: 3 facas, 4 garfos e 4 colheres por 44 reais;

Anúncio 3: 4 facas, 5 garfos e 6 colheres por 59 reais.

Supondo que o preço unitário de cada tipo de talher é o mesmo nos três anúncios, sendo x, y e z o preço de cada faca, garfo e colher, respectivamente, tem-se que:

a) $x < y < z$
b) $z < x < y$
c) $y < z < x$
d) $z < y = x$
e) $y < x = z$

8. UPE – Em uma floricultura, é possível montar arranjos diferentes com rosas, lírios e margaridas. Um arranjo com 4 margaridas, 2 lírios e 3 rosas custa 42 reais. No entanto, se o arranjo tiver uma margarida, 2 lírios e uma rosa, ele custa 20 reais. Entretanto, se o arranjo tiver 2 margaridas, 4 lírios e uma rosa, custará 32 reais. Nessa floricultura, quanto custará um arranjo simples, com uma margarida, um lírio e uma rosa?

a) 5 reais.
b) 8 reais.
c) 10 reais.
d) 15 reais.
e) 24 reais.

9. Epcar – Carlos, Paulo e José resolveram fazer um lanche na praça de alimentação de um shopping center. Ao observarem o cardápio disponível, perceberam que teriam que pedir o que era denominado de "Combo", ou seja, um combinado de vários itens por um preço já especificado. Assim, os Combos solicitados foram:

***Combo 1** = R$ 15,00: 2 hambúrgueres, 1 suco e 1 sobremesa

***Combo 2** = R$ 24,00: 4 hambúrgueres e 3 sucos

***Combo 3** = R$ 35,00: 5 sucos e 3 sobremesas

O valor individual dos hambúrgueres é o mesmo, bem como o valor individual dos sucos e o valor individual das sobremesas, não importando qual Combo foi escolhido.

O quadro a seguir mostra a quantidade de cada um dos itens dos Combos que Carlos, Paulo e José consumiram:

	Hambúrgueres	Suco	Sobremesas
Carlos	2	4	2
Paulo	3	3	0
José	1	2	2

Se Carlos, Paulo e José se organizaram para descobrir o valor individual de cada item e pagaram individualmente apenas pelo que cada um consumiu, então é correto afirmar que

a) Carlos pagou R$ 9,00 a mais que Paulo.
b) a diferença entre o que Carlos e José pagaram foi de R$ 3,00.
c) Paulo e José pagaram o mesmo valor.
d) Carlos pagou mais que José, que pagou mais que Paulo.

10. UEL – Uma padaria possui 3 tipos de padeiros, classificados como A, B e C. Essa padaria é bem conhecida na cidade pela qualidade do pão francês, da baguete e do pão de batata.

Cada padeiro do tipo A produz, diariamente, 30 pães franceses, 100 baguetes e 20 pães de batata.

Cada padeiro do tipo B produz, diariamente, 30 pães franceses, 70 baguetes e 20 pães de batata.

Cada padeiro do tipo C produz, diariamente, 90 pães franceses, 30 baguetes e 100 pães de batata.

Quantos padeiros do tipo A, do tipo B e do tipo C são necessários para que em um dia a padaria produza, exatamente, 420 pães franceses, 770 baguetes e 360 pães de batata?

Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

11. Efomm – Do sistema linear abaixo, analise as seguintes afirmativas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & b \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$$

I. Se $b \neq -12$, o sistema linear terá uma única solução.

II. Se $a = b = -12$, o sistema linear terá infinitas soluções.

III. Se $b = -12$, o sistema será impossível.

a) Todas as afirmativas são corretas.

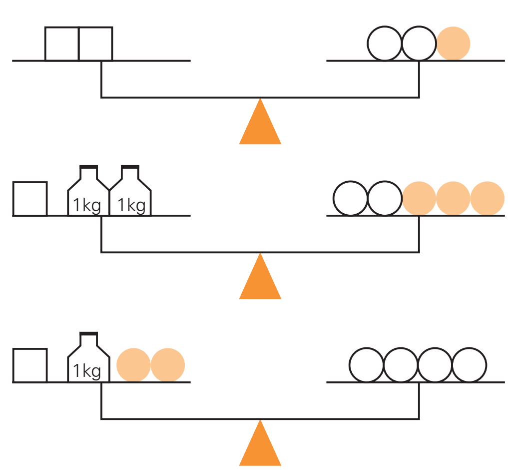
b) Todas as afirmativas são incorretas.

c) Somente as afirmativas I e III são corretas.

d) Somente as afirmativas I e II são corretas.

e) Somente as afirmativas II e III são corretas.

12. Cefet – Analise o seguinte esquema.



Se os pratos das balanças estão equilibrados, então a soma dos pesos dos objetos □, ◯ e ●, em kg, é

a) menor que 1.
b) maior que 2,5.
c) maior que 1 e menor que 1,5.
d) maior que 1,5 e menor que 2.
e) maior que 2 e menor que 2,5.

13. EsPCEx – Para que o sistema linear $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = b \end{cases}$

, em que a e b são reais, seja possível e indeterminado, o valor de a + b é igual a

a) 10.
b) 11.
c) 12.
d) 13.
e) 14.

14. UnB (adaptado) – Para conquistar a simpatia dos habitantes das regiões A, B e C de um município, a secretaria de comunicação local divulgou 3 de suas ações: I – direcionada às pessoas com até 18 anos de idade; II – para indivíduos com mais de 18 e até 60 anos de idade; e III – direcionada às pessoas com mais de 60 anos de idade. Para estimar quanto investir, uma pesquisa com 2000 pessoas da região A, com 5700 da região B, e com 5200 da região C apontou as quantidades de pessoas, nas respectivas faixas etárias, simpáticas à ação, para cada R$ 100,00 investidos. Por exemplo, a cada R$ 100,00 investidos na ação I, seria conquistada a simpatia de 250 pessoas da região B e, com o investimento de R$ 100, 00 na ação III, seria conquistada a simpatia de 200 pessoas na região C. A tabela abaixo mostra os resultados da pesquisa.

	Quantidade de pessoas, por região, simpáticas à ação, para cada R$ 100 investidos na ação		
ação	região A	região B	região C
I	100	250	100
II	100	100	50
III	10	150	200

O objetivo é determinar as três quantidades de R$ 100,00 que, investidas nas ações I, II e III, conquistariam a simpatia de todos os habitantes de cada uma das regiões A, B e C. Considere que x, y e z sejam essas quantidades, isto é, investindo x × R$ 100,00 na ação I, y × R$ 100,00 na ação II e z × R$ 100,00 na ação III, todos os habitantes das regiões A, B e C seriam simpáticos às ações. Nesse sentido, com o propósito de determinar as quantidades x, y e z:

I. Determine o sistema de equações lineares de 3 equações e 3 incógnitas relacionado ao problema exposto.

II. Resolva o sistema usando a estratégia de escalonamento de matrizes, indicando as operações necessárias.

15. ITA – Se o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y + 4z = 2 \\ x + 2y + 7z = 3 \\ 3x + y + az = b \end{cases}$$

é impossível, então os valores de a e b são tais que

a) a = 6 e b ≠ 4.
b) a ≠ 6 e b ≠ 4.
c) a ≠ 6 e b = 4.
d) a = 6 e b = 6.
e) a é arbitrário e b ≠ 4.

16. ITA – Considere a equação A(t) X = B(t), t ∈ ℝ, em que

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B(t) = \begin{bmatrix} e^{t} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

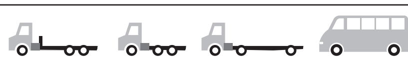
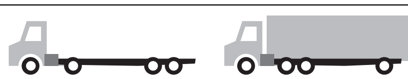
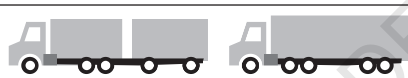
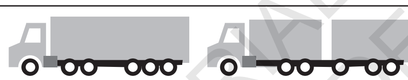
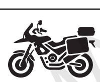
Sabendo que det A (t) = 1 e t ≠ 0, os valores de x, y e z, são, respectivamente,

a) $2\sqrt{2}$, 0, $-3\sqrt{2}$.
b) $-2\sqrt{2}$, 0, $-3\sqrt{2}$.
c) 0, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.
d) 0, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.
e) $2\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, 0.

17. Sistema Dom Bosco – Em um feriado prolongado, durante um monitoramento realizado pela Polícia Rodoviária, foram registradas as seguintes informações para os veículos que retornavam da Região dos Lagos em direção ao Rio de Janeiro, correspondentes a 30 minutos de coleta de dados:

- o total de veículos foi igual a 100 (considerando ambos os sentidos);
- o valor total arrecadado pelo pedágio foi de R$ 2 000,00;
- o dobro da quantidade de motos com a quantidade de ônibus excederam em 6 a quantidade de carros.

As tarifas do pedágio são dadas pela tabela a seguir.

12,00	 AUTOMÓVEL, CAMINHONETE, FURGÃO (RODAGEM SIMPLES) E TRICICLO.	20,00
24,00	 CAMINHÃO LEVE, CAMINHÃO TRATOR, ÔNIBUS E FUGRÃO (RODAGEM DUPLA).	40,00
18,00	 AUTOMÓVEL COM SEMIRREBOQUE E CAMINHONETE COM SEMIRREBOQUE.	30,00
36,00	 ÔNIBUS, CAMINHÃO, CAMINHÃO TRATOR, CAMINHÃO TRATOR COM SEMIRREBOQUE.	60,00
24,00	 AUTOMÓVEL COM REBOQUE E CAMINHONETE COM REBOQUE.	40,00
48,00	 CAMINHÃO COM REBOQUE E CAMINHÃO COM SEMIRREBOQUE.	80,00
60,00	 CAMINHÃO COM REBOQUE E CAMINHÃO COM SEMIRREBOQUE.	100,00
72,00	 CAMINHÃO COM REBOQUE E CAMINHÃO COM SEMIRREBOQUE.	120,00
6,00	 MOTOCICLETA, MOTONETAS E BICICLETAS A MOTOR.	10,00

Considerando apenas carros, motos e ônibus, a quantidade de cada um dos veículos observada durante o monitoramento foi de

a) 76 carros, 16 motos e 8 ônibus.
b) 76 carros, 8 motos e 16 ônibus.
c) 66 carros, 12 motos e 12 ônibus.
d) 66 carros, 26 motos e 8 ônibus.
e) 66 carros, 8 motos e 26 ônibus.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H21

Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio. Quantos alunos compraram somente um bilhete?

a) 34
b) 42
c) 47
d) 48
e) 79

19. UEPG (adaptado) C5-H21

Numa festa, organizada pelo grupo de assistência social da prefeitura, foram montadas as barracas A, B e C. As três barracas vendiam, pelos mesmos preços, os mesmos tipos de alimentação: cachorro-quente, pastel e milho-verde. No fim da festa, o balanço feito sobre o consumo nas três barracas mostrou que: em A, foram consumidos 24 cachorros-quentes, 36 pastéis e 24 milhos-verdes; em B, foram consumidos 33 cachorros-quentes, 55 pastéis e 33 milhos-verdes; e em C, foram consumidos 20 cachorros-quentes, 40 pastéis e 30 milhos-verdes. As barracas A, B e C venderam R$ 324,00, R$ 462,00 e R$ 350,00, respectivamente. Logo:

a) A soma dos preços de cada pastel e de cada cachorro-quente é o dobro do preço de cada milho-verde.

b) A soma dos preços de cada pastel e cada milho-verde é o dobro do preço de cada cachorro-quente.

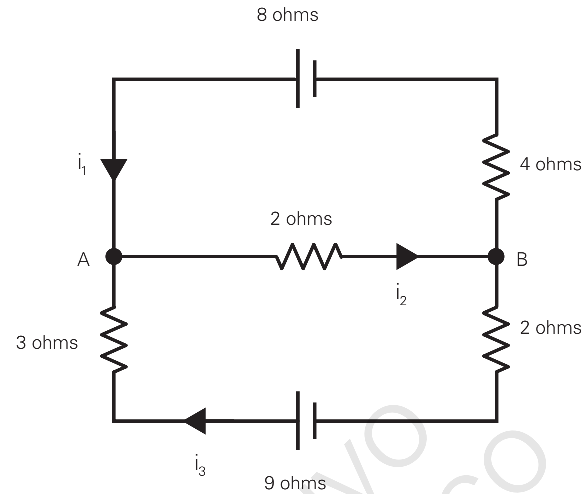
c) O preço de cada milho-verde é um número composto.

d) O preço de cada cachorro-quente é R$ 6,00.

e) A soma dos preços de cada pastel, cachorro-quente e milho-verde não é um número inteiro.

20. Sistema Dom Bosco C5-H21

Nos cursos de Elétrica, entre os assuntos abordados, estão os circuitos elétricos. Como sabemos, circuitos elétricos mal instalados podem gerar acidentes e levar a incêndios. Por isso, é de extrema importância que todos os cálculos sejam realizados de forma correta e as ligações sejam feitas de forma a não gerar sobrecargas no circuito. Assim, um dos desafios de uma turma de Elétrica é determinar todas as correntes do circuito a seguir:



Sabendo das leis de Kirchhoff, os alunos obtiveram as seguintes equações:

$i_1 - i_2 + i_3 = 0$

$-i_1 + i_2 - i_3 = 0$

$4i_1 + 2i_2 = 8$

$2i_2 + 5i_3 = 9$

Assim sendo, as correntes encontradas pelos alunos foram:

a) $i_1 = 2A$; $i_2 = 1A$; $i_3 = 1A$.

b) $i_1 = 1A$; $i_2 = 2A$; $i_3 = 1A$.

c) $i_1 = 2A$; $i_2 = 1A$; $i_3 = 2A$.

d) $i_1 = 1A$; $i_2 = 1A$; $i_3 = 1A$.

e) $i_1 = 2A$; $i_2 = 1A$; $i_3 = 2A$.

55

SISTEMAS LINEARES – GRÁFICO E MATRIZ ASSOCIADA

- Resolução: método gráfico
- Resolução: matriz associada

HABILIDADES

- Solucionar um sistema linear pelo método gráfico.
- Identificar a matriz associada de um sistema linear dado.
- Solucionar um sistema linear pelo método de matriz associada.


NISHA SHARMA/DREAMSTIME.COM

Ponte Howrah, em Calcutá, utiliza treliças em sua construção.

Introdução

A *treliça* é um elemento estrutural de extrema importância para projetos de Engenharia Civil, aplicado especialmente em grandes pontes. Ela reduz a quantidade de material necessário para a obra, o que resulta em uma estrutura mais leve e mais barata se comparada às estruturas maciças.

As equações relacionadas ao equilíbrio das forças e à estabilidade dessas construções geram um sistema linear com grande número de equações e incógnitas, cuja solução fornece as forças atuantes nas diversas estruturas que compõem a obra.

RESOLUÇÃO: MÉTODO GRÁFICO

Ao encontrarmos as soluções de uma equação com duas incógnitas, obtemos uma série de pares ordenados que são soluções da equação.

Se interpretarmos esses pares como pontos do plano, as soluções da equação são pontos de uma reta.

Podemos obter graficamente a solução de um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas como o ponto de intersecção entre as duas retas associadas a ambas as equações.

Exemplo:

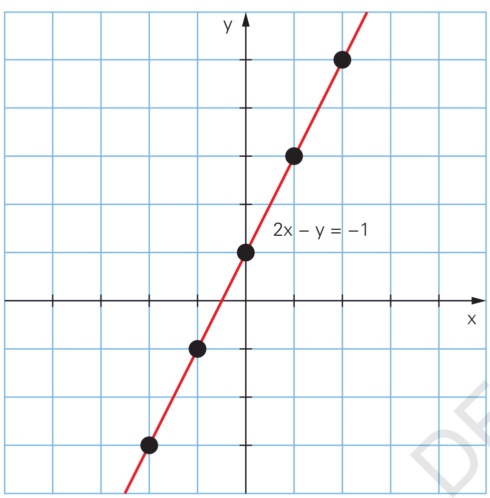
Vamos observar a resolução gráfica da equação $2x - y = 1$.

Obtemos as soluções da equação, ao isolar uma das incógnitas, por exemplo, $y = 2x + 1$.

Atribuímos valores a x e obtemos o valor associado de y.

- $x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 + 1 \rightarrow y = 1$; solução (0, 1).
- $x = 1 \rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 \rightarrow y = 3$; solução (1, 3).
- $x = 2 \rightarrow y = 2 \cdot 2 + 1 \rightarrow y = 5$; solução (2, 5).
- $x = -1 \rightarrow y = 2 \cdot (-1) + 1 \rightarrow y = -1$; solução $(-1, -1)$.
- $x = -2 \rightarrow y = 2 \cdot (-2) + 1 \rightarrow y = -3$; solução $(-2, -3)$.

Associamos cada par de valores das soluções a um ponto no plano cartesiano, temos uma reta como sua representação gráfica. Essa reta é formada pelos pontos encontrados e por todos aqueles que satisfazem à equação $2x - y = -1$.



Agora que sabemos representar graficamente as soluções de uma equação linear, vamos solucionar graficamente o sistema $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ de acordo com os passos a seguir:

1. Isolamos y nas duas equações:
$x + y = 6 \rightarrow y = -x + 6$
$x - y = 2 \rightarrow y = x - 2$

2. Atribuímos valores a x e criamos uma tabela com os valores para cada equação.

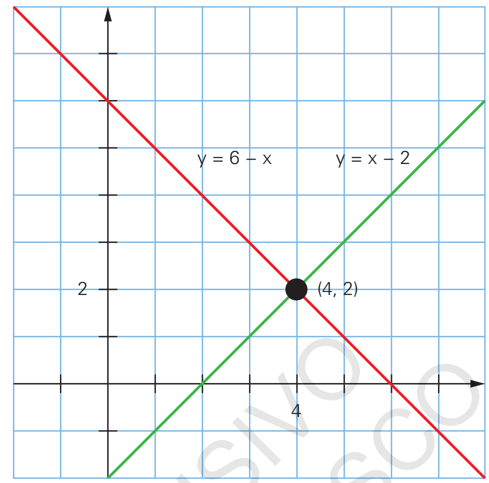
$y = -x + 6$

x	0	1	2	3	4
y	6	5	4	3	2

$y = x - 2$

x	0	1	2	3	4
y	–2	–1	0	1	2

3. Representamos, então, esses pontos sobre um plano cartesiano.



4. As retas se encontram no ponto (4, 2), que é a solução do sistema. Ou seja, $x = 4$ e $y = 2$.

A resolução de um sistema linear pelo método gráfico geralmente é aplicado para sistemas 2×2. Tal método pode ser utilizado para sistemas 3×3, porém sua representação se torna tridimensional e, em vez de retas, são planos.

Não é possível usar sistemas com ordem maior que 3×3.

Classificação de um sistema linear 2×2 a partir de sua representação gráfica

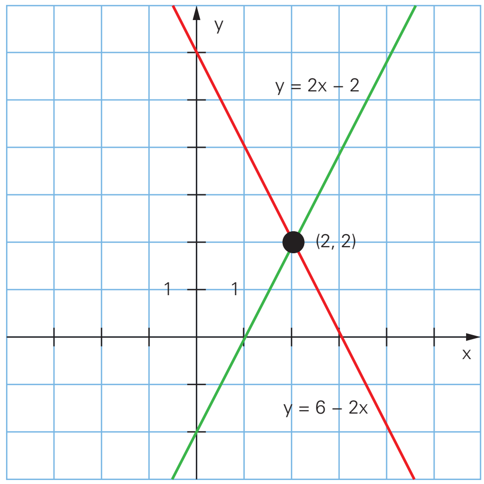
A seguir vamos analisar a classificação de sistemas lineares 2×1 quanto à quantidade de soluções.

Exemplo 1:

Consideremos o sistema $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$. Vamos esboçar as retas que representam as soluções de cada equação. Para isso, atribuímos dois valores para x em cada uma delas.

Primeira equação:	Segunda equação:
$x = 1 \rightarrow y = 4$	$x = 1 \rightarrow y = 0$
$x = 2 \rightarrow y = 2$	$x = 2 \rightarrow y = 2$

Ao inserir esses dados em um plano cartesiano, obtemos todas as respostas de ambas as equações:



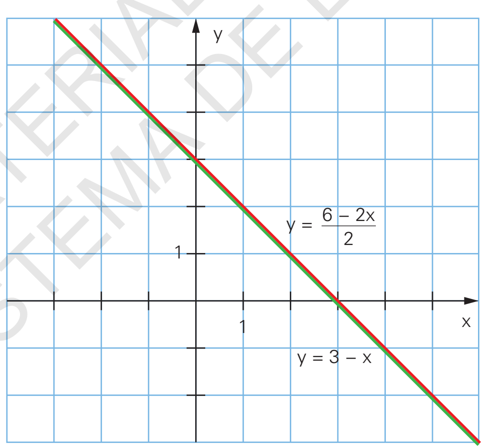
As retas se cruzam em um ponto que será a solução do sistema: $x = 2$ e $y = 2$. Portanto, o sistema é **possível e determinado**.

Exemplo 2:

Fazemos o mesmo procedimento para o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$. Vamos desenhar as retas que representam as soluções de cada equação. Para isso, atribuímos dois valores para x em cada uma.

Primeira equação:	Segunda equação:
$x = 0 \rightarrow y = 3$	$x = 1 \rightarrow y = 0$
$x = 3 \rightarrow y = 0$	$x = 2 \rightarrow y = 1$

Ao inserir esses dados em um plano cartesiano, obtemos as respostas de ambas as equações.



As retas são paralelas e coincidentes, ou seja, toda reta é solução do sistema. Portanto, o sistema é **possível e indeterminado**.

Exemplo 3:

Por fim, consideremos o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -2 \end{cases}$. Vamos desenhar as retas que representam as soluções de cada equação. Para isso, atribuímos dois valores para x em cada uma.

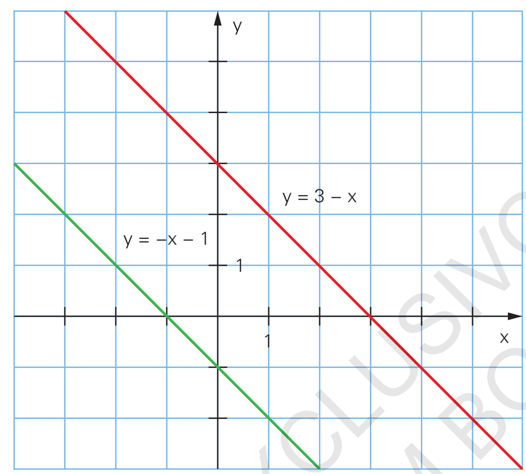
Primeira equação:

$x = 0 \rightarrow y = 3$
$x = 3 \rightarrow y = 0$

Segunda equação:

$x = 0 \rightarrow y = 2$
$x = -2 \rightarrow y = 0$

Ao inserir esses dados em um plano cartesiano, obtemos as respostas de ambas as equações.



As retas são paralelas e distintas, ou seja, não há pontos em comum que sejam solução do sistema.

Portanto, o sistema é **impossível**.

De modo geral:

- se as retas se cruzam em um único ponto, o sistema tem uma única solução: ele é **possível e determinado.**
- se as retas são paralelas e coincidentes, o sistema tem infinitas soluções: ele é **possível e indeterminado.**
- se as retas são paralelas e distintas, o sistema não tem solução: ele é **impossível.**

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Determine graficamente a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - y = 10 \end{cases}.$$

Resolução

Com base nas equações, obtemos dois pontos para cada uma das retas. Assim:

Primeira equação:

$x = -2 \rightarrow y = 1$

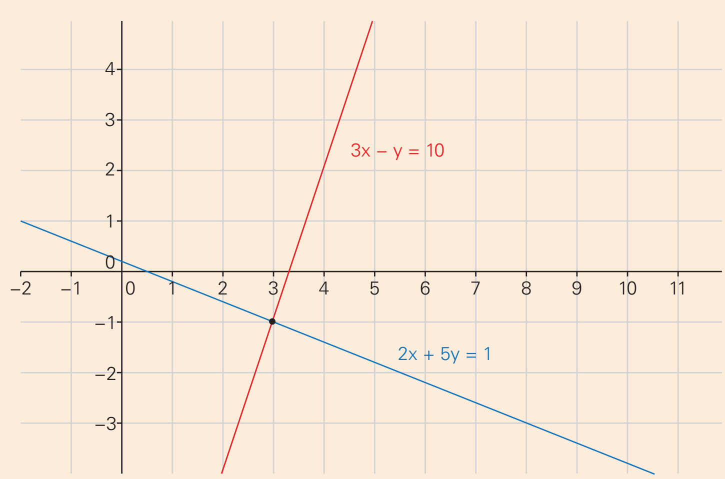
$x = 8 \rightarrow y = -3$

Segunda equação:

$x = 2 \rightarrow y = -4$

$x = 4 \rightarrow y = 2$

Ao inserir estes pontos no plano cartesiano, obtemos:



Logo, pelo gráfico, a solução do sistema é o ponto (3, −1), dado pela intersecção das retas.

RESOLUÇÃO: MATRIZ ASSOCIADA

Todo sistema linear, inclusive aqueles com mais incógnitas e mais equações, pode ser associado a uma matriz. Os coeficientes das equações que formam tal sistema serão os elementos da matriz.

Para obter a matriz associada, precisamos organizar as incógnitas na mesma ordem. Depois, simplesmente extraímos seus coeficientes. Quando a matriz é formada pelos coeficientes das incógnitas, temos uma **matriz associada incompleta.** Quando ela é formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos seus respectivos termos independentes, temos uma **matriz associada completa.**

Considere o sistema $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ -x+2y=6 \end{cases}$:

A matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ é formada apenas pelos coeficientes das incógnitas do sistema, ou seja, uma matriz associada incompleta.

A matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ é composta pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes do sistema, ou seja, matriz associada completa.

Representação matricial de um sistema

Podemos representar matricialmente qualquer sistema ao utilizar o conceito de matriz associada incompleta com a multiplicação entre matrizes.

Observe a equação matricial abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ao desenvolvermos a multiplicação, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x - 2 \cdot y \\ 4 \cdot x + 7 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da igualdade entre matrizes, temos:

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x+7y=1 \end{cases}$$

Ou seja, transformamos uma equação matricial em um sistema linear. O processo inverso também é válido. Note que a matriz que multiplica as incógnitas é composta pelos coeficientes das equações e o segundo membro da equação matricial é composto pelos termos independentes.

Dessa forma, a partir do sistema $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2x+4y=8 \end{cases}$, obtemos a representação matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Uma vez obtida a equação matricial, podemos resolvê-la utilizando técnicas já conhecidas. Desse modo, encontramos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema Dom Bosco – Dado o sistema linear $\begin{cases} 3x+5y=1 \\ 2x+z=3 \\ 5x+y-z=0 \end{cases}$, reescreva-o em forma matricial do tipo AX = B.

Resolução

Dado o sistema $\begin{cases} 3x+5y+0z=1 \\ 2x+0y+z=3 \\ 5x+y-z=0 \end{cases}$, temos que a matriz incompleta é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para escrevermos o sistema na forma AX = B, temos que

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, logo a forma matricial será:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ROTEIRO DE AULA

SISTEMAS LINEARES

Método gráfico

A solução de um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas pode ser obtida graficamente.

A solução é o ponto de intersecção entre duas retas associadas a ambas as equações.

Matriz associada

Os coeficientes das equações que formam o sistema serão elementos da matriz.

Para obter a matriz associada, é necessário organizar as incógnitas na mesma ordem e extrair seus coeficientes.

Matriz associada incompleta.

Formada pelos coeficientes das incógnitas.

Matriz associada completa.

Formada pelos coeficientes das incógnitas e por seus respectivos termos independentes.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-RS – O sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$ pode ser apresentado como

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

O sistema deve ser decomposto numa matricial, assim:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. Efomm (adaptado) – Em uma escola, 130 mulheres e 370 homens estão matriculados entre os cursos técnicos de Elétrica, Eletromecânica e Mecânica. No curso de Eletromecânica, 20 alunos são mulheres, do total de 130. No curso de Mecânica, o total de alunos é 270, e no curso de Elétrica o número de alunos de ambos os sexos é igual. Determine, pelo método de resolução gráfica, o número de mulheres no curso de Mecânica.

Assumimos que os alunos fazem apenas um curso, então, consideramos x o número de mulheres no curso de Elétrica e y o número de mulheres no curso de Mecânica, temos

$$\begin{cases} x + 20 + y = 130 \\ x + (130 - 20) + (270 - y) = 370 \end{cases}$$

Na segunda equação, x foi utilizado, pois no curso de Elétrica o número de homens e mulheres é igual.

Assim, obtemos o sistema

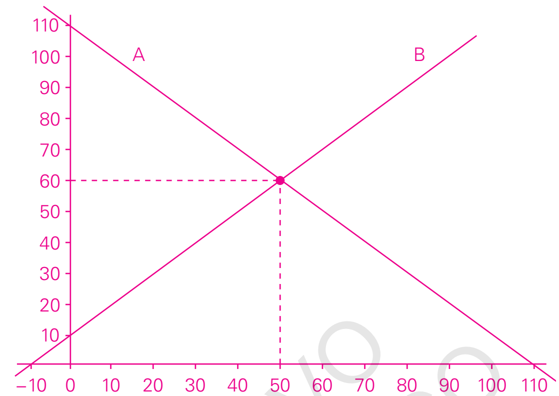
$$\begin{cases} x + y = 110 \\ -x + y = 10 \end{cases}$$

O sistema fornece a equação de duas retas dadas por

$y(x) = -x + 110$ (A)

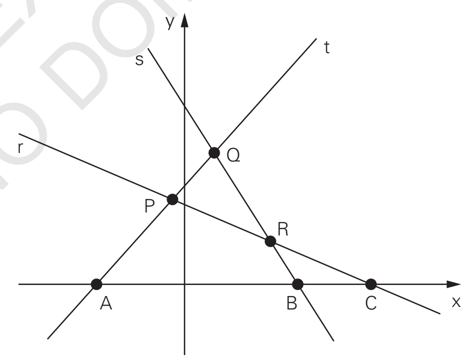
$y(x) = x + 10$ (B)

Construindo o gráfico, temos



Pelo gráfico, a interceptação das retas acontece no ponto $x = 50$ e $y = 60$. Portanto, o número de mulheres no curso de mecânica é 60.

3. Enem – Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de interseções entre as retas, e A, B e C os pontos de interseções dessas retas com o eixo x.



Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que

a) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.

b) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

c) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

d) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

e) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

Geometricamente uma solução é um ponto de interseção entre as retas. Logo, para que as três equações tenham uma solução em comum, devem ter um ponto de interseção entre as três retas. Como isso não acontece, concluímos que não existe solução que satisfaça as três equações.

4. UFSJ – Considere o seguinte sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

Sobre seu conjunto solução, é CORRETO afirmar que ele

a) possui infinitas soluções quando det $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$

b) possui uma única solução quando det $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$

c) possui infinitas soluções quando det $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$

d) não possui solução quando det $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$

O sistema linear homogêneo possui infinitas soluções quando o determinante da matriz dos coeficientes for nulo. Reescrevendo o sistema na forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A matriz dos coeficientes, nesse caso, é

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

então, deve-se ter

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

5. UFJF – Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$$

É correto afirmar que:

a) O sistema é possível e indeterminado.
b) x = 4, y = 1 e z = 0 é a única solução do sistema.
c) x = –4, y = 1 e z = 1 é a única solução do sistema.
d) O sistema é impossível.
e) x = 0, y = 0 e z = 0 é a única solução do sistema.

Observamos que o sistema é homogêneo e calculamos o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot (-4) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 \cdot 0 =$$
$$= 3 - 8 + 1 + 4 = 0$$

Ou seja, o sistema é possível e indeterminado.

6. IFMT (adaptado) – Em uma festa de bodas de prata de um casal, compareceram n pessoas. Em um dado instante, 40 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher. Um pouco mais tarde, 30 homens se retiraram e restaram, posteriormente, convidados na razão de 3 mulheres para cada homem. Inicialmente, qual era o número n de pessoas presentes na festa?

Dispondo as informações em uma tabela, teremos:

	Número de pessoas	Número de mulheres	Número de homens
Início	n	x	n − x
Retirada de 40 mulheres	n − 40	x − 40	n − x
Retirada de 30 homens	n − 70	x − 40	n − x − 30

Do enunciado, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} n - x = 2 \cdot (x - 40) \\ x - 40 = 3 \cdot (n - x - 30) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n - 3x = -80 \\ -3n + 4x = -50 \end{cases}$$

Assim, a matriz aumentada associada ao sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -80 \\ -3 & 4 & -50 \end{pmatrix}$$

Substituindo a segunda linha pelo resultado da soma da multiplicação da primeira por – 4 e da segunda por 3, e depois fazendo a soma das linhas, temos:

$$\begin{pmatrix} -4 & 12 & 320 \\ -9 & 12 & -150 \end{pmatrix}$$

Agora, fazendo a diferença da primeira linha com a segunda, teremos:

$$\begin{pmatrix} 4 & -12 & -320 \\ 5 & 0 & 470 \end{pmatrix}$$

Então,

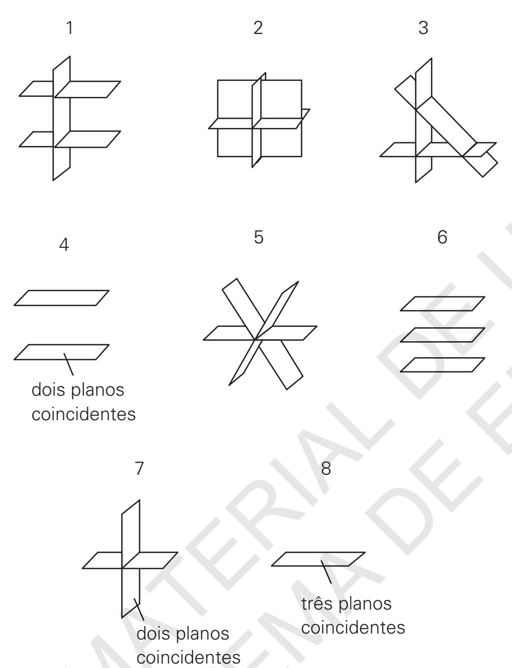
$5\,n = 470 \rightarrow n = 94$

Portanto, 94 era a número inicialmente de pessoas presentes na festa.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Insper – No plano cartesiano 0xy, equações lineares com duas incógnitas, do tipo $ax + by = c$, representam retas. Já em relação a um sistema de coordenadas cartesianas 0xyz no espaço, equações lineares com três incógnitas representam planos.

Por exemplo, na figura abaixo, pode-se ver a representação da equação $2x + y + z = 4$ em relação ao sistema de coordenadas 0xyz.



Sendo assim, das representações gráficas numeradas acima, correspondem a sistemas lineares 3 × 3 com infinitas soluções apenas

a) 5, 7 e 8.
b) 1, 3 e 7.
c) 4, 6 e 8.
d) 2, 5 e 7.
e) 1, 2, 3, 5 e 7.

8. Unicamp (adaptado) – As companhias aéreas costumam estabelecer um limite de peso para a bagagem de cada passageiro, cobrando uma taxa por quilograma de excesso de peso. Quando dois passageiros compartilham a bagagem, seus limites são considerados em conjunto. Em um determinado voo, tanto um casal como um senhor que viajava sozinho transportaram 60 kg de bagagem e foram obrigados a pagar pelo excesso de peso. O valor que o senhor pagou correspondeu a 3,5 vezes o valor pago pelo casal. Para determinar o peso excedente das bagagens do casal (x) e do senhor que viajava sozinho (y), bem como o limite de peso que um passageiro pode transportar sem pagar qualquer taxa (z), pode-se resolver o seguinte sistema linear:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3{,}5 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3{,}5 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3{,}5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3{,}5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$

9. Sistema Dom Bosco – Um paciente, após realizar uma cirurgia, deve seguir uma dieta rigorosa composta por duas refeições diárias. Nessas refeições, devem ser consumidas duas vitaminas, chamadas de A, B e C, nas quantidades de 10 000, 8 000 e 12 000 unidades, respectivamente. A tabela a seguir indica a quantidade dessas vitaminas, em unidades por grama, presentes em três alimentos diferentes.

	Vitamina 1	Vitamina 2	Vitamina 3
Alimento 1	15	30	35
Alimento 2	50	45	20
Alimento 3	30	25	50

Se a terna (x, y, z) representa a quantidade de cada alimento, em gramas, que o paciente deve consumir, a matriz M que satisfaz à relação

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\,000 \\ 8\,000 \\ 12\,000 \end{pmatrix} \text{ é}$$

a) $\begin{pmatrix} 35 & 30 & 15 \\ 20 & 45 & 20 \\ 50 & 25 & 30 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 30 & 35 \\ 50 & 1 & 20 \\ 30 & 25 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 15 & 30 & 35 \\ 50 & 45 & 20 \\ 30 & 25 & 50 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 15 & 50 & 30 \\ 30 & 45 & 25 \\ 35 & 25 & 50 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 35 & 25 & 50 \\ 30 & 45 & 25 \\ 15 & 50 & 30 \end{pmatrix}$

10. Sistema Dom Bosco – Se x e y estão no intervalo entre $[0, \pi]$ e

$\begin{cases} \text{sen}\,(x+y)=0 \\ \text{sen}\,(x-y)=0 \end{cases}$, determine as soluções do sistema.

11. Sistema Dom Bosco – Na produção de móveis de cozinha, uma fábrica dispõe de três cores diferentes de puxadores (acinzentado, ouro-velho e prateado), para serem utilizados nos gabinetes de pia de MDF e de madeira maciça, nos modelos chamados Lisa, Nita e Bia. Para um determinado mês de produção, a tabela 1 indica a quantidade de gabinetes produzidos, e a tabela 2, a quantidade de puxadores utilizados em cada um dos gabinetes.

Tabela 1: Produção de gabinetes

	Modelo		
Tipo de madeira	**Lisa**	**Nita**	**Bia**
MDF	3	5	4
Maciça	4	3	5

Tabela 2: Quantidade de puxadores utilizados

	Tipo de madeira	
Tipo	**MDF**	**Maciça**
Acinzentado	10	12
Ouro-velho	8	8
Prateado	4	6

No mês de produção apresentado, o número de puxadores utilizados nos gabinetes do modelo Bia foi de

a) 170
b) 192
c) 120
d) 218
e) 188

12. UFSM – As frutas são fontes naturais de vitaminas e sais minerais e auxiliam na prevenção de doenças.

Suponha que as equações do sistema

$$\begin{cases} 70x + ay = 260 \\ ax + by + 7z = 194 \\ 20x + 12z = 84 \end{cases}$$

representam, respectivamente, a quantidade de vitamina C, cálcio e fósforo, quando são ingeridas as porções x, y e z de três tipos de frutas diferentes. Sabe-se que o sistema tem como solução $x = 3$, $y = 1$ e $z = 2$.

Qual é o determinante da matriz dos coeficientes do sistema?

a) 1 120.
b) 2 200.
c) 12 880.
d) 32 480.
e) 62 200.

13. PUC-SP (adaptado) – Dizem que o autor do poema seguinte não foi outro senão o próprio geômetra Euclides da Alexandria – nascido por volta do ano 330 a.C. –, o que prova que também os grandes matemáticos se dedicam, ocasionalmente, a pequenos problemas, sem baixar a sua dignidade.

Asno e mulo vinham pela estrada carregados de sacos.

Sob o peso dos fardos, o asno gemia e resmungava, inconformado.

Aquele o notou, e assim falou ao apoquentado companheiro:

"Dize-me, velhinho, que choras e lamentas qual inocente rapariga,

O dobro do que tu levas carregaria eu, se me desses um volume;

Se me tomasses um, ah!, então sim, conduziríamos ambos a mesma carga."

Tu, geômetra perito, dize-me quantos fardos transportavam?

KARLSON, Paul. *A magia dos números*. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1961. (Coleção Tapete Mágico XXXI).

Com base nas informações dadas pelo mulo, é correto afirmar que, o produto das quantidades de sacos que cada um carregava é um número

a) primo.

b) múltiplo de 3.

c) divisível por 6.

d) quadrado perfeito.

14. Mackenzie – Um teste de Matemática tem questões valendo 1 ponto, 2 pontos e 3 pontos. Se um estudante obteve 55 pontos em 30 questões desse teste e acertou 5 questões de 2 pontos a mais do que o número de questões de 1 ponto que ele acertou, determine o número de questões de 3 pontos, respondidas corretamente por ele.

15. Acafe – Sobre matrizes, determinantes e sistemas lineares, marque com V as afirmações verdadeiras e com F as falsas.

( ) Uma matriz A é quadrada de ordem 4, e seu determinante vale 3, então, o valor do determinante da matriz 2A é 48.

( ) O sistema $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 8x+ay=b \end{cases}$ não admite solução para $a = 12$ e $b = 20$.

( ) Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

( ) Para quaisquer matrizes A e B, tais que existam os produtos AB e BA, tem-se $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

A sequência **correta**, de cima para baixo, é:

a) V – F – V – F
b) V – F – V – V
c) F – V – F – V
d) F – V – F – F

16. Acafe – Um designer de joias utiliza três tipos de pedras preciosas (rubis, safiras e esmeraldas) na criação de três modelos diferentes de colares (A, B e C). Na criação dessas peças ele verificou que:

– Para cada colar do tipo A usaria 4 rubis, 1 safira e 3 esmeraldas.

– Para cada colar do tipo B usaria 3 rubis, 1 safira e 2 esmeraldas.

– Para cada colar do tipo C usaria 2 rubis, 3 safiras e 2 esmeraldas.

Se ele dispõe de 54 rubis, 36 safiras e 42 esmeraldas para a execução dessas peças, então, a relação entre o número de peças A, B e C é:

a) C = A + B.
b) B = A + C.
c) A = C – B.
d) C = 2B – 8A.

17. Unicamp – Sabendo que m é um número real, considere o sistema linear nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} mx+2z=4 \\ x-y+z=3 \\ 2x+mz=4 \end{cases}$$

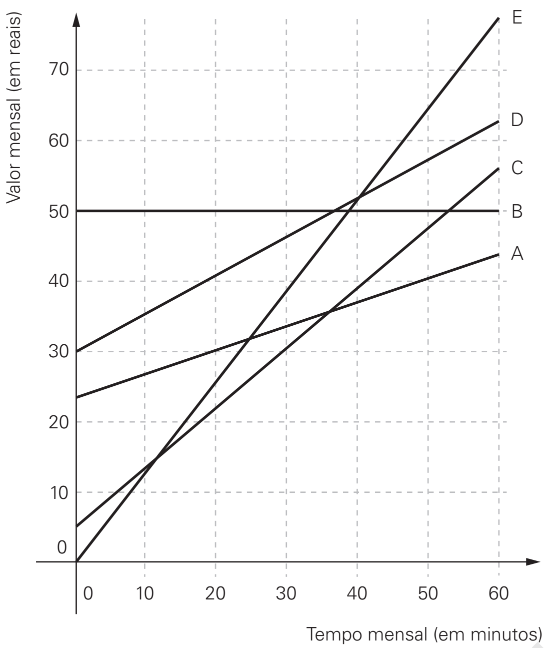
a) Seja A a matriz dos coeficientes desse sistema. Determine os valores de m para os quais a soma dos quadrados dos elementos da matriz A é igual à soma dos elementos da matriz $A^2 = A \cdot A$.

b) Para m = 2, encontre a solução do sistema linear para a qual o produto xyz é mínimo.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem (adaptado) C6-H26

No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



Assumindo que as retas representam as soluções de um sistema linear, é possível afirmar que o sistema linear

a) possui 5 incógnitas, 5 equações e possui solução única.

b) possui 6 incógnitas, 5 equações e não possui solução.

c) possui 2 incógnitas, 5 equações e o sistema linear possui solução única.

d) possui 2 incógnitas, 5 equações e o sistema linear não possui solução.

e) possui 2 incógnitas, 5 equações e o sistema linear possui infinitas soluções.

19. Sistema Dom Bosco C6-H24

A resolução de sistemas lineares envolve o uso da teoria relacionada a matrizes e determinantes. Em 1855, em um artigo, o inglês Arthur Cayley (1821-1895) utilizou as matrizes para auxiliar o estudo de sistemas lineares. No artigo, o sistema linear era transformado em uma equação matricial, e a solução dessa equação, de modo equivalente, também era a solução do sistema. Atualmente, essa equivalência é dada, por exemplo, da seguinte forma:

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ 5x+3y=14 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Se A, X e B representarem as matrizes $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$, então a equação matricial é indicada por $A \cdot X = B$. A solução para essa equação é dada por $X = A^{-1} \cdot B$. A matriz A^{-1} é a matriz inversa de A.

Utilizando as informações apresentadas, determine a soma da solução (x, y) do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x + 6y = 21 \end{cases}$.

a) –1

b) 0

c) 1

d) 2

e) 3

20. ITA (adaptado) C5-H21

Medindo o conhecimento de seus alunos um professor passou um problema sobre sistemas lineares para ver se os alunos realmente entenderam o conteúdo ensinado.

Se o sistema de equações

$$\begin{cases} x+y+4z=2 \\ x+2y+7z=3 \\ 3x+y+az=b \end{cases}$$

é impossível, então os valores de a e b são tais que

a) $a=6$ e $b \neq 4$.
b) $a \neq 6$ e $b \neq 4$.
c) $a \neq 6$ e $b=4$.
d) $a=6$ e $b=4$.
e) a é arbitrário e $b \neq 4$.

56

SISTEMAS LINEARES – REGRA DE CRAMER

- Resolução: regra de Cramer
- Discussão de um sistema linear

HABILIDADES

- Solucionar um sistema linear por meio da regra de Cramer.
- Discutir um sistema linear por meio de técnicas já conhecidas.

SCIENCE HISTORY IMAGES/ALAMY STOCK PHOTO

Gabriel Cramer (1704-1752).

Introdução

Gabriel Cramer nasceu em Genebra, na Suíça, em 1704. Obteve seu doutorado na Universidade de Genebra, aos 18 anos, com um trabalho na área de acústica. Tornou-se professor na mesma instituição em 1724. Entre 1727 e 1729, durante diversas viagens à Europa, encontrou-se com outros ilustres matemáticos, como Johann Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1782) e Abraham de Moivre (1667-1754). Em 1749 tornou-se membro da Royal Society. Seu trabalho mais importante foi *Introduction à l'analyse des courbes algébriques* (1750).

Neste módulo, estudaremos uma das grandes contribuições de Cramer à ciência, que consiste em mais um modo de solucionar sistemas lineares.

RESOLUÇÃO: REGRA DE CRAMER

Vamos resolver o sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ pelo método da redução:

$$\begin{cases} ax+by=c & \xrightarrow{\cdot e} \\ dx+ey=f & \xrightarrow{\cdot b} \end{cases} \quad \begin{cases} aex+bey=ce \\ bdx+bey=bf \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & aex+bey=ce \\ - & bdx+bey=bf \\ \hline & (ae-bd)x=ce-bf \end{array}$$

$$x = \frac{ce-bf}{ae-bd}, \text{ com } (ae-bd) \neq 0$$

Com o valor de x, encontramos o valor de y ao substituir x em uma das equações:

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}, \text{ com } (ae - bd) \neq 0$$

Podemos observar que (ab – bd) nada mais é do que o determinante da matriz incompleta do sistema.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd = D$$

- Veja também que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix}$, obtida substituindo a primeira coluna da matriz associada incompleta (coluna dos coeficientes de x) pela matriz coluna dos termos independentes, é dado pelo valor (ce – bf), que chamaremos de D_x.
- Já o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}$, obtida substituindo a segunda coluna da matriz associada incompleta (coluna dos coeficientes de y) pela matriz coluna dos termos independentes, é dado pelo valor (af – cd), que chamaremos de D_y.

Uma vez $D \neq 0$, a solução de qualquer sistema pode ser dada pela **regra de Cramer**:

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ e } y = \frac{D_y}{D}$$

Observe o sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$. Vamos aplicar a regra de Cramer.

A matriz associada incompleta desse sistema é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, cujo determinante é D = 3 – 2 = 1. Já a matriz $A_x = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, obtida pela substituição da primeira coluna pelos termos independentes, tem determinante $D_x = 15 - 14 = 1$. Por sua vez, a matriz $A_y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$, obtida pela substituição da segunda coluna pelos termos independentes, tem determinante $D_y = 7 - 5 = 2$.

Uma vez que $D \neq 0$, podemos aplicar a regra de Cramer:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{1} = 1 \text{ e } y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{1} = 2$$

Assim, a solução do sistema é x = 1 e y = 2.

DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

O processo de discussão de um sistema linear, geralmente, é aplicado a sistemas em que um ou mais coeficientes não estão definidos. Assim, com base nessa discussão, serão determinados tais valores para esses coeficientes de modo que o sistema seja:

- possível e determinado;
- ou possível e indeterminado;
- ou impossível.

Observe o sistema $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases}$. Note que alguns coeficientes (a e b) não estão definidos.

Pela regra de Cramer, sabemos que, para um sistema ser **possível e determinado**, o determinante da matriz associada incompleta não pode ser nulo. Dessa forma:

$$D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2$$

Se $D \neq 0 \rightarrow a - 2 \neq 0 \rightarrow a \neq 2$, temos um **sistema possível e determinado**.

Para $D = 0 \rightarrow a = 2$, podemos ter um sistema possível e indeterminado ou um sistema impossível, dependendo apenas dos valores de b.

Para isso, vamos substituir a = 2 e discutir com base no coeficiente b.

$$\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases}$$

Repare que o primeiro membro da primeira equação é igual ao dobro do primeiro membro da segunda equação.

Assim, se $b = \frac{1}{2}$, temos equações equivalentes. O sistema, então, é possível e indeterminado.

Portanto:

- para $a \neq 2$, o sistema é possível e determinado.
- para a = 2 e $b = \frac{1}{2}$, o sistema é possível e indeterminado.
- para a = 2 e $b \neq \frac{1}{2}$, o sistema é impossível.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Utilizando a regra de Cramer, resolva o sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+3y+2z=2 \end{cases}$.

Resolução

A matriz incompleta associada ao sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2+1+6-1-3-4=1$$

Os determinantes A_x, A_y e A_z são:

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2-2=0$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4-2=2$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2-4=-2$$

Então:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{0}{1} = 0$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{2}{1} = 2$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{-2}{1} = -2$$

Portanto, a solução do sistema é a terna (0, 2, −2).

2. Fuvest-SP – O sistema linear $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \\ y+mz=0 \end{cases}$ é indeterminado para:

a) todo m real.
b) nenhum m real.
c) m = 1.
d) m = –1.
e) m = 0.

Resolução

Como o sistema é homogêneo, o determinante deve ser nulo.

Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = 0$$

Então, $1 - m - 1 = 0 \rightarrow m = 0$.

3. Sistema Dom Bosco – Discuta, em função de a, o sistema $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+ay=1 \end{cases}$.

Resolução

Do sistema de equações, podemos escrever a matriz associada incompleta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{bmatrix}$$

Logo, calculando o determinante, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix} \rightarrow D = a-6 \rightarrow D = 0 \rightarrow a-6 = 0 \rightarrow a = 6$$

Para $a \neq 6$: sistema possível e determinado.

Para a = 6:

Multiplicamos a equação 1 do sistema $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+ay=1 \end{cases}$ por –2 e somamos com a equação 2:

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 0x+0y=-9 \end{cases}$$

Logo, sistema impossível.

Assim:

$a \neq 6 \rightarrow$ SPD (sistema possível e determinado)

$a = 6 \rightarrow$ SI (sistema impossível)

SISTEMAS LINEARES

Regra de Cramer

$X = \frac{D_x}{D}$ e $y = \frac{D_y}{D}$.

Discussão

Aplicado geralmente a sistemas em que um ou mais coeficientes não estão definidos.

Sistema possível e determinado.

- determinante da matriz associada incompleta não pode ser nulo.
- Solução única.

Sistema possível e indeterminado. — Apresenta infinitas soluções.

Sistema impossível. — Não possui solução.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Sistema Dom Bosco – Utilizando a regra de Cramer, resolva o sistema

$$\begin{cases} 3x - 5y = 12 \\ 4x + 7y = 19 \end{cases}$$

e assinale a opção que contém o valor do denominador referente ao valor de x obtido.

a) –9
b) 9
c) 41
d) 104
e) 64

Resolvendo por Cramer, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 20 = 41$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & -5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 84 + 20 = 104$$

$$x = \frac{D_x}{D} \rightarrow x = \frac{104}{41}$$

2. Ifal (adaptado) – Um jogo de cara ou coroa tinha a seguinte regra: quando o lado da moeda era cara, o jogador ganhava 3 pontos e, quando era coroa, o jogador ganhava apenas 1 ponto. Após lançar a moeda 10 vezes, um jogador obteve 24 pontos. Quantas vezes, nesses 10 lançamentos, saiu o lado cara da moeda para esse jogador?

Sendo x e y o número de lançamentos com resultado cara e coroa, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x + y = 24 \end{cases}$$

O determinante é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 24 = -14$$

Então,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{-2} \rightarrow x = 7$$

Portanto, para esse jogador, o lançamento da moeda resultou no lado cara 7 vezes.

3. Sistema Dom Bosco C1-H1

A chamada "crise do apagão", que ocorreu no Brasil em 2001 e 2002, foi o resultado da combinação da falta de investimentos na geração e na transmissão de energia elétrica com uma estiagem prolongada, que reduziu drasticamente os níveis dos principais reservatórios de água no país, nas regiões Sudeste e Nordeste. Essa combinação impossibilitou a produção de energia suficiente para atender ao consumo, tanto industrial quanto residencial, levando o governo federal a implantar rigorosa política de racionamento, com a redução obrigatória do uso de energia pelos brasileiros e pelas empresas. Previsto para começar no dia 1º de junho de 2001, o governo antecipou as medidas em duas semanas e, no dia 16 de maio, o Brasil, de fato, iniciou o maior racionamento da sua História, encerrado somente no dia 28 de fevereiro do ano seguinte.

Fonte: <https://acervo.oglobo.globo.com/fatos-historicos/da-falta-de-estrutura-fez-se-crise-do-apagao-no-brasil-do-inicio-do-seculo-xxi-9396417>. Acesso em: abr. 2019.

Um supermercado possui, nas cidades A e B, uma unidade e um depósito. Na cidade A, a unidade e o depósito gastam o dobro e o triplo, respectivamente, da energia elétrica do que aqueles da cidade B. Por conta de um racionamento de energia elétrica no estado, o gasto de energia elétrica das unidades e dos depósitos foram limitados a uma conta mensal. Na cidade A, a cota total, incluindo a unidade e o depósito, foi de 16 000 kWh. Na cidade B, essa cota foi de 6 000 kWh. Supondo que o limite das cotas foi utilizado em ambas as cidades, o consumo dos dois depósitos foi igual a

a) 4 000 kWh.
b) 12 000 kWh.
c) 16 000 kWh.
d) 18 000 kWh.
e) 20 000 kWh.

Consideramos x (gasto da unidade) e y (gasto do depósito) na cidade B:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16\,000 \\ x + y = 6\,000 \end{cases}$$

O determinante é:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

Substituímos a segunda coluna pela coluna das igualdades:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12\,000 - 16\,000 = -4\,000$$

Então:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-8\,000}{-1} \rightarrow y = 4\,000$$

Assim, o gasto dos dois depósitos foi:

$3y + y = 4y = 4 \cdot 4\,000 = 16\,000$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

4. UFJF-MG – Sobre um sistema

$$\begin{cases} ax + b = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

com a, b, c, d, e, f $\in \mathbb{R}$ | {0}, é CORRETO afirmar que:

a) se $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ e $\frac{c}{b} = \frac{f}{e}$, o sistema possui uma única solução.

b) se $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ e $\frac{c}{b} \neq \frac{f}{e}$, o sistema não possui solução.

c) se $\frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$, o sistema possui infinitas soluções.

d) se $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ e $\frac{c}{b} = \frac{f}{e}$, o sistema não possui solução.

e) se $\frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$, o sistema não possui solução.

Do sistema, podemos escrever: $\begin{cases} ax + b = c \\ dx + ey = f \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$

Calculamos, então, o determinante D da matriz:
$D = ae - bd$
Se $D = 0$, o sistema será impossível ou possível indeterminado.
Além disso:
$ae - bd = 0 \rightarrow ae = db \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{e}$
Então, as afirmações em A, C e E estão incorretas.
Para a condição apresentada em D, o sistema é indeterminado.

5. Unioeste – Sobre o sistema de equações lineares

$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 3x + \beta y = 7 \end{cases}$, é correto afirmar que

a) possui uma única solução, qualquer que seja β.
b) possui infinitas soluções, qualquer que seja β.
c) possui ao menos uma solução, qualquer que seja β.
d) só tem solução se $\beta = 5$.
e) é impossível se $\beta \neq -5$.

Para que o sistema tenha uma única solução, é necessário que:
$\frac{3}{3} \neq \frac{5}{\beta} \leftrightarrow \beta \neq 5$
Caso, $\beta = 5$, o sistema terá infinitas soluções.
Uma vez que os termos independentes das duas equações são iguais, o sistema tem ao menos uma solução, independente do valor de β, desde que seja um número real.

6. IFPE (adaptado) – Cristina resolveu empilhar seus 48 livros de duas coleções, de Matemática e de História. Seus livros de Matemática possuem 8 cm de espessura cada um, enquanto os livros de História possuem 5 cm de espessura cada um. No fim da organização, Cristina viu que a pilha de livros tinha 321 cm de altura. Quantos livros de Matemática Cristina possui?

Sendo m (livros de Matemática) e h (os de História), obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} m + h = 48 \\ 8m + 5h = 321 \end{cases}$$

O determinante é dado por:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3$$

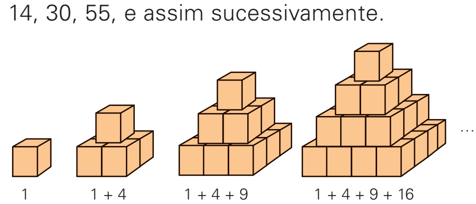
$$D_x = \begin{vmatrix} 48 & 1 \\ 321 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 48 - 321 = 240 - 312 = -81$$

Então:
$m = \frac{D_x}{D} = \frac{-81}{-3} \rightarrow m = 27$

Portanto, Cristina tem 27 livros de Matemática.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Famerp – As figuras indicam uma sequência de empilhamentos de cubos de 1 cm³. Da primeira pilha em diante, os volumes das pilhas, em cm³, são iguais a 1, 5, 14, 30, 55, e assim sucessivamente.



Sabe-se que a soma $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + ... + x^2$ é um polinômio do terceiro grau, dado por $P(x) = mx^3 + nx^2 + px$, com m, n e p racionais. Portanto, P(1) = 1, P(2) = 5, P(3) = 14, P(4) = 30, e assim por diante. Nas condições dadas, m é igual a:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{3}$

8. Fuvest – No sistema linear

$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = m \end{cases}$$

nas variáveis x, y e z, a e m são constantes reais. É correto afirmar que:

a) No caso em que $a = 1$, o sistema tem solução se, e somente se, $m = 2$.

b) O sistema tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

c) No caso em que $m = 2$, o sistema tem solução se, e somente se, $a = 1$.

d) O sistema só tem solução se $a = m = 1$.

e) O sistema não tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

9. Uece – Em relação ao sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - my + z = 0 \\ mx - y - z = 0 \end{cases}$$

pode-se afirmar corretamente que

a) o sistema admite solução não nula apenas quando $m = -1$.

b) para qualquer valor de m, a solução nula ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) é a única solução do sistema.

c) o sistema admite solução não nula quando $m = 2$ ou $m = -2$.

d) não temos dados suficientes para concluir que o sistema tem solução não nula.

10. ITA – Sejam α e β números reais não nulos. Determine os valores de b, c, d, bem como a relação entre α e β para que ambos os sistemas lineares S e T a seguir sejam compatíveis indeterminados.

$$S: \begin{cases} 2x + by = \alpha \\ cx + y = \beta \end{cases}$$

$$T: \begin{cases} cx + 3y = \alpha \\ 4x + dy = \beta \end{cases}$$

11. Mackenzie – O valor de y na única solução do sistema linear

$$\begin{cases} x \text{ sen } \theta + z = 0 \\ x \text{ sen } (-\theta) + y \cos(-\theta) + z = 0 \\ x \text{ sen } (-\theta) + y \cos \theta - z = \text{sen } \theta \end{cases}$$

em que sen $(2\theta) \neq 0$, é

a) tg (2θ)
b) tg θ
c) cos θ
d) sen (2θ)
e) sen $(-\theta)$

12. UEPG-PR (adaptado) – Dados os sistemas S_1: $\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$ e S_2: $\begin{cases} mx + 4y = 5 \\ 3x - y = k \end{cases}$, nas variáveis x e y, assinale o que for correto.

I. S_2 é possível e determinado para $m = -12$ e $k = -\frac{5}{4}$.

II. S_2 é impossível para $m = -12$ e $k \neq -\frac{5}{4}$.

III. Se S_1 e S_2 são equivalentes, então $k + m = 13$.

IV. S_2 é possível e indeterminado para $m \neq -12$ e $k = -\frac{5}{4}$.

V. Se (x, y) é a solução de S_1, então $x + y = 4$.

a) Apenas I e II são corretas.
b) Apenas I e III são corretas.
c) Apenas I, IV e V são corretas.
d) Apenas II e III são corretas.
e) Apenas II, III e V são corretas.

13. Unicamp-SP – Considere o sistema linear nas variáveis x, y e z

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ 7x + 8y - mz = 26 \end{cases}$$

onde m é um número real. Sejam a < b < c números inteiros consecutivos tais que (x, y, z) = (a, b, c) é uma solução desse sistema. O valor de m é igual a

a) 3.
b) 2.
c) 1.
d) 0.

15. Sistema Dom Bosco – Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases}$$

com a, b, c, d, p, e q reais, $abcd \neq 0$, $a + b = m$ e $d = nc$. Sabe-se que o sistema é indeterminado. O valor de $p + q$ é

a) m
b) $\frac{m}{n}$
c) $m^2 - n^2$
d) mn
e) $m + n$

14. ITA – Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + az = 5 \end{cases}$$

16. ITA – Se o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2a^2y + (2a^4 - a)z = 0 \\ x + ay + (a^3 - 1)z = 0 \end{cases}$$

admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são

a) $0, -1, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.
b) $0, -1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.
c) $0, -1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.
d) $0, -1, -1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}$.
e) $0, -1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

17. IME – Classifique o sistema abaixo como determinado, possível indeterminado e impossível de acordo com os valores reais de m.

$$(m - 2)x + 2y - z = m + 1$$

$$2x + my + 2z = m^2 + 2$$

$$2mx + 2(m + 1)y + (m + 1)z = m^3 + 3$$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Sistema Dom Bosco C1-H1

ANP vai ouvir população sobre periodicidade de reajuste da gasolina

A Agência Nacional de Petróleo (ANP) negou que vá interferir na política de preços de combustíveis da Petrobras. Mas sua diretoria aprovou nesta terça-feira a realização de uma consulta pública à sociedade sobre qual deve ser a periodicidade do repasse do reajuste.

A política atual da Petrobras, baseada na cotação do dólar e no preço do barril de petróleo no mercado internacional, prevê repasses de reajustes diários.

Disponível em: <https://veja.abril.com.br/economia/anp-vai-ouvir-populacao-sobre-periodicidade-de-reajuste-da-gasolina/>. Acesso em: 6 nov. 2018. (Adaptado)

Tendo em vista o aumento de combustível, um trabalhador que percorre 550 km por mês para ir de sua casa ao trabalho utiliza como meios de transporte seu carro e sua moto, revezando entre eles para economizar no combustível. Considerando que o custo do combustível por quilômetro rodado para o carro seja de R$ 0,21 e para a moto, de R$ 0,07, quantos quilômetros esse trabalhador deverá andar com cada veículo para que no final do mês tenha gasto apenas R$ 70,00 com combustível?

a) 225 km de carro e 325 km de moto.
b) 325 km de carro e 225 km de moto.
c) 400 km de carro e 150 km de moto.
d) 230 km de carro e 320 km de moto.
e) 250 km de carro e 350 km de moto.

19. UFPE C5-H21

O cartaz de uma lanchonete anuncia: dois sanduíches iguais mais três sucos iguais custam R\$ 9,00 e três sanduíches iguais mais dois sucos iguais custam R\$ 11,00. Se você deseja comer nessa lanchonete apenas um desses sanduíches da oferta, você irá pagar por ele a quantia de:

a) R\$ 3,50
b) R\$ 3,00
c) R\$ 2,50
d) R\$ 2,00
e) R\$ 1,50

20. Enem C5-H21

O Indicador do CadÚnico (ICadÚnico), que compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da média aritmética entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros (TC) e a taxa de atualização de cadastros (TA), em que, $TC = \frac{NV}{NF}$, $TA = \frac{NA}{NV}$, NV é o número de cadastros domiciliares válidos no perfil do CadÚnico, NF é o número de famílias estimadas como público-alvo do CadÚnico e NA é o número de cadastros domiciliares atualizados no perfil do CadÚnico.

Portaria nº 148, de 27 de abril de 2006. (Adaptado)

Suponha que o IcadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando NF o IcadÚnico cairá para 0,5.

Se NA + NV = 3 600, então NF é igual a

a) 10 000.
b) 7 500.
c) 5 000.
d) 4 500.
e) 3 000.

ELIZABETH SCOFIDIO/SHUTTERSTOCK

MATEMÁTICA 2

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

45 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA

- Localização
- Sistema cartesiano

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.
- Resolver situações-problemas que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.

ROCHARIBEIRO/SHUTTERSTOCK

Introdução

Geometria analítica é o estudo das formas geométricas por meio de um sistema de coordenadas. Muito utilizada em Física, Engenharia e Cartografia, também oferece fundamentos para outras áreas da Geometria.

Essa área teve importância significativa no desenvolvimento de ferramentas tecnológicas, as quais, algum tempo depois, seriam utilizadas para rastrear navios, mísseis, aviões e submarinos durante a Segunda Guerra Mundial. Em geral, o sistema de coordenadas cartesianas é usado para definir numericamente formas geométricas.

LOCALIZAÇÃO

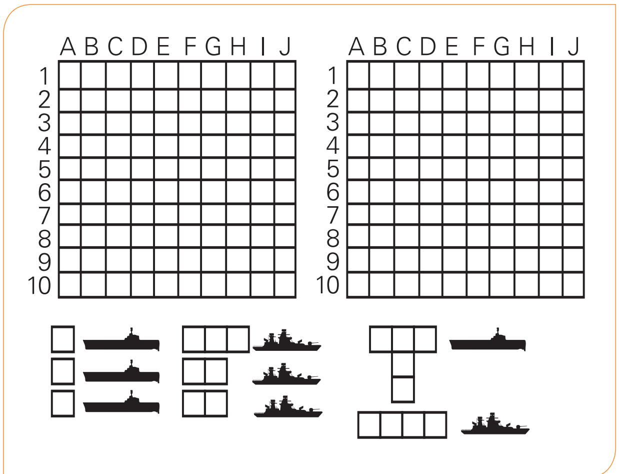
Em Geometria analítica, a localização espacial de um objeto pode ser representada de três maneiras distintas: unidimensional, bidimensional e tridimensional. Neste módulo, são objetos de estudo somente as duas primeiras.

Localização unidimensional

Nesse caso, a posição do objeto é indicada por apenas uma única coordenada. Por exemplo: imagine uma pista de Fórmula 1 sem incluir o *pitstop*. Assim, os carros só conseguem se locomover sobre uma única reta.

Localização bidimensional

Nesse modo, a posição do objeto é sinalizada por um par de coordenadas do plano. Por exemplo: na batalha naval, um competidor deve acertar os navios do adversário apontando em quais coordenadas do plano eles estão localizados.

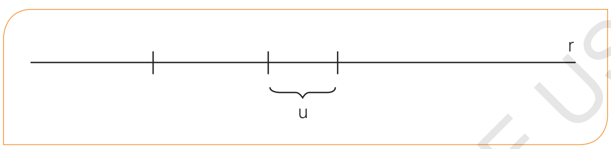


Assim, ao citar a posição 2B, por exemplo, o competidor se refere à coluna B da linha 2.

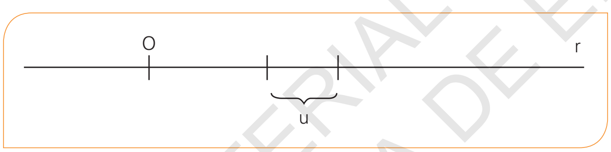
Eixo

Chamamos assim a reta orientada com um sentido positivo, com uma origem arbitrada e uma unidade de medida estabelecida.

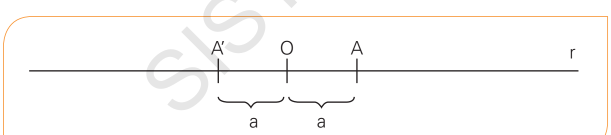
Vamos considerar uma reta **r** e uma unidade (u) de comprimento com a qual se medem os segmentos contidos em **r**.



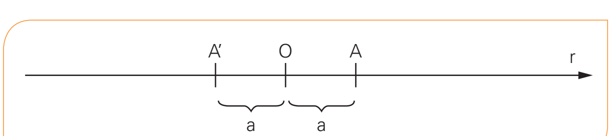
Também iremos levar em conta um ponto **O** arbitrário na reta, o qual chamaremos de origem.



Sejam **A** e **A'** dois pontos de **r** tais que $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$ tenham a mesma medida **a**, tomada com unidade **u**, de modo que **A** esteja à direita de **O** e **A'** se encontre à esquerda de **O**.



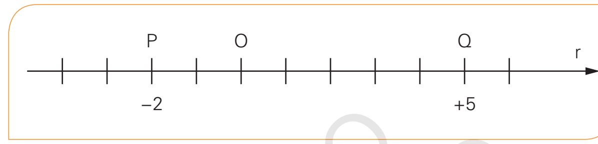
Fixamos o sentido de **O** para **A** como o sentido positivo e o representamos com uma ponta de seta.



Dessa forma, dizemos que os pontos **A** e **A'** estão simétricos, à mesma distância **a** de **O**.

Contudo, os números reais **a** e **–a** podem ser associados aos pontos **A** e **A'**, respectivamente, e serão denominados **abscissas** desses pontos.

De modo geral, associa-se a cada ponto de **r** um único número real, chamado **abscissa do ponto**, número esse que é positivo para pontos marcados a partir da origem no sentido positivo. Ele também é negativo para pontos marcados no sentido contrário, conforme observamos no eixo a seguir.



Abscissa de **P** = – 2
Abscissa de **Q** = +5

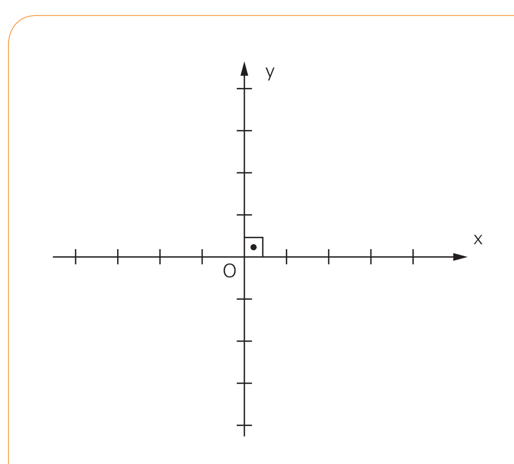
Logo, quando queremos localizar pontos em uma reta, transformamos a reta em um eixo. A localização do ponto é dada pela abscissa dele.

Importante!
O número zero real representa a abscissa da origem.

Cada ponto de um eixo tem **uma única abscissa** e, para cada abscissa, há um único ponto do eixo. Ou seja, estabelecemos uma relação biunívoca entre o conjunto dos números reais e o conjunto de pontos de uma reta (eixo).

SISTEMA CARTESIANO

Dois eixos **x** e **y** perpendiculares entre si, com origem **O** comum e localizados no mesmo plano, formam um sistema cartesiano ortogonal. Os eixos nos fornecem a localização bidimensional dos objetos. E o plano que contém tal sistema é denominado **plano cartesiano**.

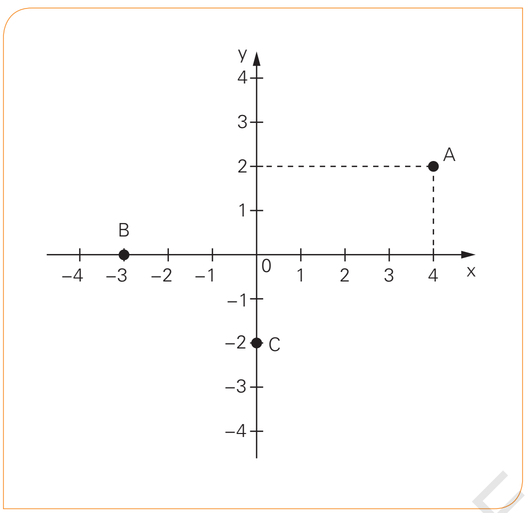


Para localizar um ponto **P** em um plano dotado de um sistema cartesiano ortogonal, traçamos por **P** duas retas paralelas aos eixos **x** e **y**, que encontram esses eixos em **P'** e **P''**, respectivamente.

Com as abscissas desses pontos, determinamos a posição de **P** no plano. Assim:

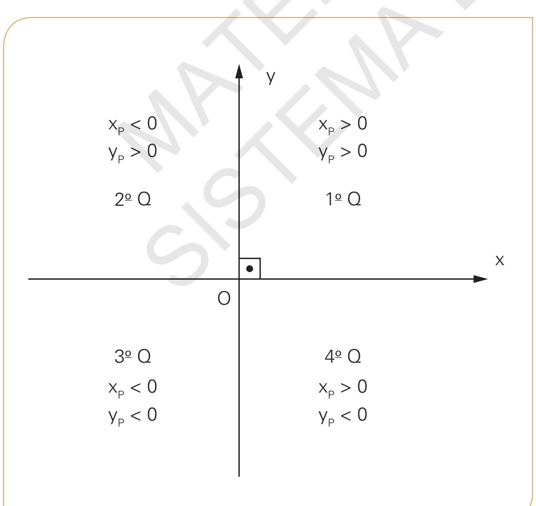
- Abscissa de **P'**(x_p) – corresponde à primeira coordenada de **P**, ou simplesmente **abscissa de P**.
- Ordenada de **P'**(y_p) – refere-se à segunda coordenada de **P**, ou simplesmente **ordenada de P**.
- O par ordenado (x_p, y_p) – corresponde às coordenadas de **P**.
- Os eixos **x** e **y** – são, respectivamente, o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas.

Vamos observar no plano cartesiano a seguir a localização dos pontos **A** e **B**.



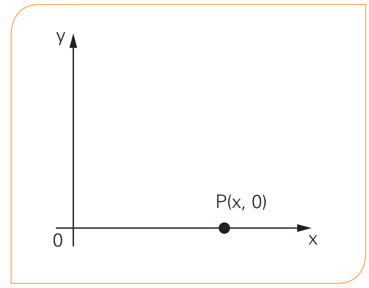
A(4, 2)
B(−3, 0)
C(0, −2)

Os eixos **x** e **y** dividem o plano cartesiano em quatro quadrantes, conforme a figura:

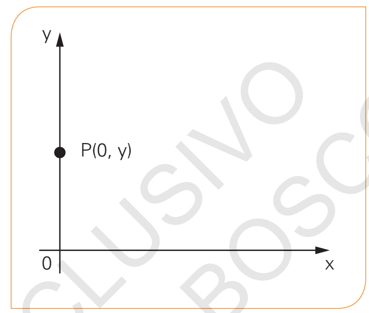


Observações:

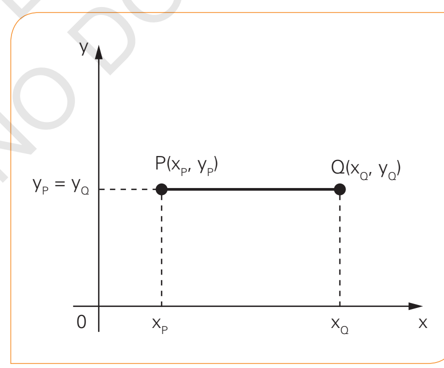
I. Um ponto **P** com ordenada nula ($y_P = 0$) pertence ao eixo **x**.



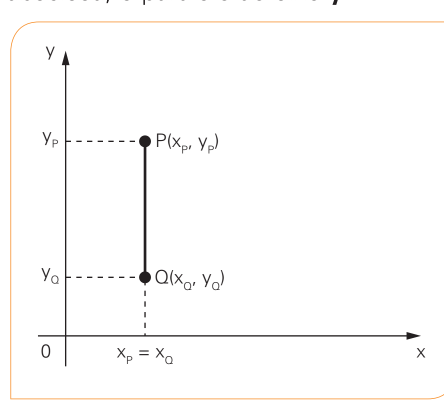
II. Um ponto **P** com abscissa nula ($x_P = 0$) pertence ao eixo **y**.



III. O segmento **PQ**, que une os pontos **P** e **Q** de mesma ordenada, é paralelo ao eixo **x**.

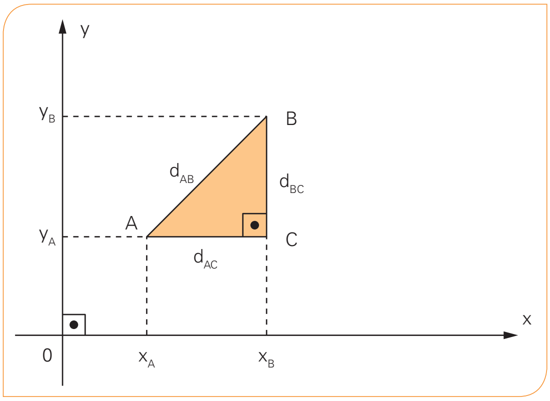


IV. O segmento **PQ**, que une os pontos **P** e **Q** de mesma abscissa, é paralelo ao eixo **y**.



Distância entre dois pontos

Dados dois pontos **A** e **B** pertencentes ao plano cartesiano xy, a distância entre eles (d_{AB}) é obtida ao traçarmos por **A** e **B** retas paralelas aos eixos coordenados xy e aplicarmos o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC obtido, conforme o gráfico:



$d_{AC} = \Delta x = |x_B - x_A|$

$d_{BC} = \Delta y = |y_B - y_A|$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$d_{AB}{}^2 = d_{AC}{}^2 + d_{BC}{}^2$

$d_{AB}{}^2 = (|x_B - x_A|)^2 + (|y_B - y_A|)^2$

$d_{AB}{}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

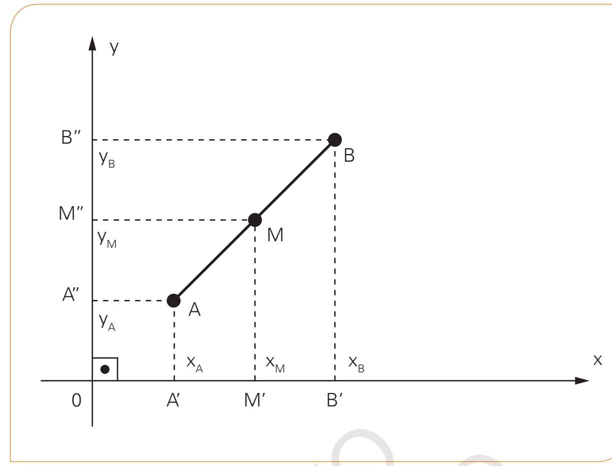
Portanto:

$d_{AB}{}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

A fórmula do cálculo da distância entre dois pontos **A** e **B** continua válida quando $\overline{AB}$ é paralelo a um dos eixos cartesianos, ou mesmo quando **A** e **B** coincidem, caso em que $d_{AB} = 0$.

Ponto médio de um segmento

Dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pertencentes ao plano xy e com extremidades do segmento $\overline{AB}$ cujo **ponto médio** é $M(x_M, y_M)$, obtemos o seguinte:



$AM = MB \rightarrow A'M = M'B$

Logo:

$x_M - x_A = x_B - x_M$

$2x_M = x_A + x_B$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Analogamente, temos:

$M = MB \rightarrow A''M = M''B$

Logo:

$y_M - y_A = y_B - y_M$

$2y_M = y_A + y_B$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. PUC-Rio – Se os pontos $A = (-1,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (x, y)$ são vértices de um triângulo equilátero, então a distância entre A e C é

a) 1
b) 2
c) 4
d) $\sqrt{2}$
e) $\sqrt{3}$

Resolução

Por se tratar de um triângulo equilátero (ΔABC), temos:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$

Logo, ao calcular a distância entre os pontos A e B, obtemos a distância entre os pontos A e C:

$d_{AB}{}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

$d_{AB}{}^2 = (-1 - 1)^2 + (0 - 0)^2$

$d_{AB}{}^2 = (-2)^2 = 4 \rightarrow d_{AB} = 2$

Assim, $\overline{AC} = 2$.

2. Sistema Dom Bosco – Considere o segmento de reta AB, em que $A = (2,3)$ e $B = (-5, 12)$. Se M é o ponto médio do segmento AB, quais as coordenadas de M?

Resolução

$x_A = 2$

$x_B = -5$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+(-5)}{2} = \frac{-3}{2} \rightarrow x_M = -\frac{3}{2}$$

$y_A = 3$

$y_B = 12$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+12}{2} = \frac{15}{2} \rightarrow y_M = \frac{15}{2}$$

Logo, as coordenadas do ponto médio são:

$$M = \left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$$

ROTEIRO DE AULA

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA

Localização

Unidimensional

posição na reta.

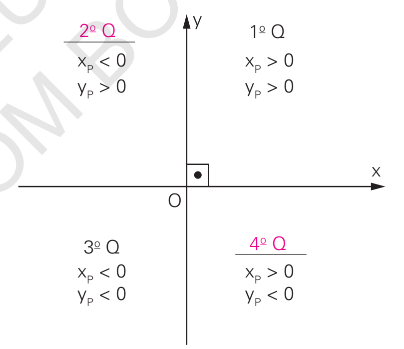
Bidimensional

posição no plano.

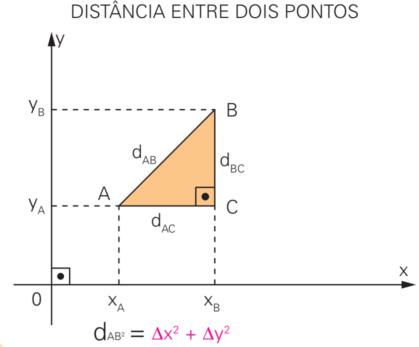
Eixo

Reta orientada em sentido positivo, origem arbitrada e unidade de medida estabelecida.

Sistema cartesiano

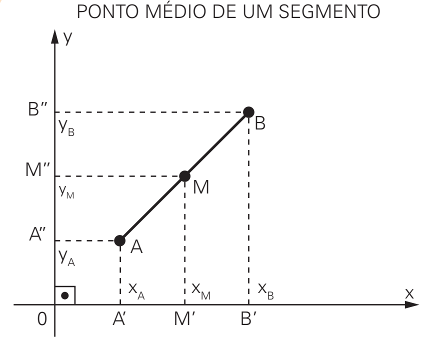


DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS



$d_{AB}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO



$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ $\quad y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Enem C5-H20

Foi utilizado o plano cartesiano para a representação de um pavimento de lojas. A loja A está localizada no ponto A(1; 2). No ponto médio entre a loja A e a loja B está o sanitário S, localizado no ponto S(5; 10).

Determine as coordenadas do ponto de localização da loja B.

a) (−3; −6)
b) (−6; −3)
c) (3; 6)
d) (9; 18)
e) (18; 9)

Pelo enunciado, temos:

$$\left(\frac{1+x_B}{2}, \frac{2+y_B}{2}\right) = (5,\ 10) \leftrightarrow \begin{cases} x_B = 9 \\ y_B = 18 \end{cases}$$

Portanto, concluímos que B = (9; 18).

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

2. EEAR – O triângulo ABC formado pelos pontos A(7, 3), B(−4, 3) e C(−4, −2) é

a) escaleno
b) isósceles
c) equiângulo
d) obtusângulo

Calculando os quadrados das medidas dos lados do triângulo ABC, encontramos:

$$d^2_{A,\,B} = (-4-7)^2 + (3-3)^2 = 121$$

$$d^2_{A,\,C} = (-4-7)^2 + (-2-3)^2 = 146$$

E também:

$$d^2_{B,\,C} = (-4+4)^2 + (-2-3)^2 = 25$$

Portanto:

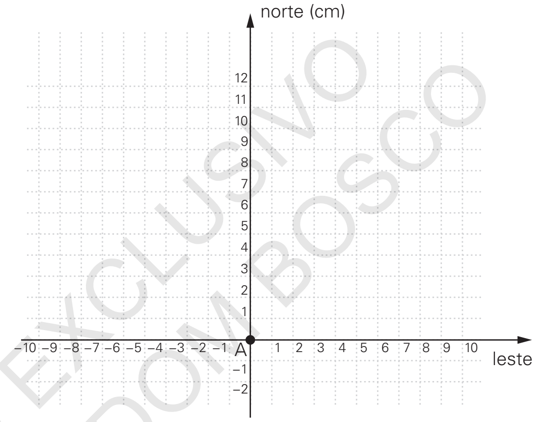
$$d^2_{A,\,C} = d^2(A,\ B) + d^2(B,\ C)$$

Podemos concluir que o triângulo ABC é retângulo escaleno.

3. UFG-GO – Um caçador de tesouros encontrou um mapa que indicava a localização exata de um tesouro com as seguintes instruções:

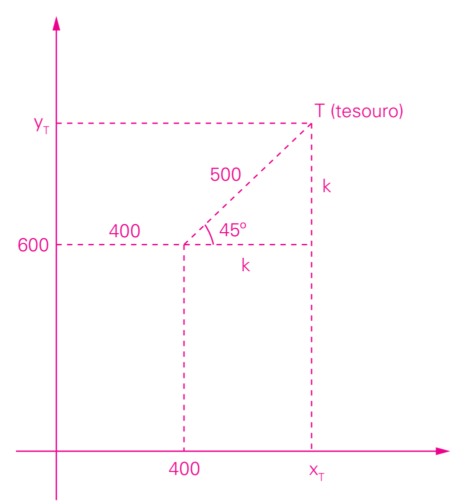
"Partindo da pedra grande e seguindo 750 passos na direção norte, 500 passos na direção leste e 625 passos na direção nordeste, um tesouro será encontrado."

Para localizar o tesouro, ele utilizou um plano cartesiano, representado pela figura a seguir. Nesse plano a escala utilizada foi de 1:100. As medidas são dadas em centímetros e o ponto A representa a pedra grande indicada nas instruções.



Considerando que um passo mede 80 cm, encontre as coordenadas, no plano cartesiano, do ponto onde se encontra o tesouro e calcule a distância percorrida, em metros, pelo caçador de tesouros para encontrá-lo.

750 · 0,8 = 600 m
500 · 0,8 = 400 m
625 · 0,8 = 500 m



$$K = 500 \cdot \cos 45° = 500 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 250\sqrt{2}$$

Distância percorrida: 600 + 400 + 500 = 1 500 m.

Coordenada do ponto T:

$$x_T = 400 + 250\sqrt{2}$$

$$y_T = 600 + 250\sqrt{2}$$

4. FGV – O comprimento do segmento determinado pelos pontos de interseção das parábolas de equações $y = x^2 - 8x + 3$ e $y = -4x^2 + 2x + 3$ é:

a) $2\sqrt{37}$

b) $3\sqrt{41}$

c) $\frac{7}{3}\sqrt{43}$

d) $\frac{5}{2}\sqrt{39}$

e) $4\sqrt{45}$

Calculando, temos:

$$-4x^2 + 2x + 3 = x^2 - 8x + 3 \rightarrow 5x^2 - 10x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 3 \\ \text{ou} \\ x = 2 \rightarrow y = -9 \end{cases}$$

$$d = \sqrt{(0-2)^2 + (3-(-9))^2} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$$

5. Uece – O volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo X, da região do plano limitada pelo triângulo com vértices nos pontos (6, 0), (8, 0) e (8, 9) é igual a
Dado: u.v. = unidade de volume

a) 81π u.v.

b) 72π u.v.

c) 64π u.v.

d) 54π u.v.

Conforme dados do enunciado, o sólido gerado será um cone com base de raio R igual à distância das coordenadas y dos pontos (8, 0) e (8, 9) – R. Portanto, será igual a 9, com altura igual à distância das coordenadas x entre os pontos (6, 0) e (8, 0). A altura, assim, será igual a 2. O volume do cone gerado será:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 2 \rightarrow V_{cone} = 54\pi$$

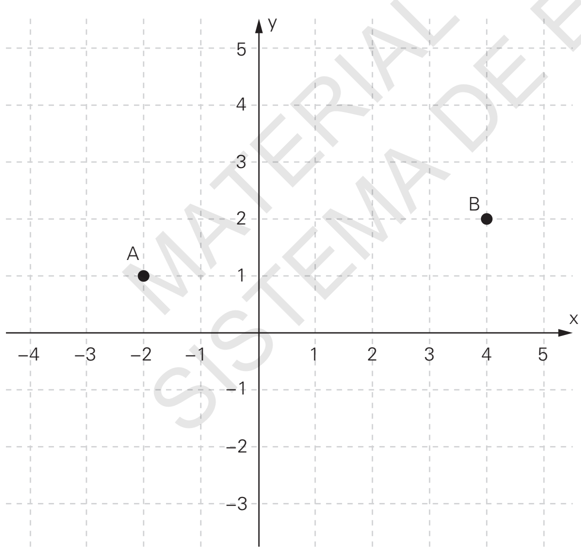
6. PUC-Rio (adaptado) – Se os pontos A = (−1, 0), B = (1, 0) e C = (x, y) são vértices de um triângulo equilátero, então qual a distância entre A e C?

Como o triângulo ABC é equilátero, segue que:

$$\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-0)^2} = 2$$

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. Feevale-RS – Na figura a seguir, o ponto A representa uma praça, e o ponto B, uma livraria.



Considerando quilômetro (km) como unidade de medida, a menor distância entre a praça e a livraria é de aproximadamente

a) 4 km.

b) 5 km.

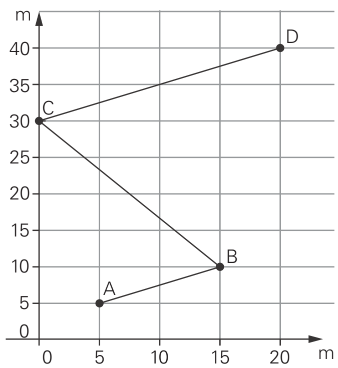
c) 6 km.

d) 7 km.

e) 8 km.

8. EEAR (adaptado) – Considere os pontos A(2, 8) e B(8, 0). Qual a distância entre eles?

9. IFSC – O plano cartesiano representado abaixo mostra o deslocamento de uma pessoa por 4 pontos diferentes, no interior do pavilhão da Oktoberfest. Considere que essa pessoa partiu do ponto A e formou, com seu trajeto, segmentos de reta entre os pontos consecutivos A, B, C e D, nessa ordem. Em uma escala em metros, é **CORRETO** afirmar que ela se deslocou



a) $5\left(3\sqrt{5}+5\right)$ m.

b) $\left(3\sqrt{5}+5\right)$ m.

c) 53 m.

d) $2\left(3\sqrt{2}+7\right)$ m.

e) $4\left(3\sqrt{5}+5\right)$ m.

10. EEAR – Seja ABC um triângulo tal que A(1, 1), B(3, −1) e C(5, 3). O ponto ______ é o baricentro desse triângulo.

a) (2, 1).

b) (3, 3).

c) (1, 3).

d) (3, 1).

11. EEAR – Considere os segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, onde A(0, 10), B(2, 12), C(−2, 3) e D(4, 3). O segmento $\overline{MN}$, determinado pelos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, é dado pelos pontos M e N, pertencentes, respectivamente, a $\overline{AB}$ e a $\overline{CD}$.

Assinale a alternativa que corresponde corretamente a esses pontos.

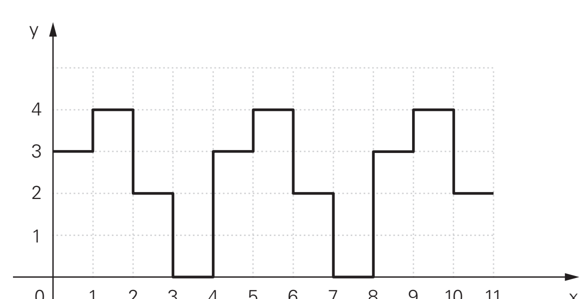
a) $M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e N(−1, 3)

b) M(−2, 10) e N(−1, 3)

c) M(1, −2) e N(1, 3)

d) M(1, 11) e N(1, 3)

12. Fatec – No plano cartesiano da figura, considere que as escalas nos dois eixos coordenados são iguais e que a unidade de medida linear é 1 cm. Nele, está representada parte de uma linha poligonal que começa no ponto P(0; 3) e, mantendo-se o mesmo padrão, termina em um ponto Q.



Na figura, a linha poligonal é formada por segmentos de reta

– que são paralelos aos eixos coordenados e

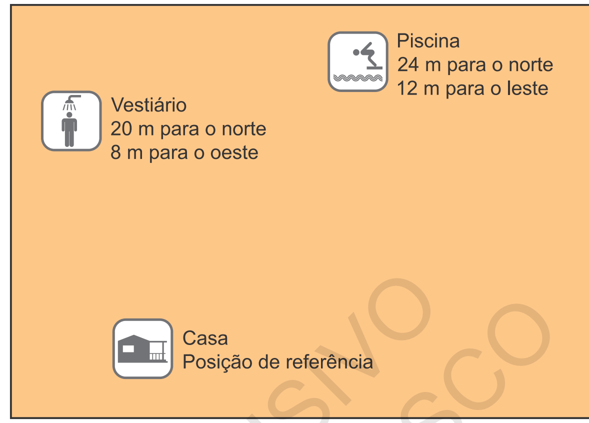
– cujas extremidades têm coordenadas inteiras não negativas.

Sabendo que o comprimento da linha poligonal, do ponto P até o ponto Q, é igual a 94 cm, as coordenadas do ponto Q são

a) (25; 2)
b) (28; 1)
c) (32; 1)
d) (33; 1)
e) (34; 2)

13. Unigranrio-RJ (adaptado) – Considere as funções $f(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e $g(x)=\begin{vmatrix} x & 11 & -4 \\ 10 & 11 & x \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. Desta forma, qual o ponto de interseção das funções f(x) e g(x)?

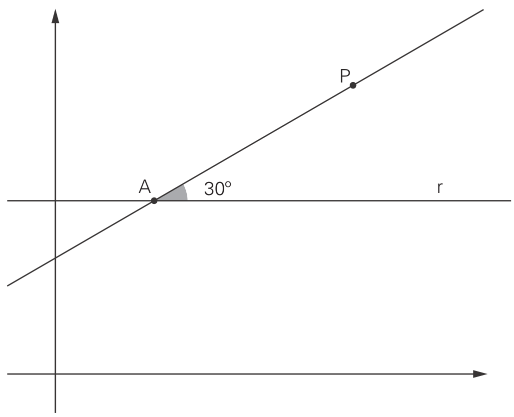
14. Insper-SP (adaptado) – O Sr. Antônio resolveu construir um poço em seu sítio. Ele passou ao engenheiro o esquema a seguir, indicando a posição da piscina e do vestiário em relação à localização da casa.



O Sr. Antônio disse ao engenheiro que queria o poço numa localização que estivesse à mesma distância da casa, da piscina e do vestiário. Para atendê-lo o engenheiro deve construir o poço na posição, em relação à casa, dada por, aproximadamente,

a) 4,2 m para o leste e 13,8 m para o norte.
b) 3,8 m para o oeste e 13,1 m para o norte.
c) 3,8 m para o leste e 13,1 m para o norte.
d) 3,4 m para o oeste e 12,5 m para o norte.
e) 3,4 m para o leste e 12,5 m para o norte.

15. Udesc – Seja r uma reta passando por um ponto A e seja P um ponto não pertencente à reta, de tal forma que a distância entre os pontos P e A seja de 4 unidades de comprimento e o ângulo formado entre a reta r e o segmento AP seja de 30 graus, conforme a figura abaixo.

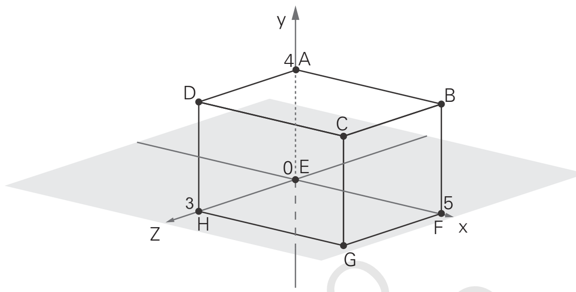


Reta r e pontos

Sabendo-se que a equação da reta r é y = 3 e que a reta que passa pelos pontos A e P corta o eixo y no ponto (0, 2), então a soma dos quadrados das coordenadas do ponto P é igual a:

a) 34
b) 12
c) 4
d) 52
e) 45

16. Insper-SP



Um paralelepípedo reto-retângulo de arestas medindo 3, 4 e 5 está representado no sistema ortogonal xyz, como mostra a figura.

Considere cada ponto desse sistema como uma terna (x, y, z) representada matricialmente por meio do vetor coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

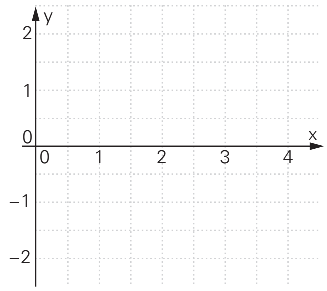
Sendo assim, a solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2{,}5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ representa, nesse sistema de eixos, um ponto pertencente à

a) região interior ao paralelepípedo.
b) região exterior ao paralelepípedo.
c) face ABFE do paralelepípedo.
d) face CBGF do paralelepípedo.
e) face DCGH do paralelepípedo.

17. Unicamp-SP – Sejam c um número real e $f(x) = x^2 - 4x + c$ uma função quadrática definida para todo número real x. No plano cartesiano, considere a parábola dada pelo gráfico de $y = f(x)$.

a) Determine c no caso em que a abscissa e a ordenada do vértice da parábola têm soma nula e esboce o respectivo gráfico para $0 \leqslant x \leqslant 4$.



b) Considere os pontos de coordenadas $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, onde a e b são números reais com $a < b$. Sabendo que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é $M = (1, c)$, determine a e b.

ESTUDO PARA O ENEM

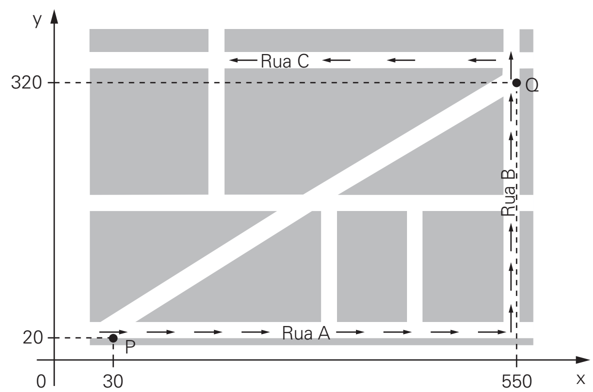
18. Enem C2-H9

Observou-se que todas as formigas de um formigueiro trabalham de maneira ordeira e organizada. Foi feito um experimento com duas formigas e os resultados obtidos foram esboçados em um plano cartesiano no qual os eixos estão graduados em quilômetros. As duas formigas partiram juntas do ponto O, origem do plano cartesiano xOy. Uma delas caminhou horizontalmente para o lado direito, a uma velocidade de 4 km/h. A outra caminhou verticalmente para cima, à velocidade de 3 km/h.
Após 2 horas de movimento, quais as coordenadas cartesianas das posições de cada formiga?

a) (8; 0) e (0; 6).
b) (4; 0) e (0; 6).
c) (4; 0) e (0; 3).
d) (0; 8) e (6; 0).
e) (0; 4) e (3; 0).

19. Enem C2-H9

Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.

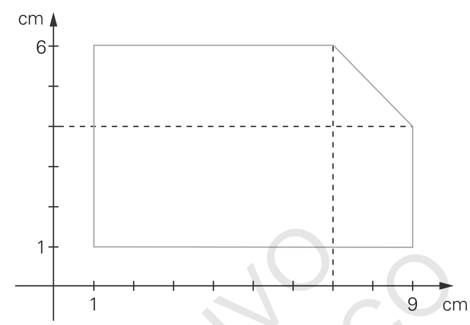


Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.
De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

a) (290; 20).
b) (410; 0).
c) (410; 20).
d) (440; 0).
e) (440; 20).

20. Enem C2-H8

Um construtor pretende murar um terreno e, para isso, precisa calcular o seu perímetro. O terreno está representado no plano cartesiano, conforme a figura, no qual foi usada a escala 1:500. Use 2,8 como aproximação para $\sqrt{8}$.



De acordo com essas informações, o perímetro do terreno, em metros, é

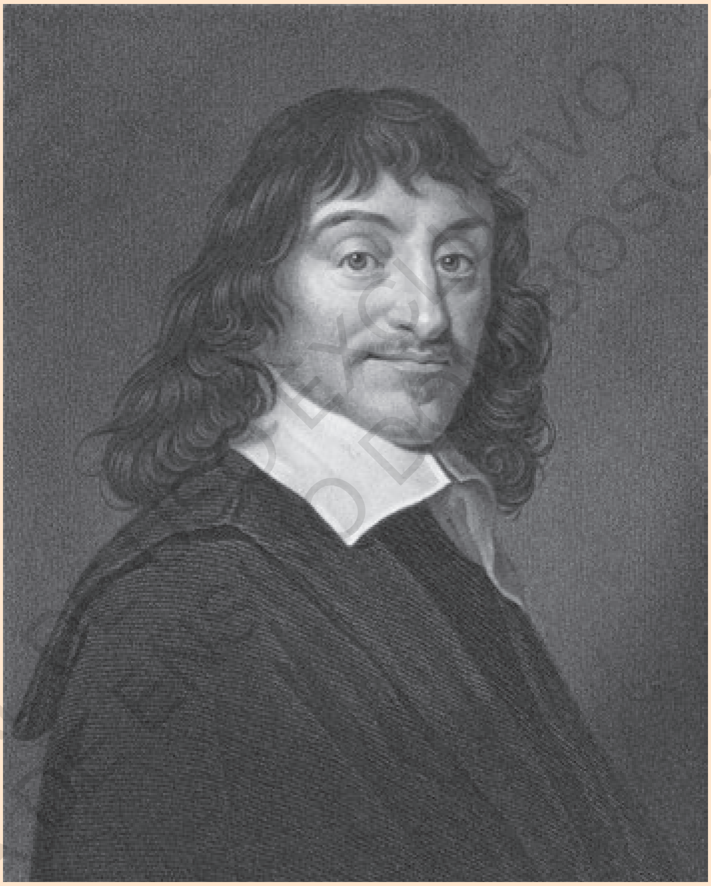
a) 110.
b) 120.
c) 124.
d) 130.
e) 144.

46 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA – ÁREA DE POLÍGONOS

- Área de polígonos

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.
- Resolver situações-problemas que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.


GEORGIOS KOLLIDAS/SHUTTERSTOCK

Retrato de René Descartes (1596-1650).

Introdução

Os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) são os precursores da Geometria analítica no século XVII. Ambos, apesar de não terem formação em Matemática, são movidos ora pela paixão à Álgebra, no caso de Fermat, ora por questões filosóficas, no caso de Descartes. Com o conhecimento algébrico desenvolvido por ambos, a Geometria dedutiva criada pelos gregos passou a ser muito mais funcional.

Em 1637, Descartes apresentou sua Geometria analítica no livro intitulado *Discurso sobre o método*. Por divulgar trabalhos com mais frequência que Fermat, apesar da importância de ambos para o desenvolvimento dessa área de conhecimento, o surgimento da Geometria analítica é associado à figura de Descartes.

ÁREA DE POLÍGONOS

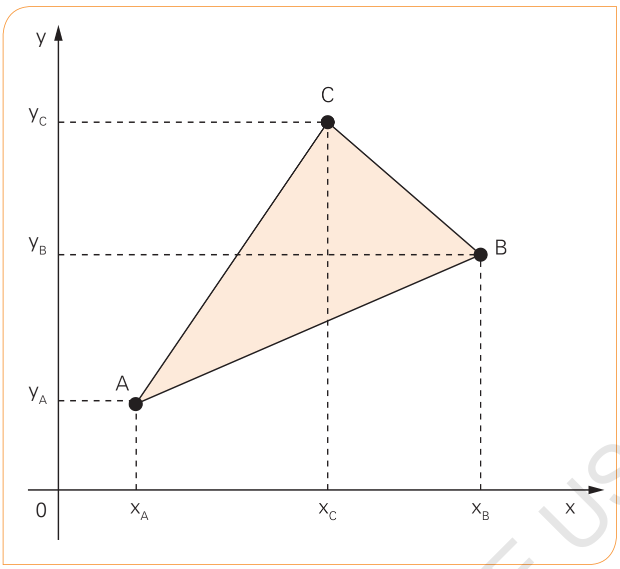
Em Geometria plana, aprendemos a calcular as áreas dos mais diversos polígonos. Em Geometria analítica, também podemos calcular a área dos polígonos. Para tanto, dividimos o polígono em vários triângulos e utilizamos a área de um triângulo como base.

ÁREA DE UM TRIÂNGULO

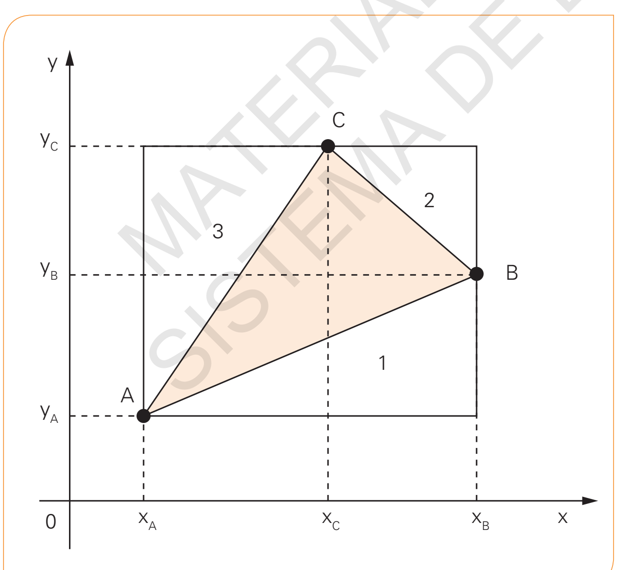
A área **A** de um triângulo ABC corresponde à metade do módulo do determinante das coordenadas de seus vértices.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \quad A = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$$

Para demonstrar essa relação, vamos calcular a área do triângulo **ABC** descrito no plano cartesiano a seguir.



Ao cercarmos o triângulo ABC por um retângulo, podemos obter sua área subtraindo as áreas dos triângulos 1, 2 e 3 do retângulo abaixo.



$$A_{\Delta ABC} = A_{\text{retângulo}} - A_{\Delta 1} - A_{\Delta 2} - A_{\Delta 3} \text{ (Eq. 1)}$$

$$A_{\text{retângulo}} = (x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A)$$

$$A_{\text{retângulo}} = x_By_C - x_By_A + x_Ay_C + x_Ay_A$$

$$A_{\Delta 1} = \frac{1}{2} \cdot [(x_B - x_A) \cdot (y_B - y_A)]$$

$$A_{\Delta 1} = \frac{1}{2} \cdot [x_By_B - x_By_A - x_Ay_B + x_Ay_A]$$

$$A_{\Delta 2} = \frac{1}{2} \cdot [(x_B - x_C) \cdot (y_C - y_B)]$$

$$A_{\Delta 2} = \frac{1}{2} \cdot [x_By_C - x_By_B - x_Cy_C + x_Cy_B]$$

$$A_{\Delta 3} = \frac{1}{2} \cdot [(x_C - x_A) \cdot (y_C - y_A)]$$

$$A_{\Delta 3} = \frac{1}{2} \cdot [x_Cy_C - x_Cy_A - x_Ay_C + x_Ay_A]$$

Substituindo os valores calculados das áreas na equação 1, obtemos:

$$A_{\Delta ABC} = x_By_C - x_By_A + x_Ay_C + x_Ay_A - \frac{1}{2} \cdot [x_By_B - x_By_A - x_Ay_B + x_Ay_A] - \frac{1}{2} \cdot [x_By_C - x_By_B - x_Cy_C + x_Cy_B] - \frac{1}{2} \cdot [x_Cy_C - x_Cy_A - x_Ay_C + x_Ay_A]$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot [x_By_C + x_AyB + xCy_A - x_By_A - x_Ay_C - x_Cy_B] \text{ (Eq. 2)}$$

Calculamos, então, o seguinte determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Sarrus, obtemos:

$$\left|\begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{matrix}$$

$$- x_Cy_B - x_Ay_C - x_By_A + x_Ay_B + x_Cy_A + x_By_C$$

Ou seja:

$$\Delta = x_By_C + x_Ay_B + x_Cy_A - x_By_A - x_Ay_C - x_7y_B \text{ (Eq. 3)}$$

Comparando a Eq. 3 com a Eq. 2, temos:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$$

Podemos demonstrar que, ao trocar a ordem dos pontos, o determinante Δ assume valor negativo, e a área de um polígono deve ser sempre um valor positivo. Logo, para evitar esse problema, basta calcularmos o módulo do determinante encontrado.

Dessa forma, concluímos que, dados três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, a área do triângulo ABC $\left(A_{\Delta BC} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|\right)$ corresponde ao valor descrito inicialmente.

Observações:

- **Pontos colineares** – ocorrem quando $\Delta = 0$, ou seja, se a área do triângulo for zero. Assim, os pontos **A**, **B** e **C** estão alinhados.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- **Regra do agrimensor** – trata-se de um modo prático e rápido para calcular Δ, conforme o diagrama a seguir.

$$\begin{array}{ccccccc} & & - & & - & & - \\ X_A & & X_B & & X_C & & X_A \\ Y_A & & Y_B & & Y_C & & Y_A \\ & & + & & + & & + \end{array}$$

Exemplo:

Sendo A(0, 1), B(4, 5) e C(7, 2), utilizando a regra do agrimensor, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & -4 & & -35 & & -2 \\ 0 & & 4 & & 7 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 2 & & 1 \\ & & 0 & & +8 & & +7 \end{array}$$

$\Delta = 0 + 8 + 7 - 4 - 35 - 2 = -26$

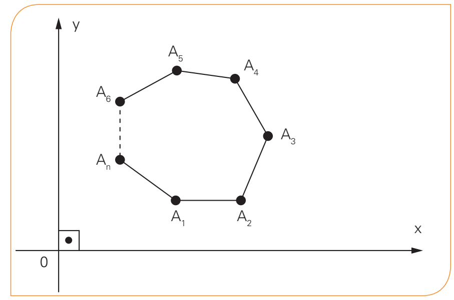
Então, demonstramos que, ao organizar Δ colocando as coordenadas dos pontos em uma sequência do sentido anti-horário, o valor de Δ é não negativo. Desse modo, podemos escrever a área assim:

$$A = \frac{\Delta}{2}$$

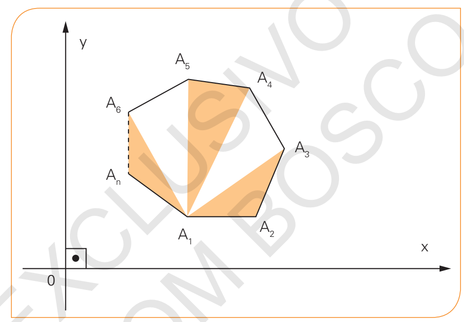
ÁREA DE UM POLÍGONO

Por meio da Geometria analítica, podemos encontrar a área de um polígono qualquer.

Vamos considerar um polígono convexo A_1, A_2, A_3, ..., A_n, com as coordenadas do vértice dadas por $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$, lidos no sentido anti-horário.



Ao dividirmos o polígono em (n – 2) triângulos, conforme figura abaixo, podemos demonstrar que sua área é dada por:



$$A = \frac{\Delta p}{2}$$

Sendo o valor de Δp obtido por meio da regra do agrimensor, colocamos as coordenadas em sentido anti-horário.

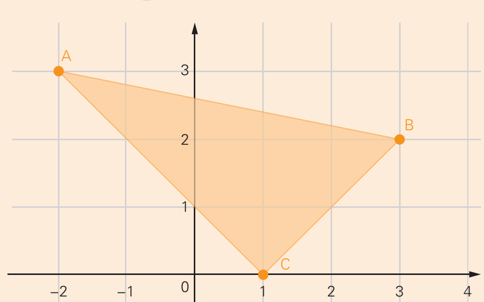
$$\begin{array}{ccccccc} & & - & & - & & - \\ X_1 & & X_2 & & X_3 & & X_n \\ Y_1 & & Y_2 & & Y_3 & & Y_n \\ & & + & & + & & + \end{array}$$

$\Delta p = x_1y_2 + x_2y_3 + \dots x_{n-1}y_n - y_1x_2 - y_2x_7 - \dots - y_{n-1}x_n$

Observação: caso os pontos sejam dispostos em uma sequência horária, basta considerarmos o resultado em módulo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Na figura está representado um triângulo de vértices ABC:



Sabe-se que as coordenadas cartesianas dos pontos A, B e C são, respectivamente, A(–2, 3), B(3, 2) e C(1, 0).

Então, é correto afirmar que a área do triângulo ABC corresponde a:

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

Resolução

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 3 + 0 - 2 - 0 - 9 =$$

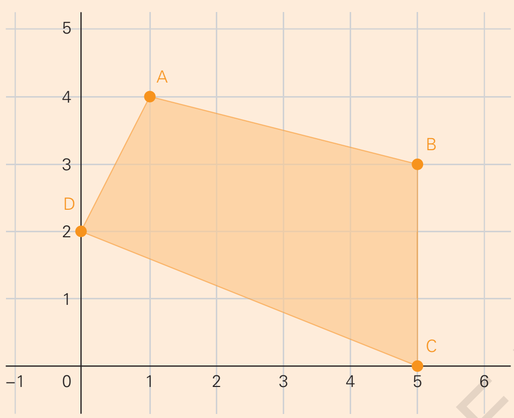
$= -12$

$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |-12|$

Portanto, $A_{\Delta ABC} = 6$.

2. Sistema Dom Bosco – A área de um quadrilátero de vértices A, B, C e D pode ser calculada por meio da relação $A = \frac{\Delta p}{2}$.

Sendo Δp obtido com base na regra prática do agrimensor, pode-se afirmar que a área do quadrilátero descrito na figura corresponde a:



a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

Resolução

Primeiramente identificamos as coordenadas dos pontos ABCD do quadrilátero.

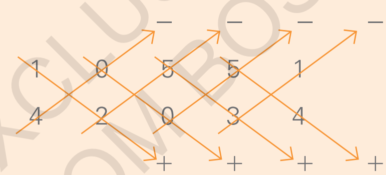
A = (1, 4)

B = (5, 3)

C = (5, 0)

D = (0, 2)

Para aplicar a regra do agrimensor, podemos usar a seguinte sequência anti-horária: A, D, C e B.



Logo:

$A = \frac{1}{2} \cdot |2 + 0 + 15 + 20 - 0 - 10 - 0 - 3|$

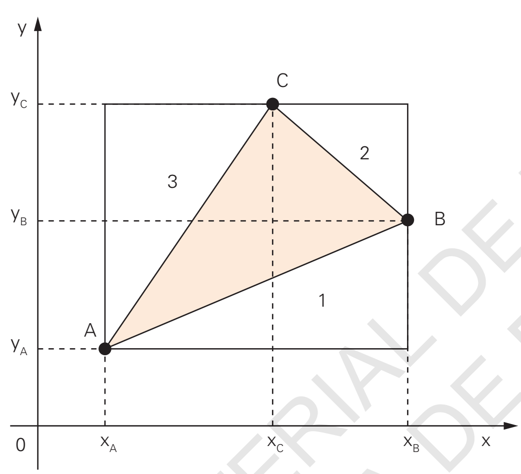
$A = \frac{1}{2} \cdot (24)$

Portanto, A = 12.

ROTEIRO DE AULA

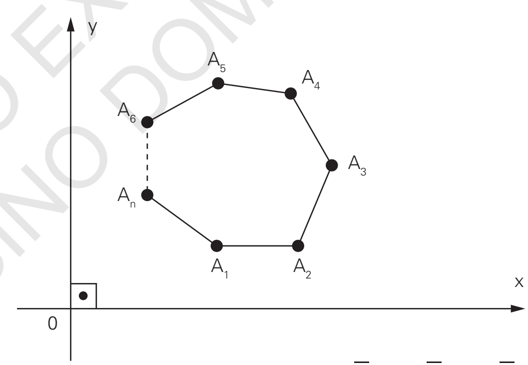
INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA - ÁREA DE POLÍGONOS

ÁREA DE TRIÂNGULOS

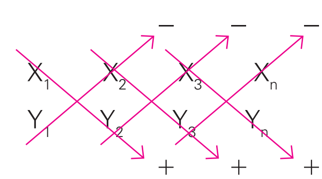


$$A = \frac{1}{2} \cdot |\Delta| \quad \text{em que } \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

ÁREA DE POLÍGONOS



$$\Delta = \frac{\Delta p}{2}$$



$$\Delta p = x_1y_2 + x_2y_3 + \ldots x_{n-1}y_n - y_1x_2 - y_2x_3 - \ldots - y_{n-1}x_n$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. EEAR – O triângulo determinado pelos pontos A(–1, –3), B(2, 1) e C(4, 3) tem área igual a

a) 1
b) 2
c) 3
d) 6

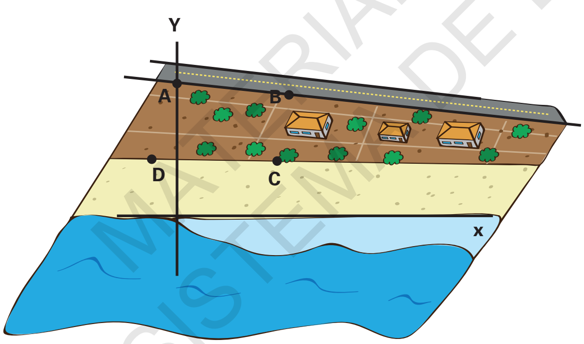
Utilizando a regra de Sarrus para calcular o determinante, temos:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & -3 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right| = -1-12+6-4+3+6=-2 \rightarrow D=-2$$

Logo, a área do triângulo será dada por: $A=\frac{1}{2}\cdot|-2|=1$

2. Sistema Dom Bosco C5-H22

Um arquiteto precisa elaborar o projeto de uma casa de praia em um grande terreno. Como não está no local da construção, recorre ao mapa que indica, por coordenadas cartesianas, a posição dos extremos (vértices) do terreno, conforme a figura a seguir.



Os vértices A, B, C e D do quadrilátero possuem as respectivas coordenadas, em metros: (0, 120); (30, 110); (25, 80); e (–10, 85).

Logo, a área de terreno que o arquiteto terá para executar o seu projeto corresponde a

a) 1 112,5 m²
b) 2 225,0 m²
c) 4 450,0 m²
d) 440,0 m²
e) 250,0 m²

Primeiramente, identificamos as coordenadas dos pontos ABCD do quadrilátero:

A = (0, 120)
B = (30, 110)
C = (25, 80)
D = (–10, 85)

Para aplicar a regra do agrimensor, podemos usar a seguinte sequência horária, calculando o módulo de Δp: A, B, C e D.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 30 & 25 & -10 & 0 \\ 120 & 110 & 80 & 85 & 120 \end{array}$$

Logo:

$$A = \frac{1}{2}\cdot|0 + 2\,400 + 2\,125 - 1\,200 - 3\,600 - 2\,750 + 800 - 0|$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot|2\,225|$$

Portanto, A = 1 112,50 m².

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

3. UFJF-MG – Considere os pontos A = (2,0), $B=\left(-1,\ \sqrt{3}\right)$ e $C=\left(-1,\ -\sqrt{3}\right)$ em um plano cartesiano.

a) Determine o ângulo $A\hat{B}C$.
b) Calcule a área do triângulo ABC.

a) Temos que: $d(A,\ B)=\sqrt{(-1-2)^2+\left(\sqrt{3}-0\right)^2}=2\sqrt{3}$

$d(A,\ C)=\sqrt{(-1-2)^2+\left(-\sqrt{3}-0\right)}=2\sqrt{3}$

Logo,

$d(B,\ C)=\sqrt{(-1-(-1))^2+\left(-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)}=2\sqrt{3}$

Desse modo, o triângulo ABC é equilátero. Portanto, $A\hat{B}C=60°$.

b) A área do triângulo ABC é igual a: $\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$ u.a.

4. UEA-AM – Num plano cartesiano, sabe-se que os pontos A, B(1, 2) e C(2, 3) pertencem a uma mesma reta, e que o ponto A está sobre o eixo Oy. O valor da ordenada de A é

a) 0.
b) 3.
c) –1.
d) 2.
e) 1.

O ponto A é da forma (0, K). Como os pontos A, B e C estão alinhados, temos:

$$\begin{vmatrix} 0 & K & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2k + 3 - 4 - k = 0 \rightarrow k = 1$$

5. Sistema Dom Bosco – Um triângulo determinado pelos pontos A(1, 4), B(2, 3) e C(x, 0) tem área igual a 3 unidades quadradas. Logo, quais são os possíveis valores da abscissa x?

Utilizando a regra de Sarrus para calcular o determinante, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ x & 0 \end{matrix}$$

$\Delta = 3 + 4x + 0 - 3x - 0 - 8 = x - 5$

Logo, a área do triângulo será dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$$

$$3 = \frac{1}{2} \cdot |x - 5| \rightarrow |x - 5| = 6$$

Para $x \geq 5$, temos:

$|x - 5| = 6 \rightarrow x - 5 = 6 \rightarrow x = 6 + 5$

Logo, $x = 11$.

Para $x \leq 5$, temos:

$|x - 5| = 6 \rightarrow -x + 5 = 6 \rightarrow -x = 6 - 5$

Logo, $x = -1$.

Portanto, $x_1 = 11$ e $x_2 = -1$.

6. UPE – Qual é a medida da área e do perímetro do losango cujos vértices são A(2, 3); B(1, 0); C(0, 3); e D(1, 6)?

Utilize $\sqrt{10} \cong 3{,}2$

a) Área = 6 e perímetro = 12,8
b) Área = 6 e perímetro = 10,4
c) Área = 12 e perímetro = 22,3
d) Área = 12 e perímetro = 25,9
e) Área = 18 e perímetro = 27,1

A área é dada por:

$$\frac{1}{2} \cdot (x_A - x_C) \cdot (y_D - y_B) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$$

Por outro lado:

$$d(B, C) = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \cong 3{,}2$$

Segue, então, que o perímetro mede $4 \cdot 3{,}2 \cong 12{,}8$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Sistema Dom Bosco – Qual a área de um triângulo escaleno de vértices A(–1, 2), B(1, 4) e C(3, –1)?

8. IFAL – Dados três pontos A(–1, 3), B(0, 2) e C(4, 4) do plano cartesiano, podemos dizer que esses três pontos

a) são colineares.

b) formam um triângulo equilátero.

c) formam um triângulo isósceles.

d) formam um triângulo escaleno de área 6.

e) formam um triângulo escaleno de área 3.

9. UFRGS – Os pontos A(1, 2), B(6, 2) e C são os vértices de um triângulo equilátero, sendo o segmento AB a base dele. O seno do ângulo formado pelo eixo das abscissas e a reta suporte do lado BC no sentido anti-horário é

a) $-\frac{1}{2}$.

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. Urca-CE – Sendo $M_1 = (6, 4)$, $M_2 = (7, 1)$ e $M_3 = (2, 0)$ as coordenadas dos pontos médios dos vértices de um triângulo, podemos afirmar que a área desse triângulo vale:

a) 32 u.a.

b) 46 u.a.

c) 52 u.a.

d) 64 u.a.

e) 76 u.a.

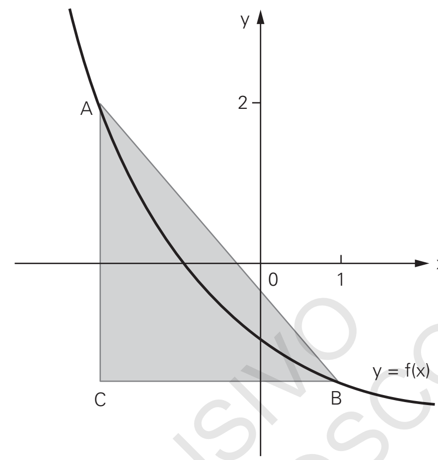
11. FGV (adaptado) – No plano cartesiano os vértices de um triângulo são A(5, 2), B(1, 3) e C(8, –4). Obtenha a área do triângulo ABC.

12. UFU-MG (adaptado) – Em relação a um sistema de coordenadas x0y (x e y em metros), o triângulo PQR tem ângulo reto no vértice R = (3, 5), base PQ paralela ao eixo x e está inscrito no círculo de centro C(1, 1). Qual a área desse triângulo, em metros quadrados?

13. UEFS-BA – Dado um número complexo z = a + bi, com a e b reais, define-se afixo de z como o ponto do plano complexo de coordenadas (a, b). Sejam A, B e C os afixos dos números complexos $z_A = 14 + 4i$, $z_B = 6 - 2i$ e $z_C = 16 - 2i$. A área do triângulo de vértices A, B e C é

a) 18.
b) 24.
c) 30.
d) 36.
e) 40.

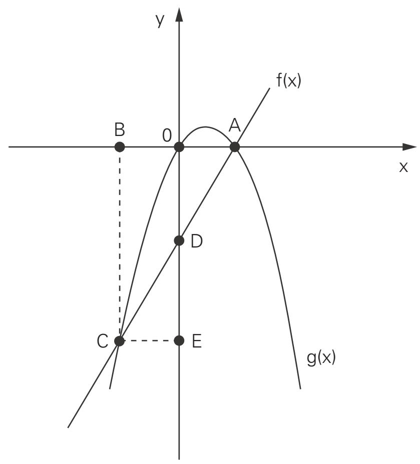
14. UPF-RS – Na figura abaixo, está representado um triângulo retângulo em que os vértices A e B pertencem ao gráfico da função f, definida por $f(x) = 2^{-x} - 2$.



Como indica a figura, a abscissa do ponto B é 1, a ordenada do ponto A é 2 e os pontos A e C têm a mesma abscissa. A medida da área do triângulo ABC é

a) $\frac{21}{2}$ **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** 6 **d)** 12 **e)** $\frac{21}{4}$

15. CFTMG – As funções reais $f(x) = 2x - 4$ e $g(x) = -x^2 + 2x$ estão representadas na figura seguinte. A e C são pontos tais que $f(x) = g(x)$, B é a projeção ortogonal de C no eixo x e E é a projeção ortogonal de C no eixo y.



Se A_1 é a área do triângulo ABC e A_2 é a área do triângulo CDE, então a razão $\frac{A_1}{A_2}$ vale

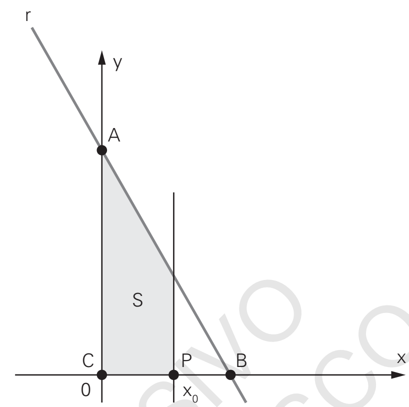
a) 4.

b) 2.

c) $\frac{1}{2}$.

d) $\frac{1}{4}$.

16. Uerj – Considere o gráfico a seguir, em que a área S é limitada pelos eixos coordenados, pela reta r, que passa por A(0, 4) e B(2, 0), e pela reta perpendicular ao eixo x no ponto $P(x_0, 0)$, sendo $0 \leq x_0 \leq 2$.



Para que a área S seja a metade da área do triângulo de vértices C (0, 0), A e B, o valor de x_0 deve ser igual a:

a) $2 - \sqrt{2}$

b) $3 - \sqrt{2}$

c) $4 - \sqrt{2}$

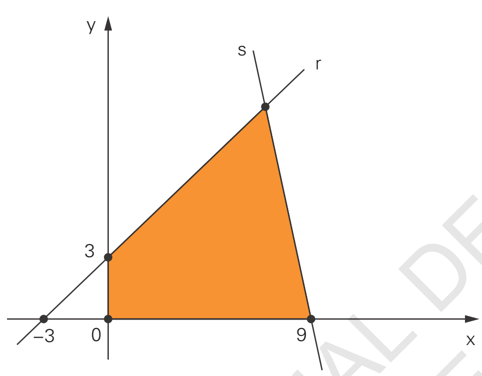
d) $5 - \sqrt{2}$

17. UFSCar (adaptado) – A matriz $M=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ está sendo usada para representar as coordenadas dos vértices A(0, 0), B(2, 0) e C(4, 3) de um triângulo ABC. Multiplicando-se M por uma constante k > 0, a matriz resultante da operação indicará os vértices do triângulo A'B'C', de acordo com o mesmo padrão anterior de representação. Em tais condições, qual será a área do triângulo A'B'C'?

ESTUDO PARA O ENEM

18. IFPE C5-H22

A figura a seguir ilustra as representações cartesianas das retas r e s de equações y = x + 3 e y = – 3x + 27, respectivamente, com x e y dados em metros. Determine a área, em metros quadrados, do quadrilátero destacado.

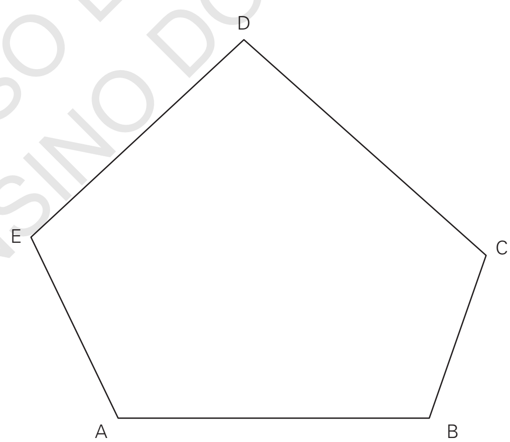


a) 45,5
b) 49,5
c) 52,5
d) 55,5
e) 58,5

19. Cefet-PR C5-H20

Um engenheiro cartográfico fez o levantamento topográfico de um terreno com contorno poligonal, conforme a figura, e obteve as seguintes coordenadas, em metros, para seus vértices:

A (0, 0), B(10, 0), C(12, 4), D(6, 10) e E(−4, 8).

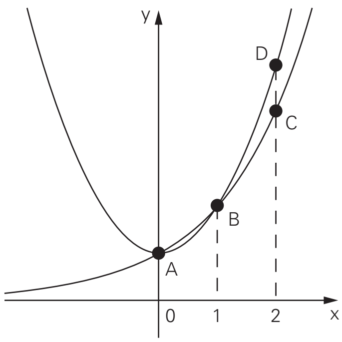


A área do terreno, em metros quadrados, é de:

a) 112
b) 122
c) 132
d) 144
e) 154

20. ESPM (adaptado) C5-H20

Através das equações polinomiais, podemos modelar graficamente vários tipos de funções matemáticas. A figura abaixo representa os gráficos das funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2^x$. A área do quadrilátero ABCD é igual a:



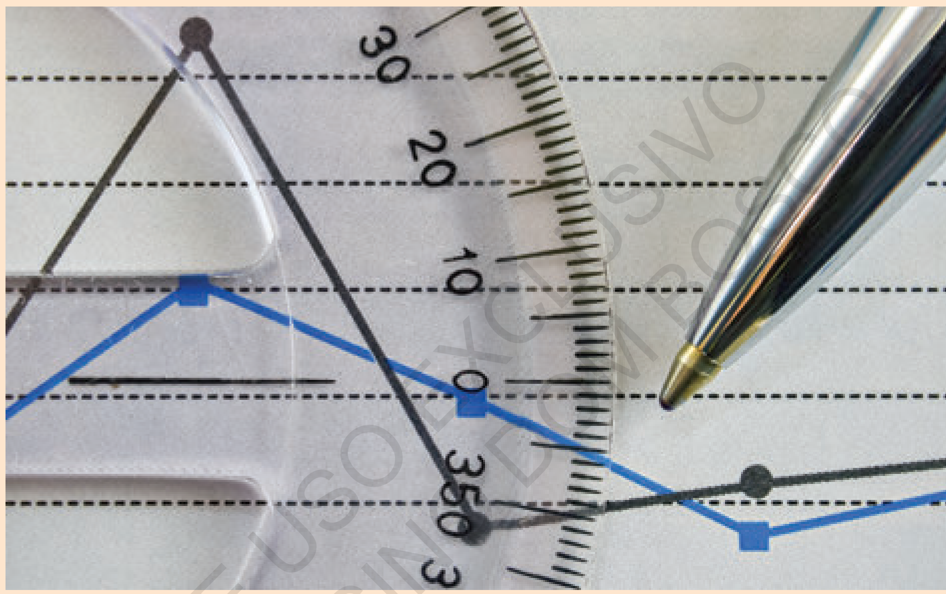
a) 2,0
b) 1,5
c) 0,5
d) 2,5
e) 1,0

47 ESTUDO DA RETA – EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA

- Inclinação de uma reta
- Equação fundamental da reta

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.


BENJAMINEC/ISTOCKPHOTO

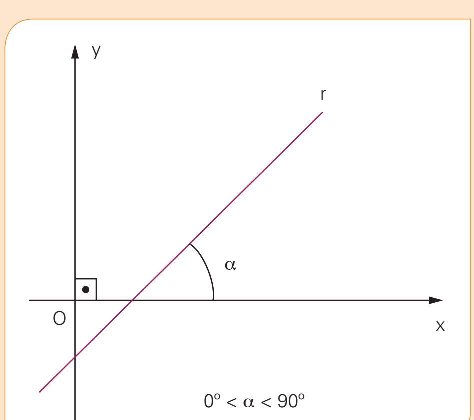
As equações de retas são uma ótima ferramenta usada em pesquisas.

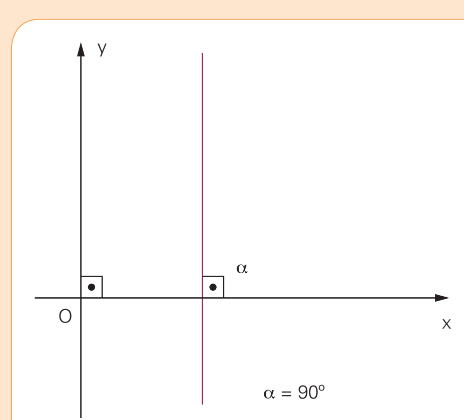
Introdução

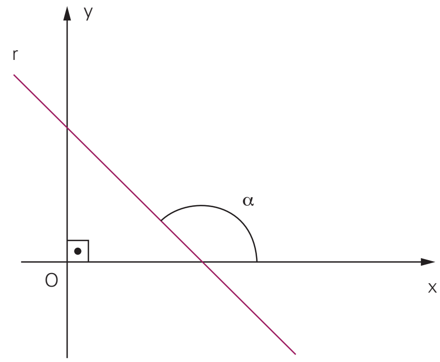
Um dos princípios mais importantes e essenciais para o aprendizado de Geometria plana e Geometria espacial é o estudo da reta. A interpretação da localização e da movimentação de pessoas no espaço tridimensional baseia-se nesse estudo, com o qual podemos definir localizações e taxas de crescimento e identificar o crescimento e o decrescimento de uma função.

INCLINAÇÃO DE UMA RETA

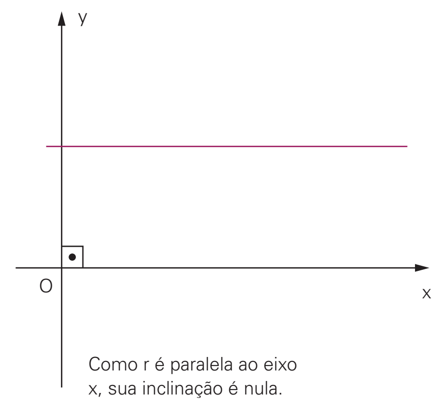
Dados um plano cartesiano e uma reta r concorrente com o eixo x, chamamos de **inclinação de r** a medida α do ângulo que **r** forma com o eixo **x**. Esse ângulo é medido do eixo **x** até a reta **r** no sentido anti-horário. Então:







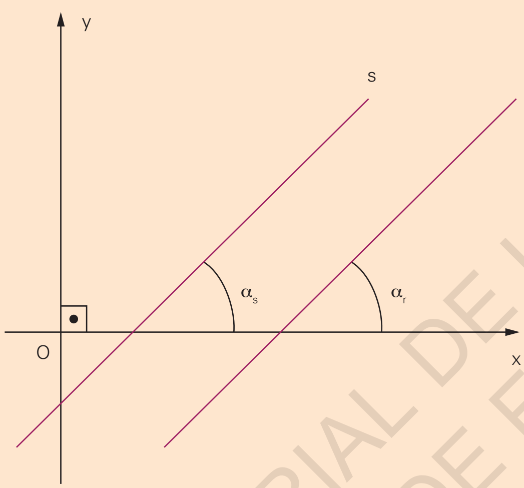
90° < α < 180°



Como r é paralela ao eixo x, sua inclinação é nula.

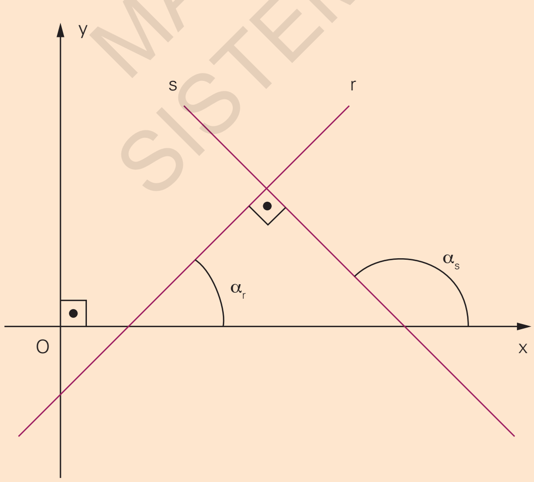
Propriedades importantes

1. Se duas retas de um plano cartesiano são paralelas, suas inclinações são iguais.



$r \,//\, s \leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s$

2. Se duas retas são perpendiculares, a diferença entre suas inclinações é de 90°.



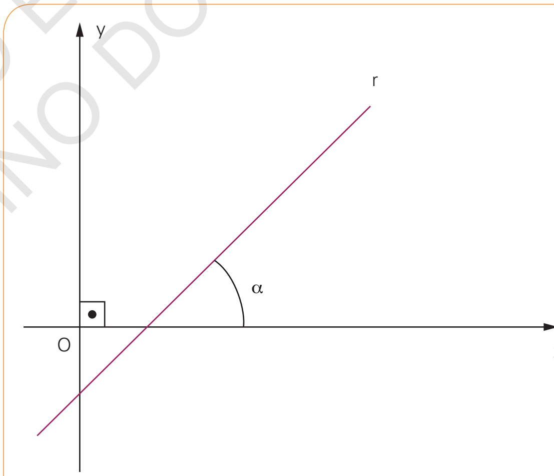
$r \perp s \leftrightarrow |\alpha_s - \alpha_r| = 90°$

Coeficiente angular de uma reta

Também chamado **declividade** de uma reta **r**, não paralela ao eixo y, o **coeficiente angular** é definido como a tangente da inclinação de **r** em relação à horizontal, sendo indicado por **m**.

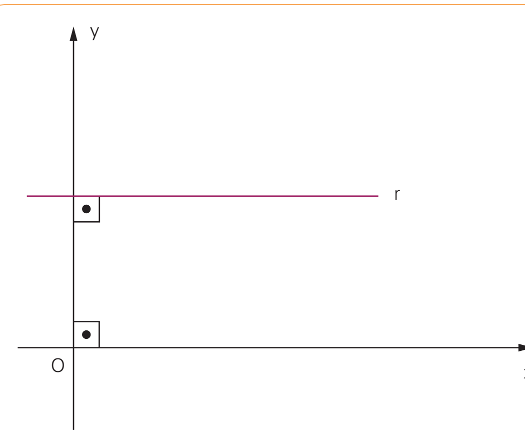
Observe os casos possíveis:

- Para $0° < \alpha < 90°$



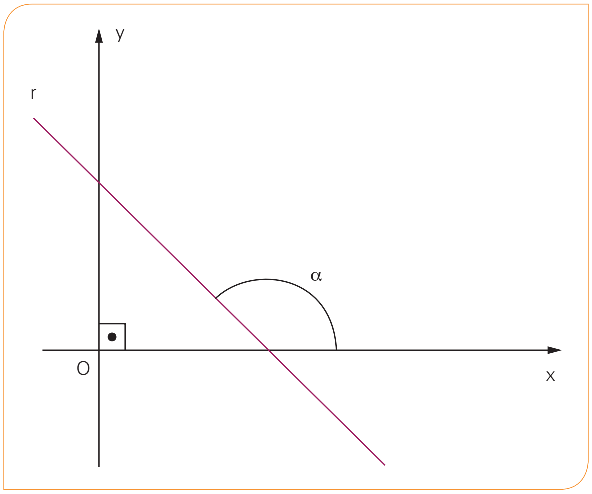
$m = tg\ \alpha$ Portanto, $m > 0$.

- Para $\alpha = 0°$



$m = tg\ \alpha$ Portanto, $m = 0$.

- Para 90° < α < 180°

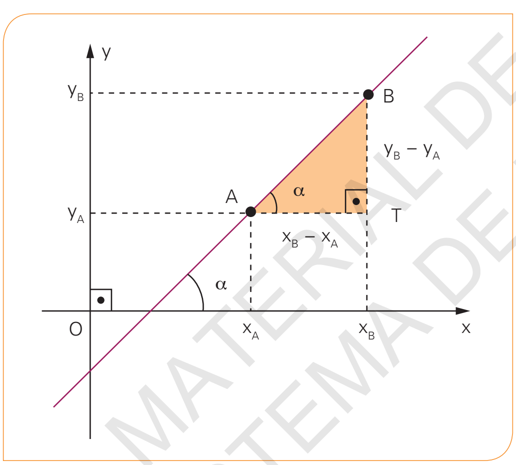


$m = \text{tg } \alpha$ Portanto, $m < 0$.

No caso em que **r** é paralela ao eixo y, o **coeficiente angular de r não é definido**, pois não há tangente estabelecida para tal ângulo.

Cálculo do coeficiente angular de uma reta

Considere no plano cartesiano a reta não paralela ao eixo **y**, determinada por dois pontos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, com $x_A \neq x_B$, conforme a figura a seguir.



Assim, o coeficiente angular (m) da reta é dado pela seguinte relação:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Podemos observar as seguintes situações:

- Para 0° < α < 90°, a função é crescente e m > 0.
- Para α = 0°, a função é constante e m = 0.
- Para 90° < α < 180°, a função é decrescente e m < 0.
- Para α = 90°, não existe tg 90°. Logo, **m** não está definido.

Conclusão:
Em qualquer um dos casos, o coeficiente angular da reta é dado pela razão entre a diferença das ordenadas (Δy) e das abscissas (Δx).

Observação:
De acordo com o cálculo exposto, $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. No entanto, ao multiplicarmos o antecedente e o consequente da razão por −1, ela não se altera. Assim:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Condição de alinhamento para três pontos

Vimos no módulo anterior que, para saber se três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, estão alinhados, basta verificarmos se o determinante de Δ é igual a zero:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Caso contrário, os pontos formam um triângulo cuja área é $A = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$.

Agora podemos verificar se três pontos estão alinhados analisando o coeficiente angular do segmento de reta que os une.

Vamos observar as figuras 1 e 2 a seguir.

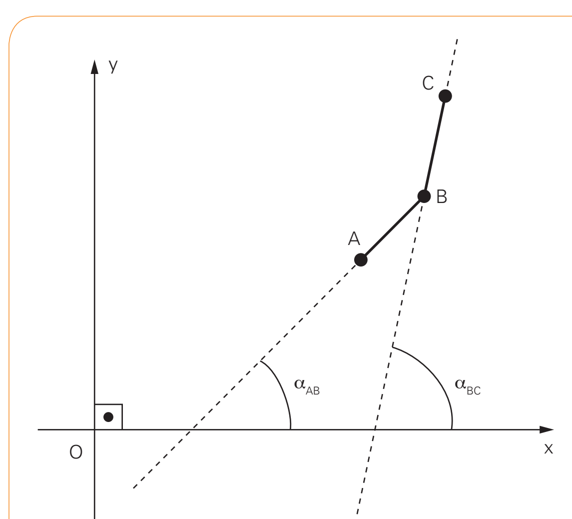


Figura 1

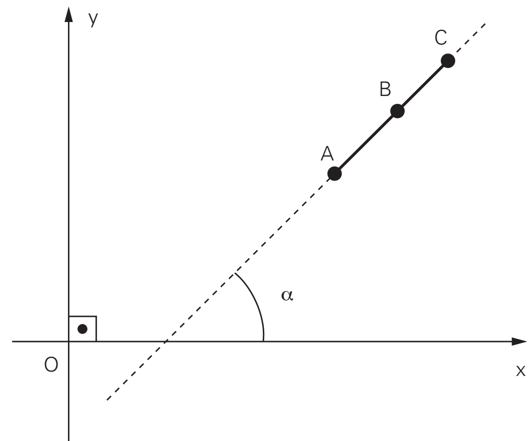


Figura 2

Na figura 1, os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ têm inclinações diferentes ($\alpha_{AB} \neq \alpha_{BC}$), pois os pontos **A**, **B** e **C** não estão alinhados. Assim, tg $\alpha_{AB} \neq$ tg α_{BC}, ou seja, $m_{AB} \neq m_{BC}$.

Na figura 2, por sua vez, observamos que os pontos **A**, **B** e **C** estão alinhados. Portanto, $m_{AB} = m_{BC} =$ tg α.

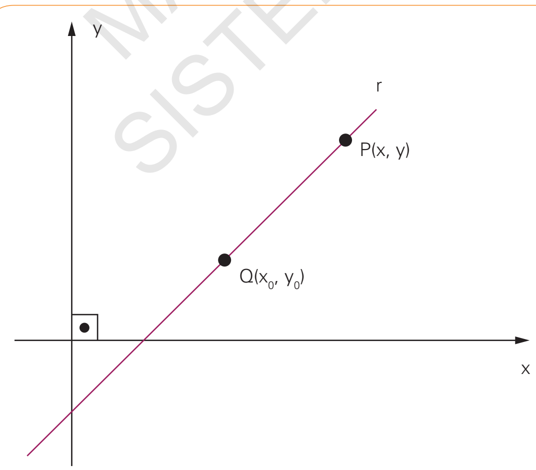
Quando os coeficientes angulares dos segmentos de retas que unem três pontos são iguais ($m_{AB} = m_{BC}$), podemos afirmar que os pontos são colineares.

EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA

Ao conhecermos um dos pontos da reta e sua direção, podemos determinar sua equação.

- **1º caso**: a reta tem coeficiente angular **m.**

Seja **r** uma reta do plano cartesiano que passa pelo ponto $Q(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular **m**. Para determinarmos a equação dessa reta, consideramos um ponto P(x, y), fazendo-o ter a propriedade característica de **r**. Assim:



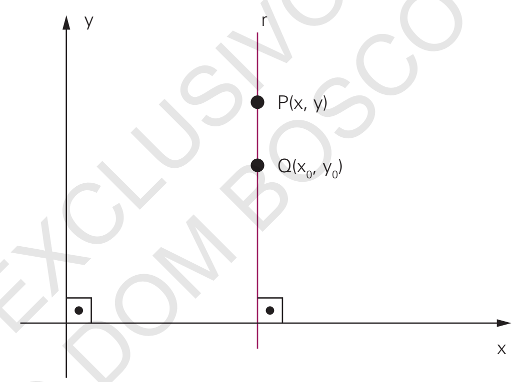
$P(x, y) \in r \leftrightarrow m_{PQ} = m$

Então, $m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$. Isso nos leva à **equação fundamental** de **r**.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- **2º caso**: a reta não tem coeficiente angular (r // y).

Seja **r** uma reta do plano cartesiano que passa pelo ponto $Q(x_0, y_0)$ e tem inclinação de 90°. Para determinarmos a equação dessa reta, consideramos um ponto P(x, y), fazendo-o ter a propriedade característica de **r**. Assim:



Então: $x = x_0$.

Essa equação obtida é a equação de **r**.

Por exemplo, para obtermos a equação da reta que passa pelo ponto A(5, 3) e é paralela ao eixo **y**, $x = x_0$. Isto é, x = 5 é a equação da reta.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – A reta **r** passa pelos pontos A(3, 7) e B(5, 12). Sendo a tangente do ângulo α formada pela reta com o eixo das abscissas igual a **m**, pode-se afirmar que o coeficiente angular da reta corresponde a:

a) −1,5
b) +1,5
c) −2,5
d) +2,5
e) −3,5

Resolução

$\Delta y = y_B - y_A = 12 - 7 = 5$

$\Delta x = x_B - x_A = 5 - 3 = 2$

$\text{tg } \alpha = m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to m = \dfrac{5}{2}$

Portanto, m = 2,5.

2. Sistema Dom Bosco – Para que os pontos A(−5, −2), B(1, 0) e $C(x_C, 1)$ pertençam à mesma reta, pode-se afirmar que

a) $x_c = 10$

b) $x_c = 8$

c) $x_c = 6$

d) $x_c = 4$

e) Indiferente ao valor de x_c, os pontos jamais estarão alinhados.

Resolução

Para que os pontos estejam alinhados, $\Delta = 0$. Logo, escrevendo as coordenadas de A, B e C, obtemos:

A: $x_A = -5$ e $y_A = -2$

B: $x_B = +1$ e $y_B = 0$

C: x_C e $y_C = 1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ +1 & 0 & 1 \\ x_C & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 0 - 2x_C + 1 - 0 + 5 + 2 = 0$$

$\rightarrow 2x_C = 8$

Portanto, $x_C = 4$.

3. Sistema Dom Bosco – Obtenha a equação da reta r que passa pelo ponto A(6, 2) e possui coeficiente angular igual a –3.

Resolução

Dados: $x_0 = 6$, $y_0 = 2$ e $m = -3$

Por meio da equação fundamental da reta, temos:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 2 = -3 \cdot (x - 6)$

$y - 2 = -3x + 18$

Portanto, $y + 3x - 20 = 0$.

ROTEIRO DE AULA

ESTUDO DA RETA – EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA

Equação da reta

Teoria angular

Equação fundamental

$y - \underline{\;y_0\;} = m\,(x - x_0)$

Três pontos estão ____alinhados____ em uma reta não vertical quando o ____coeficiente angular____ das retas que passam por eles, agrupados dois a dois, é o mesmo.

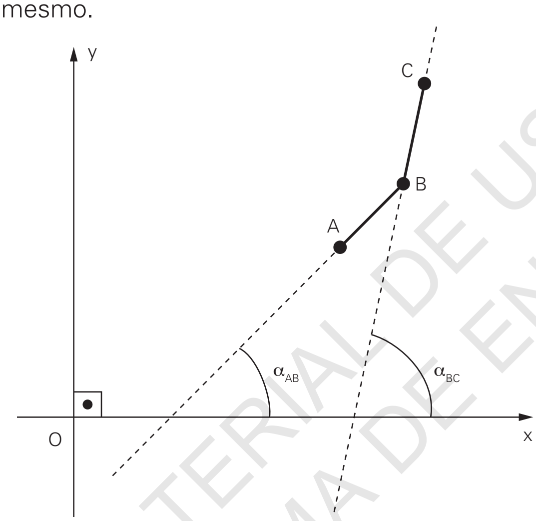
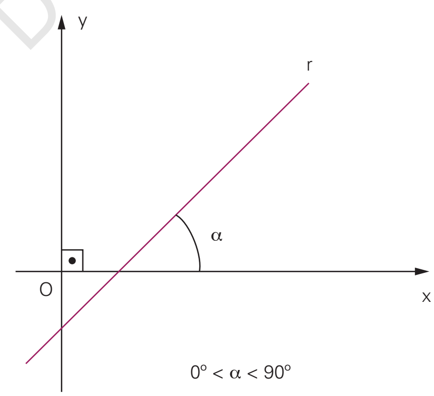
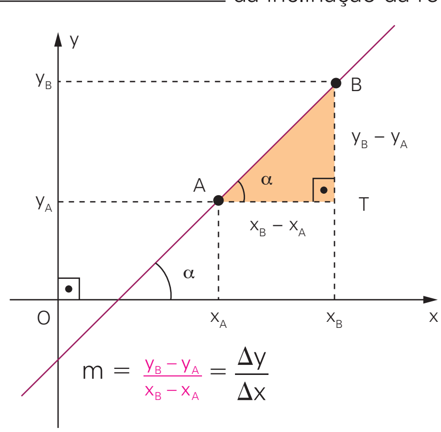


Figura 1

Dados um plano cartesiano e uma reta **r** concorrente com o eixo **x**, chama-se inclinação de **r** a ____medida α do ângulo____ que **r** forma com o eixo **x**. Esse ângulo é medido do eixo **x** até a reta **r** no ____sentido anti-horário____.



O coeficiente angular de uma reta **r** é a ____tangente____ da inclinação da reta.

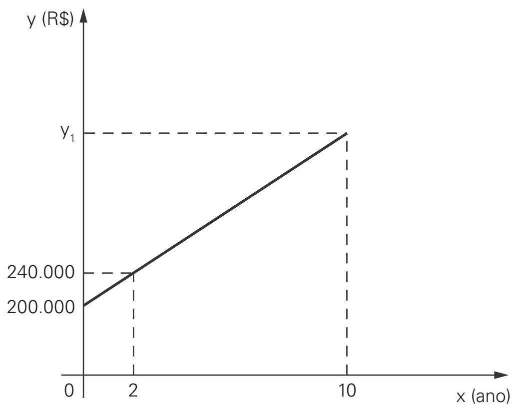


$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Enem C5-H20

Um sítio foi adquirido por R$ 200.000,00. O proprietário verificou que a valorização do imóvel, após sua aquisição, cresceu em função do tempo conforme o gráfico e que sua tendência de valorização se manteve nos anos seguintes.



O valor desse sítio, no décimo ano após sua compra, em real, será de

a) 190 000
b) 232 000
c) 272 000
d) 400 000
e) 500 000

Contando que os pontos (0; 200 000), (2; 240 000) e (10, y_1) estão alinhados, teremos $\Delta = 0$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 10 & 0 \\ 200000 & 240000 & y_1 & 200000 \end{vmatrix} = 0$$

$2y_1 + 200000 - 400000 - 240000 = 0$

$y_1 =$ R$ 400.000,00

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

2. Unifenas (adaptado) – Uma reta passa pelos pontos (5; 7) e (−2; 9). Qual é o coeficiente angular da equação de reta?

a) $\frac{2}{7}$

b) $\frac{-2}{7}$

c) $\frac{7}{2}$

d) $-\frac{7}{2}$

Temos:

$\Delta y = y_B - y_A = 9 - 7 = 2$

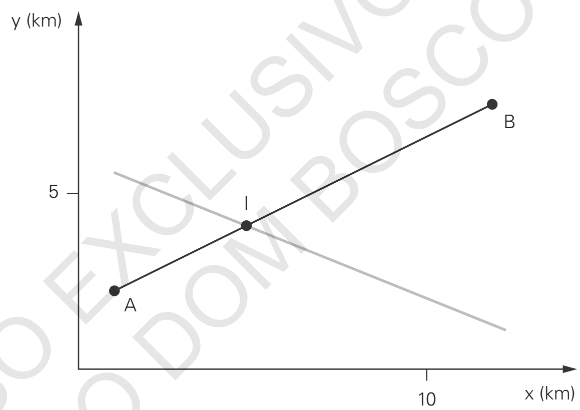
$\Delta x = x_B - x_A = -2 - 5 = -7$

Assim,

$\text{tg}\,\alpha = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow m = \frac{-2}{7}$

Portanto, o coeficiente angular da equação da reta é $m = \frac{-2}{7}$.

3. Uerj – No projeto de construção de uma estrada retilínea entre duas vilas, foi escolhido um sistema referencial cartesiano em que os centros das vilas estão nos pontos A(1, 2) e B(11, 7). O trecho AB é atravessado por um rio que tem seu curso em linha reta, cuja equação, nesse sistema, é x + 3y = 17. Observe abaixo o esboço do projeto.



Desprezando as larguras da estrada e do rio, determine as coordenadas do ponto de interseção I.

Reta $\rightarrow y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$

$m = \frac{7-2}{11-1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

reta AB $\rightarrow y - 2 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \rightarrow y = \frac{x+3}{2}$

reta rio $\rightarrow x + 3y = 17 \rightarrow y = \frac{17-x}{3}$

interseção $\rightarrow \frac{17-x}{3} = \frac{x+3}{2} \rightarrow 34 - 2x = 3x + 9 \rightarrow 5x = 25 \rightarrow x = 5$

Com o valor da abscissa x, encontramos a ordenada y:

$y = \frac{5+3}{2} = 4$

Portanto, I(5, 4).

4. IFSul – Considerando as retas $y = 5x + 12$ e $y = ax + 4$, que se interceptam no ponto $A(-1, b)$, os valores de a e b são, respectivamente:

a) -5 e -1
b) -3 e 7
c) -1 e 7
d) 4 e 8

As duas retas se interceptam no ponto A.

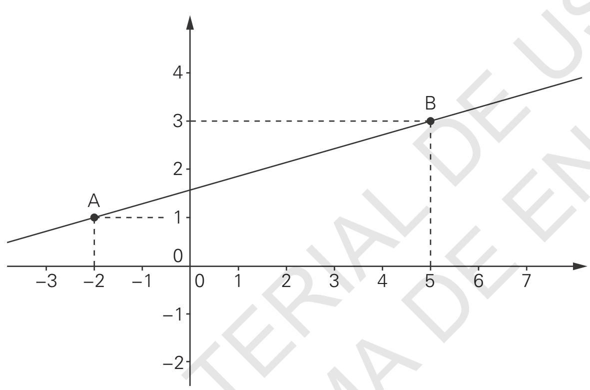
$$\begin{cases} y = 5x + 12 \\ y = ax + 4 \end{cases}$$

$A(-1, b) \rightarrow x = -1;\ y = b$

$$\begin{cases} b = 5 \cdot (-1) + 12 \quad \rightarrow \quad b = 7 \\ b = -a + 4 \end{cases}$$

$7 = -a + 4 \rightarrow a = -3$

5. Unisinos-RS – A equação da reta que passa pelos pontos A e B da figura abaixo é dada por:



a) $2y - 7x = 11$
b) $2x - 7y = -11$
c) $2x - 7y = 11$
d) $2x - 3y = -5$
e) $2x - 3y = 1$

A equação da reta é obtida por:

$$y - 1 = \frac{3 - 1}{5 - (-2)} \cdot (x - (-2))$$

$7y - 7 = 2x + 4$

Portanto, $2x - 7y = -11$.

6. Uema

Uma cidade gera, em média, 20 mil toneladas de lixo, diariamente, de diversos tipos: lixo residencial, lixo hospitalar, entulho. Uma cooperativa analisou os dados de coleta seletiva fornecidos pela Prefeitura, considerando somente a produção de lixo residencial para dois tipos de resíduo em uma determinada área onde pretendia atuar. Tais dados se referem à média diária, em toneladas, para cada ano de coleta, conforme tabela abaixo.

Tipo / Ano	Garrafas PET	Papel
2012	15	20
2013	20	25
2014	20	35
2015	30	35

Fonte: <www3.prefeitura.sp.gov.br/limpeza_urbana/ formspublic/ limpezarua.apx>. (Adaptado)

(Use, para fins de cálculo, apenas os dois últimos dígitos do ano.)

a) Qual a equação da reta que representa o comportamento da coleta total do ano de 2012 ao de 2014?

b) A partir dos dados na tabela, qual será o valor total recolhido para esses dois resíduos no ano de 2020?

a) Seguindo a tabela, compreende-se que a reta passa pelos pontos (12, 35) e (14, 55), em que 12 condiz ao ano de 2012 e 14, ao ano de 2014. Logo, a solução é obtida por:

$$y - 35 = \frac{55 - 35}{14 - 12}(x - 12) \leftrightarrow y = 10x - 85$$

b) O resultado solicitado, em toneladas, é igual a $y = 10 \cdot 20 - 85 = 115$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. EEAR (adaptado) – A equação fundamental da reta **r** que passa pelo pontos A(0, 1) e B(6, 8) é dada por

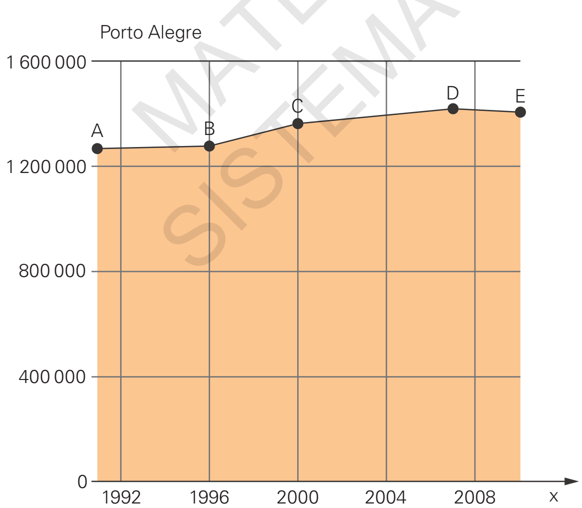
a) $y - 7x - 1 = 0$

b) $y - 6x - 4 = 0$

c) $y - \frac{7}{6}x - 1 = 0$

d) $y - \frac{6}{7}x - 1 = 0$

8. PUC-RS – O gráfico abaixo representa a evolução populacional de Porto Alegre entre os anos de 1992 e 2010.



Fonte: IBGE. Censo Demográfico 1991, Contagem Populacional 1996, Censo Demográfico 2000, Contagem Populacional 2007 e Censo Demográfico 2010.

Considerando as seguintes retas: r, determinada pelos pontos A e B; s, pelos pontos B e C; t, pelos pontos C e D; e u, pelos pontos D e E, cujos coeficientes angulares são, respectivamente, a_r, a_s, a_t e a_u, é correto afirmar que

a) $a_r < a_u < a_t < a_s$

b) $a_r < a_u < a_s < a_t$

c) $a_u < a_r < a_t < a_s$

d) $a_u < a_r < a_s < a_t$

e) $a_u < a_t < a_r < a_s$

9. Imed – Dadas as equações das retas (r): $x - 2y - 10 = 0$ e (s): $3x + 2y - 6 = 0$, representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, pode-se afirmar que a abscissa do ponto de interseção entre as retas r e s é:

a) -3

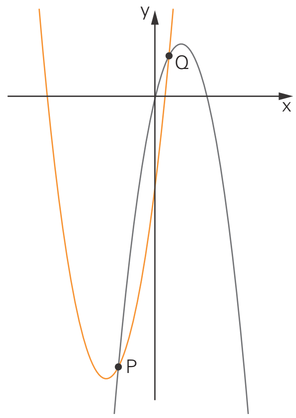
b) -2

c) 2

d) 4

e) 6

10. Uerj – No plano cartesiano a seguir, estão representados os gráficos das funções f e g, sendo P e Q seus pontos de interseção.



$f(x) = 4x - x^2, x \in \mathbb{R}$

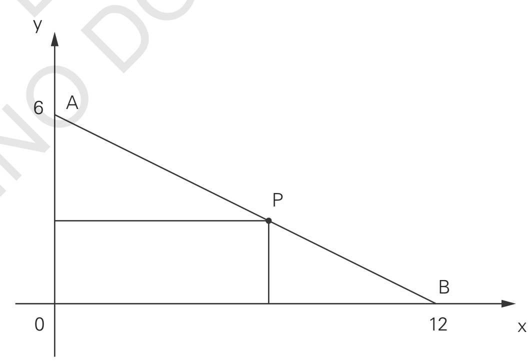
$g(x) = x^2 + 8x - 6, x \in \mathbb{R}$

Determine a medida do segmento $\overline{PQ}$.

11. Unisc – Os pontos (0, −1), (1, 2) e (3, k) do plano são colineares. O valor de k é igual a

a) 0
b) 2
c) –2
d) 8
e) –8

12. PUC-Rio – Considere os pontos A = (0, 6) e B = (12, 0). Tomamos um ponto P sobre o segmento de reta $\overline{AB}$. Considere o retângulo R com um vértice na origem, um vértice em P e lados sobre os eixos x e y, conforme a figura abaixo.



a) Encontre a equação da reta r que passa pelos pontos A e B.

b) Sejam (x, y) as coordenadas do ponto P. Escreva, em função apenas de x, uma fórmula para a área do retângulo R.

c) Qual é a maior área possível para o retângulo R?

13. FGV – Os pares (x, y) dados abaixo pertencem a uma reta (r) do plano cartesiano:

X	–4	–2	0	2	4
Y	–24	–14	–4	6	16

Podemos afirmar que

a) a reta (r) intercepta o eixo das abscissas no ponto de abscissa (– 4).

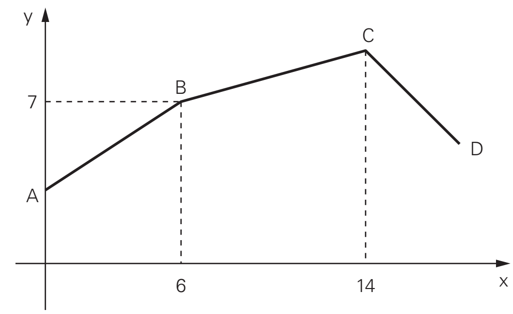
b) o coeficiente angular da reta (r) é – 5.

c) a reta (r) determina com os eixos cartesianos um triângulo de área 1,6.

d) y será positivo se, e somente se, $x > -\frac{4}{5}$.

e) A reta (r) intercepta o eixo das ordenadas no ponto de abscissa $\frac{4}{5}$.

14. ESPM (adaptado) – O gráfico abaixo é formado por 3 segmentos de retas consecutivos.



Sabe-se que:

I. O coeficiente angular do segmento AB é igual a $\frac{1}{2}$.

II. O coeficiente angular do segmento BC vale metade do coeficiente angular do segmento AB.

III. A ordenada do ponto D é $\frac{2}{3}$ da ordenada do ponto C.

IV. O coeficiente angular do segmento CD é igual a – 1.

Podemos concluir que a abscissa do ponto D vale:

a) 17

b) 19

c) 15

d) 18

e) 16

15. UCPel-RS – Considerando que as três retas no plano xy dadas pelas equações $y = 2 - 4x$, $x + 4y - 3 = 0$ e $y = 2b - 3x$ interceptam-se num ponto P, pode-se afirmar que o valor de b é

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{6}$

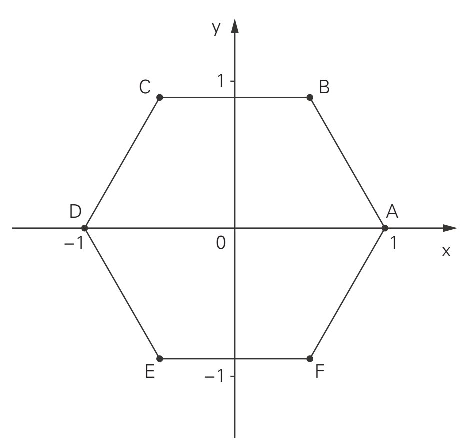
c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{5}{6}$

e) $\frac{5}{3}$

16. EFOMM (adaptado) – A forma de uma montanha pode ser descrita pela equação $y = -x^2 + 17x - 66$ $(6 \leq x \leq 11)$. Considere um atirador munido de um rifle de alta precisão, localizado no ponto (2, 0). A partir de que ponto, na montanha, um indefeso coelho estará 100% seguro?

17. UFRGS – Os pontos A, B, C, D, E e F determinam um hexágono regular ABCDEF de lado 1, tal que o ponto A tem coordenadas (1, 0) e o ponto D tem coordenadas (–1, 0), como na figura abaixo.



A equação da reta que passa pelos pontos B e D é

a) $y = \sqrt{3}x$

b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

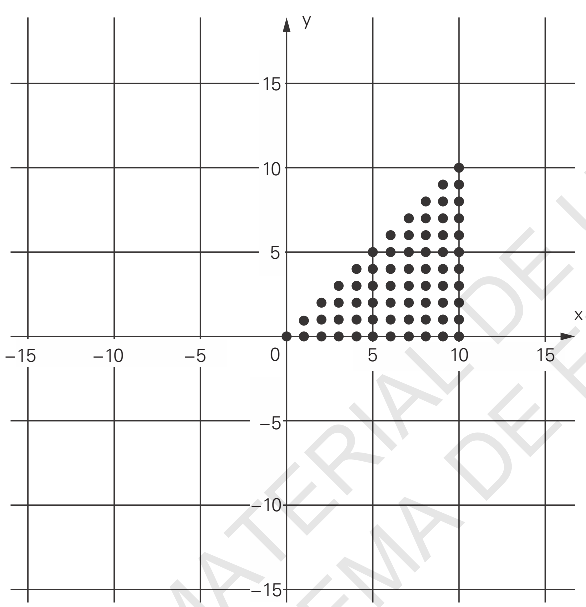
d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H20

Para criar um logotipo, um profissional da área de design gráfico deseja construí-lo utilizando o conjunto de pontos do plano na forma de um triângulo, exatamente como mostra a imagem.



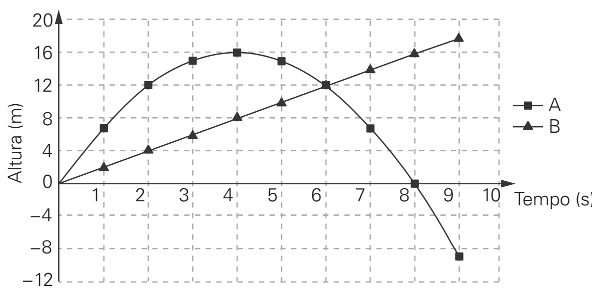
Para construir tal imagem utilizando uma ferramenta gráfica, será necessário escrever algebricamente o conjunto que representa os pontos desse gráfico.

Esse conjunto é dado pelos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tais que

a) $0 \leq x \leq y \leq 10$
b) $0 \leq y \leq x \leq 10$
c) $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$
d) $0 \leq x + y \leq 10$
e) $0 \leq x + y \leq 20$

19. Enem C5-H22

Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



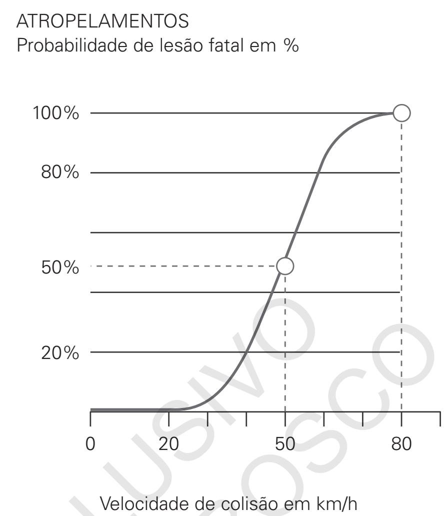
Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

a) diminuir em 2 unidades.
b) diminuir em 4 unidades.
c) aumentar em 2 unidades.
d) aumentar em 4 unidades.
e) aumentar em 8 unidades.

20. PUC-SP C5-H22

O jornal *Folha de S.Paulo* publicou em 11 de outubro de 2016 a seguinte informação:



Fonte: Prefeitura de São Paulo e CET. (Adaptado)

De acordo com as informações apresentadas, suponha que, para uma velocidade de 35 km/h, a probabilidade de lesão fatal seja de 5% e que, para velocidades no intervalo [35; 55], o gráfico obedeça a uma função do 1º grau. Nessas condições, se um motorista dirigindo a 55 km/h quiser reduzir a probabilidade de lesão fatal por atropelamento à metade, ele terá que reduzir a sua velocidade em, aproximadamente,

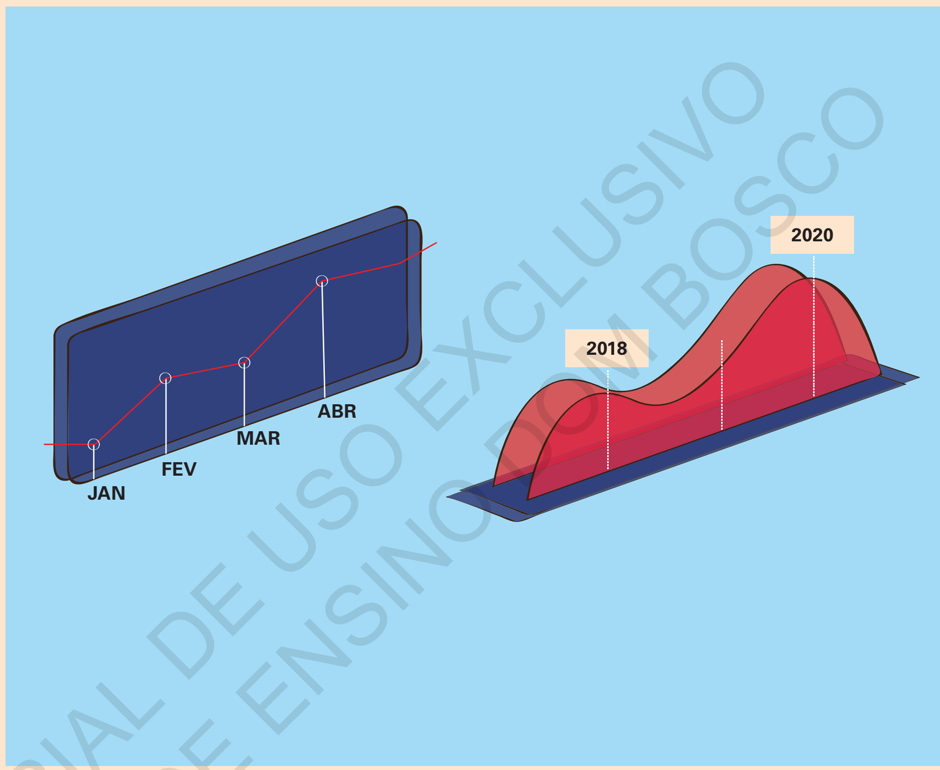
a) 20%
b) 25%
c) 30%
d) 35%

48 ESTUDO DA RETA – OUTRAS EQUAÇÕES DA RETA

- Equação da reta

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.



Gráficos são usados para expressar dados e informações. Com base na observação dessas representações, é possível elaborar argumentos e construir ações a respeito dos contextos que os envolvem.

Introdução

A Matemática é uma importantíssima aliada dos gestores empresariais. Com base nessa área do conhecimento, é possível saber com precisão a eficácia de processos, analisar o desempenho de colaboradores e verificar a qualidade dos produtos. Todos esses dados servem para manter uma empresa ativa no mercado.

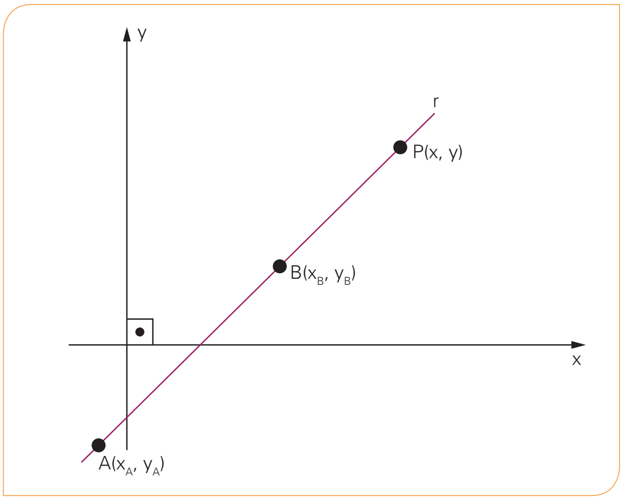
A Geometria analítica está presente nas análises do setor de qualidade de uma empresa, uma vez que projeções de desenvolvimento podem ser analisadas com gráficos e aproximações de dados, traçando-se retas para melhor compreensão das informações, por exemplo.

EQUAÇÕES DA RETA

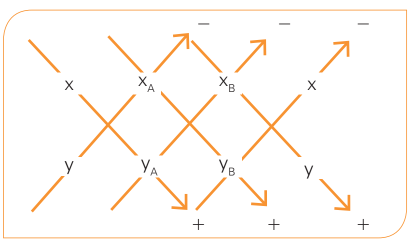
No módulo anterior, começamos a estudar as equações da reta, com a abordagem da equação fundamental da reta. Agora, daremos prosseguimento ao estudo dessas equações, analisando as do tipo geral, reduzida e segmentária da reta, além das equações paramétricas da reta.

Equação geral da reta

Vamos considerar três pontos distintos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $P(x, y)$, de uma reta **r** qualquer.



Uma equação de **r** pode ser obtida por meio de uma regra prática conhecida como regra do agrimensor, uma vez que, por pertencerem à mesma reta, os pontos são colineares. Com isso, temos:



$$xy_A + x_Ay_B + x_By - x_Ay - x_By_A - xy_B = 0$$
$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + (x_Ay_B - x_By_A) = 0$$

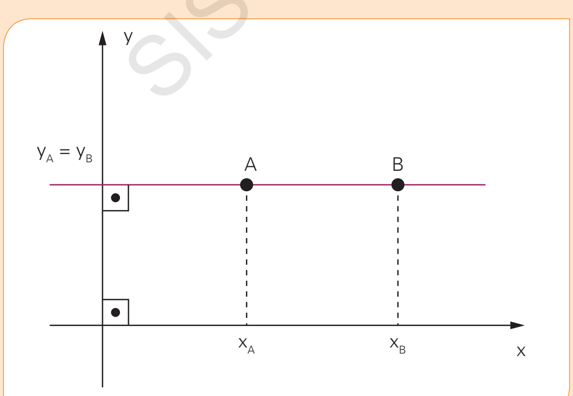
Ao calcularmos $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$ e $x_Ay_B - x_By_A = c$, temos a **equação geral da reta**:

$$ax + by + c = 0$$

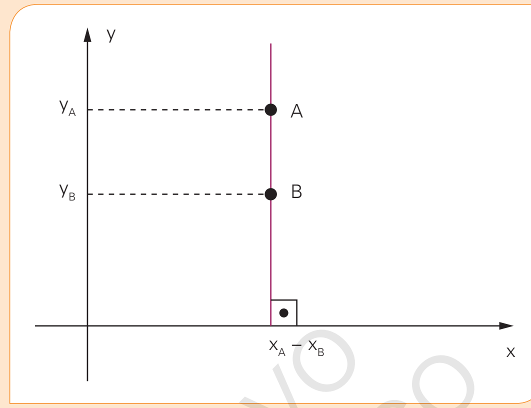
Não é possível ter simultaneamente a = 0 e b = 0, pois, nesse caso, $y_A = y_B$ e $x_B = x_A$. Assim, os pontos **A** e **B** seriam coincidentes. Logo, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Observações:

I. Se a = 0, temos que $y_A = y_B$. Desse modo, a reta é paralela ao eixo **x**, conforme o gráfico.



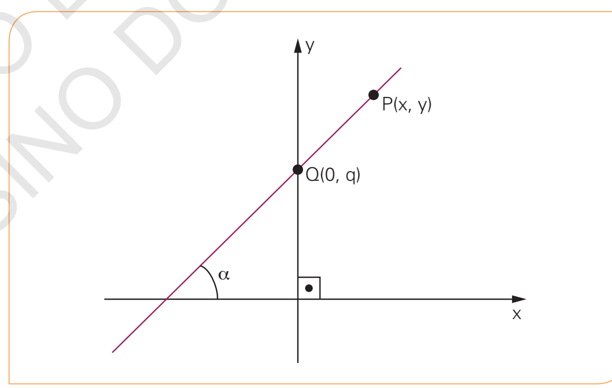
II. Se b = 0, temos que $x_A = x_B$. Assim, a reta é paralela ao eixo **y**, conforme o gráfico.



III. Se c = 0, a reta passa pela origem, pois (0, 0) é uma solução de ax + by = 0.

Equação reduzida da reta

Observe o gráfico:



Ao escrevermos a equação fundamental da reta **r** que corta o eixo **y** no ponto **Q**(0, n), passa pelo ponto **P**(x, y) e forma um ângulo α com o eixo das abscissas, com coeficiente angular **m** conhecido, obtemos:

$$y - n = m(x - 0) \rightarrow y = mx + n$$

Além disso:

- **m**: coeficiente angular de **r** (tg α);
- **n**: coeficiente linear de **r** (ordenada).

A **equação reduzida da reta** é descrita por:

$$y = mx + n$$

Com base na equação geral da reta, podemos escrever sua equação reduzida:

$$ax + by + c = 0 \rightarrow by = -ax - c \rightarrow$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (\text{desde que } b \neq 0)$$

Logo, os coeficientes **m** e **n**, que, na forma reduzida da reta, são fornecidos diretamente na equação, podem ser obtidos por meio da seguinte relação na equação geral da reta:

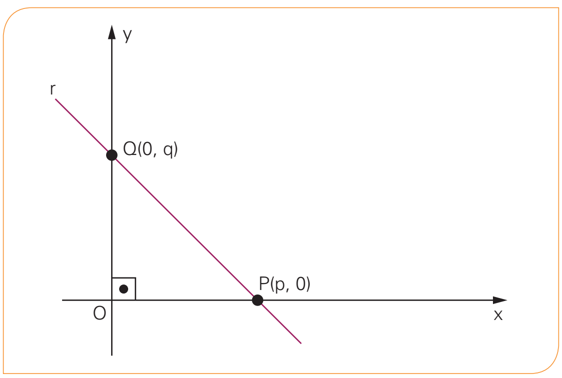
$$m = -\frac{a}{b}$$

$$n = -\frac{c}{b}$$

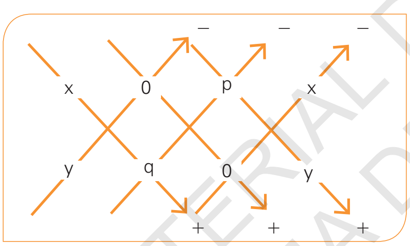
Já as retas com inclinação de 90° (paralelas ao eixo **y**) não têm equação na forma reduzida.

Equação segmentária da reta

No gráfico a seguir, a reta **r** intercepta os eixos cartesianos nos pontos P(p, 0) e Q(0, q), com $p \cdot q \neq 0$.



Ao utilizar a regra prática, obtemos a equação da reta **r**:



Assim,
qx + 0 + py – 0 – pq – 0 = 0 → qx + py = pq.

Ao dividirmos ambos os membros por **pq**, obtemos:

$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq}$$

Finalmente, encontramos a **equação segmentária da reta r**:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Importante!
Os denominadores de **x** e **y** na equação segmentária são, respectivamente, a abscissa do ponto em que **r** intercepta o **eixo x** e a ordenada do ponto em que **r** intercepta o **eixo y**.

Equação paramétrica da reta

Vamos considerar uma reta **r** não paralela a algum dos eixos cartesianos que passa pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

As equações paramétricas da reta são descritas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}$$

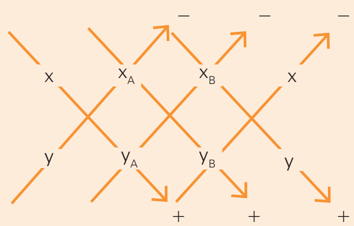
Observações:
- O **t** na equação paramétrica corresponde a um número real e é denominado **parâmetro** das equações.
- Ao isolarmos o número **t** e igualarmos as equações, obtemos a equação geral da reta.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Qual a equação geral da reta que passa pelos pontos A(1, 4) e B(3, 2)?

Resolução

Como os pontos pertencem à mesma reta, estão alinhados. Logo, para encontrar a equação geral da reta, aplicamos a regra prática.



$$\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ y & 2 & y \end{vmatrix} \rightarrow 4x + 2 + 3y - y - 12 - 2x = 0 \rightarrow 2x +$$

$+ 2y - 10 = 0$

Dividindo todos os membros da equação por 2, obtemos a equação geral da reta:

$x + y - 5 = 0$

2. Sistema Dom Bosco – Qual a equação reduzida da reta que possui inclinação de 45° com o eixo horizontal e corta o eixo y no ponto A(0, 4)?

Resolução

O coeficiente angular da reta **m** corresponde à tangente do ângulo α.

$m = tg\ \alpha = tg\ 45° = 1$

Escrevendo a equação reduzida da reta, temos:

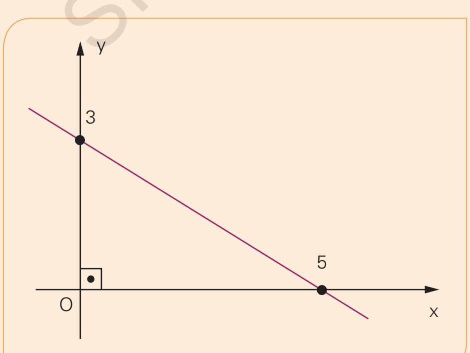
$y = mx + q$

$q = 4$ (termo independente)

$y = 1 \cdot x + 4$

Portanto, $y = x + 4$.

3. Sistema Dom Bosco – Qual a equação segmentária da reta r que corta os eixos x e y, conforme o gráfico abaixo?



Resolução

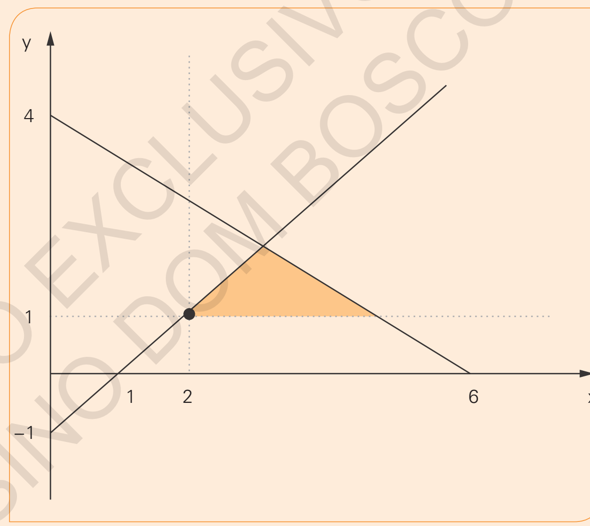
Na equação segmentária da reta, **q** corresponde ao valor do eixo **y** (ordenada), que é interceptado pela reta. Além disso, p corresponde ao valor do eixo **x** (abscissa), que é cortado pela reta. Assim, a equação segmentária da reta será:

$q = 3$ e $p = 5$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Portanto, $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$

4. UPE – Qual é a medida da área do triângulo destacado na figura abaixo?



a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{5}$ **e)** $\frac{5}{4}$

Resolução

Calculando os pontos dos vértices do triângulo hachurado, temos:

Função crescente: $y_1 = x - 1$.

Função decrescente: $y_2 = -\frac{4}{6}x + 4$.

Interseção entre as duas retas:

$x - 1 = \frac{4}{6}x + 4 \rightarrow x = 3$ e $y = 2$

Quando $y_2 = 1$, **x** será:

$1 = -\frac{4}{6}x + 4 \rightarrow x = 4,5$

Logo, o triângulo tem vértices com coordenadas (4,5; 1), (2; 1) e (3; 2).

Assim, a área do triângulo será:

$$A = \frac{[(4,5-2)\cdot(2-1)]}{2} = \frac{2,5}{2}$$

Portanto, $A = \frac{5}{4}$.

ROTEIRO DE AULA

ESTUDO DA RETA – OUTRAS EQUAÇÕES DA RETA

Equação geral da reta

$ax + by + c = 0$

Equação reduzida da reta

$y = mx + q$

Equação segmentária da reta

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

Equação paramétrica da reta

$x = x_A + t\,(x_B - x_A)$

$y = y_A + t\,(y_B - y_A)$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Ifal (adaptado) – A equação da reta que passa pelos pontos A(–1, 2) e B(0, –4), pertencentes ao plano cartesiano, pode ser representada por

a) $6x + y + 4 = 0$
b) $-6x - y + 4 = 0$
c) $x + 6y + 4 = 0$
d) $6x + y - 4 = 0$
e) $6x - y + 4 = 0$

$y = mx + q$

$m = \frac{-4-2}{0-(-1)} \rightarrow m = -6$

$y = -6x + q$

Como B (0, –4), temos:

$-4 = -6 \cdot 0 + b \rightarrow b = -4$

Assim:

$y = -6x + -4$

Portanto, $6x + y + 4 = 0$.

2. Enem **C6-H25**

Os procedimentos de decolagem e pouso de uma aeronave são os momentos mais críticos de operação, necessitando de concentração total da tripulação e da torre de controle dos aeroportos. Segundo levantamento da Boeing, realizado em 2009, grande parte dos acidentes aéreos com vítimas ocorre após iniciar-se a fase de descida da aeronave. Desta forma, é essencial para os procedimentos adequados de segurança monitorar-se o tempo de descida da aeronave.

A tabela mostra a altitude y de uma aeronave, registrada pela torre de controle, t minutos após o início dos procedimentos de pouso.

Considere que, durante todo o procedimento de pouso, a relação entre y e t é linear.

tempo t (em minutos)	0	5	10	15	20
altitude y (em metros)	10 000	8 000	6 000	4 000	2 000

Disponível em: <www.meioaereo.com>.

De acordo com os dados apresentados, a relação entre y e t é dada por

a) $y = -400t$
b) $y = -2\,000t$
c) $y = 8\,000 - 400t$
d) $y = 10\,000 - 400t$
e) $y = 10\,000 - 2\,000t$

Analisando a tabela e escrevendo a equação reduzida da reta $y = mx + q$, obtemos:

$q = 10\,000$ e $x = t$

Como o ponto (20, 2 000) pertence à reta, podemos escrever:

$y = mx + q \rightarrow 2\,000 = m \cdot 20 + 10\,000 \rightarrow m = -400$

Logo, $y = -400t + 10\,000$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

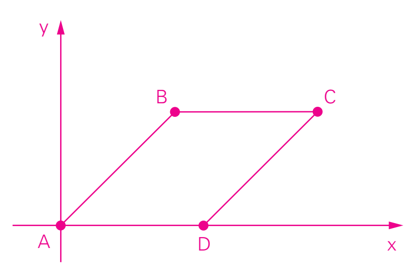
Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

3. Uema – O método analítico em Geometria é uma ferramenta muito utilizada em estudo de coordenadas. Para fazer uma aplicação desse método, um professor lançou o seguinte desafio aos seus alunos: teriam de construir, em sistema de coordenadas, a figura de um paralelogramo ABCD, cujo ponto A está na origem; o ponto D(5, 0) e a diagonal maior com extremidade no ponto C(9, 4).

Com base nas informações,

a) faça o esboço em sistema de coordenadas da figura que representa o paralelogramo.
b) determine a equação da reta que contém a diagonal maior.

a) Pelo descrito no texto, temos o seguinte esboço:



b) A diagonal passa pela origem (0, 0) e pelo ponto (9, 4). Logo, a equação reduzida da reta será:

$y = \frac{4-0}{9-0} \cdot x \rightarrow y = \frac{4}{9} \cdot x$

4. Unioeste-PR – Duas retas, y = ax e y = bx + c, com a, b e c constantes reais, encontram-se no ponto (3, 2). Sabe-se ainda que b = –3a. Assim, é CORRETO afirmar que as equações das retas são

a) $y=\frac{2}{3}x$ e $y=-2x+8$

b) $y=\frac{3}{2}x$ e $y=-3x+2$

c) $y=\frac{2}{3}x$ e $y=-3x+2$

d) $y=-x$ e $y=3x-3$

e) $y=3x$ e $y=-9x+2$

Como as retas se encontram no ponto (3, 2) e b = – 3a, temos:

$y = ax$

$2 = 3a \rightarrow a = \frac{2}{3}$

$b = -3a = -3 \cdot \frac{2}{3} \rightarrow b = -2$

$y = bx + c \rightarrow 2 = -2 \cdot 3 + c \rightarrow c = 2 + 6 \rightarrow c = 8$

Logo, as equações são:

$y = ax \rightarrow y = \frac{2}{3}x$

$y = bx + c \rightarrow y = -2x + 8$

5. Unicamp-SP – No plano cartesiano, a reta de equação 2x – 3y = 12 intercepta os eixos coordenados nos pontos A e B. O ponto médio do segmento AB tem coordenadas

a) $\left(4, \frac{4}{3}\right)$ **b)** (3, 2) **c)** $\left(4, -\frac{4}{3}\right)$ **d)** (3, –2)

Por meio da equação segmentária da reta $\overline{AB}$, localizamos as coordenadas de A e B:

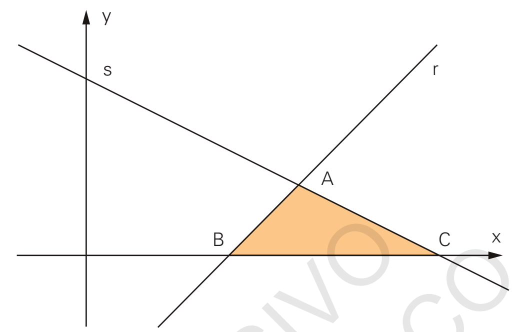
$2x - 3y = 12 \rightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{-4}=1$

Logo, as coordenadas de A e B são, respectivamente, A(6, 0) e B(0, – 4).
O ponto médio do segmentos que os une é:

$x_M = \left(\frac{6+0}{2}\right)=3$

$y_M = \left(\frac{0+(-4)}{2}\right)=-2$

6. PUC-Rio (adaptado) – Sejam r e s as retas de equações y = x – 2 e $y = -\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$, respectivamente, representadas no gráfico abaixo. Seja A o ponto de interseção das retas. Sejam B e C os pontos de interseção de r e s com o eixo horizontal, respectivamente.



Qual a área do triângulo ABC?

Pela equação da reta r, obtemos as coordenadas de B:

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow B(2, 0)$

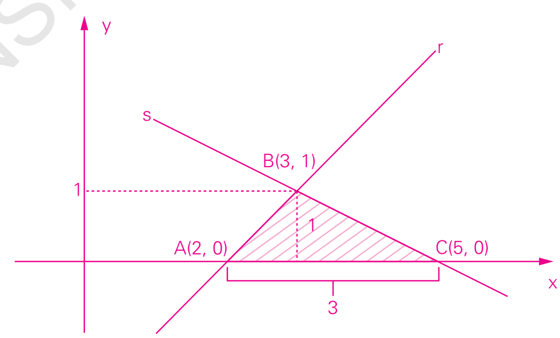
Pela equação da reta s, obtemos as coordenadas de C:

$-\frac{x}{2}+\frac{5}{2} = 0 \rightarrow -2x = -5 \cdot 2 \rightarrow x = 2 \rightarrow C(5, 0)$

O ponto A corresponde à interseção das retas r e s, sendo obtido pela resolução do sistema a seguir:

$\begin{cases} y = x-2 \\ y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow x = 3 \text{ e } y = 1 \rightarrow A(3, 1)$

Localizadas as coordenadas de A, B e C, conforme o gráfico, calculamos a área do triângulo solicitada.

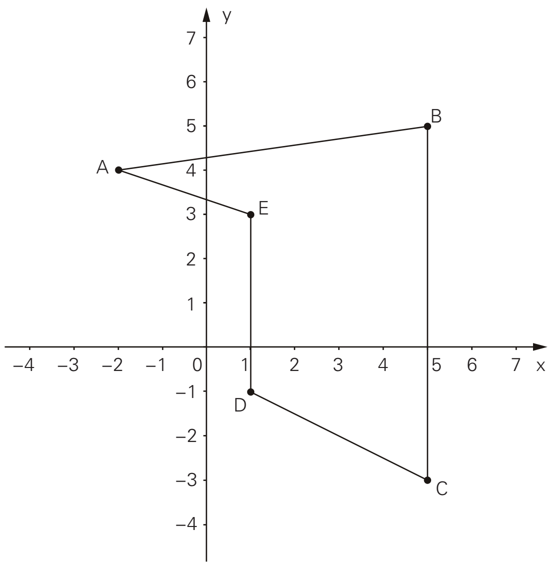


$A = \frac{3 \cdot 1}{2}$

Portanto, A = 1,5.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UFRGS – No pentágono representado no sistema de coordenadas cartesianas abaixo, os vértices possuem coordenadas inteiras.



As retas suporte dos lados $\overline{AE}$ e $\overline{BC}$ interceptam-se no ponto

a) $\left(5, \dfrac{4}{3}\right)$

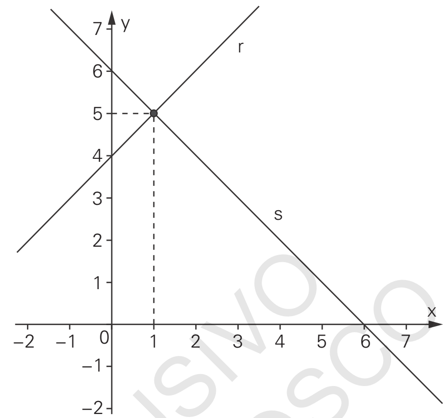
b) $\left(5, \dfrac{5}{2}\right)$

c) $\left(5, \dfrac{5}{3}\right)$

d) $\left(5, \dfrac{5}{4}\right)$

e) $\left(5, \dfrac{6}{5}\right)$

8. UFRGS – A representação geométrica das retas r e s encontra-se desenhada no sistema de coordenadas cartesianas na imagem a seguir.



Assinale a alternativa que apresenta o sistema de equações lineares que pode representar as retas r e s da imagem acima.

a) $\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 5x + 5y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$

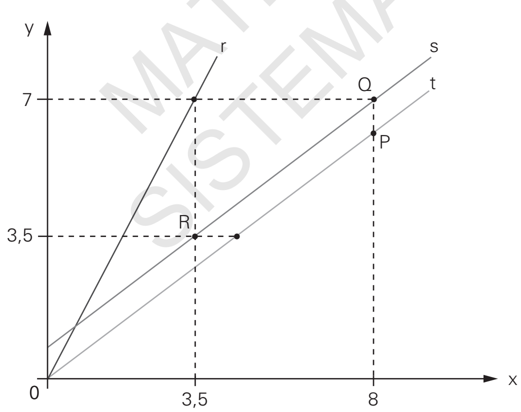
d) $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$

9. UPE – Qual é a medida da área do quadrilátero limitado pelas retas (r) $y = 4$; (s) $3x - y - 2 = 0$; (t) $y = 1$; e (u) $3x + 2y - 20 = 0$?

a) 7,5
b) 9,0
c) 10,5
d) 11
e) 12

10. Unifesp – Na figura, as retas r, s e t estão em um mesmo plano cartesiano. Sabe-se que r e t passam pela origem desse sistema, e que PQRS é um trapézio.



a) Determine as coordenadas do ponto de interseção entre as retas r e s.

b) Prove que os lados não paralelos do trapézio PQRS não possuem a mesma medida, ou seja, que o trapézio PQRS não é isósceles.

11. Unicamp-SP – No plano cartesiano, a equação $|x - y| = |x + y|$ representa

a) um ponto.
b) uma reta.
c) um par de retas paralelas.
d) um par de retas concorrentes.

12. Uece – Em um plano, munido do referencial cartesiano usual, seja A o ponto de interseção das retas $3x + y + 4 = 0$ e $2x - 5y + 14 = 0$. Se os pontos B e C são respectivamente as interseções de cada uma dessas retas com o eixo x, então, a área do triângulo ABC é igual a

a) $\frac{13}{3}$ u.a. **b)** $\frac{14}{3}$ u.a. **c)** $\frac{16}{3}$ u.a. **d)** $\frac{17}{3}$ u.a.

13. UPF-RS – Num referencial xy, A e B são dois pontos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. A equação que pode representar a mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$ é:

a) $3x + 3y = 0$

b) $x = 0$

c) $y = 0$

d) $3x - 3y = 0$

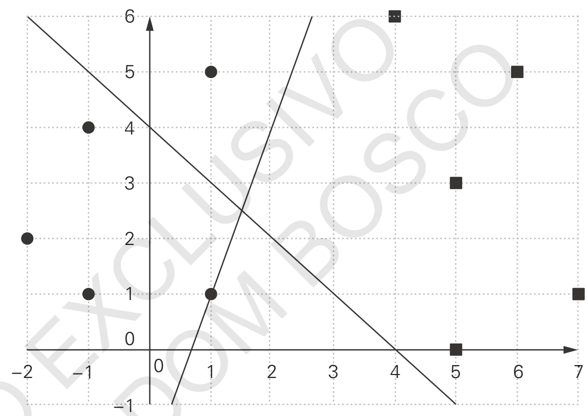
e) $\frac{x+y}{2} = 0$

14. UFPR – Considere os conjuntos de pares ordenados

C = {(–2, 2), (–1, 1), (–1, 4), (1, 1), (1, 5)} e Q = {(4,6), (5,0), (5, 3), (6, 5), (7, 1)}.

Diremos que a reta r separa os pontos dos conjuntos C e Q quando nenhum elemento de C está à direita da reta r e nenhum elemento de Q está à esquerda da reta r.

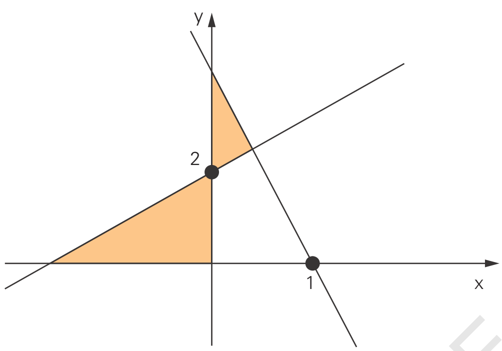
Na figura abaixo, podemos ver que a reta de equação $y = 3x - 2$ separa os pontos de C e Q. Por outro lado, a reta de equação $y = -x + 4$ não separa os pontos de C e Q, pois o par ordenado (1, 5) pertence ao conjunto C e está à direita dessa reta.



a) A reta de equação $y = 2x + 1$ separa os pontos dos conjuntos C e Q? Justifique sua resposta.

b) Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ a reta de equação $y = ax - 3$ separa os pontos dos conjuntos C e Q?

15. UEMG – No gráfico representado a seguir, uma das retas esboçadas tem inclinação igual a – 3 e a outra reta, inclinação igual a $\frac{1}{2}$. Sabendo-se disso, a área (em unidade de área) da região hachurada é

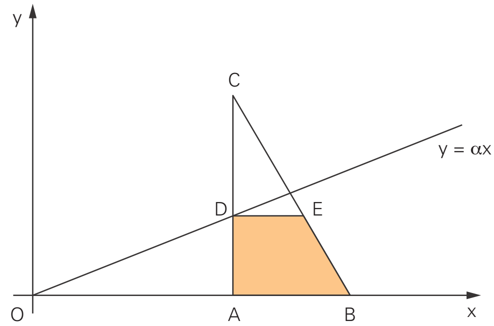


a) 6 u.a. **b)** $\frac{21}{5}$ u.a. **c)** $\frac{29}{7}$ u.a. **d)** $\frac{33}{7}$ u.a.

16. Udesc – Considere o prisma triangular com 8 u.c. de altura e a base sendo um triângulo ABC cujos vértices são os pontos de interseção das retas $2y = x$, $y + x = 3$ e $3y = ax$, com $a \in \mathbb{R}^*$. Se o volume desse prisma triangular é 12 u. v., o valor da soma das abscissas dos vértices do triângulo ABC é:

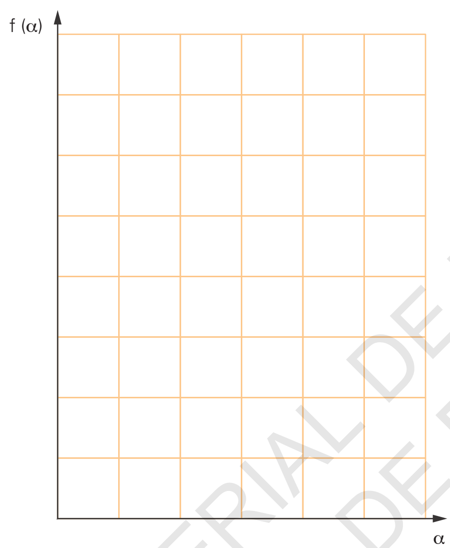
a) 5
b) 2
c) 4
d) 3
e) 1

17. Fuvest – No plano cartesiano real, considere o triângulo ABC, em que A = (5, 0), B = (8, 0), C = (5, 5), $y = \alpha x$, $0 \leq \alpha < 1$. Seja $f(\alpha)$ a área do trapézio ABED, em que D é a interseção da reta $y = \alpha x$ com a reta de equação x = 5, se o segmento DE é paralelo ao eixo Ox.



a) Encontre o comprimento do segmento DE em função de α.

b) Expresse $f(\alpha)$ e esboce o gráfico da função f.



ESTUDO PARA O ENEM

18. CFTMG (adaptado) C2-H7

Desenhando a planificação de um terreno, foram usadas as seguintes funções reais: $p(x) = 3x - 4$, $q(x) = -\frac{x}{2} + 4$ $r(x) = 3x - 10$ e $s(x) = 1$. Considerando todas as interseções entre essas retas, o único quadrilátero que pode ser desenhado, utilizando quatro dessas interseções como vértices, é um

a) losango.

b) trapézio.

c) quadrado.

d) retângulo.

e) paralelogramo.

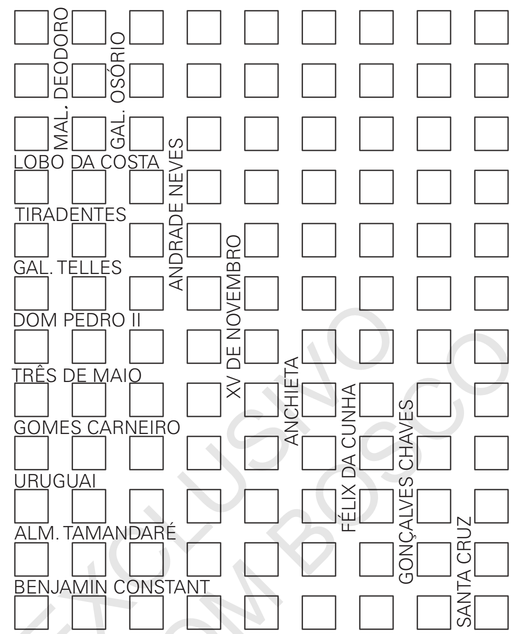
19. PUC-Minas (adaptado) C5-H22

No final do ano de 2005, o número de casos de dengue registrados em certa cidade era de 400 e, no final de 2013, esse número passou para 560. Admitindo-se que o gráfico do número de casos registrados em função do tempo seja formado por pontos situados em uma mesma reta, é correto afirmar que, no final de 2015, o número de casos de dengue registrados será igual a:

a) 580
b) 590
c) 600
d) 610
e) 640

20. IFSul-RS (adaptado) C2-H6

Observe a figura abaixo, na qual estão representadas algumas ruas de Pelotas.



Considere que:

1. As larguras das ruas sejam desprezíveis e o lado de cada quadra seja 01 (uma) unidade de medida;
2. Todas as quadras sejam quadradas de dimensões iguais;
3. A rua Gomes Carneiro seja o EIXO DAS ABSCISSAS;
4. A rua XV de Novembro seja o EIXO DAS ORDENADAS;
5. O cruzamento das ruas Tiradentes e Mal. Deodoro seja o PONTO A;
6. O cruzamento das ruas Alm. Tamandaré e Gonçalves Chaves seja o PONTO B.

A equação da reta que passa pelos pontos A e B é

a) $x + y + 1 = 0$
b) $x + y - 1 = 0$
c) $x - y - 1 = 0$
d) $x - y + 1 = 0$
e) $x + y + 2 = 0$

49

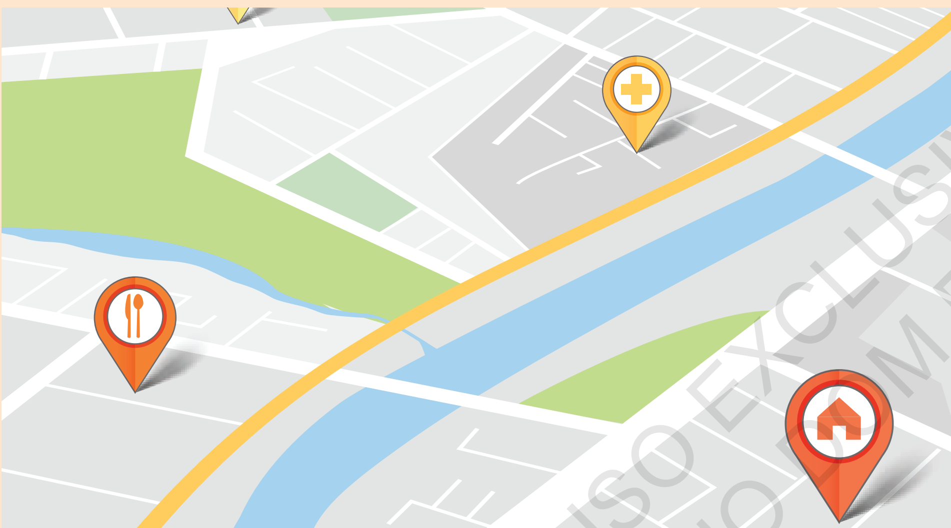
ESTUDO DA RETA – POSIÇÃO RELATIVA ENTRE RETAS

- Posições relativas de duas retas

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.

WANPATSORN/SHUTTERSTOCK



Mapa de ruas com alguns pontos importantes, como restaurante e hospital.

Introdução

Quando buscamos um endereço ou andamos pelas ruas de uma cidade e nos guiamos por mapas, usamos os conceitos de distância de ponto e reta. Além disso, em situações comuns, consideramos ruas paralelas ou transversais. Assim, a distância, as retas e a posição das ruas influenciam diariamente nossos trajetos.

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

Vamos considerar duas retas do plano cartesiano com equações:

r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Além disso, $a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2 \neq 0$. Isto é, as retas não são paralelas a algum dos eixos cartesianos.

Ao colocarmos as equações na forma reduzida, temos:

r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \rightarrow y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1}$

s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \rightarrow y = -\dfrac{a_2}{b_2}x - \dfrac{c_2}{b_2}$

Então, os coeficientes angular e linear das retas são:

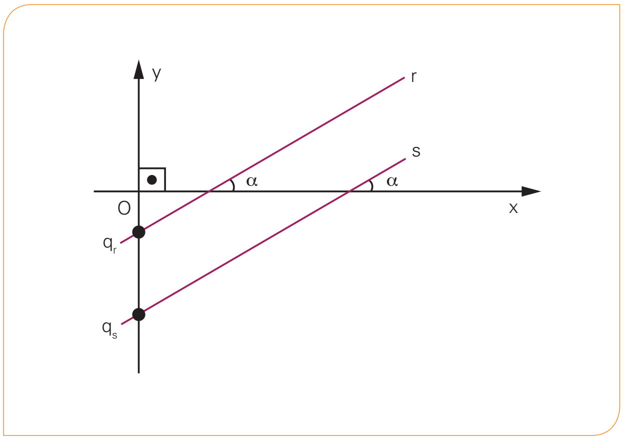
$$m_r = -\frac{a_1}{b_1};\ m_s = -\frac{a_2}{b_2}$$

$$n_r = -\frac{c_1}{b_1};\ n_s = -\frac{c_2}{b_2}$$

Com os elementos obtidos, pensamos nas posições possíveis de **r** e **s** no plano cartesiano.

Retas paralelas distintas

Duas retas com diferentes coeficientes lineares formam ângulos congruentes em relação ao eixo **x** (abscissa), ou seja, ambas têm o mesmo coeficiente angular. Desse modo, elas são denominadas **retas paralelas** entre si.



$r \parallel s \quad \leftrightarrow \quad m_r = m_s \quad e \quad n_r \neq n_s$

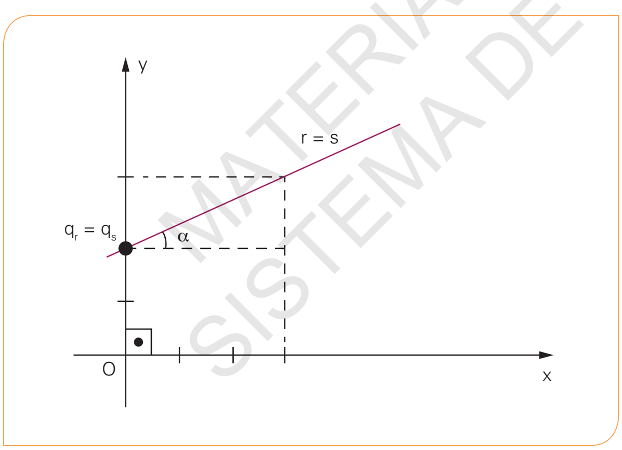
Assim:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$-\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_2}{b_2} \rightarrow \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Retas paralelas coincidentes

Duas retas com o mesmo coeficiente angular e o mesmo coeficiente linear são denominadas **retas coincidentes**, conforme o gráfico:



$m_r = m_s \quad e \quad n_r = n_s$

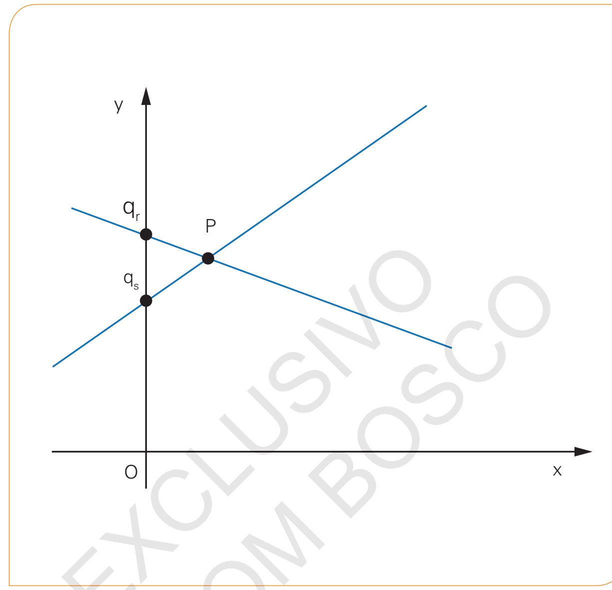
Assim:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2} \rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Retas concorrentes

Duas retas com diferentes coeficientes angulares e um ponto de interseção **P**, podendo ou não ter o mesmo coeficiente linear, são denominadas **retas concorrentes**.



$m_r \neq m_s$

Assim:

$$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}$$

Observações:

- Se alguma das retas for paralela a algum dos eixos coordenados, a resolução do sistema se torna imediata.
- Se as retas forem concorrentes em um ponto **P**, para obter esse ponto, basta resolvermos o sistema formado pelas equações de **r** e **s**.

Exemplo:

Vamos determinar o ponto de interseção das seguintes retas:

r: $3x - y - 11 = 0$

s: $5x + 2y - 22 = 0$

Escrevendo o sistema de equações lineares e resolvendo-o, temos:

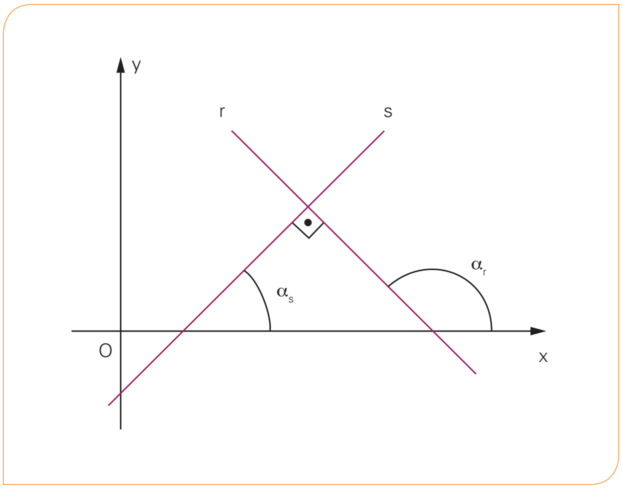
$$\begin{cases} 3x - y = 11 \\ 5x - 2y = 22 \end{cases}$$

Logo, $x = 1$ e $y = 4$.

Assim, as retas **r** e **s** se interceptam no ponto P(1, 4).

Retas perpendiculares entre si

Duas retas concorrentes que formam 90° entre si, não paralelas ao eixo **y**, são denominadas **retas perpendiculares**.



$r \perp s \rightarrow \alpha_r = \alpha_s + 90°$

$$m_r = \text{tg}\ \alpha_r = \text{tg}\ (\alpha_s + 90°) = \frac{\text{sen}\left(\alpha_s + 90°\right)}{\cos\left(\alpha_s + 90°\right)}$$

$$m_r = \frac{\text{sen}\ \alpha_s \cdot \cos 90° + \text{sen}\ 90° \cdot \cos \alpha_s}{\cos 90° \cdot \cos \alpha_s - \text{sen}\ 90° \cdot \text{sen}\ \alpha_s} =$$

$$= \frac{\text{sen}\ \alpha_s \cdot 0 + 1 \cdot \cos \alpha_s}{0 \cdot \cos \alpha_s - 1 \cdot \text{sen}\ \alpha_s} = \frac{\cos \alpha_s}{-\text{sen}\ \alpha_s} = -\frac{1}{\text{tg}\ \alpha_s}$$

Como $m_s = \text{tg}\ \alpha_s$, $m_r = -\dfrac{1}{m_s}$.

Logo, $r \perp s \rightarrow m_s \cdot m_r = -1$.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Unioeste-PR – Os valores de k para que as retas 2x + + ky = 3 e x + y = 1 sejam paralelas e perpendiculares entre si, respectivamente, são:

a) $-\dfrac{3}{2}$ e 1.

b) – 1 e 1.

c) 1 e – 1.

d) – 2 e 2.

e) 2 e – 2.

Resolução

Para que as retas **r** e **s** sejam paralelas, seus coeficientes angulares devem ser iguais. Assim:

$$r: 2x + ky = 3 \ \rightarrow \ ky = -2x + 3 \ \rightarrow \ y = -\frac{2x}{k} + 3$$

Portanto, $m_r = -\dfrac{2}{k}$.

$s: x + y = 1 \ \rightarrow \ y = -x + 1$

Dessa forma, $m_s = -1$.

$m_r = m_s$

$-\dfrac{2}{k} = -1$

Logo, k = 2.

Para que as retas **r** e **s** sejam perpendiculares, $m_s \cdot m_r = -1$.

Assim, $-\dfrac{2}{k} \cdot (-1) = -1$.

Então, k = – 2.

2. ESPM – Seja A = (4, 2) um ponto do plano cartesiano e sejam B e C os simétricos de A em relação aos eixos coordenados. A equação da reta que passa por A e é perpendicular à reta que passa por B e C é:

a) 2x – y = 6

b) x – 2y = 0

c) x – y = 2

d) x + 2y = 8

e) x + y = 6

Resolução

B = (4, – 2) e C = (– 4, 2)

Logo, o coeficiente angular da reta **r** que passa pelos pontos **B** e **C** é:

$$m_r = \frac{2-(-2)}{-4-4} = -\frac{1}{2}$$

A reta **s** será perpendicular à reta **r**, que passa pelos pontos **B** e **C**. Assim, temos:

$$m_s \cdot m_r = -1 \ \rightarrow \ m_s \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \ \rightarrow \ m_s = 2$$

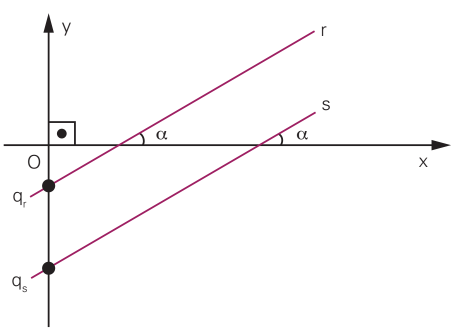
Como a reta **s** passa pelo ponto A(4, 2), obtemos:

$$y - 2 = 2 \cdot (x - 4) \ \rightarrow \ y = 2x - 8 + 2 \ \rightarrow \ 2x - y = 6$$

ROTEIRO DE AULA

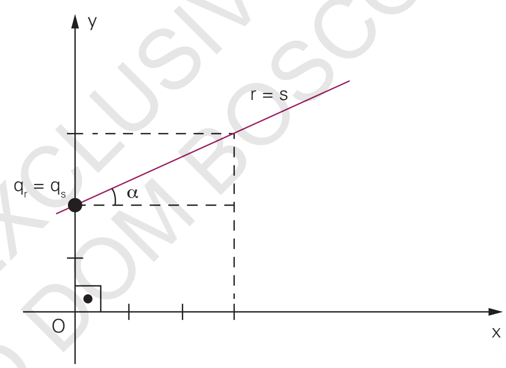
ESTUDO DA RETA – POSIÇÃO RELATIVA ENTRE RETAS

Retas paralelas distintas



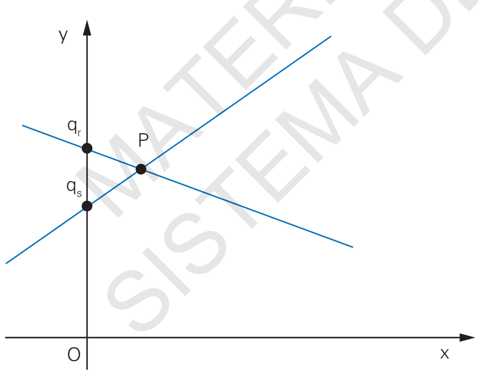
$m_r =$ m_s e $q_r \neq$ q_s

Retas paralelas coincidentes



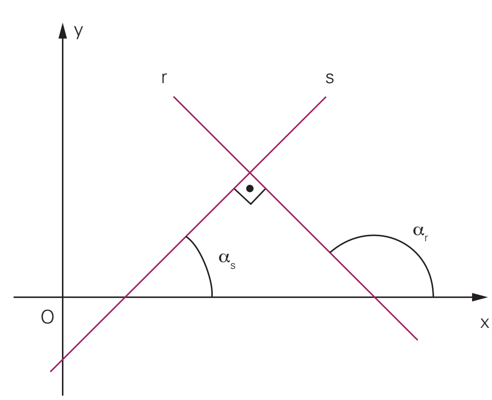
$m_r =$ m_s e $q_r =$ q_s

Retas coincidentes



$m_r =$ m_s

Retas perpendiculares entre si



$m_s \cdot m_r$ $= -1$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UEM-PR – Considerando as retas r: $x - y = 1$, s: $2x - 2y - 4 = 0$ e t: $y = -x + 3$, assinale o que for **correto**.

01) As retas s e t são perpendiculares.
02) As retas s e r se interceptam em um único ponto.
04) O ponto (4, 3) pertence à reta r, mas não pertence às outras retas.
08) As retas r e t se interceptam em (2, 1).
16) As retas s e r têm o mesmo coeficiente angular.

Soma: 01 + 04 + 08 + 16 = 29.
01. Correta.
Simplificando a equação da reta s, temos:
s: $2x - 2y - 4 = 0 \rightarrow x - y - 4 = 0 \rightarrow y = x - 2$
Logo, $m_s = 1$.
t: $y = -x + 3 \rightarrow m_t = -1$
Como $m_s \cdot m_t = -1 \rightarrow s \perp t$.
02. Incorreta, pois as retas s e r são paralelas e não se interceptam.
04. Correta.
Substituindo (4, 3) nas equações das retas, temos:
r: $x - y = 1 \rightarrow 4 - 3 = 1$
s: $x - y - 2 = 0 \rightarrow 4 - 3 - 2 \neq 0$
t: $y = -x + 3 \rightarrow 3 \neq -4 + 3$
08. Correta.
r: $x - y = 1 \rightarrow y = x - 1$
t: $y = -x + 3$
$x - 1 = -x + 3 \rightarrow x = 2$ e $y = 1$
16. Correta, pois os coeficientes da reta r e da reta s são iguais ($m_s = m_r = 1$).

2. PUC-RS (adaptado) C2-H6

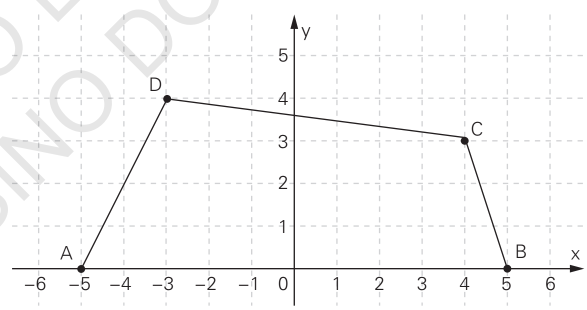
Dois amigos caminham no plano xy ao longo de retas paralelas cujas equações são $2x + 5y = 7$ e $3x + my = 1$. Então, o valor de m é

a) $\frac{11}{2}$
b) $\frac{13}{2}$
c) $\frac{15}{2}$
d) $\frac{17}{2}$
e) $\frac{2}{5}$

Retas paralelas têm o mesmo coeficiente angular. Portanto:
r: $2x + 5y = 7 \rightarrow y = -\frac{2x}{5} + \frac{7}{5}$
Logo, $m_r = -\frac{2}{5}$.
s: $3x + my = 1 \rightarrow y = -\frac{3}{m}x + \frac{1}{3}$
Assim, $m_s = -\frac{3}{m}$.
Portanto, $m_r = m_s \rightarrow -\frac{2}{5} = -\frac{3}{m}$.
Logo, $m = \frac{15}{2}$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

3. Unicamp-SP – A figura abaixo exibe, no plano cartesiano, um quadrilátero com vértices situados nos pontos de coordenadas A(– 5, 0), B(5, 0), C(4, 3) e D(– 3, 4).



a) Determine a área desse quadrilátero.
b) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta que passa pelos pontos B e C.

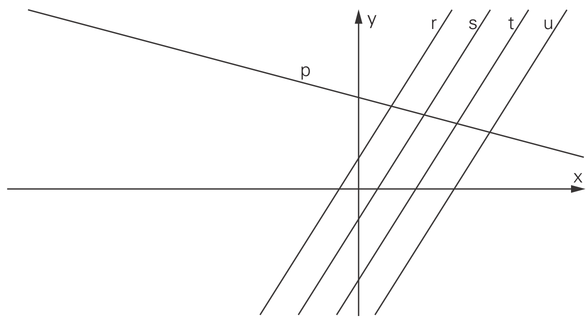
a) Por meio da regra prática, calculamos a área do quadrilátero ABCD.

$$D = \begin{vmatrix} -5 & 5 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 15 + 16 + 9 + 20 = 60$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |60| = 30 \text{ u.a.}$$

b) Primeiro encontramos o coeficiente angular da reta (m_{BC}) que passa pelos pontos B e C.
$m_{BC} = \frac{3 - 0}{4 - 5} = -3$
Conhecido m_{BC}, obtemos o coeficiente angular (m) da reta que passa por A e é perpendicular ao segmento que passa por B e C.
$m \cdot m_{BC} = -1 \rightarrow m \cdot (-3) = -1$
Logo, $m = \frac{1}{3}$.
Aplicando a equação fundamental da reta, encontramos a resposta.
$y - 0 = \frac{1}{3} \cdot [x - (-5)]$
Portanto, $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

4. UEG-GO – Na figura a seguir, as retas r, s, t, u são paralelas e seus coeficientes lineares estão em uma progressão aritmética de razão – 2.



Sabendo-se que a equação da reta p é $y = -\frac{1}{2}x + 3$ e da reta u é y = 3x – 5, o ponto de interseção da reta p com a reta s é

a) $\left(\frac{4}{7}, \frac{19}{7}\right)$

b) $\left(\frac{8}{7}, \frac{17}{7}\right)$

c) $\left(\frac{2}{7}, \frac{15}{7}\right)$

d) $\left(\frac{16}{7}, \frac{13}{7}\right)$

e) $\left(\frac{18}{7}, \frac{11}{7}\right)$

$s \,//\, u \rightarrow m_s = m_u = 3$

Como o coeficiente linear está em progressão aritmética em relação às retas, $q_s = -1$.

Assim, s: y = 3x – 1.

Igualando as equações de p e s, obtemos:

$3x - 1 = -\frac{1}{2}x + 3 \rightarrow x = \frac{8}{7}$

Substituindo x na equação de s, temos:

$y = 3 \cdot \frac{8}{7} - 1 = \frac{17}{7}$

Portanto, as coordenadas da interseção entre as retas são $\left(\frac{8}{7}, \frac{17}{7}\right)$.

5. Mackenzie (adaptado) – Qual a equação da mediatriz do segmento que une os pontos P = (1, –2) e Q = (5, 4)?

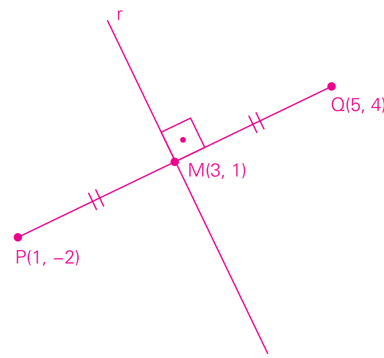
Primeiramente encontramos o coeficiente angular da equação da reta s que passa pelos pontos P e Q:

$m_s = \frac{4-(-2)}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Sendo a reta r a mediatriz do segmento PQ, temos $r \perp \overline{PQ}$.

Assim, $m_s \cdot m_r = -1 \rightarrow \frac{3}{2} \cdot m_r = -1 \rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$.

De acordo com o gráfico, obtemos o ponto em que a mediatriz intersecta o segmento PQ.



$x_M = \frac{1+5}{2} = 3$ e $y_M = \frac{4+(-2)}{2} = 1$

Logo, M(3, 1).

Com M e m_r, obtemos a equação da reta r:

$y - 1 = -\frac{2}{3} \cdot (x - 3) \rightarrow 3y - 3 = -2x + 6 \rightarrow 2x + 3y - 3 - 6 = 0$

Portanto, a equação da reta r é 2x + 3y – 9 = 0.

6. UEMG – Dadas as equações de reta r: x + y – 6 = 0 e s: 2x – y = 0 em um dado plano cartesiano de centro O. As retas r e s são concorrentes no ponto P, e a reta r intercepta o eixo das abscissas no ponto Q. O volume do sólido formado pela rotação da figura plana formada pelos pontos OPQ em torno do lado OQ é: (use $\pi \cong 3$)

a) 32 cm^3

b) 64 cm^3

c) 96 cm^3

d) 88 cm^3

Como o volume dado está em cm^3, vamos supor que o plano xy esteja graduado em centímetros.

A reta r intersecta o eixo x (abscissas) no ponto Q = (6, 0). E a abscissa do ponto obteremos analisando as equações de r e s:

$y - 2x = 0 \rightarrow y = 2x$

$x + y - 6 = 0 \rightarrow x + 2x = 6 \rightarrow x = 2$

$y = 2x = 2 \cdot 2 = 4$

Logo, P = (2, 4).

Convém que o volume do sólido solicitado corresponde à soma dos volumes de dois cones cujos raios da base medem 4 cm e cujas alturas medem, respectivamente, 2 cm e 4 cm. Assim, temos:

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4$

Portanto, $V \cong 96$ cm^3.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. EEAR – A reta s que passa por P(1,6) e é perpendicular a r: $y = \frac{2}{3}x + 3$ é

a) $y = \frac{3}{2}x$

b) $y = x + 5$

c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$

d) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$

8. Unisc – A equação da reta r que passa pelo ponto (16, 11) e que não intercepta a reta de equação $y = \frac{x}{2} - 5$ é

a) $y = \frac{x}{2} - 8$

b) $y = \frac{x}{2} + 11$

c) $y = \frac{x}{2} + 3$

d) $y = x - 8$

e) $y = x - 3$

9. UFJF-MG – Considere as retas $y = 5x + 8$ e $y = -5x + 8$. É CORRETO afirmar que:

a) As retas são paralelas.

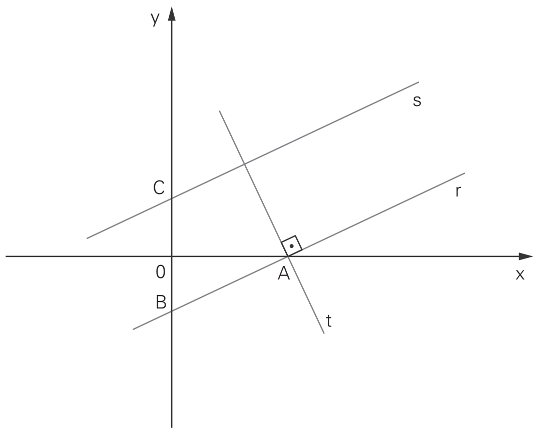
b) As retas são perpendiculares.

c) O ponto (4, 28) não pertence a nenhuma das duas retas.

d) O ponto (1, 10) pertence a pelo menos uma das duas retas.

e) As retas possuem um ponto em comum.

10. UPF-RS (adaptado) – Sobre a figura a seguir, sabe-se que a equação de r é $2y = x - 3$; que os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo das abscissas; que as retas r e s são paralelas; e que t é perpendicular a r.



Nessas condições, qual a equação reduzida da reta t?

11. Uece – Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, as equações $3x - 2y + 6 = 0$ e $3x + 4y - 12 = 0$ representam duas retas concorrentes. A medida da área da região limitada por essas retas e pelo eixo x é

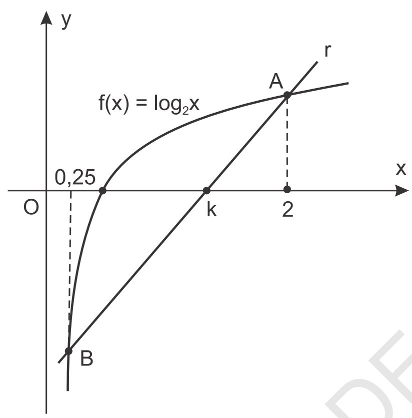
Dados: u.a. ≡ unidade de área

a) 9 u.a. **b)** 10 u.a. **c)** 11 u.a. **d)** 12 u.a.

12. FGV – Sejam m e n números reais e $\begin{cases} 3x + my = n \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ um sistema de equações nas incógnitas x e y. A respeito da representação geométrica desse sistema no plano cartesiano, é correto afirmar que, necessariamente, é formada por duas retas

a) paralelas distintas, se $m = 6$ e $n \neq 3$.
b) paralelas coincidentes, se $m = 6$ e $n \neq 3$.
c) paralelas distintas, se $m = 6$.
d) paralelas coincidentes, se $n = 3$.
e) concorrentes, se $m \neq 0$.

13. UFPR (adaptado) – Considere o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ e a reta r que passa pelos pontos A e B, como indicado na figura abaixo, sendo k a abscissa do ponto em que a reta r intersecta o eixo Ox. Qual é o valor de k?



14. EFOMM – A projeção ortogonal de A sobre a reta BC, sabendo-se que A = (3, 7), B = (1, 1) e C = (9, 6), terá as coordenadas da projeção

a) $x = \frac{468}{85};\ y = \frac{321}{89}$

b) $x = \frac{478}{87};\ y = \frac{319}{87}$

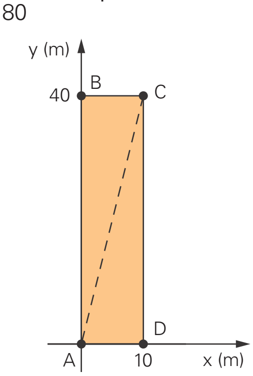
c) $x = \frac{487}{84};\ y = \frac{321}{87}$

d) $x = \frac{457}{89};\ y = \frac{319}{89}$

e) $x = \frac{472}{89};\ y = \frac{295}{89}$

15. ESPM – A figura abaixo mostra a planta de um terreno retangular de vértices A, B, C e D, representada no plano cartesiano. A altitude h (em metros) de cada ponto (x, y) desse terreno, em relação a um plano horizontal adotado como referência, pode ser obtida pela função

$$h = \frac{(x+2)\cdot(40-y)}{80}.$$



A maior altitude que um ponto localizado sobre a diagonal AC poderá ter é igual a:

a) 1,70 m
b) 1,85 m
c) 1,90 m
d) 1,75 m
e) 1,80 m

16. IME – Sejam os pontos A(0,0), B(–1, 1), C(1, 2), D(4, 1) e $E\left(3, \frac{1}{2}\right)$. A reta r passa por A e corta o lado CD, dividindo o pentágono ABCDE em dois polígonos de mesma área. Determine a soma das coordenadas do ponto de interseção da reta r com a reta que liga C e D.

a) $\frac{25}{7}$

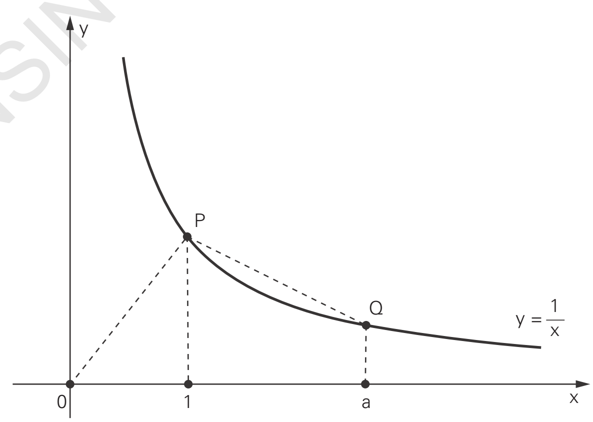
b) $\frac{51}{14}$

c) $\frac{26}{7}$

d) $\frac{53}{14}$

e) $\frac{27}{7}$

17. Unicamp-SP – A figura abaixo exibe o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, definida para todo número real x > 0. Os pontos P e Q têm abscissas x = 1 e x = a, respectivamente, onde a é um número real e a > 1.



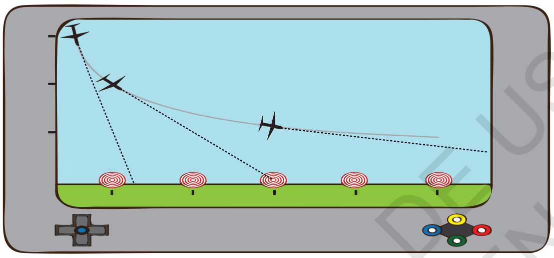
a) Considere o quadrilátero T com vértices em (0, 0), P, Q e (a, 0). Para a = 2, verifique que a área de T é igual ao quadrado da distância entre P e Q.

b) Seja r a reta que passa pela origem e é ortogonal à reta que passa por P e Q. Determine o valor de a para o qual o ponto de interseção da reta r com o gráfico da função f tem ordenada $y = \frac{a}{2}$.

ESTUDO PARA O ENEM

18. UFSM-RS (adaptado) C5-H22

A figura mostra um jogo de videogame, em que aviões disparam balas visando atingir o alvo. Quando o avião está no ponto (1, 2), dispara uma bala e atinge o alvo na posição (3, 0).

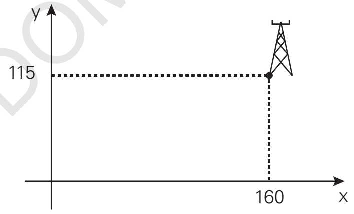


A reta r da trajetória da bala nesse momento é

a) $x + y - 1$.
b) $x + y - 3$.
c) $x + 2y - 1$.
d) $x + 2y - 3$.
e) $2x + y - 3$.

19. UFSM-RS C2-H8

A figura mostra a localização no plano cartesiano de uma torre T de transmissão de energia.



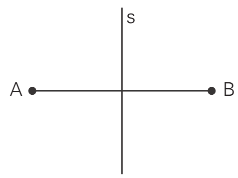
Duas outras torres devem ser instaladas em posições diferentes sobre a reta $y = \frac{3}{4}x - 5$, de modo que a distância entre cada uma dessas torres e a torre T seja igual a 200 metros.

Os pontos de localização dessas torres são iguais a

a) (20, 10) e (160, 315)
b) (0, –5) e (320, 235)
c) (0, –5) e (160, 315)
d) (–40, 115) e (320, 235)
e) (–40, 115) e (160, 315)

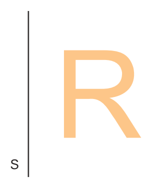
20. Uerj (adaptado) C2-H8

Considerando o conceito de simetria, observe o desenho abaixo:



Os pontos A e B são simétricos em relação à reta s, enquanto s é a mediatriz do segmento AB.

Utilizando um espelho para verificar a simetria, foi posta a seguinte imagem:



Em relação à reta s, onde se encontra o espelho, a imagem simétrica da letra R apresentada no desenho é:

a)

b)

c)

d)

e) Não há imagem

DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

50

- Fórmula para cálculo da distância entre o ponto e a reta
- Inequações do 1º grau no plano cartesiano

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Aplicar conhecimentos algébricos/geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.
- Resolver situações-problemas que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.

LEVGENII TRYFONOV/DREAMSTIME.COM

Cálculos necessários para viagens de grande percurso eram feitos em mapas por meio de muitos conhecimentos matemáticos.

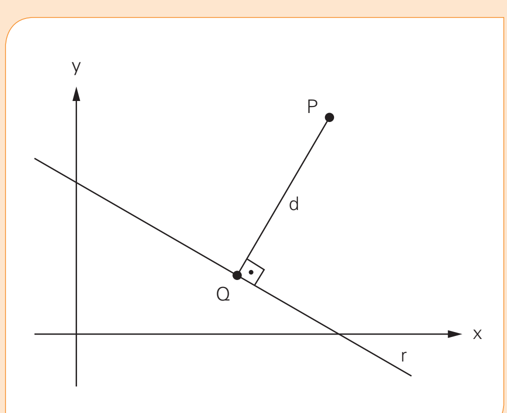
Introdução

O cálculo da distância entre um lugar e outro foi muito utilizado durante o período das Grandes Navegações, nos séculos XV e XVI. Era possível estipular as melhores rotas, calcular os suprimentos necessários e até regiões onde a correnteza poderia afetar a jornada. As ferramentas matemáticas foram de grande importância nesse tipo de exploração.

FÓRMULA PARA CÁLCULO DA DISTÂNCIA ENTRE O PONTO E A RETA

A distância de um ponto **P** a uma reta **r** corresponde à projeção ortogonal do ponto **P** à reta **r**.

Mais adiante, veremos que é possível calcular de maneira direta a distância desse ponto **P** à reta **r**. No entanto, neste primeiro momento, vamos obter essa distância por dedução, observando o exemplo a seguir:



Exemplo:

Dado um ponto P(3, 4) e a reta **r** $(x + y - 3 = 0)$, vamos obter a distância de **P** até a reta **r**.

Para encontrar a projeção ortogonal do ponto **P** à reta **r**, devemos obter a equação da reta **t** ⊥ **r**, passando por **P**:

$$\begin{cases} m_r = -1 \\ t \perp r \end{cases} \rightarrow m_r \perp m_t = 1 \rightarrow m_t = 1$$

Como a reta **t** passa pelo ponto P(3, 4):

$y - 4 = 1 \cdot (x - 3) \rightarrow t: y = x - 3 + 4$

$\therefore t: y = x + 1$ ou $t: x - y + 1 = 0$

Para obter o ponto **Q**, projeção de **P** em **r**, temos:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow 2x - 2 = 0$$

$\rightarrow x = 1$ e $y = 2 \rightarrow Q(1, 2)$

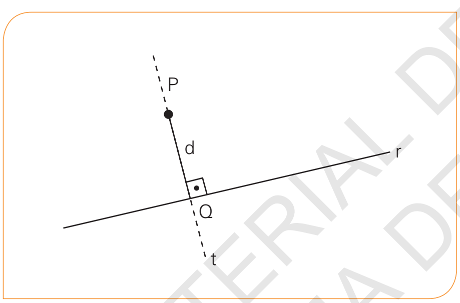
Para encontrar a distância PQ, calculamos:

$$d_{PQ} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)} = \sqrt{2+2} = 2\sqrt{2}$$

Logo, a distância do ponto P(3, 4) à reta **r** $(x + y - 3 = 0)$ é $2\sqrt{2}$.

A fim de não ser necessário passar por todas essas etapas, vamos deduzir a fórmula para o cálculo da distância de um ponto a uma reta.

Dados um ponto P (x_p, y_p) e a reta **r** $(ax + by + c = 0)$, temos:



- Equação da reta **t** ⊥ **r** passando por **P**:

$$\begin{cases} m_r = -\dfrac{a}{b} \\ t \perp r \end{cases} \rightarrow m_r m_t = -1 \rightarrow -\frac{a}{b}\ m_t = -1 \rightarrow m_t = \frac{b}{a}$$

Assim, $t: y - y_P = \dfrac{b}{a} \cdot (x - x_P) \rightarrow$

$\rightarrow t: ay - ay_P = bx - bx_P$

Portanto, $t: -bx + ay + (bx_P - ay_P) = 0$.

- Projeção ortogonal do ponto **P** em **r**:

Resolvemos o sistema determinado pelas equações de **t** e **r** para encontrar a projeção de **P** em **r**:

$$\begin{cases} r: ax + by = -c \\ t: -bx + ay = -bx_P + ay_P \end{cases}$$

Ao multiplicarmos a equação de **r** por **b** e a equação de **t** por **a** e fazermos a adição membro a membro, obtemos:

$$x_Q = \frac{b^2x_P - aby_P - ac}{a^2 + b^2}$$

$$y_Q = \frac{-abx_P - ay_P - bc}{a^2 + b^2}$$

- Distância entre **P** e **Q**:

$$d = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{a^2x_P + aby_P + ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{abx_P + b^2y_P + bc}{a^2 + b^2}\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{a(ax_P + by_P + c}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{b(ax_P + by_P + c}{a^2 + b^2}\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{a\left(ax_p + by_P + c\right)^2}{(a+b)^2} + \frac{b\left(ax_p + by_P + c\right)^2}{(a+b)^2}}$$

$$d = \sqrt{\frac{\left(ax_p + by_P + c\right)^2}{a+b}}$$

Assim:

$$d = \frac{|ax_p + by_P + c|}{\sqrt{a+b}}$$

Observação:

A distância de **P** é igual ao módulo do valor numérico obtido ao substituir as coordenadas de **P** no 1º membro da equação geral de **r**, dividido por $\sqrt{a+b}$.

Exemplo:

Vamos calcular a distância do ponto P(3, 4) à reta **r** $(x + y - 3 = 0)$ utilizando a fórmula para calcular a distância do ponto à reta:

$r: x + y - 3 = 0 \rightarrow a = 1; b = 1; c = -3$

$P(3, 4) \rightarrow x_p = 3; y_p = 4$

$$d = \frac{|ax_p + by_P + c|}{\sqrt{a+b}} = \frac{|1\ \ 3 + 1\ \ 4 - 3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Portanto, $d = 2\sqrt{2}$.

INEQUAÇÕES DO 1º GRAU NO PLANO CARTESIANO

Chamamos de **inequações do 1º grau** as inequações do tipo $ax + by + c > 0$, em que:

- **a**, **b** e **c** são constantes reais;
- **x** e **y** são variáveis reais.

Observe a seguir como representar, no plano cartesiano, os pontos P(x, y) que satisfazem às condições expressas por essas desigualdades.

CASOS PARTICULARES

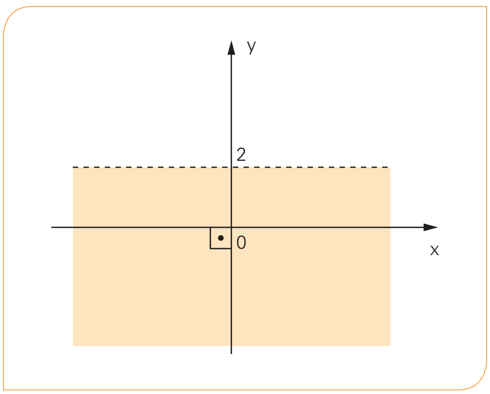
- **a = 0 e b ≠ 0**

Exemplo:

Vamos representar no plano os pontos que satisfazem à condição $y - 2 < 0$:

$y - 2 < 0 \rightarrow y < 2$

Essa condição corresponde a um **semiplano aberto** composto dos pontos P(x, y) do plano cartesiano que estão "abaixo" da reta $y = 3$.



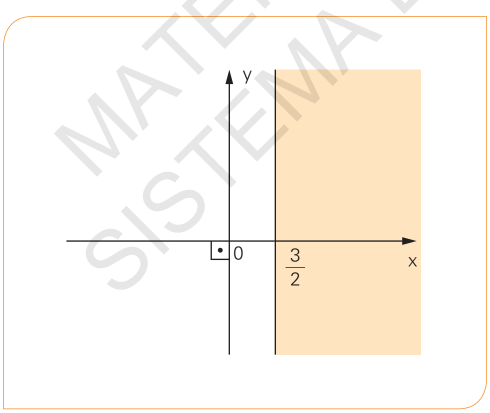
- **a ≠ 0 e b = 0**

Exemplo:

Vamos representar no plano os pontos que satisfazem à condição $3x - 2 \geq 0$:

$3x - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 3y \geq 2 \quad \rightarrow \quad x \geq \dfrac{3}{2}$

Essa condição corresponde a um semiplano fechado composto dos pontos P(x, y) do plano cartesiano que estão "à direita" da reta $x = \dfrac{3}{2}$ e contempla o valor $x = \dfrac{3}{2}$.

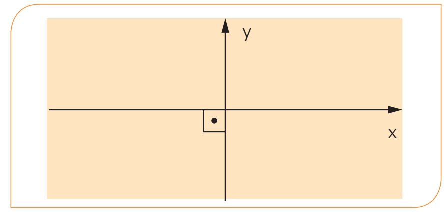


- **a = 0 e b = 0**

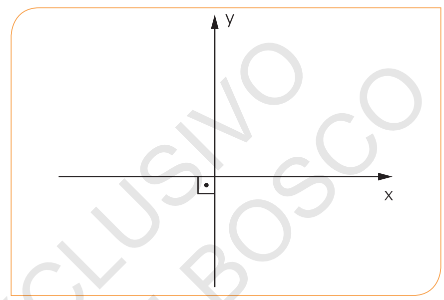
Exemplos:

1. Vamos representar no plano os pontos que satisfazem à condição $0x + 0y + 3 > 0$.

A condição é satisfeita por todos os pontos P(x, y) do plano cartesiano.



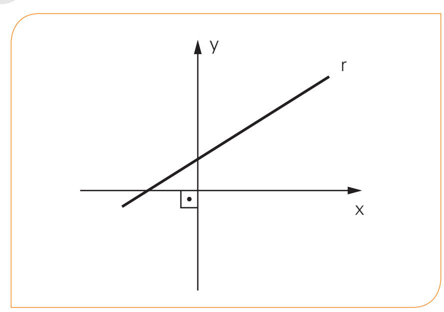
2. Vamos representar no plano os pontos que satisfazem à condição $0x + 0y - 3 > 0$.
Nenhum ponto do plano cartesiano pode satisfazer a essa condição, portanto, ela representa um conjunto vazio.



CASO GERAL

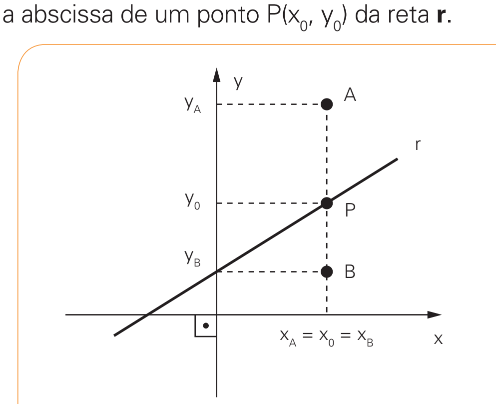
Agora analisaremos os casos em que as constantes reais **a** e **b** não são nulas.

Vamos considerar uma reta **r** do plano cartesiano de equação $ax + by + c$ ($a \neq 0$ e $b \neq 0$), representada, por exemplo, conforme a figura a seguir:



Vamos considerar também a equação reduzida de **r** ($y = mx + q$), sendo $P(x_0, y_0)$ um ponto de **r**, sabendo que $y_0 = mx_0 + q$.

Agora levaremos em conta, no plano cartesiano, um ponto $A(x_A, y_A)$, situado "acima" de **r**, e um ponto $B(x_B, y_B)$, situado "abaixo" de **r**, de modo que $x_A = x_B = x_0$, em que x_0 é a abscissa de um ponto $P(x_0, y_0)$ da reta **r**.



Ao analisar o gráfico, observamos que:

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = mx_0 + q \\ y_A > y_B \\ x_A = x_0 \end{array}\right\} \longrightarrow y_A > mx_A + q$$

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = mx_0 + q \\ y_B < y_A \\ x_B = x_0 \end{array}\right\} \longrightarrow y_B < mx_B + q$$

Então, concluímos que:

- para todos os pontos P(x, y) do plano situados "acima" de **r**, vale a relação: $y > mx + q$.
- para todos os pontos P(x, y) do plano situados "abaixo" de **r**, vale a relação: $y < mx + q$.

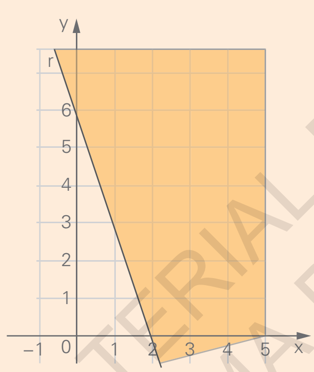
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Represente no plano cartesiano os pontos que satisfazem à seguinte condição: $3x + y - 5 \geq 0$.

Resolução

$3x + y - 5 \geq 0 \rightarrow y \geq -3x + 5$

Sendo **r** a reta de equação $y = -3x + 5$ (ou $3x + y - 5 = 0$), os pontos que satisfazem à condição $y \geq -3x + 5$ (ou $-3x + y + 5 = 0$) são aqueles situados "acima" de **r**, reunidos com os pontos de **r**, em um semiplano fechado.

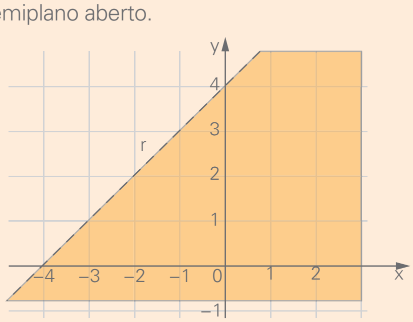


2. Sistema Dom Bosco – Represente no plano cartesiano os pontos que satisfazem à seguinte condição: $x - y + 4 > 0$.

Resolução

$x - y + 4 > 0 \rightarrow -y > -x - 4 \rightarrow y < x + 4$

Sendo **r** a reta de equação $y = x + 4$ (ou $x - y + 4 = 0$), os pontos que satisfazem à condição $y < x + 4$ (ou $x - y + 4 > 0$) são aqueles do semiplano abaixo de **r**, em um semiplano aberto.

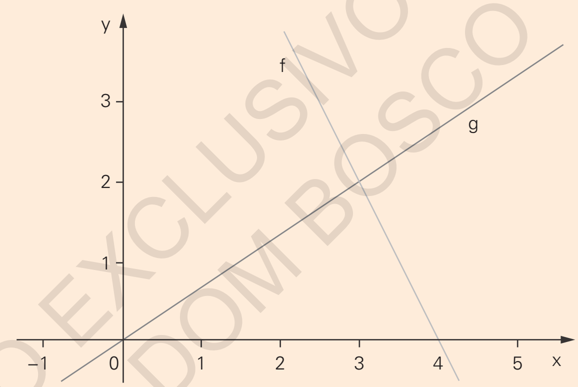


Ao observar os dois exercícios anteriores, notamos que o semiplano fechado contempla os valores da reta $ax + by + c = 0$, enquanto o semiplano aberto não contempla os valores da reta.

Para descobrir se o semiplano positivo ($ax + by + c > 0$) é o que está "acima" ou "abaixo" de **r**, devemos tomar um ponto no plano (fora de **r**), substituir na expressão $ax + by + c$ e verificar se o valor é positivo ou negativo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

UEFS-BA – Parte dos gráficos de duas funções polinomiais do primeiro grau, f e g, está representada na figura, em que $f(3) = g(3)$.



Se $f(4) = 0$ e $g(0) = 0$, o conjunto solução de $f(x)g(x) > 0$ é

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

Resolução

De acordo com o gráfico:

A reta que representa a função g(x) pode ser indicada por:

r: $y = m_r \cdot x$, $m > 0$

A reta que representa a função f(x) pode ser indicada por:

s: $y - 0 = m_s \cdot (x - 4)$, $m_s < 0$

s: $y = m_s \cdot x - 4 \cdot m_s$, $m_s < 0$

Então:

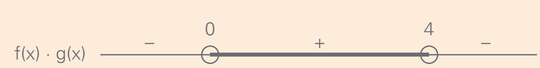
$f(x) \cdot g(x) = (m_s x - 4m_s) \cdot m_r x$

$f(x) \cdot g(x) = m_r m_s x^2 - 4m_r m_s x$

$f(x) \cdot g(x) = m_r m_s x \cdot (x - 4)$, $m_r m_s < 0$

As raízes de $f(x) \cdot g(x) = 0$ são $x = 0$ e $x = 4$.

Desse modo:



Portanto:

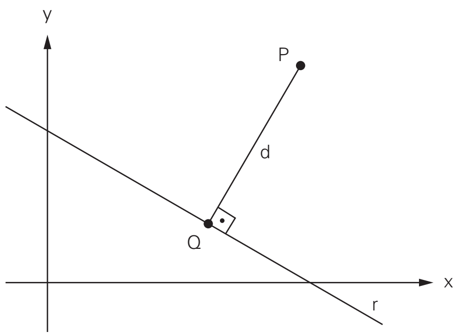
$f(x) \cdot g(x) > 0$, para $0 < x < 4$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$

ROTEIRO DE AULA

DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

$d = \dfrac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



Inequação do 1º grau no plano cartesiano

$ax + by + c = 0$

Em que **a**, **b** e **c** são constantes reais e **x** e **y** são variáveis reais.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. EEAR (adaptado) – Dada a reta r: $2x - 3y + 5 = 0$ e o ponto P(5, 6), qual a distância de P à reta r?

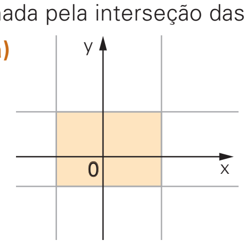
Calculando a distância do ponto P(5, 6) à reta r, temos:

$$d = \frac{|2\cdot 5 - 3\cdot 6 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{3\cdot\sqrt{13}}{13}$$

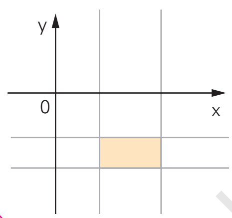
2. UFRGS – Considere as desigualdades definidas por $|x + 5| \le 2$ e $|y - 4| \le 1$ representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Qual das regiões sombreadas dos gráficos abaixo melhor representa a região do plano cartesiano determinada pela interseção das desigualdades?

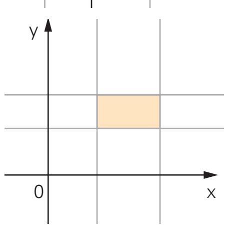
a)



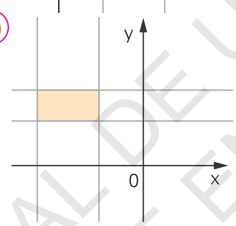
d)



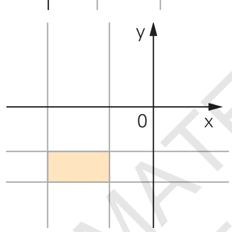
b)



e)



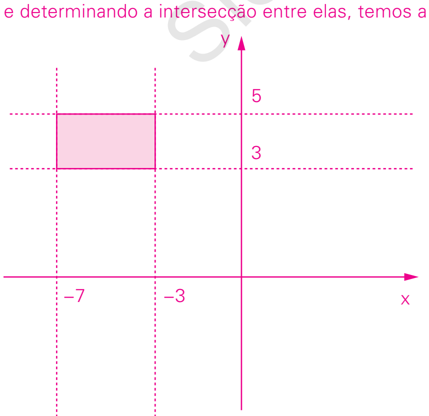
c)



$|x+5| \le 2 \rightarrow -2 \le x+5 \le 2 \rightarrow -7 \le x \le -3$

$|y-4| \le 1 \rightarrow -1 \le y-4 \le 1 \rightarrow 3 \le y \le 5$

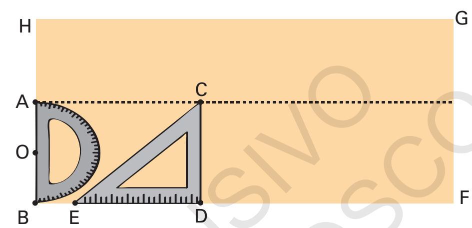
Representando essas duas regiões em um mesmo sistema cartesiano e determinando a intersecção entre elas, temos a seguinte região:



3. Uerj (adaptado) C5-H21

A figura abaixo representa a superfície plana de uma mesa retangular BFGH na qual estão apoiados os seguintes instrumentos para desenho geométrico, ambos de espessuras desprezíveis:

- um transferidor com a forma de um semicírculo de centro O e diâmetro $\overline{AB}$;
- um esquadro CDE, com a forma de um triângulo retângulo isósceles.



Considere as informações abaixo:

$\overline{ED}$ está contido em $\overline{BF}$.

$\overline{OA}$ está contido em $\overline{BH}$.

$\overline{AB} = 10$ cm.

$\overline{BD} = 13$ cm.

Calculando a medida, em centímetros, do menor segmento que liga a borda do transferidor à borda do esquadro, obtemos:

a) $(4\sqrt{2}+5)$ cm.

b) $(4\sqrt{2}-5)$ cm.

c) $4\sqrt{2}$ cm.

d) 5 cm.

e) $8\sqrt{2}$ cm.

Adotando o ponto B como a origem do sistema de coordenadas, temos um semicírculo de centro O = (0, 5) e raio 5, além de uma reta $\overleftrightarrow{EC}$ que forma 45° com o eixo horizontal. A equação é igual a: m = tg 45° = 1.

$y - 0 = 1\cdot(x - 3) \rightarrow y = x - 3 \rightarrow x - y - 3 = 0$

O segmento perpendicular à reta $\overleftrightarrow{EC}$, cuja reta suporte passa por O, é o menor segmento que une a borda do esquadro à borda do transferidor.

Logo, a distância do ponto O à reta $\overleftrightarrow{EC}$ é igual a:

$$d = \frac{|0-5-3|}{\sqrt{1+(-1)}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Assim, a medida será: $(4\sqrt{2}-5)$ cm.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

4. UFJF-MG – Dados os pontos A = (1, 2), B = (3, 5), C = (1, 1) e D = (2, 3), considere as afirmações:

I. Os pontos A, B e D são colineares.

II. Uma reta perpendicular à reta determinada pelos pontos A e B tem coeficiente angular $m = -\frac{2}{3}$.

III. A distância do ponto A à reta determinada pelos pontos B e C é 10 unidades de comprimento.

É **CORRETO** afirmar que:

a) Apenas a afirmação II é verdadeira.
b) Apenas a afirmação III é verdadeira.
c) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
d) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
e) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

I. Falsa, pois:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5+9+4-6-10-3 = -1 \neq 0$$

II. Verdadeira, pois o coeficiente angular da reta $\overline{AB}$ é $m_{\overline{AB}} = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$.

Logo, qualquer reta perpendicular à reta $\overline{AB}$ tem coeficiente angular igual a $-\frac{2}{3}$.

III. Falsa. A equação da reta $\overline{BC}$ é:

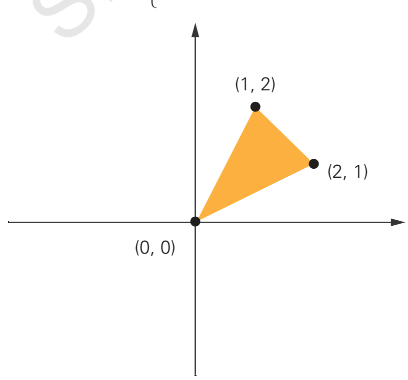
$$y-1 = \frac{5-1}{3-1}(x-1) \leftrightarrow 2x-y-1=0$$

Portanto, a distância do ponto A da reta $\overline{BC}$ é igual a:

$$d = \frac{|2\cdot1-2-1|}{\sqrt{2^2+(-1)}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ u.c.}$$

5. PUC-Rio (adaptado) – A região, na figura abaixo, é descrita pelo sistema:

$$\begin{cases} x+y \leq 3 \\ y \leq 2x \\ 2y \geq x \end{cases}$$



Quanto vale a área da figura?

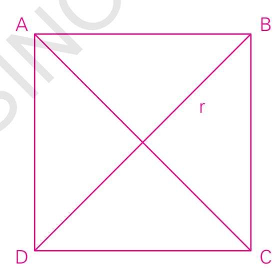
O resultado pedido é dado por:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1-4=-3$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot|-3| = \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2} \text{ u.a.}$$

6. ITA – Considere a reta r: y = 2x. Seja A (3, 3) o vértice de um quadrado ABCD, cuja diagonal $\overline{BD}$ está contida em r. A área desse quadrado é

a) $\frac{9}{5}$
b) $\frac{12}{5}$
c) $\frac{18}{5}$
d) $\frac{21}{5}$
e) $\frac{24}{5}$



Em um quadrado, as diagonais são iguais entre si e medem $\sqrt{2}$. A distância do ponto A até a reta r é igual à metade da diagonal. Assim, podemos escrever:

$$d_{A,r} = \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{|2\cdot3-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} \rightarrow l = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

A área no quadrado corresponde a:

$$A = l^2 = \left(\frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{36}{10} \rightarrow A = \frac{18}{5}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Sistema Dom Bosco – Qual a distância do ponto P(6, 8) à reta r: $x + y + 2 = 0$, utilizando a fórmula para o cálculo da distância do ponto à reta?

8. UPE – No plano cartesiano, a reta s: $4x - 3y + 12 = 0$ intersecta o eixo das abscissas no ponto A e o eixo das ordenadas no ponto B. Nessas condições, qual é a distância entre os pontos A e B?

a) 5
b) $\sqrt{5}$
c) $2\sqrt{2}$
d) 2
e) $\sqrt{2}$

9. ESPM – Os pontos do plano cartesiano que atendem às condições $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 3$ e $x + y \geq 2$, simultaneamente, formam uma figura plana cuja área é igual a:

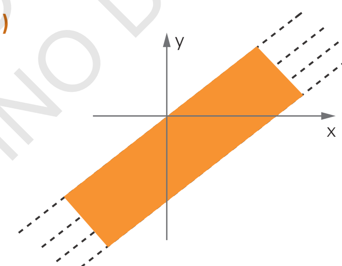
a) 14
b) 16
c) 12
d) 10
e) 8

10. UFU-MG – Considere o plano munido de um sistema de coordenadas cartesianas xOy. Seja H o conjunto dos pontos P(x, y) desse plano, cujas coordenadas cartesianas (x, y) satisfazem:

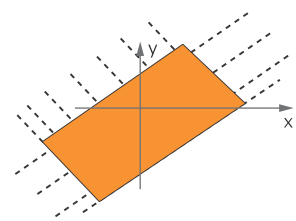
$\log_3(x - y) < (\log_3 12) - 1$

Assinale, dentre as alternativas que seguem, a que melhor representa graficamente o conjunto H.

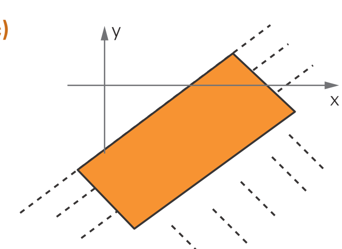
a)



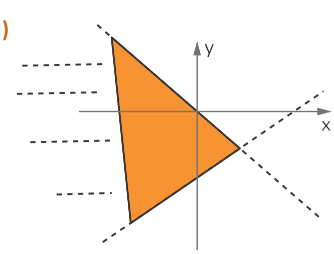
b)



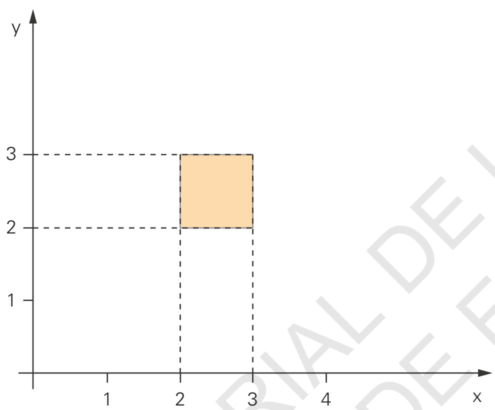
c)



d)



11. PUC-RS – Considere a figura abaixo, onde um quadrado está representado no primeiro quadrante do plano xy.



Para que uma reta da forma $y = x + m$ não intercepte qualquer ponto do quadrado, devemos ter

a) $m < 3$
b) $m < 0$
c) $m > 0$
d) $m > -1$
e) $m < -1$ ou $m > 1$

12. UEPG-PR — Considerando a reta r que passa pelos pontos $A = (-1, 0)$ e $B (0, 3)$, a função trigonométrica $f(x) = \cos x$ e o ponto $P = (\pi, 3)$, assinale o que for correto.

01) A distância do ponto P ao gráfico da função $f(x) = \cos x$ é 3.

02) A reta $x + 3y = \pi + 9$ é perpendicular à reta r passando por P.

04) A distância do ponto P à reta r pertence ao intervalo $[2, 4]$.

08) A reta r tem coeficiente angular 3.

16) A soma das distâncias do ponto P à reta r e do ponto P à função $f(x) = \cos x$ é menor que 6.

13. EsPCEx (adaptado) – Considere a reta t mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta s: $2x - 3y + 12 = 0$ intercepta os eixos coordenados. Então, qual a distância do ponto M(1, 1) à reta t?

14. FGV – No plano cartesiano, os pontos (x, y) que satisfazem a equação $x^2 - 5x + 4 = 0$ são representados por

a) um par de retas paralelas.
b) dois pontos do eixo das ordenadas.
c) dois pontos do eixo das abscissas.
d) uma parábola com abscissa do vértice igual a $-\frac{5}{2}$.
e) uma parábola com concavidade voltada para cima.

15. Uece – Em um sistema de coordenadas cartesiano usual os pontos P = (1, 2) e Q = (4, 6) são vértices do triângulo PQM. Se o vértice M está sobre a reta paralela ao segmento PQ que contém o ponto (8, 6), então a medida da área do triângulo PQM é

u.a. = unidade de área

a) 7 u.a.
b) 8 u.a.
c) 9 u.a.
d) 10 u.a.

16. UFRGS – As retas de equações $y = ax$ e $y = -x + b$ interceptam-se em um único ponto cujas coordenadas são estritamente negativas. Então, pode-se afirmar que

a) $a > 0$ e $b > 0$.
b) $a < 0$ e $b < 0$.
c) $a < -1$ e $b > 0$.
d) $a > 0$ e $b < 0$.
e) $a < -1$ e $b < 0$.

17. FGV – Uma companhia do setor químico fabrica um produto a partir de dois componentes químicos, A e B. Cada quilograma de A contém 4 gramas da substância S_1, 1 grama da substância S_2, 1 grama da substância S_3 e custa R$ 30,00 para a companhia. Cada quilograma de B contém 1 grama da substância S_1, 2 gramas da substância S_2, não contém a substância S_3 e custa R$ 20,00 para a companhia. O produto fabricado deve conter uma mistura de, pelo menos, 20 gramas da substância S_1, 10 gramas da substância S_2 e 2 gramas da substância S_3.

Adote na resolução do problema a letra x para a quantidade do componente A (em quilogramas), y para a quantidade do componente B (em quilogramas), e C para o custo total do produto fabricado, em reais.

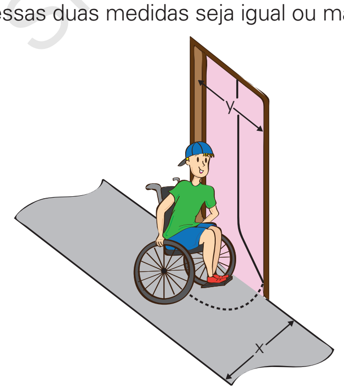
a) Liste três pares ordenados (x, y), com x e y inteiros positivos, que atendam simultaneamente a todas as restrições do problema. Em seguida, calcule o valor de C para cada um dos três pares (x, y) listados.

b) Determine o par ordenado (x, y), com x e y racionais, que atenda simultaneamente a todas as restrições do problema e para o qual C atinja o menor valor possível. Em seguida, determine C, que também será um número racional, para o par ordenado (x, y) solicitado.

ESTUDO PARA O ENEM

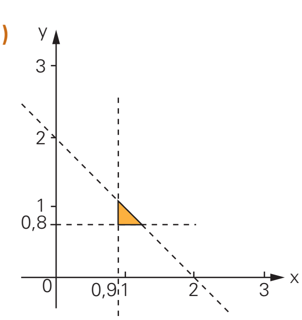
18. UFTM-MG C2-H6

Uma pessoa em cadeira de rodas necessita de espaço mínimo para a rotação da sua cadeira em um corredor que dá acesso a uma porta. De acordo com as normas técnicas da obra, a largura mínima (x) do corredor deve ser de 90 cm, a da porta (y), de 80 cm e, além disso, é necessário que a soma dessas duas medidas seja igual ou maior que 2 m.

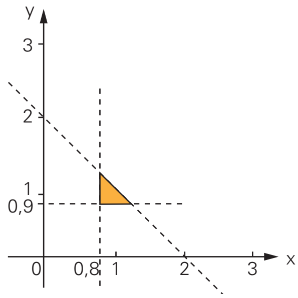


Uma representação no plano cartesiano ortogonal apenas dos pares (x, y), com ambas as coordenadas dadas em metros, que atendem às normas técnicas da obra, é

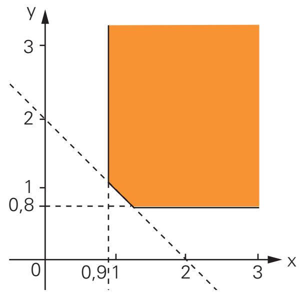
a)



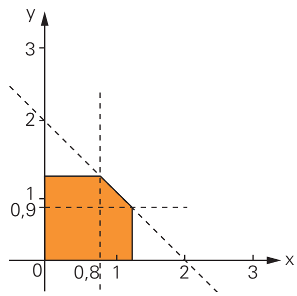
b)



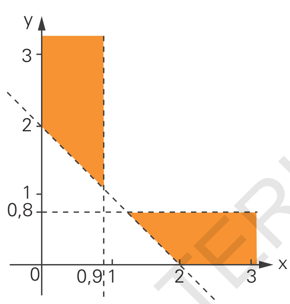
c)



d)



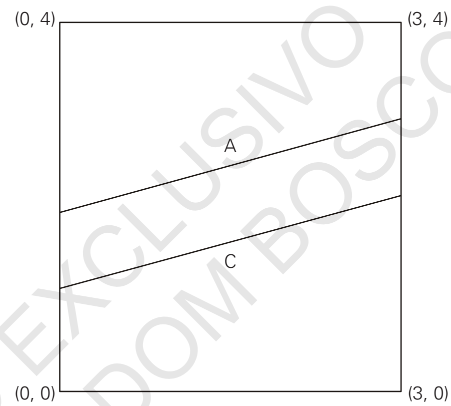
e)



19. IFSC (adaptado) C2-H9

Marina encomendou um mural de fotos para a sua sala com o formato de um paralelogramo que irá de um lado a outro de uma parede (conforme a figura a seguir). Para garantir a colocação correta do mural após a confecção, ela considerou a parede parte do primeiro quadrante do plano cartesiano limitado pelos cantos (0,0), (0,4), (3,0) e (3,4), sendo a abscissa o comprimento e a ordenada a altura da parede em metros.

Assim, marcou quatro pontos por onde devem passar os lados opostos A e C do mural: $P_1\left(1, \frac{7}{3}\right)$ e $P_2\left(2, \frac{8}{3}\right)$ para o lado A e $P_3\left(1, \frac{4}{3}\right)$ e $P_4\left(2, \frac{5}{3}\right)$ para o lado C?

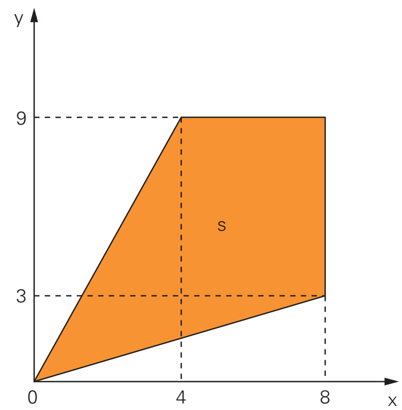


Com base nas informações, qual é a equação da reta por onde passa o lado C?

a) $x - 3y + 3 = 0$
b) $x - 3y + 4 = 0$
c) $x + 3y + 3 = 0$
d) $x + 3y + 4 = 0$
e) $x - 3y - 3 = 0$

20. Enem C5-H23

Uma região de uma fábrica deve ser isolada, pois nela os empregados ficam expostos a riscos de acidentes. Essa região está representada pela porção de cor cinza (quadrilátero de área S) na figura.



Para que os funcionários sejam orientados sobre a localização da área isolada, cartazes informativos serão afixados por toda a fábrica. Para confeccioná-los, o programador utilizará um software que permite desenhar essa região a partir de um conjunto de desigualdades algébricas.

As desigualdades que devem ser utilizadas no referido software, para o desenho da região de isolamento, são

a) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $x \leq 9$

b) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$

c) $3y - x \geq 0$; $2y - x \leq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$

d) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 8$; $x \leq 9$

e) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$

51

EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA – EQUAÇÃO REDUZIDA

- Circunferência
- Equação reduzida da circunferência

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situações-problemas que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.


NICOLA FORENZA/ISTOCKPHOTO

Introdução

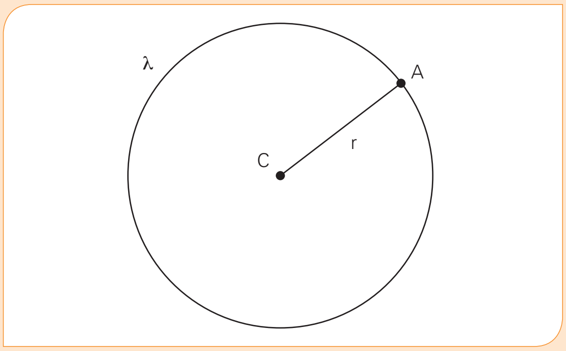
O Coliseu é um dos maiores símbolos ainda existentes do antigo Império Romano. Construído em 72 d.C, tem forma elíptica e altura de 48,5 m. Sobreviveu a muitos terremotos e saques durante a Idade Média, pois era revestido de mármore.

Palco de entretenimento, esse enorme anfiteatro teve sua construção iniciada por ordem do imperador Flávio Vespasiano. Foi finalizado oito anos depois, durante o governo de seu filho Tito.

O Coliseu serviu como local de combate entre gladiadores. Algumas batalhas incluíam animais selvagens. Não se sabe ao certo quais foram seus arquitetos. No entanto, é possível afirmar que o uso de arcos de circunferências em sua estrutura garantiu a esse monumento grande resistência a esforços e compressões.

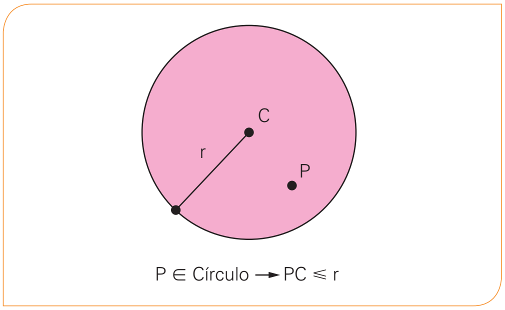
CIRCUNFERÊNCIA

A figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo é denominada **circunferência**.



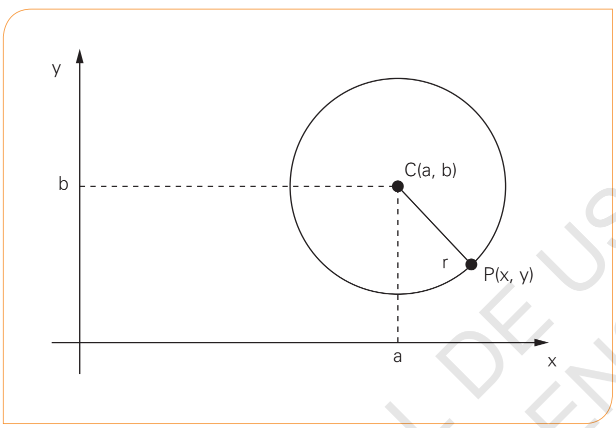
A figura anterior representa uma circunferência λ, em que **C** é o centro (ponto fixo) e **r** é o **raio**, com medida igual ao segmento **AC** (constante positiva).

O **círculo** corresponde à região interna da circunferência.



EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

Vamos considerar uma circunferência de centro C(a, b) e raio **r**.



Como a distância **d** de um ponto P(x, y) qualquer pertencente à circunferência até o centro C(a, b) é constante, a seguinte condição é imposta para obtermos a equação da circunferência:

$$d_{PC} = \text{raio} = r$$

Assim:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$

Elevando-se os dois membros ao quadrado, obtemos a **equação reduzida da circunferência**.

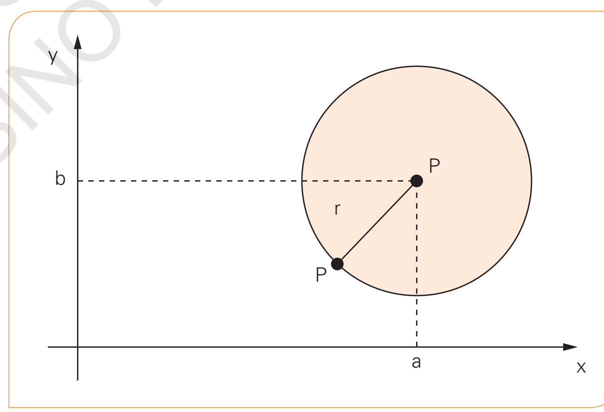
$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

Observações:

1. Considere a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$. Desse modo, tem-se:

- Se $k > 0$, então $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa uma circunferência de centro (a, b) e raio $\sqrt{k}$.
- Se $k = 0$, então $x = a$ e $y = b$. Logo, a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa o ponto P(a, b), pois $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$.
- Se $k < 0$, a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa um conjunto vazio, pois a soma dos quadrados de dois números reais nunca pode resultar em um número negativo.

2. O gráfico da relação $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$ é um círculo de centro C(a, b) e raio **r**, pois é uma relação satisfeita pelos pontos **P**, tais que $d_{PC} \leq r$.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Obtenha a equação reduzida da circunferência de centro **C** e raio **r**.

a) C(2, 5) e $r = \sqrt{6}$

Resolução

Sendo a = 2, b = 5, temos:

$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 \rightarrow (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 6$

b) C(7, –2) e r = 3

Resolução

Sendo a = 7, b = –2, temos:

$(x - 7)^2 + [y - (-2)]^2 = 3^2 \rightarrow (x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 9$

c) C(–5, 0) e $r = \dfrac{2}{3}$

Resolução

Sendo a = –5, b = 0, temos:

$[(x - (-5)]^2 + (y - 0)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \rightarrow (x + 5)^2 + y^2 = \dfrac{4}{9}$

d) C(0, –2) e r = 0,2

Resolução

Sendo a = 0, b = –2, temos:

$(x - 0)^2 + [y - (-2)]^2 = (0{,}2)^2 \rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 0{,}04$

2. Sistema Dom Bosco – Obtenha o centro **C** e o raio **r** das circunferências com equações.

a) $x^2 + y^2 = 100$

Resolução

Sendo $a = 0$, $b = 0 \rightarrow C(0, 0)$, temos:

$r^2 = 1\,002 \rightarrow r = \sqrt{100} \rightarrow r = 10$

b) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 7$

Resolução

Sendo $a = 3$, $b = 5 \rightarrow C(3, 5)$, temos:

$r^2 = 7 \rightarrow r = \sqrt{7}$

c) $x^2 + (y + 1)^2 = 4$

Resolução

Sendo $a = 0$, $b = -1 \rightarrow C(0, -1)$, temos:

$r^2 = 4 \rightarrow r = \sqrt{4} \rightarrow r = 2$

d) $(x + 6)^2 + y^2 = \dfrac{9}{25}$

Resolução

Sendo $a = -6$, $b = 0 \rightarrow C(-6, 0)$, temos:

$r^2 = \dfrac{9}{25} \rightarrow r = \sqrt{\dfrac{9}{25}} \rightarrow r = \dfrac{3}{5}$

3. FGV – No plano cartesiano, os pontos A(1, 2) e B(–2, –2) são extremidades do diâmetro de uma circunferência; essa circunferência intercepta o eixo das abscissas em dois pontos. Um deles é:

a) (4, 0)

b) $\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$

c) (3, 0)

d) $\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$

e) (2, 0)

Resolução

O centro da circunferência **C** estará localizado no ponto médio (a, b) entre os pontos **A** e **B**. Assim:

$$a = \frac{[1 + (-2)]}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$b = \frac{[2 + (-2)]}{2} = 0$$

Logo, $C\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Agora, calculamos a distância do centro **C** a um ponto qualquer da circunferência (**A**, por exemplo) para obter o raio **r**:

$$d_{CA} = r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

Escrevemos, desse modo, a equação reduzida da circunferência:

$$\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y = \frac{25}{4}$$

Para $y = 0$, temos:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -3$$

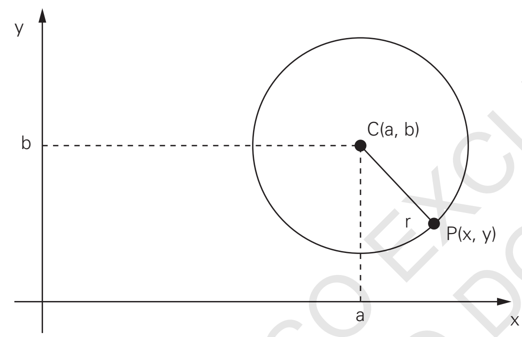
Assim, os pontos em que a circunferência intercepta o eixo das abscissas são:

(2, 0) e (– 3, 0)

Portanto, alternativa E.

ROTEIRO DE AULA

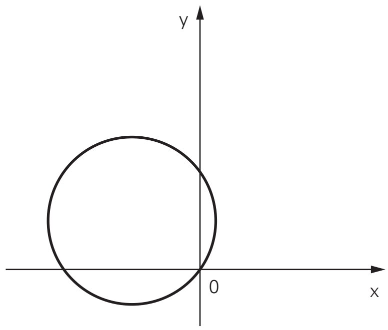
EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA – EQUAÇÃO REDUZIDA



$(x - a)^2$ + $(y - b)^2$ $= r^2$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Unisc – Observando o círculo abaixo, representado no sistema de coordenadas cartesianas, identifique, entre as alternativas apresentadas, a equação que o representa.

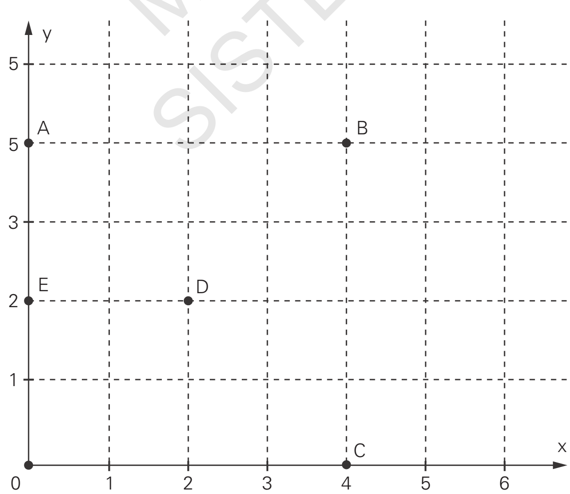


a) $x^2+(y+2)^2=10$
b) $(x+3)^2+y^2=10$
c) $(x+3)^2+(y+2)^2=13$
d) $(x+3)^2+(y-2)^2=13$
e) $(x-3)^2+(y+2)^2=13$

Sabemos que o centro da circunferência será um ponto do segundo quadrante. Dessa maneira, a equação da circunferência vai ser $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$, pois seu centro é o ponto $(-3, 2)$.

2. Enem C5-H22

Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros", seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A(0; 4), B(4; 4), C(4; 0), D(2; 2) e E(0; 2).



Passando pelo ponto A, qual equação forneceria a maior pontuação?

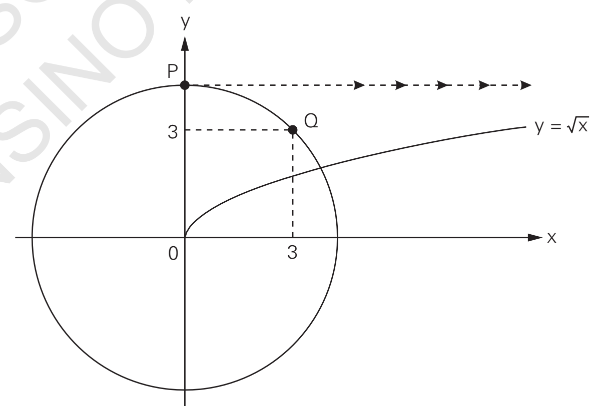
a) $x = 0$
b) $y = 0$
c) $x^2 + y^2 = 16$
d) $x^2 + (y - 2)^2 = 8$
e) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

Afirmando que ABCO é um quadrado, e como uma reta transitando por A pode atingir no máximo os pontos C e D, compreendemos que a pontuação maior é obtida com a circunferência de centro em D(2, 2) e raio $2\sqrt{2}$. Sendo assim:
$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = (2\sqrt{2})^2 \leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$
Essa circunferência passa pelos pontos A, B e C.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

3. Unesp (adaptado) – Os pontos P e Q(3, 3) pertencem a uma circunferência centrada na origem do plano cartesiano. P também é ponto de interseção da circunferência com o eixo y.

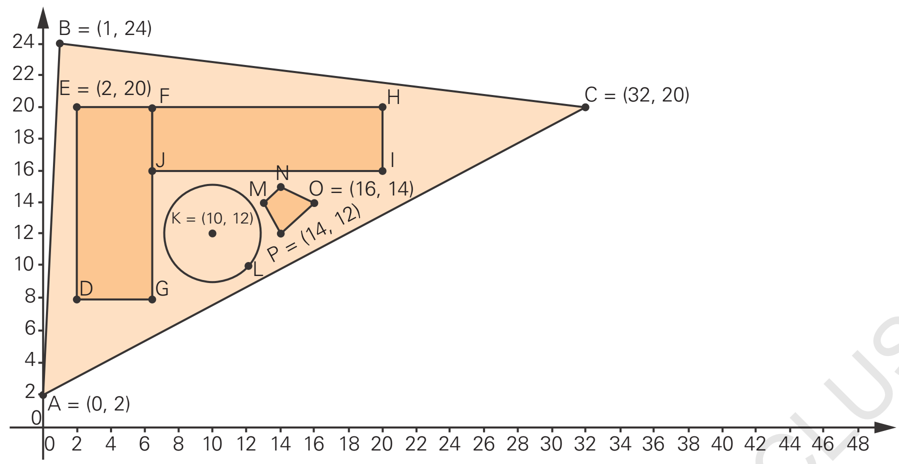


Considere o ponto R, do gráfico de $y = \sqrt{x}$, que possui ordenada y igual à do ponto P. Qual a abscissa x de R?

Calculando, obtemos:
$Q(3, 3) \rightarrow \text{raio} = r = \sqrt{(3^2 + 3^2)} = 3\sqrt{2} \rightarrow P(0, 3\sqrt{2})$
Logo, a abscissa $x = 18$.
$R(x, 3\sqrt{2}) \rightarrow y = \sqrt{x} \rightarrow 3\sqrt{2} = \sqrt{x} \rightarrow x = 18$

4. UEL-PR – Alice comprou um terreno de forma triangular e solicitou a um engenheiro civil que fizesse a planta da casa a ser construída, incluindo um gazebo e uma piscina na área de lazer. A proposta do engenheiro foi construir a casa em formato de L, um gazebo de forma trapezoidal e uma piscina com formato circular.

Considere a seguir, no plano cartesiano, a planta feita pelo engenheiro, na qual constam o esboço do terreno, da localização da casa, do gazebo e da piscina.



a) Determine a área representada pela região triangular ABC, em m², ocupada pelo terreno.

Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

b) Considerando que o ponto L pertence à circunferência do círculo de centro K e que é o ponto de interseção das retas t e s, em que t é a reta determinada pelos pontos P e O e s é a reta determinada pelos pontos E e K, defina a equação reduzida da circunferência de centro K, que representa a piscina no plano cartesiano.

Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

a) Calculando a determinante, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 32 & 0 \\ 2 & 24 & 20 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 64 - 2 - 768 = -686$$

A área do triângulo ABC é igual a:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |-686| = \frac{1}{2} \cdot 686 \rightarrow A_{\Delta ABC} = 343 \text{ m}^2$$

b) A equação da reta t é obtida por:

$$y - 12 = \frac{14 - 12}{16 - 14} \cdot (x - 14) \rightarrow y - 12 = \frac{2}{2} \rightarrow (x - 14) \rightarrow y = x - 2$$

A equação da reta s é:

$$y - 12 = \frac{20 - 12}{2 - 10} \cdot (x - 10) \rightarrow y - 12 = -\frac{8}{8} \rightarrow (x - 10) \rightarrow y = -x + 22$$

Logo, como L é o ponto de interseção de t e s, temos que L é a solução do sistema construído pelas equações das retas. Resolvendo o sistema, encontramos L = (12, 10).

Sendo assim, a equação solicitada é obtida por:

$$(x - 10)^2 + (y - 12)^2 = d^2$$

$$(x - 10)^2 + (y - 12)^2 = \left(\sqrt{(12 - 10)^2 + (10 - 12)^2}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x - 10)^2 + (y - 12)^2 = \sqrt{64} \rightarrow (x - 10)^2 + (y - 12)^2 = 8$$

Portanto, a equação reduzida é $(x - 10)^2 + (y - 12)^2 = 8$.

5. UFPR – Considerando a circunferência C de equação $(x-3)^2+(y-4)^2=5$, avalie as seguintes afirmativas:

1. O ponto P(4, 2) pertence a C.

2. O raio de C é 5.

3. A reta $y=\frac{3}{5}x$ passa pelo centro de C.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
b) Somente a afirmativa 2 é verdadeira.
c) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

1. Verdadeira, pois, substituindo os valores de P na equação, obtemos: $(4-3)^2+(2-4)^2=5$
2. Falsa, pois o raio é $\sqrt{5}$.
3. Verdadeira, pois as coordenadas do centro são (3, 4). Substituindo-os na equação da reta, obtemos: $4=\frac{4}{3}\cdot 3 \rightarrow 4=4$.

Logo, apenas as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

6. EsPCEx – Uma circunferência tem centro no eixo das abscissas, passa pelo ponto (4, 4) e não intercepta o eixo das coordenadas. Se a área do círculo definido por essa circunferência é 17π, a abscissa de seu centro é

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 7

Como a área do círculo é 17π, teremos:
$A=\pi\cdot r^2=17\pi$, em que r é a medida do raio do círculo:
$r^2=17$
Como a circunferência tem centro no eixo das abscissas, C(a, 0) é centro da circunferência.
Logo, $(x-a)^2+y^2=17$.
Como o ponto (4, 4) faz parte da circunferência, teremos:

$(x-a)^2+y^2=17$
$(4-a)^2+4^2=17$
$(4-a)^2=17-16$
$(4-a)^2=1$
$4-a=1$ ou $4-a=-1$
Logo:
$4-a=1 \rightarrow a=3$
$4-a=-1 \rightarrow a=5$

Portanto, a circunferência tem equação $(x-3)^2+y^2=17$ ou $(x-5)^2+y^2=17$.
Analisando a circunferência $(x-3)^2+y^2=17$, podemos ver que ela intercepta o eixo das ordenadas, pois a equação $(0-3)^2+y^2=17$ tem solução real.
Já $(x-5)^2+y^2=17$ não corta o eixo das ordenadas, pois a equação $(0-5)^2+y^2=17$ tem solução real.
Sendo assim, a abscissa do centro da circunferência é 5.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UPE – Em qual das alternativas a seguir o ponto P pertence à circunferência β?

a) $P(5,\ 6);\ \beta:(x-3)^2+(y-6)^2=4$
b) $P(1,\ 2);\ \beta:(x-2)^2+(y-2)^2=5$
c) $P(1,\ 5);\ \beta:x^2+y^2-8x+6=0$
d) $P(1,\ 3);\ \beta:(x+1)^2+(y-2)^2=16$
e) $P(3,\ 1);\ \beta:x^2+y^2-4x+2y+2=0$

8. Ifal – A equação da circunferência que tem um dos diâmetros com extremidades nos pontos A(– 1, 3) e B(3, – 5) é dada por:

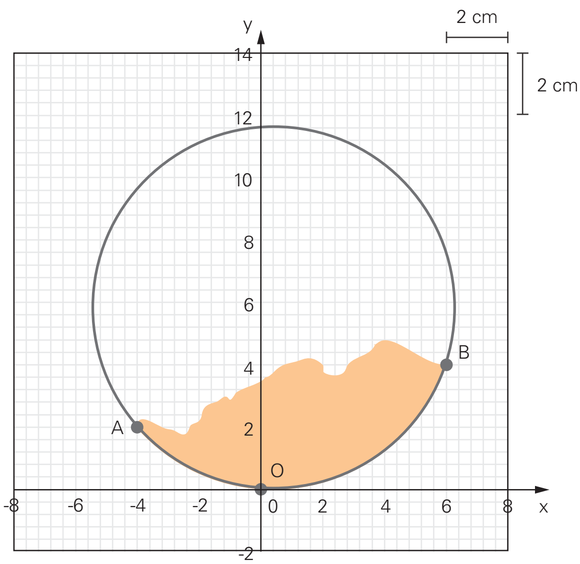
a) $(x-1)^2+(y+1)^2=20$
b) $(x+1)^2+(y-2)^2=20$
c) $(x-2)^2+(y+4)^2=80$
d) $(x-1)^2+(y-1)^2=80$
e) $(x+2)^2+(y-4)^2=20$

9. Cefet-MG – Considere as circunferências
$\lambda_1:(x+2)^2+(y+1)^2=5$ e $\lambda_2:(x-4)^2+(y-3)^2=9$.

A área do triângulo cujos vértices são os centros dessas circunferências e o ponto $P\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$, em unidades de área, é igual a

a) $\frac{13}{2}$
b) $\frac{11}{2}$
c) $\frac{9}{4}$
d) $\frac{7}{4}$
e) $\frac{5}{4}$

10. Unesp – Uma expedição arqueológica encontrou um pedaço de um prato de cerâmica antigo, supostamente circular. Para estimar o tamanho do prato, os arqueólogos desenharam o pedaço de cerâmica encontrado, em tamanho real, em um plano cartesiano de origem O(0, 0). A circunferência do prato passa pela origem do plano cartesiano e pelos pontos A(–4, 2) e B(6, 4), como mostra a figura.



a) A área do pedaço de cerâmica é aproximadamente igual à área do triângulo ABO. Calcule a área desse triângulo, em cm².

b) Calcule as coordenadas do ponto em que estaria localizado o centro do prato cerâmico circular nesse sistema de eixos cartesianos ortogonais.

11. UPE – Qual é a razão entre a medida da área e do comprimento da circunferência que, no plano cartesiano, passa pelos pontos A(–4, 1), B(–1, –2) e C(2, 1)?

a) 0,5
b) 1
c) 1,5
d) 2
e) 2,5

12. UPF-RS – Considere uma circunferência C definida pela equação x + y = 36. O ponto P de coordenadas (x, 4) pertence a essa circunferência e está localizado no 1º quadrante. Considerando que o ponto O é o centro da circunferência e o ângulo α é formado pelo segmento OP com o lado positivo do eixo x, os cossenos dos ângulos α e $(180° - \alpha)$ serão iguais a:

a) $\frac{5}{6}$ e $-\frac{5}{6}$

b) $\frac{2}{3}$ e $-\frac{2}{3}$

c) $\frac{5}{6}$ e $\frac{4}{5}$

d) $\frac{2\sqrt{5}}{6}$ e $-\frac{2\sqrt{5}}{3}$

e) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ e $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

13. UEM-PR – Considere um sistema cartesiano ortogonal de origem O = (0, 0). Um ponto nesse sistema é representado por um par ordenado P = (x, y), onde a coordenada x é chamada de abscissa e a coordenada y, de ordenada.

Assinale o que for **correto**.

01) Considere duas circunferências, a primeira de centro em $P_1 = (1, 1)$ e a segunda de centro em $P_2 = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, ambas de raio igual a $\frac{1}{4}$. A interseção entre elas é vazia.

02) A reta de equação $y = 2x + 5$ intersecta a circunferência de equação $(x - 2) + y = 6$, nos pontos $P_1 = (1,7)$ e $P_2 = (0, 5)$

04) A equação $x^2 - 6x + y^2 - 2y = -6$ é a equação da circunferência de centro em P = (3, 1) e raio 2.

08) O ponto P = (1, 3) pertence à circunferência de equação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

16) As retas r e s, respectivamente, de equações $y = -\frac{3}{2}x + 3$ e $y = \frac{2}{3}x$ são perpendiculares.

14. UFJF-MG (adaptado) – Considere os pontos P(2, 4), Q(–1, 0) e S(–5, 3).

a) Determine a equação da reta contendo o segmento PQ e a da reta contendo o segmento PS.

b) Considere o triângulo de vértices P, Q e S. O triângulo dado é retângulo? Justifique sua resposta.

c) Obtenha a equação da circunferência que contém os pontos P, Q e S.

15. UFJF-MG – Ao estudar a órbita circular de um planeta ao redor de uma estrela, com o auxílio de um plano cartesiano, um jovem astrônomo percebeu que esta passava pelos pontos A = (0, 1) e B = (1, 2) e tinha raio $r = \sqrt{5}$ u.a., sendo que, uma unidade astronômica ou um u.a. é igual a $1{,}5 \times 10^{11}$ metros.

a) Sabendo que a estrela encontra-se no ponto P que é o centro da órbita circular, cuja primeira coordenada é positiva, determine a equação da circunferência que descreve a órbita.

b) Após um período de observação, o astrônomo percebeu que uma grande erupção estelar atingiu a órbita do planeta do ponto A até o ponto B. Determine a área atingida pela erupção, considerando que essa é aproximadamente a área do triângulo de vértices A, B e P.

16. Uece – No referencial cartesiano ortogonal usual, a medida da área do quadrilátero convexo cujos vértices são as interseções de cada uma das retas $x + y - 1 = 0$ e $x + y + 1 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 25$, calculada com base na unidade de comprimento (u.c.) adotada no referencial cartesiano considerado, é

a) 16 $(u.c.)^2$
b) 14 $(u.c.)^2$
c) 18 $(u.c.)^2$
d) 20 $(u.c.)^2$

17. ITA – Se P e Q são pontos que pertencem à circunferência $x + y = 4$ e à reta $y = 2(1 - x)$, então o valor do cosseno do ângulo PÔQ é igual a

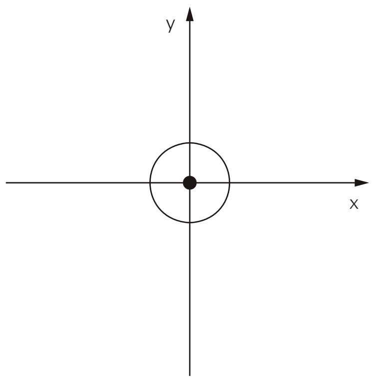
a) $-\frac{3}{5}$
b) $-\frac{3}{7}$
c) $-\frac{2}{5}$
d) $-\frac{4}{5}$
e) $-\frac{1}{7}$

ESTUDO PARA O ENEM

18. PUC-RS C5-H21

Resolva a questão com base na regra 2 da Fifa, segundo a qual a bola oficial de futebol deve ter sua maior circunferência medindo de 68 cm a 70 cm.

Considerando essa maior circunferência com 70 cm e usando um referencial cartesiano para representá-la, como no desenho abaixo, poderíamos apresentar sua equação como



a) $x^2 + y^2 = \dfrac{35}{\pi}$

b) $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{35}{\pi}\right)^2$

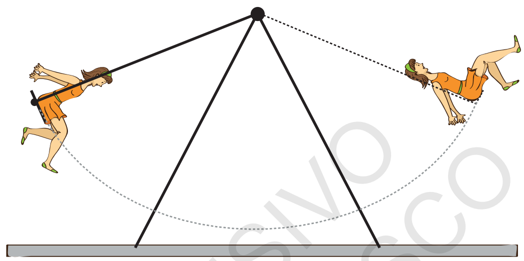
c) $x^2 + y^2 = \dfrac{70}{\pi}$

d) $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{70}{\pi}\right)^2$

e) $x^2 + y^2 = 70^2$

19. Enem C5-H21

A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo x é paralelo ao chão do parque e o eixo y tem orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função

a) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

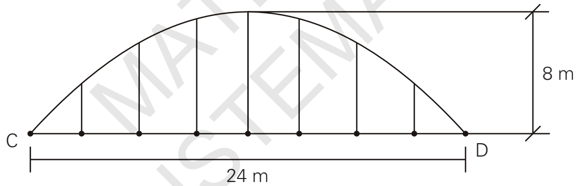
c) $f(x) = x^2 - 2$

d) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

20. UFPB C5-H22

O Governo pretende construir armazéns com o intuito de estocar parte da produção da safra de grãos, de modo que não haja desperdícios por situações adversas. A seção transversal da cobertura de um desses armazéns tem a forma de um arco de circunferência, apoiado em colunas de sustentação que estão sobre uma viga. O comprimento dessa viga é de 24 m e o comprimento da maior coluna de sustentação é de 8 m, conforme figura a seguir.



Considerando um sistema cartesiano de eixos ortogonais xy, com origem no ponto C, de modo que o semieixo x positivo, esteja na direção CD e o semieixo y positivo apontando para cima, é correto afirmar que a equação da circunferência que contém o arco CD da seção transversal do telhado, com relação ao sistema de eixos xy, é dada por:

a) $(x - 12)^2 + (y + 5)^2 = 169$
b) $(x - 12)^2 + (y - 7)^2 = 193$
c) $(x - 12)^2 + (y - 6)^2 = 180$
d) $(x - 12)^2 + (y + 6)^2 = 180$
e) $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 169$

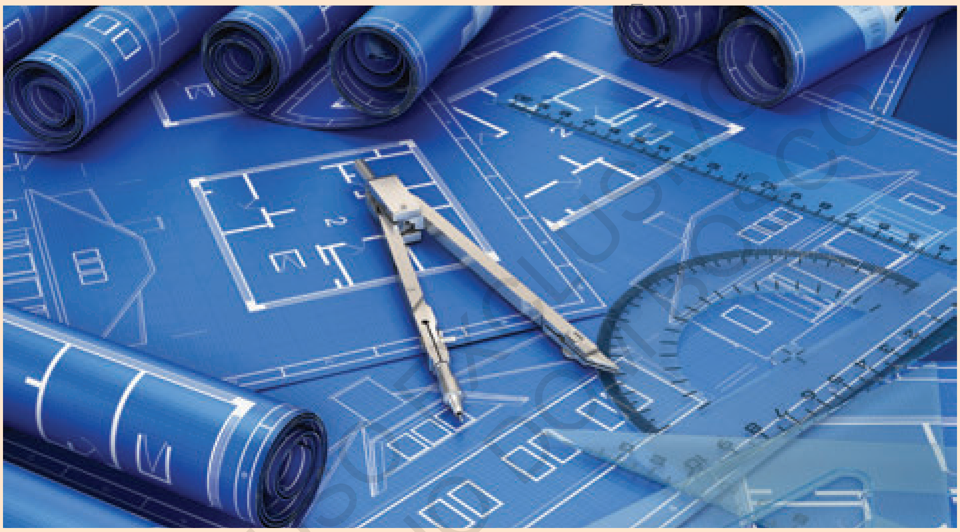
52

EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA – EQUAÇÃO GERAL

- Equação geral da circunferência

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- Resolver situações-problemas que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração.



ADVENTTR/ISTOCKPHOTO

Ao centro, vemos um compasso, instrumento bastante usado em cálculos e desenhos geométricos.

Introdução

O compasso parabólico foi inventado por Leonardo da Vinci, durante o chamado Renascimento cultural, de meados do século XV até o final do século XVI. Em razão de seu contexto histórico, posterior à Idade Média, esse instrumento adquiriu caráter de símbolo para ideais resumidos na ligação entre o racionalismo e a arte e no estilo de vida antropocêntrico, elementos característicos da época.

A ferramenta até hoje é usada para cálculos e desenhos geométricos. Com o compasso parabólico, é possível encontrar o baricentro de uma circunferência ou desenhar um hexágono de medidas proporcionais.

EQUAÇÃO GERAL DA CIRCUNFERÊNCIA

Por meio da equação reduzida da circunferência de centro C(a, b) e raio **r**, encontramos a equação geral da circunferência:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Ao desenvolver os quadrados e isolar os termos da equação no primeiro membro, obtemos:

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$
$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Calculando $-2a = d$, $-2b = f$ e $a^2 + b^2 - r^2 = g$, obtemos a **equação geral da circunferência:**

$$x^2+y^2+dx+fy+g=0$$

Devemos notar que:

$-2a = d \rightarrow 2a = -d \rightarrow a = -\dfrac{d}{2}$

$-2b = f \rightarrow 2b = -f \rightarrow b = -\dfrac{f}{2}$

$a^2 + b^2 - r^2 = g \rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - g \rightarrow \ r = \sqrt{a^2 + b^2 - g}$

Observações:

1. Se $x^2+y^2+dx+fy+g=0$ é a equação da circunferência, então kx^2+ky^2+kdx+ $+kfy+kg=0$, com $k \neq 0$, é a outra equação da mesma circunferência. Para determinar o centro e o raio com base nessa última equação, devemos primeiramente dividi-la por **k**, para depois aplicar as fórmulas.

Exemplo:

Vamos considerar a circunferência de equação $3x^2+3y^2-6x+12y-9=0$.
Para obter o centro e o raio, dividimos, primeiramente, a equação por 3:

$$\frac{3}{3}x^2+\frac{3}{3}y^2-\frac{6}{3}x+\frac{12}{3}y-\frac{9}{3}=0$$

Assim, a equação que utilizaremos para encontrar o centro e o raio será:

$$x^2+y^2-2x+4y-3=0$$

Então, o centro C(a, b) e o raio **r** valem:

$d = -2;\ f = 4;\ e\ g = -3$

$a = -\dfrac{d}{2} = -\dfrac{-2}{2} = 1$

$b = -\dfrac{f}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2$

$r = \sqrt{a^2+b^2-g} = \sqrt{1^2+(-2)^2-(-3)} = \sqrt{1+4+3} = \sqrt{8} \rightarrow r = 2\sqrt{2}$

Então, C(1, –2) e $r = 2\sqrt{2}$.

2. Vamos considerar a equação $x^2+y^2+dx+fy+g=0$, em que **d**, **f** e **g** são números reais conhecidos. A equação na forma reduzida será:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = a^2+b^2-g, \text{ em que } a = -\frac{d}{2} \text{ e } b = -\frac{f}{2}$$

Então, concluímos que:

- Se $a^2+b^2-g > 0$, a equação representa uma circunferência de centro (a, b) e raio **r**.
- Se $a^2+b^2-g = 0$, a equação representa um único ponto, e apenas (a, b) satisfaz à equação.
- Se $a^2+b^2-g < 0$, a equação representa um conjunto vazio.

Exemplo:

Dada a equação $x^2+y^2+4x+2y+5=0$, podemos afirmar que se trata da equação de uma circunferência de centro C(a, b) e raio **r**. Essa equação representa um único ponto ou um conjunto vazio?

$d = 4;\ f = 2;\ g = 5$

$a = -\dfrac{d}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2$

$b = -\dfrac{f}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1$

Então, $a^2 + b^2 - g = (-2)^2 + (-1)^2 - 5 = 4 + 1 - 5 = 0$.
Como $a^2 + b^2 - g = 0$, a equação representa um único ponto, (–2, –1).

A circunferência do olho humano tem aproximadamente 75 milímetros de diâmetro. Outro detalhe é que a íris e a pupila são circunferências concêntricas.

Quando estamos num ambiente com baixa luminosidade, a pupila se dilata, a fim de que possamos aproveitar a pouca luz para enxergarmos bem.

Você já se perguntou se a pupila pode chegar a ficar do tamanho da íris? A dilatação da popularmente chamada "menina dos olhos" varia de 2 a 8 milímetros. Assim, a íris sempre permanece maior que a pupila.

GERENME/ISTOCKPHOTO

Olho humano. Observe que a pupila (parte preta) e a íris (parte castanha) formam circunferências concêntricas.

A pupila é a abertura no centro da íris que, por meio de contração ou dilatação, controla a entrada da luz, possibilitando que enxerguemos em situações com menos ou mais claridade.

Por sua vez, os felinos, caçadores de hábitos noturnos, têm visão muito superior à dos seres humanos durante a noite. Não é verdade que eles enxergam na completa escuridão, mas seus olhos conseguem captar mínimas quantidades de luz do ambiente. Isso porque as pupilas desses animais podem se dilatar e ficar quase do tamanho dos olhos.

PARKINSONSNIPER/DREAMSTIME.COM

Olho de um felino. A capacidade de dilatação da pupila desses animais os auxilia durante a noite, período em que estão mais ativos.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Por meio da equação reduzida da circunferência, obtenha a equação geral da circunferência de centro C(5, –2) e raio $\sqrt{7}$.

Resolução

De acordo com o enunciado:

$C(5, -2)$ e $r = \sqrt{7}$

$a = 5,\ b = -2$

Substituindo os valores na equação reduzida da circunferência, temos:

$$(x-5)^2 + [y-(-2)]^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 4 = 7$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 25 + 4 - 7 = 0$$

Portanto, a equação geral da circunferência será:

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$$

2. Sistema Dom Bosco – Por meio da equação geral $x^2 + y^2 - 16x + 8y - 10 = 0$, obtenha o centro e o raio da circunferência.

Resolução

Sendo:

$d = -16;\ f = 8;\ g = -10$

Para o cálculo de centro C(a, b), temos:

$$a = -\frac{d}{2} \rightarrow a = -\frac{-16}{2} \rightarrow a = 8$$

$$b = -\frac{f}{2} \rightarrow b = -\frac{8}{2} \rightarrow b = -4$$

Assim:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - g} \rightarrow r = \sqrt{8^2 + (-4)^2 - (-10)} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \sqrt{90} \rightarrow r = 3\sqrt{10}$$

Logo, C(8, –4) e $r = 3\sqrt{10}$.

ROTEIRO DE AULA

EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA – EQUAÇÃO GERAL

Equação geral da circunferência

$x^2 + y^2 + dx + fy + g = 0$

Centro da circunferência C(a, b) e raio r

a = $-\frac{d}{2}$ b = $-\frac{f}{2}$

r = $\sqrt{a^2 + b^2 - g}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. IFCE – A equação $36x^2+36y^2-36x+24y-131=0$ representa uma cônica. É **correto** afirmar-se que essa cônica é uma

a) elipse de centro (0, 1).
b) circunferência de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.
c) hipérbole.
d) parábola.
e) circunferência de comprimento 4π unidades de comprimento.

De acordo com o enunciado:
$36x^2 + 36y^2 - 36x + 24y - 131 = 0$
Dividindo os termos da equação por 36, obtemos:
$$x^2 + y^2 - x + \frac{2}{3}y - \frac{131}{36} = 0$$
$$d = -1;\ f = \frac{2}{3};\ g = -\frac{131}{36}$$
$$a = -\frac{d}{2} = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
$$b = -\frac{f}{2} = -\frac{\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}$$
Logo, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$.

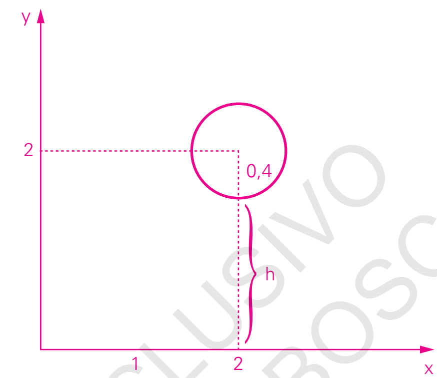
Assim:
$$r = \sqrt{a^2+b^2-g} \to \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(-\frac{131}{36}\right)} \to r = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{131}{36}} \to$$
$$\to r = \sqrt{\frac{9}{36}+\frac{4}{36}+\frac{131}{36}} \to r = \sqrt{4} \to r = 2$$
Como o raio da circunferência mede 2, seu comprimento será:
$C = 2\pi \cdot r \to C = 2 \cdot 2 \cdot \pi \to C = 4\pi$
Portanto, essa cônica é uma circunferência com 4π unidades de comprimento.

2. UEG-GO (adaptado) C5-H22

Um espelho em formato de circunferência foi pendurado em uma parede. Considerando o canto inferior esquerdo como a origem de um sistema cartesiano, o espelho pode ser representado pela equação da circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7{,}84 = 0$. Dessa forma, constata-se que o espelho está a uma altura do chão de

a) 1,00 metro
b) 1,55 metro
c) 1,60 metro
d) 1,74 metro
e) 1,80 metro

Da equação $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7{,}84 = 0$, temos:
$d = -4;\ f = -4;\ g = 7{,}84$
$$a = -\frac{d}{2} \to d = -\frac{-4}{2} \to d = 2$$
$$b = -\frac{f}{2} \to b = -\frac{-4}{2} \to b = 2$$
$$r = \sqrt{a^2+b^2-g} \to r = \sqrt{(2)^2+(2)^2-7{,}84} \to r = \sqrt{0{,}16} \to r = 0{,}4$$
Logo, C(2, 2) e r = 0,4.
O espelho é representado por uma circunferência de centro (2, 2) e raio 0,4.



Assim, temos $h = 2 - 0{,}4 \to h = 1{,}60$.
Portanto, a altura h do espelho a partir do chão será 1,60 m.

3. UFSM-RS (adaptado) – Uma antena de telefone celular rural cobre uma região circular de área igual a 900π km². Essa antena está localizada no centro de uma região circular e sua posição no sistema cartesiano, com medidas em quilômetros, é o ponto (0, 10).

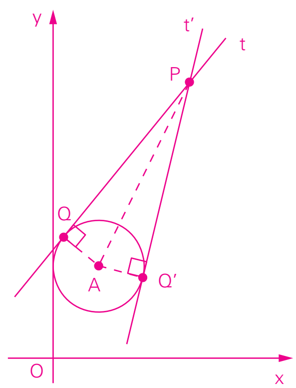
Assim, qual a equação da circunferência que delimita a região circular?

Entendendo que r seja o raio da circunferência, temos:
$\pi \cdot r^2 = 900 \cdot \pi \to r = \sqrt{900} \to r = 30$
Logo, a equação da circunferência será fornecida por:
$(x-0)^2 + (y-10)^2 = 30^2 \to x^2 + y^2 - 20y - 800 = 0$

4. Fuvest-SP – São dados, no plano cartesiano, o ponto P de coordenadas (3, 6) e a circunferência C de equação $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$. Uma reta t passa por P e é tangente a C em um ponto Q. Então a distância de P a Q é

a) $\sqrt{15}$
b) $\sqrt{17}$
c) $\sqrt{18}$
d) $\sqrt{19}$
e) $\sqrt{20}$

A circunferência C tem centro no ponto A(1, 2) e raio igual a 1. Assim, em consenso com as informações, observe a figura:



Sendo $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$ e $\overline{AQ} = \overline{AQ'} = 1$, temos:

$\overline{PA}^2 = (3-1)^2 + (6-2)^2 \to \overline{PA}^2 = 2^2 + 4^2 \to$

$\to \overline{PA}^2 = 4 + 16 \to \overline{PA}^2 = 20$

Assim, $\overline{PQ}^2 = \overline{PA}^2 - \overline{AQ}^2 \to \overline{PQ}^2 = 20 - 1 \to \overline{PQ} = \sqrt{19}$.

Portanto, a distância de P a Q é $\sqrt{19}$ u.c.

5. UFRGS – A área de um quadrado inscrito na circunferência de equação $x^2 - 2y + y^2 = 0$ é:

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) $\sqrt{2}$

d) 2

e) $2\sqrt{2}$

Resolvendo a equação, temos:

$x^2 - 2y + y^2 = 0 \to x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 + 1$

$x^2 + (y-1)^2 = 1 \to x^2 - 2y + y^2 = 0$

$x^2 + y^2 - 2y = 0$

$d = 0;\ f = -2;\ g = 0$

$a = -\frac{d}{2} \to a = \frac{0}{2} \to a = 0$

$b = -\frac{f}{2} \to b = -\frac{(-2)}{2} \to b = 1$

$r = \sqrt{a^2 + b^2 - g} \to r = \sqrt{0^2 + 1^2 - 0} \to r = 1$

Logo, C(0, 1) e r = 1.

Todo quadrado é um losango. Desse modo, sua área pode ser calculada como a dimensão do produto de suas diagonais. A diagonal d desse quadrado é o diâmetro da circunferência. Portanto, d = 2. Sua área será obtida por $A = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$.

6. UFJF-MG – Para os itens (a) e (b) abaixo, considere a seguinte circunferência: $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 44$.

a) Encontre o centro e o raio da circunferência.

b) Encontre a equação da reta que passa pelo centro da circunferência e que é perpendicular à reta que contém os pontos $P_1 = (6, 3)$ e $P_2 = (9, 2)$.

a) De $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 44$, temos:

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 44 + 1 + 4$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 7^2$

Da equação acima, C(1, –2) é o centro da circunferência e r = 7 é a medida do raio.

b) Sendo s a reta que passa pelos pontos $P_1 = (6, 3)$ e $P_2 = (9, 2)$:

$m_s = \frac{3-2}{6-9} = -\frac{1}{3}$

Sendo t a reta que passa pelo centro da circunferência e que é perpendicular à s, então:

$m_t \cdot m_s = -1$

$m_t \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \to m_t = 3$

Por meio da equação fundamental da reta, obtemos:

$t: y - (-2) = 3 \cdot (x - 1) \to t: y = 3x - 5$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. UERN – O raio da circunferência determinada pela equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ é, em unidades de medida:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

8. ESPM – As coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência de equação $x^2 - 4x + (y+1)^2 = 0$ são, respectivamente:

a) (– 2, 1) e 4

b) (2, – 1) e 2

c) (4, – 1) e 2

d) (–1, 2) e $\sqrt{2}$

e) (2, 2) e $\sqrt{2}$

9. UFPR – Uma reta passando pelo ponto P(16, – 3) é tangente ao círculo $x^2 + y^2 = r^2$ em um ponto Q. Sabendo que a medida do segmento $\overline{PQ}$ é de 12 unidades, calcule:

a) a distância do ponto P à origem do sistema cartesiano;

b) a medida do raio r da circunferência.

10. USF-SP – A circunferência λ tem centro no ponto C(– 2, y) e intersecta o eixo das ordenadas nos pontos A(0, 1) e B(0, – 1). De acordo com esses dados, pode-se afirmar que uma equação para representar λ é

a) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x + y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 1 = 0$

11. EsPCEx – Sejam dados a circunferência $\lambda: x^2 + y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$ e o ponto P, que é simétrico de (–1, 1) em relação ao eixo das abscissas. Determine a equação da circunferência concêntrica à λ e que passa pelo ponto P.

a) $\lambda: x^2 + y^2 + 4x + 10y + 16 = 0$

b) $\lambda: x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0$

c) $\lambda: x^2 - y^2 + 4x - 5y + 16 = 0$

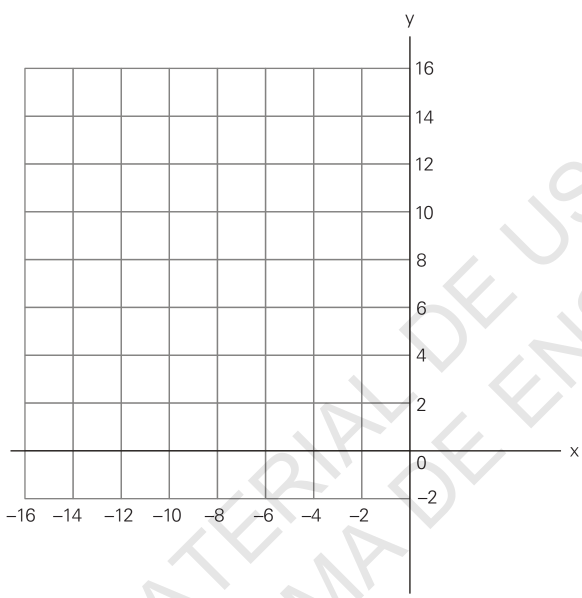
d) $\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 5y + 12 = 0$

e) $\lambda: x^2 - y^2 - 4x - 10y - 17 = 0$

12. Uema – O proprietário de um lote, visando a sua ornamentação, dividiu-o em área circular, tendo subdividido-o em dois triângulos idênticos opostos, inscritos no círculo, cujos vértices são A(–14, 9), B(–4, 9) e C(–9, 14); sendo AB o diâmetro da circunferência.

Considerando as condições descritas e as medidas em metros,

a) faça a ilustração gráfica desse lote no sistema cartesiano ortogonal do plano.



b) calcule a equação da circunferência.

c) determine a área correspondente aos triângulos idênticos.

13. UFRGS – A circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 6$ está inscrita em um quadrado.

A medida da diagonal desse quadrado é

a) $\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{2}$
c) $4\sqrt{2}$
d) $6\sqrt{2}$
e) $8\sqrt{2}$

14. UPE – No sistema cartesiano, sendo a circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 6x - 2y = -6$, qual a equação da circunferência C′ simétrica de C em relação à origem do sistema?

a) $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 4$
b) $x^2 + y^2 - 6x - 2y = -4$
c) $x^2 + y^2 + 6x + 2y = -4$
d) $x^2 + y^2 - 6x + 2y = -6$
e) $x^2 + y^2 + 6x + 2y = -6$

15. UFU-MG – Uma máquina moderna usa um sistema de coordenadas cartesianas xOy para representar a forma e a dimensão (mapear) dos objetos que serão cortados, furados etc. Uma chapa metálica delgada triangular é mapeada pelo triângulo de vértices A = (– 3, 0), B = (1, 4) e C = (5, – 4), e será feito um furo circular de raio igual a uma unidade de comprimento, com centro no centro de massa dessa chapa (baricentro do triângulo). Para realizar esse procedimento com precisão, a máquina calcula a equação cartesiana do círculo.

Elabore e execute um plano de resolução que conduza à determinação do centro de massa e da equação desse círculo.

16. Uece – No plano cartesiano usual, a equação da circunferência que contém os pontos (– 4 , 0), (4, 0) e (0, 8) é $x^2 + y^2 + my + n = 0$. O valor da soma $m^2 + n$ é

a) 30
b) 10
c) 40
d) 20

17. Fuvest-SP – A equação $x^2 + 2x + y^2 + my = n$, em que m e n são constantes, representa uma circunferência no plano cartesiano. Sabe-se que a reta $y = -x + 1$ contém o centro da circunferência e a intersecta no ponto (– 3, 4). Os valores de m e n são, respectivamente,

a) –4 e 3
b) 4 e 5
c) –4 e 2
d) –2 e 4
e) 2 e 3

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C5-H22

Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada.

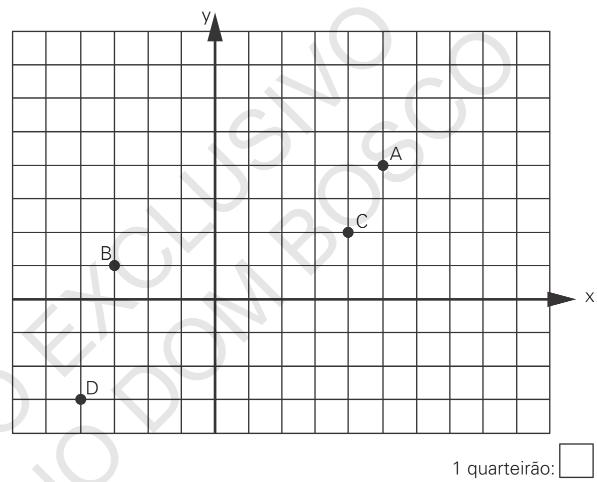
Nessas condições, a maior distância, em metros, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é

a) 30
b) 40
c) 45
d) 60
e) 68

19. Enem C2-H9

Considere que os quarteirões de um bairro tenham sido desenhados no sistema cartesiano, sendo a origem o cruzamento das duas ruas mais movimentadas desse bairro. Nesse desenho, as ruas têm suas larguras desconsideradas e todos os quarteirões são quadrados de mesma área, sendo a medida de seu lado a unidade do sistema.

A seguir há uma representação dessa situação, em que os pontos A, B, C e D representam estabelecimentos comerciais desse bairro.



Suponha que uma rádio comunitária, de fraco sinal, garante área de cobertura para todo estabelecimento que se encontre num ponto cujas coordenadas satisfaçam à inequação: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leq 0$.

A fim de avaliar a qualidade do sinal e proporcionar uma futura melhora, a assistência técnica da rádio realizou uma inspeção para saber quais estabelecimentos estavam dentro da área de cobertura, pois estes conseguem ouvir a rádio, enquanto os outros não.

Os estabelecimentos que conseguem ouvir a rádio são apenas

a) A e C
b) B e C
c) B e D
d) A, B e C
e) B, C e D

20. Mackenzie (adaptado) C5-H21

Vitória-régia é uma planta aquática típica da região amazônica. Suas folhas são grandes e têm formato circular, com uma capacidade notável de flutuação, graças aos compartimentos de ar em sua face inferior.

Em um belo dia, um sapo estava sobre uma folha de vitória-régia, cuja borda obedece à equação $x^2+y^2+2x+y+1=0$, apreciando a paisagem ao seu redor. Percebendo que a folha que flutuava à sua frente era maior e mais bonita, resolveu pular para essa folha, cuja borda é descrita pela equação $x^2+y^2-2x-3y+1=0$.

A distância linear mínima que o sapo deve percorrer em um salto para não cair na água é

a) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$
b) 2
c) $2\sqrt{2}$
d) $\sqrt{2}-2$
e) 4

CIRCUNFERÊNCIA – POSIÇÕES RELATIVAS

53

- Posições relativas entre pontos e circunferência
- Posições relativas entre reta e circunferência
- Posições relativas entre duas circunferências

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

PETROVICH11/DREAMSTIME.COM

Introdução

Os satélites artificiais que orbitam a Terra através de tecnologia nos fornecem grandes vantagens, como a internet, a rede móvel de telefonia, o GPS, entre muitas outras utilidades. Eles orbitam de modo a não se cruzarem ou colidirem entre si. Para isso, existe uma distância certa entre eles e muitos cálculos matemáticos envolvendo circunferências. Estima-se que, hoje, haja 150 mil satélites artificiais orbitando nosso planeta.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTOS E CIRCUNFERÊNCIA

Um ponto **P** pode ser **interno**, **externo** ou **pertencer** à circunferência de centro C(a, b) e raio **r**.

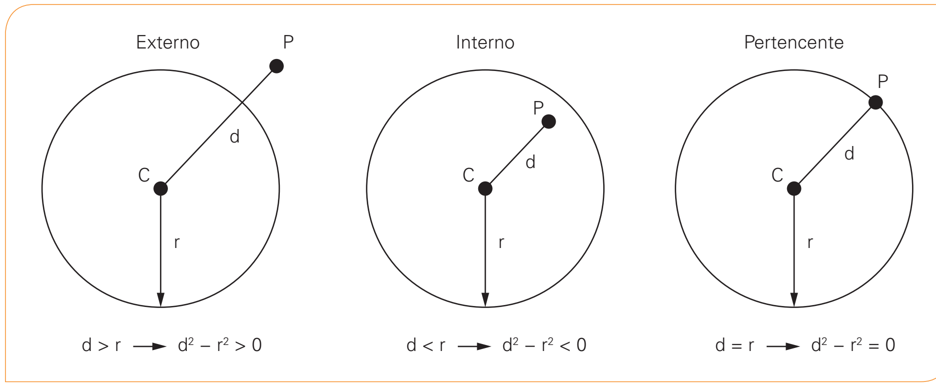
Sendo $P(x_0, y_0)$ um ponto no plano cartesiano, a distância de **P** ao centro **C** da circunferência é dada por:

$$d = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$$

Relembrando o que vimos no módulo anterior, a circunferência de centro C(a, b) e raio **r** tem equação descrita por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

O número $\mathbf{d^2 - r^2}$ é denominado **potência de P em relação à circunferência** e pode ser positivo, negativo ou nulo, conforme o ponto **P** seja, respectivamente, externo, interno ou pertencente à circunferência.



Dessa forma, a potência de **P** em relação à circunferência é:

Potência de P $= d^2 - r^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2$

Obtém-se esse valor quando se substitui as coordenadas de $P(x_0, y_0)$ na equação geral da circunferência. Assim, conclui-se que:

$P_{externo}$: $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 > 0$

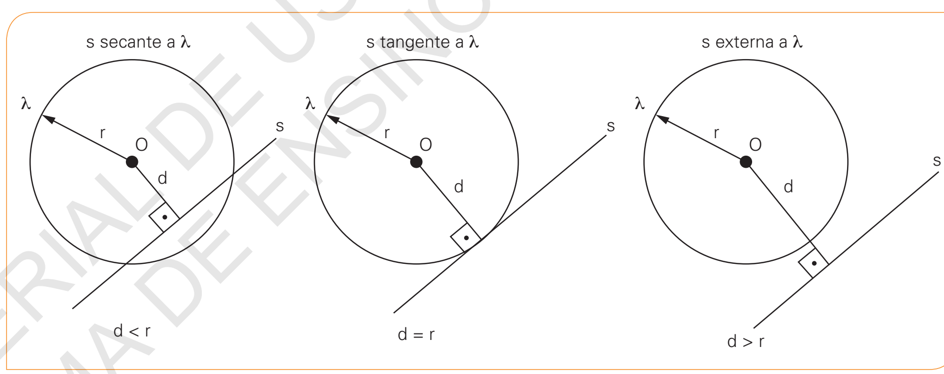
$P_{interno}$: $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 < 0$

$P_{pertencente}$: $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0$

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Há duas maneiras distintas para identificar se uma reta **s** de equação $ax + by + c = 0$ é tangente, secante ou externa a uma circunferência λ de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r = 0$:

I. Comparar a distância **d**, do centro da circunferência até a reta **s**, com o raio dessa circunferência:



II. Resolver o sistema formado pelas equações de **s** e **λ**, recaindo sempre em uma equação do 2º grau. A posição de **s** e **λ** é determinada pelo valor do Δ (discriminante) dessa equação.

$\Delta > 0 \quad \leftrightarrow \quad$ **s** é secante a λ.

$\Delta = 0 \quad \leftrightarrow \quad$ **s** é tangente a λ.

$\Delta < 0 \quad \leftrightarrow \quad$ **s** é externa a λ.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Determine a equação da reta que passa por P(1, 4) e é tangente à circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 9 = 0$.

Resolução

Determine a posição de **P** em relação à circunferência:

$x = 1;\ y = 4$

P: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 9 = (1 - 2)^2 + (4 - 3)^2 - 9 =$
$= 1 + 1 - 9 = -7 < 0$

Como o ponto **P** é interno à circunferência, o problema não tem solução, isto é, não há uma reta tangente à circunferência passando por ele.

2. Sistema Dom Bosco – Determine a equação da reta que passa por P(4, 1) e é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$.

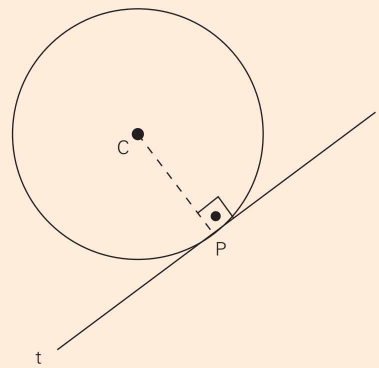
Resolução

Determine a posição de **P** em relação à circunferência:

$x = 4; y = 1$

P: $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = (4)^2 + (1)^2 - 2 \cdot (4) - 6 \cdot (1) - 3 = 16 + 1 - 8 - 6 - 3 = 0$

Logo, o ponto **P** pertence à circunferência e o problema tem uma única solução.



Para encontrar as coordenadas do centro da circunferência, temos:

$$a = -\frac{d}{2} = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$b = -\frac{f}{2} = -\frac{-6}{2} = 3$$

Logo, C(1, 3).

Assim, a reta **s** que passa pelos pontos P(4, 1) e C (1, 3) é perpendicular à reta **t** tangente à circunferência.

Calculando o coeficiente angular da reta **s**, obtemos:

$$s: m_s = \frac{1-3}{4-1} = -\frac{2}{3}$$

Calculando o coeficiente angular da reta **t**, perpendicular a s, obtemos:

$$m_s \cdot m_r = -1 \rightarrow -\frac{2}{3} \cdot m_r = -1 \rightarrow m_r = \frac{3}{2}$$

Logo, a equação de **t** será:

$$y - 1 = \frac{3}{2} \cdot (x - 4) \rightarrow y - 1 = +\frac{3}{2}x - 6$$

Portanto, t: $\frac{3}{2}x - y - 5 = 0$.

3. Sistema Dom Bosco – Determine a equação da reta que passa por P(6, 5) e é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$.

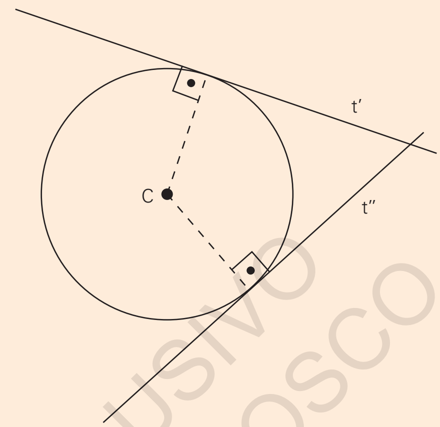
Resolução

Determine a posição de **P** em relação à circunferência:

$x = 6; y = 5$

P: $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = (6)^2 + (5)^2 + 4 \cdot (6) - 8 \cdot (5) + 10 = 36 + 25 + 24 - 40 + 10 = 55 > 0$

Logo, o ponto **P** é externo à circunferência. Com isso, há duas retas que passam por **P** e são tangentes à circunferência.



Escrevendo a equação para a reta **t** que passa por P(6, 5), obtemos:

$$t: y - 5 = m(x - 6) \rightarrow y - 5 = mx - 6m \rightarrow$$
$$t: mx - y - 6m + 5 = 0$$

A circunferência possui centro C(−2, 4), e a reta **t** é igual ao raio r = 4. Então, utilizando a relação entre a distância de um ponto à reta, obtemos:

$$\frac{|m(-2) - 1(4) - 6m + 5|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 4$$

$$|-8m + 1| = 4\sqrt{m^2 + 1}$$

$$64m^2 - 16m + 1 = 16m^2 + 16$$

$$48m^2 - 16m - 15 = 0$$

$$m' = \frac{3}{4} \text{ ou } m'' = -\frac{5}{12}$$

Sabendo os valores de m, escrevemos as equações das duas retas tangentes à circunferência.

$$t': mx - y - 6m + 5 = 0 \rightarrow \frac{3}{4}x - y - 6 \cdot \frac{3}{4} + 5 = 0$$

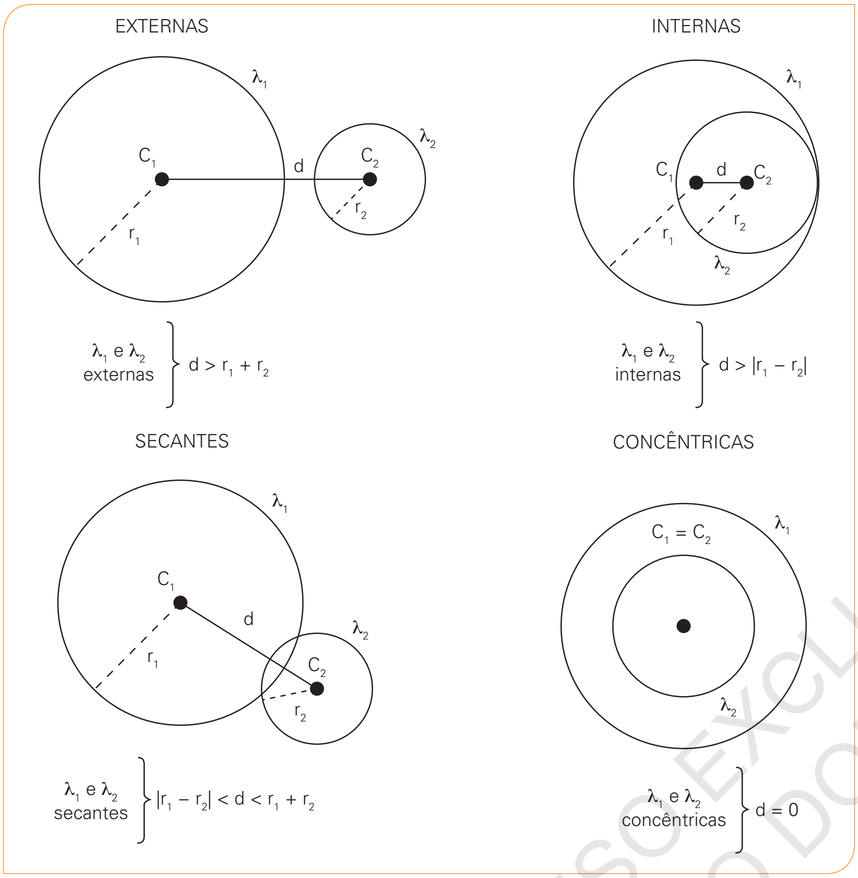
$$\therefore \quad t' = \frac{3}{4}x - y + \frac{1}{2} = 0$$

$$t'': mx - y - 6m + 5 = 0 \rightarrow -\frac{5}{12}x - y - 6 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right) + 5 = 0 \therefore t'' = -\frac{5}{12}x - y + \frac{15}{2} = 0$$

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Duas circunferências λ_1 e λ_2 podem ser **externas**, **internas**, **secantes** ou **concêntricas** entre si. Para melhor entendimento, considere duas circunferências, λ_1 e λ_2, de centros $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ e raios $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$, respectivamente.

Sendo **d** a distância entre os centros $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$, tem-se:



EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Dadas as circunferências λ_1 e λ_2, de equações respectivamente iguais a $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 8 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 5 = 0$, pode-se afirmar que:

a) são internas
b) são externas
c) são secantes
d) são concêntricas

Resolução

λ_1: $a = -\frac{d}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$; $b = -\frac{f}{2} = -\frac{-2}{2} = 1$; $g = -8$

$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - g} = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1^2 - (-8)} = \sqrt{11{,}25} \cong 3{,}35$

λ_2: $a = -\frac{d}{2} = -\frac{-4}{2} = 2$; $b = -\frac{f}{2} = -\frac{+4}{2} = -2$; $g = -5$

$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - g} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 - (-5)} = \sqrt{13} \cong 3{,}60$

$|r_1 - r_2| \cong |3{,}35 - 3{,}60| \cong 0{,}25$ e $r_1 + r_2 =$
$= 3{,}35 + 3{,}60 = 6{,}95$

$d = \sqrt{[2 - (-1{,}5)]^2 + (-2 - 1)} \cong 4{,}60$

Como:
$3{,}6 < d < 6{,}95$, as circunferências são secantes entre si.

2. Mackenzie – Duas pessoas patinam sobre o gelo descrevendo trajetórias circulares. As circunferências descritas por elas são dadas pelas equações $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$ e $(x + 3)^2 + y^2 = 13$, respectivamente. A distância entre os dois pontos de interseção das circunferências é

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

Resolução

Resolvendo o sistema de equações, obtemos a interseção das circunferências.

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y+1)^2 = 10 & \text{(Eq. 1)} \\ (x+3)^2 + y^2 = 13 & \text{(Eq. 2)} \end{cases}$$

Fazendo Eq. 2 − Eq. 1, obtemos:
$(x + 3)^2 + y^2 - (x + 3)^2 - (y + 1)^2 = 13 - 10$
$y^2 - y^2 - 2y - 1 = 3$
$2y = -4$
$y = -2$

Substituindo $y = -2$ em Eq. 1, temos:
$(x + 3)^2 + (-2 + 1)^2 = 10$
$(x + 3)^2 = 9$
$x + 3 = 3 \rightarrow x = 0$ ou $x + 3 = -3 \rightarrow x = -6$

Logo, os pontos de encontro entre as duas circunferências são:
A(0, 2) e B(−6, −2)

Conhecendo os pontos de interseção, calculamos a distância entre eles:

$d_{A,B} = \sqrt{(-6 - 0)^2 + (-2 - (-2))^2}$

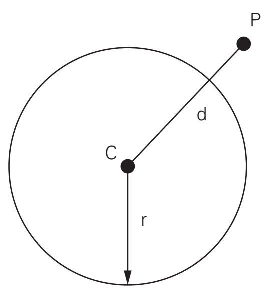
$d_{A,B} = \sqrt{36 + 0}$

$d_{A,B} = 6$

CIRCUNFERÊNCIAS – POSIÇÕES RELATIVAS

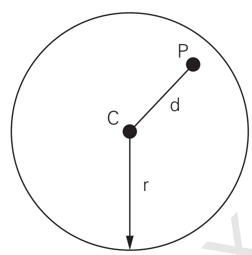
Um ponto **P** pode ser externo, interno ou pertencente à circunferência.

Externo



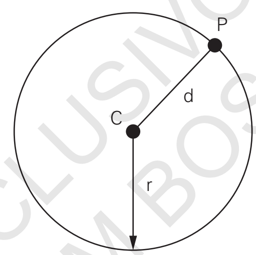
$d > r \longrightarrow d^2 - r^2 > 0$

Interno



$d < r \longrightarrow d^2 - r^2 < 0$

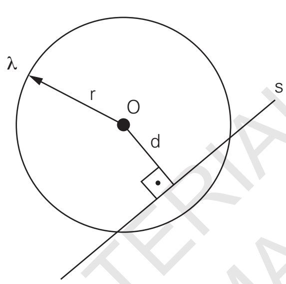
Pertencente



$d = r \longrightarrow d^2 - r^2 = 0$

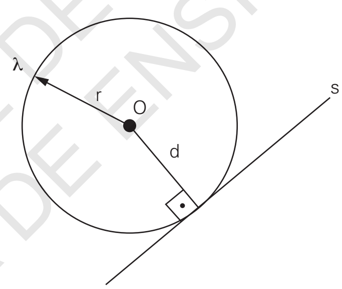
Uma reta **r** pode ser tangente, secante ou externa à circunferência.

Secante



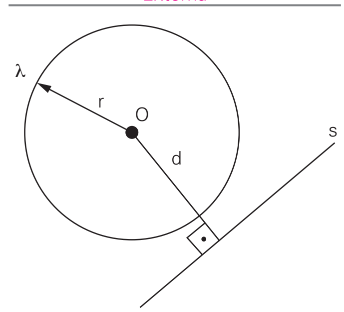
$d < r$

Tangente



$d = r$

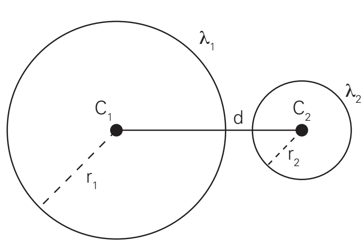
Externa



$d > r$

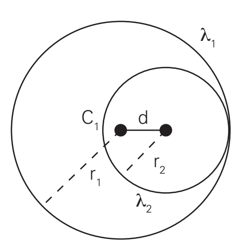
Duas circunferências podem ser internas, externas, secantes ou concêntricas.

Externas



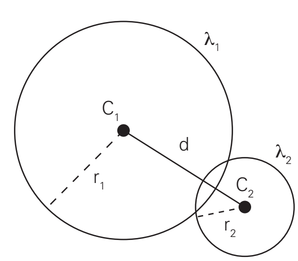
λ_1 e λ_2 externas $\Big\}\ d > r_1 + r_2$

Internas



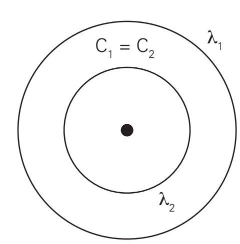
λ_1 e λ_2 internas $\Big\}\ d > |r_1 - r_2|$

Secantes



λ_1 e λ_2 secantes $\Big\}\ |r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$

Concêntricas



λ_1 e λ_2 concêntricas $\Big\}\ d = 0$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UFJF (adaptado) – Determine a distância entre o centro da circunferência $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 6 = 0$ e a reta $3y = -4x - 1$.

De $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 6 = 0$, vamos ter:

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 6 = 0 + 1 + 9$

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$

C(1, −3) corresponde ao centro da circunferência.

De $3y = -4x - 1$, vamos ter:

$4x + 3y + 1 = 0$

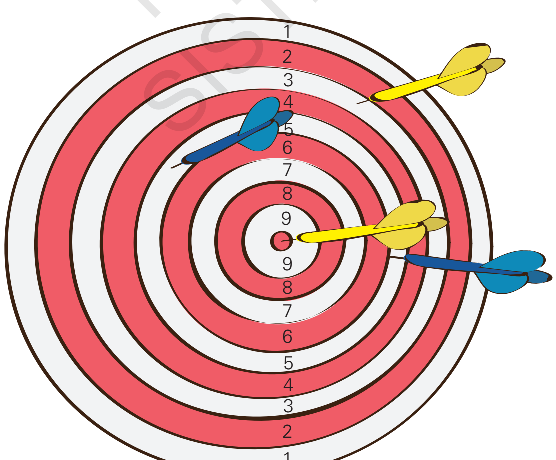
Portanto, sendo d a medida da distância solicitada, obtemos:

$$d = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$d = \frac{4}{5}$$

2. Sistema Dom Bosco C2-H6

Um tabuleiro de dardos é pendurado na parede de uma garagem e passa a fazer a diversão da garotada. Nesse tabuleiro, a pontuação que cada criança recebe depende da posição em que o dardo se fixa no tabuleiro, conforme figura a seguir. Adotando o plano cartesiano como referência para o estudo do posicionamento das circunferências, sabe-se que, dentre as muitas circunferências concêntricas do tabuleiro, a maior possui equação $x^2 + y^2 - 16 = 0$. Logo, pode-se concluir que o dardo lançado, ao atingir o ponto P (6, 10) do sistema de coordenadas,



a) marcou apenas 2 pontos.
b) marcou apenas 4 pontos.
c) marcou apenas 6 pontos.
d) marcou apenas 10 pontos.
e) não pontuou.

Deve-se determinar a posição de P em relação à circunferência:

$x = 6;\ y = 10$

P: $x^2 + y^2 - 16 = (6)^2 + (10)^2 - 16 = 36 + 100 - 16 = 120 > 0$

Logo, o ponto P é externo à maior circunferência. Contudo, no lançamento desse dardo, não houve pontuação registrada.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

3. Uece – No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, a equação da reta que contém o ponto P(9, 8) e é tangente à curva representada pela equação $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ é:

a) $3x + 4y - 59 = 0$
b) $3x - 4y + 5 = 0$
c) $4x - 3y - 12 = 0$
d) $4x + 3y - 60 = 0$

$$a = -\frac{d}{2} = -\frac{-10}{2} = 5$$

$$b = -\frac{f}{2} = -\frac{-10}{2} = 5$$

Logo: C (5, 5).

Sendo assim, a curva é uma circunferência de raio 5 e centro em (5, 5).

O coeficiente angular m_r do seguimento CP será:

$$m_r = \frac{8-5}{9-5} = \frac{3}{4}$$

A reta tangente (s) é perpendicular ao seguimento CP:

$$m_s \cdot m_r = -1 \rightarrow m_s \cdot \frac{3}{4} = -1 \rightarrow m_s = -\frac{4}{3}$$

Então, a equação solicitada será:

$$y - 8 = -\frac{4}{3} \cdot (x - 9)$$

Portanto, $4x + 3y - 60 = 0$.

4. Fuvest – No plano cartesiano 0xy, a circunferência C tem centro no ponto P = (2, 1), e a reta t é tangente a C no ponto Q = (− 1, 5).

a) Determine o raio da circunferência C.

b) Encontre uma equação para a reta t.

c) Calcule a área do triângulo PQR, sendo R o ponto de interseção de t com o eixo 0x.

a) Sendo o ponto Q pertencente à reta tangente à circunferência C, o segmento PQ corresponderá ao raio. Assim:

$$r = \sqrt{(2-(-1))^2+(1-5)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

Logo, r = 5.

b) O coeficiente angular do segmento PQ corresponde a:

$$m_r = \frac{5-1}{-1-2} = -\frac{4}{3}$$

Logo, o coeficiente angular (m_s) da reta tangente será:

$$m_s \cdot m_r = -1 \rightarrow m_s \cdot -\frac{4}{3} = -1 \rightarrow m_s = \frac{3}{4}$$

A reta t é obtida segundo a equação:

$$t:\ y - 5 = \frac{3}{4}(x + 1) \rightarrow 3x - 4y + 23 = 0$$

c) Se o ponto R encontra o eixo x, então suas coordenadas serão: (a, 0).

Substituindo os valores na equação da reta, encontramos o valor de a.

$$3x - 4y + 23 = 0$$

$$3 \cdot a - 4 \cdot 0 + 23 = 0 \rightarrow a = -\frac{23}{3} \rightarrow R\left(-\frac{23}{3}, 0\right)$$

Portanto, a área A do triângulo PQR será:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -\frac{23}{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 - \frac{23}{3} + \frac{115}{3} + 1 = \frac{125}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{125}{3}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{3}$$

Assim, $A = \frac{125}{6}$.

5. Unicamp – No plano cartesiano, sejam C a circunferência de centro na origem e raio r > 0 e s a reta de equação x + 3y = 10. A reta s intercepta a circunferência C em dois pontos distintos se, e somente se,

a) r > 2.

b) $r > \sqrt{5}$.

c) r > 3.

d) $r > \sqrt{10}$.

A reta s encontra a circunferência C em dois pontos únicos se, e apenas se, a distância da origem à reta x + 3y − 10 = 0 for menor do que r. Assim,

C (0, 0); a = 1; b = 3; c = − 10

$$\frac{|0+3\cdot 0-10|}{\sqrt{1^2+3^2}} < r$$

Portanto, $r > \sqrt{10}$.

6. Mackenzie – Os valores de a para os quais as circunferências de equações $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ e $(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 16$ são tangentes exteriormente são

a) −2 e 8

b) 2 e 8

c) −8 e 2

d) 0 e 6

e) −6 e 0

Para que duas circunferências sejam tangentes, seus centros deverão estar alinhados, sendo d igual à distância entre os centros de medida $r_1 + r_2$.

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1 \rightarrow r_1 = 1;\ C\ (3, 2)$

$(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 16 \rightarrow r_2^2 = 16 \rightarrow r_2 = 4;\ C\ (a, -2)$

$(a - 3)^2 + (-2 - 2)^2 = (4 + 1)^2 \rightarrow (a - 3)^2 + 16 = 25 \rightarrow$

$$\rightarrow (a - 3)^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ a = 6 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Sistema Dom Bosco – Dadas as circunferências λ_1 e λ_2, de equações respectivamente iguais a $x^2 + y^2 - 4 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 12 = 0$, o que se pode concluir quanto à posição de uma em relação à outra?

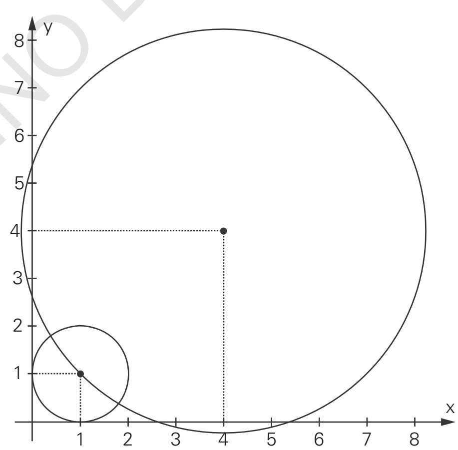
a) são internas
b) são externas
c) são secantes
d) são concêntricas

8. FGV – No plano cartesiano, a reta de equação $3x + 4y = 17$ tangencia uma circunferência de centro no ponto (1, 1).

A equação dessa circunferência é:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

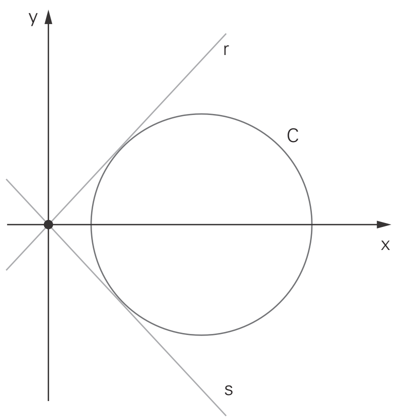
9. UEG – Observe a figura a seguir.



Sabendo-se que a circunferência de maior raio passa pelo centro da circunferência de menor raio, a equação da circunferência de maior raio é

a) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 18 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 14 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 14 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 18 = 0$

10. Uerj – Considere a circunferência C de equação $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$, representada graficamente a seguir.



Determine as equações das retas r e s que passam pela origem e são tangentes à circunferência.

11. Mackenzie – A equação da reta que corta o eixo das ordenadas no ponto P(0, − 6) e que tangencia a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no quarto quadrante é

a) $y = -2\sqrt{2}x + 6$

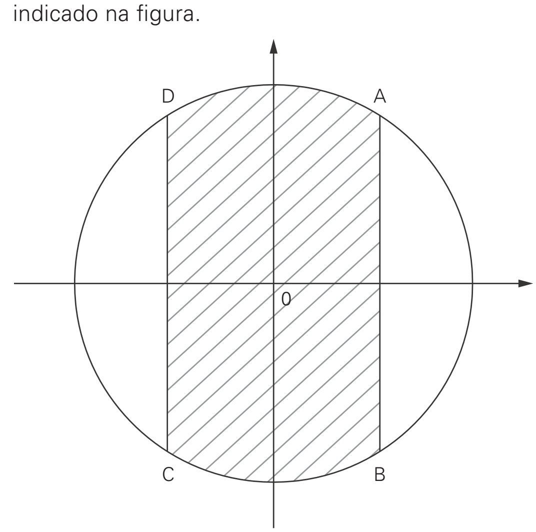
b) $y = 2\sqrt{2}x - 6$

c) $y = 2\sqrt{2}x + 6$

d) $y = 4x - 6$

e) $y = -4x + 6$

12. PUC-RJ – Considere o círculo de raio 2 centrado na origem e as retas verticais $x = 1$ e $x = -1$, como indicado na figura.



a) Encontre as coordenadas dos pontos de interseção A, B, C, D entre o círculo e as retas verticais.

b) Calcule a área da região interior ao círculo que fica entre as duas retas verticais.

13. Acafe – A circunferência λ passa pelos pontos $A(-1, -1)$, $B(1, 5)$ e $C(3, 1)$. A reta $r: x + 3y - 6 = 0$ e a circunferência λ são secantes. A área do triângulo cujos vértices são a origem do sistema de coordenadas cartesianas, e também os pontos de interseção entre a reta r e a circunferência λ, tem medida igual a:

a) 6 unidades de área.

b) 12 unidades de área.

c) 4 unidades de área.

d) 10 unidades de área.

14. Uece – No plano, com o sistema de coordenadas cartesiano usual, as equações das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 10y + 16 = 0$ e que passam pelo ponto $(0, 0)$ são

a) $3x - 4y = 0$ e $3x + 4y = 0$

b) $2x - 3y = 0$ e $2x + 3y = 0$

c) $4x - 3y = 0$ e $4x + 3y = 0$

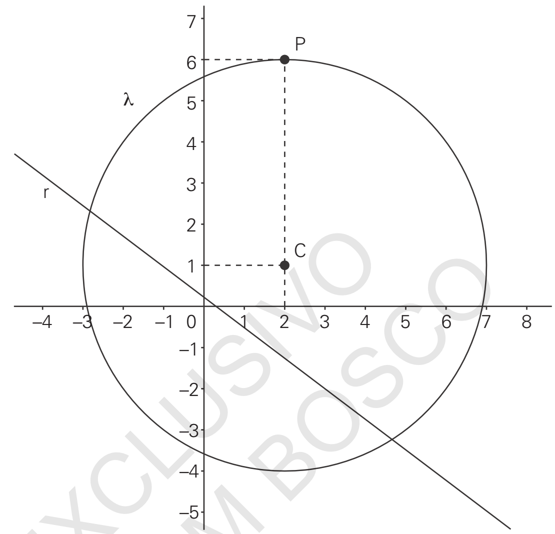
d) $3x - 2y = 0$ e $3x + 2y = 0$

15. UFPR – Seja C_1 o círculo de raio $r = 2$ e centro no ponto $P = (3, 4)$.

a) Qual é a equação do círculo C_1?

b) Considere o círculo C_2 definido pela equação $x^2 + y^2 = \rho^2$. Para quais valores de ρ o círculo C_1 intersecta o círculo C_2?

16. Acafe – Na figura a seguir a reta $r: 3x + 4y - 1 = 0$ é secante à circunferência λ que passa pelo ponto P e tem centro no ponto C. As retas $s_1: 3x + 4y + c' = 0$ e $s_2: 3x + 4y + c'' = 0$ são secantes à circunferência λ, de modo que cada reta forma uma corda cujo comprimento é igual a 8 unidades de comprimento.



Se as retas s_1, s_2 e r são paralelas, o valor da soma $c' + c''$ é:

a) 0

b) −20

c) 5

d) −25

17. Fuvest – Duas circunferências com raios 1 e 2 têm centros no primeiro quadrante do plano cartesiano e ambas tangenciam os dois eixos coordenados. Essas circunferências se interceptam em dois pontos distintos de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

O valor de $(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2$ é igual a

a) $\frac{5}{2}$

b) $\frac{7}{2}$

c) $\frac{9}{2}$

d) $\frac{11}{2}$

e) $\frac{13}{2}$

ESTUDO PARA O ENEM

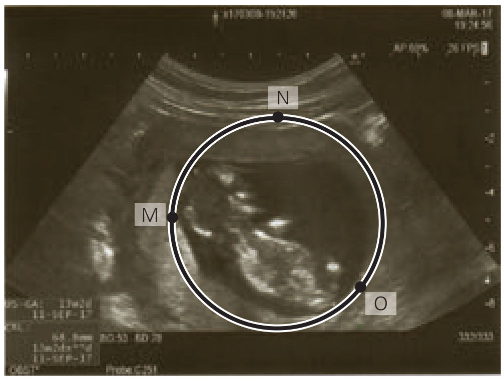
18. Imed (adaptado) C5-H23

Atualmente, por questão de proteção, certas edificações como presídios, instalações militares ou governamentais, casas de entretenimento e residências têm necessidade de bloquear o sinal de telefones celulares. Tal expediente causava transtornos até algum tempo atrás, pois exigia que fossem desativadas as torres de retransmissão de sinal, o que deixava muita gente sem comunicação. Atualmente, isso pode ser feito de modo mais pontual, com a utilização de aparelhos capazes de restringir o raio de bloqueio a distâncias mais curtas. Em determinada região, desejava-se instalar um desses aparelhos em certa construção. No entanto, havia um trecho de estrada passando próximo a essa construção. Um mapa da região foi plotado em um plano cartesiano, no qual a estrada corresponde a uma reta de equação $x + y = 5$, e a região em torno da edificação a partir da qual se estabeleceu o bloqueio equivale a uma circunferência de equação $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9$. O centro da circunferência é a localização dessa edificação. Sabendo que cada unidade de distância no plano cartesiano corresponde a 10 km, qual o valor da menor distância da estrada até a edificação?

a) Entre 0 km e 5 km.
b) Entre 5,1 km e 7,5 km.
c) Entre 7,51 km e 10 km.
d) Entre 10,1 km e 15 km.
e) Entre 15,1 km e 20 km.

19. Acafe (adaptado) C5-H22

O ultrassom morfológico é um exame muito utilizado para identificar doenças de um bebê que ainda está no ventre da mãe. O formato, a estrutura e a medida da cabeça do bebê podem ser analisados e comparados com medidas de referência.



DREAMSSEEKER2/SHUTTERSTOCK

A figura representa a cabeça de um bebê em um exame desse tipo. Através de recursos computacionais, define-se uma circunferência em um sistema de coordenadas cartesianas através de três pontos:

$M(-3, 3)$, $N(2, 8)$ e $O(6, 0)$.

O comprimento dessa circunferência corresponde ao que os médicos chamam de perímetro cefálico. No caso indicado na figura, por um problema técnico, o computador não indicou o comprimento da circunferência. Sabe-se que cada unidade linear do plano cartesiano que contém a figura corresponde a 1 cm na medida real.

Analise o caso e responda: Qual a medida do perímetro cefálico do bebê, se $\pi = 3{,}14$?

a) Superior a 40 cm.
b) Entre 30 cm e 35 cm.
c) Inferior a 30 cm.
d) Entre 35 cm e 40 cm.
e) Entre 25 cm e 30 cm.

20. Uefs C5-H21

Em um sistema de coordenadas cartesianas, utilizando-se uma escala conveniente, o planejamento de localização de três peças de arte no Museu Casa do Sertão é: R, o busto de um vaqueiro; S, um animal empalhado; e T, a estátua de uma mulher rendeira, representadas pelos pontos de interseção das retas de equações:

r: $y = 6x + 4$; s: $y = 4$; e t: $2y - 3x + 1 = 0$.

Nessas condições, é correto afirmar que os pontos que representam R, S e T estão contidos no menor círculo de centro na origem e que pode ser definido pelo conjunto

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 25\}$
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 25\}$
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 16\}$
d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 16\}$
e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \geq 9\}$

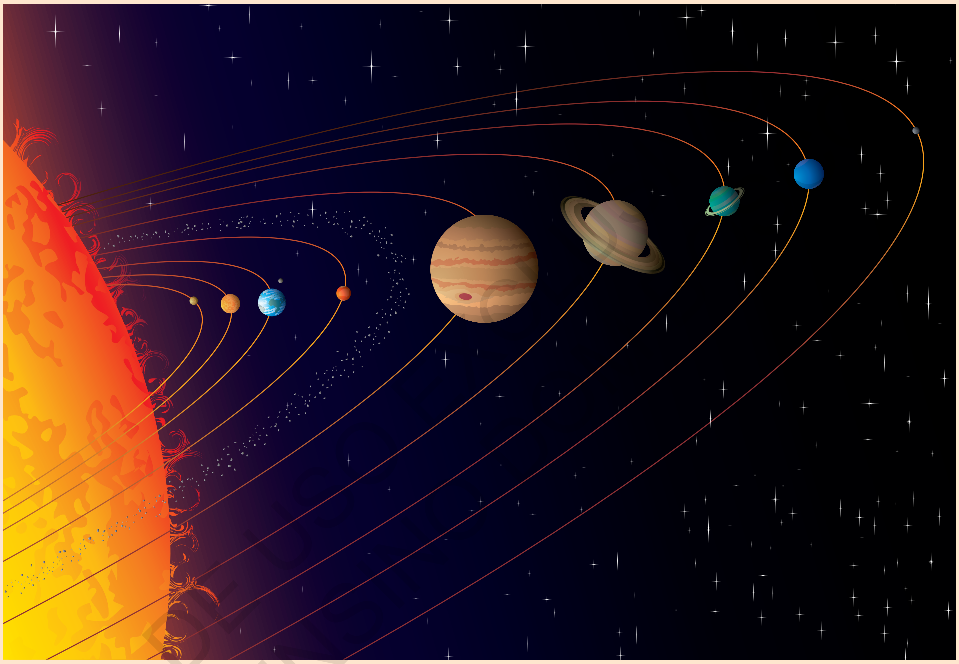
54

CÔNICAS – ELIPSE

- Introdução às cônicas
- Elipse

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e a respectiva representação no espaço bidimensional.
- Aplicar conhecimentos algébricos/geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.
- Resolver situações-problemas que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na elaboração de argumentos para solucionar problemas do cotidiano.



DAVIDSZABO/ISTOCKPHOTO

Introdução

Entendemos como órbita o movimento ou a trajetória de um astro ao redor de outro. Muito já se especulou sobre a dinâmica da órbita dos planetas, e uma das teorias mais aceitas foi desenvolvida por Johannes Kepler. Esse astrônomo e matemático alemão elaborou três grandes leis gerais e posteriormente produziu importantes estudos sobre a física dos astros.

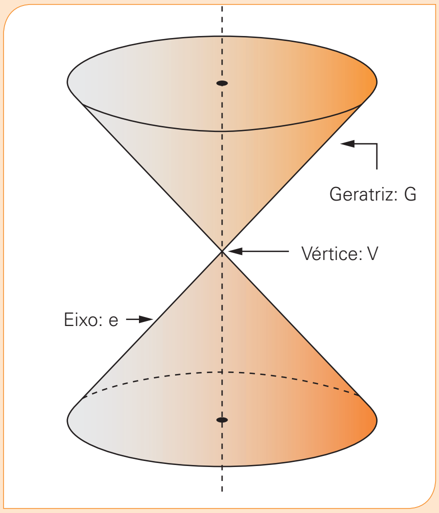
As fórmulas e leis desenvolvidas por Kepler ajudam a entender o funcionamento do movimento dos planetas e suas translações e órbitas.

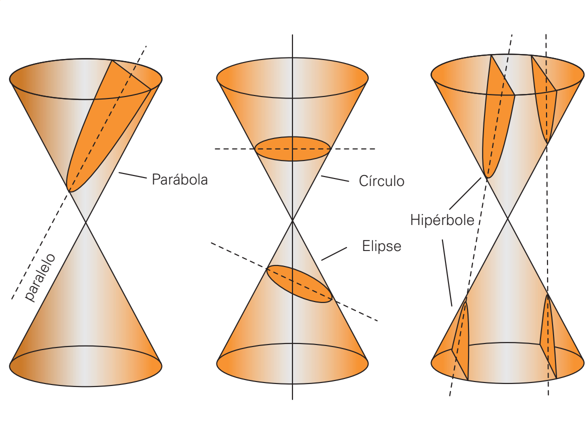
A primeira grande lei de Kepler afirma que "a órbita de qualquer planeta do Sistema Solar é elíptica, com o Sol em um de seus focos". Esse postulado explica as dinâmicas planetárias na prática e na teoria.

INTRODUÇÃO ÀS CÔNICAS

Uma superfície cônica de revolução é gerada quando uma reta G intercepta outra reta fixa, girando em torno dela.

Passando um plano secante, são produzidas curvas cônicas sobre a superfície de revolução. Dependendo do ângulo que o plano secante forma com o eixo da superfície cônica, surgem diferentes curvas cônicas, as quais nomeamos **elipse**, **hipérbole** ou **parábola**.

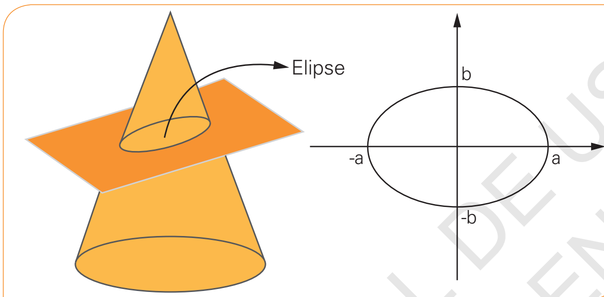




ELIPSE

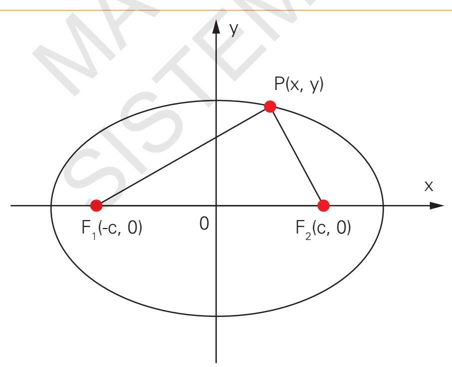
Conforme vimos no início deste módulo, planetas e satélites descrevem trajetórias elípticas. Mas você sabe exatamente o que é a elipse?

Na figura a seguir, o plano inclina-se em relação ao eixo do cone, mas não é paralelo a nenhuma geratriz. O plano seciona o cone, determinando uma elipse em sua superfície.



CONCEITO

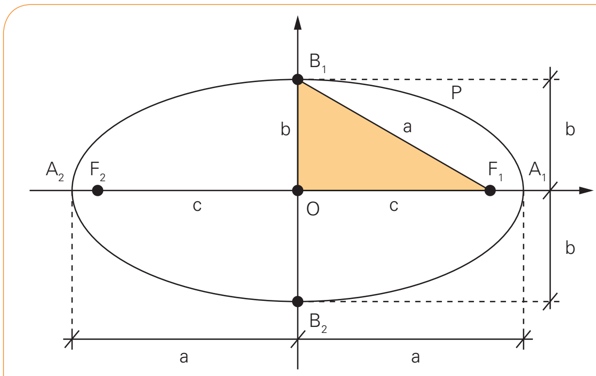
Elipse é um lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é sempre constante.



ELEMENTOS

Na figura, temos:

- Focos – Os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$.
- Centro – O ponto **O**, que é o ponto médio entre $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$.



- Semieixo maior – **a.**
- Semieixo menor – **b.**
- Semidistância focal – **c.**
- Vértices – os pontos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$.
- Eixo maior – $\mathbf{|A_1\,A_2| = 2a}$.
- Eixo menor – $\mathbf{|B_1\,B_2| = 2b}$.
- Distância focal – $\mathbf{|F_1\,F_2| = 2c}$.

Relação fundamental

Na figura anterior, ao aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo OF_1B_1, retângulo em O, podemos escrever a seguinte relação fundamental: $a^2 = b^2 + c^2$.

Excentricidade

Pela definição de elipse, $2c < 2a$. Então, $c < a$. Consequentemente, $0 < e < 1$:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Observações:

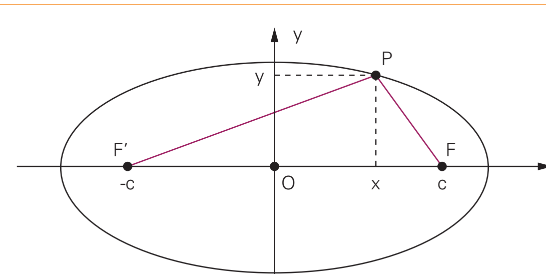
- Os focos estão sempre na reta que contém o eixo maior.
- A excentricidade é sempre menor que 1.

EQUAÇÃO DA ELIPSE

Equação com centro na origem e focos no eixo das abscissas

Devem ser consideradas as seguintes condições:

- Centro da elipse coincidindo com a origem do sistema de coordenadas cartesianas.
- Coordenadas dos focos iguais a F(–c, 0) e F'(c, 0).
- Eixo maior igual a 2a.



Pela definição de elipse, a soma das distâncias do ponto genérico P(x, y) em cada foco é igual ao eixo maior:

PF + PF′ = 2a
Temos, então, as seguintes relações:
A distância entre dois pontos no plano é:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

A distância do ponto P(x, y) ao ponto $F_2(-c, o)$ é:

$$PF = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}$$

A distância do ponto P(x, y) ao ponto $F_1(c, 0)$ é:

$$PF' = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$$

Aplicamos a definição de elipse PF + PF′ = 2a:

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

Isolamos um dos radicais no primeiro membro:

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$$

Elevamos ao quadrado os dois membros da igualdade:

$$\left(\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}\right)^2$$

Efetuamos as operações e desenvolvemos o quadrado no segundo membro:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \cdot$$
$$\cdot \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Simplificamos os dois membros:

$$2cx = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} - 2cx$$

Isolamos novamente o radical no primeiro membro:

$$4a \cdot \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

Simplificamos por 4:

$$a \cdot \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevamos ao quadrado novamente os dois membros:

$$\left(a \cdot \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}\right)^2 = \left(a^2 - cx\right)^2$$

$$a^2 \cdot (x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

Aplicamos a propriedade distributiva no primeiro membro:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

Cancelamos o termo –2a2cx nos dois membros:

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

Isolamos os termos:

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)\, x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - c^2)$$

Pela relação da elipse:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 - c^2 = b^2$$

Ao substituirmos, temos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividimos por $a^2\,b^2$ (que é diferente de zero):

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

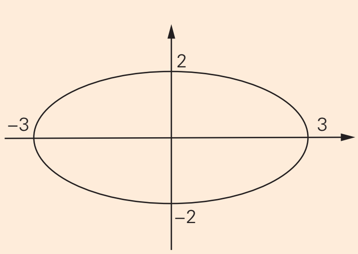
Temos, então, o seguinte:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Essa equação da elipse tem os focos no eixo das abscissas e o centro na origem do sistema cartesiano ortogonal.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Dada a elipse representada na figura abaixo, determine a sua equação:



Resolução

Inicialmente determinamos os eixos. O eixo maior (2a) está localizado no eixo das abscissas; o menor está no eixo das ordenadas (2b). Identificamos, então, os elementos:

$$\begin{cases} 2a = 3 - (-3) = 6 \rightarrow a = 3 \\ 2b = 2 - (-2) = 4 \rightarrow b = 2 \end{cases}$$

Substituindo os valores de **a** e **b** na equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

2. Sistema Dom Bosco – Determine a equação da elipse em que os focos são F_1 (–2, 0) e F_2 (2, 0) e o comprimento do eixo maior é 6:

Resolução

Os focos estão no eixo das abscissas. Identificando os elementos, temos:

$$\begin{cases} 2c = 2-(-2) = 4 \to c = 2 \\ 2a = 6 \to a = 3 \end{cases} \to$$

$$\to 3^2 = 2^2 + b^2 \to b = \sqrt{9-4} \to b = \sqrt{5}$$

Substituindo os valores de **a** e **b** na equação, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

3. Sistema Dom Bosco – Determine a excentricidade da elipse dada pela equação $16x^2 + 7y^2 = 112$.

Resolução

Do enunciado, sabemos que $16x^2 + 7y^2 = 112$. Observe que a equação da elipse não está na forma reduzida. Para transformá-la, devemos dividir ambos os membros por 112. Assim, teremos a equação reduzida $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Então, o eixo maior está localizado no eixo das ordenadas. Identificando os elementos, temos:

$$\begin{cases} a^2 = 16 \to a = \sqrt{16} = 4 \\ b^2 = 7 \to b = \sqrt{7} \end{cases} \to c = \sqrt{4^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Então, o eixo maior está localizado no eixo das ordenadas. Identificando os elementos, temos:

Substituindo os valores de **c** e **a** em $e = \frac{c}{a}$, encontramos a excentricidade:

$$e = \frac{c}{a} \to e = \frac{3}{4} \to e = 0{,}75$$

4. IME – Uma elipse cujo centro encontra-se na origem e cujos eixos são paralelos ao sistema de eixos cartesianos possui comprimento da semidistância focal igual a $\sqrt{3}$ e excentricidade igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Considere que os pontos A, B, C e D representam as interseções da elipse com as retas de equações $y = x$ e $y = -x$. A área do quadrilátero ABCD é

a) 8

b) 16

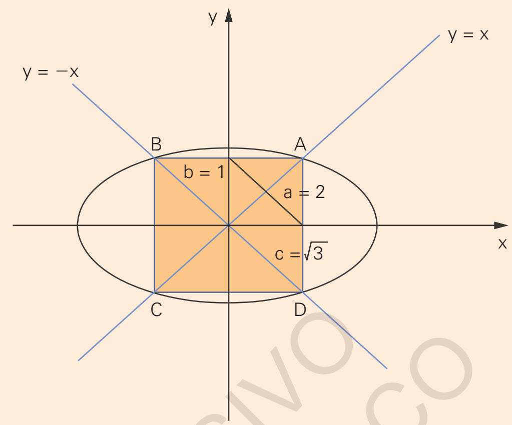
c) $\frac{16}{3}$

d) $\frac{16}{5}$

e) $\frac{16}{7}$

Resolução

Do enunciado, temos a seguinte figura:



Logo, a excentricidade é:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to a = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \to a = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \to 2^2 = b + \left(\sqrt{3}\right)^2 \to$$

$$\to b = 4 - 3 = 1 \to b = 1$$

A equação da elipse será:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Resolvendo o sistema a seguir, localizamos os pontos A, B, C e D:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = \pm x \end{cases}$$

$$\to A\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), B\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

$$C\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ e } D\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

O lado do quadrado será obtido por:

$$AD = \frac{2}{\sqrt{5}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

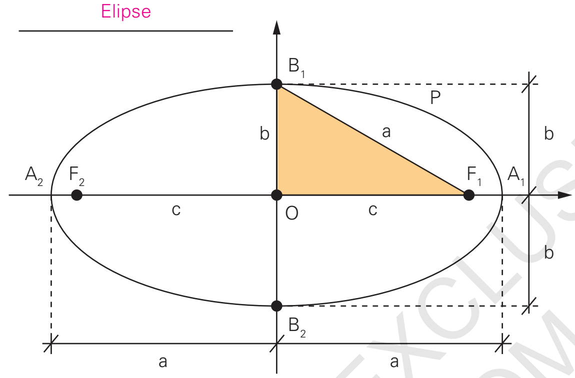
Assim, a área do quadrado será:

$$A = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

ROTEIRO DE AULA

CÔNICAS – ELIPSE

Elipse



Elementos:

Focos: F_1 e F_2

Distância focal: $2c$

Vértices: A_1, A_2, B_1, B_2

Eixo maior: $2a$

Eixo menor: $2b$

Centro: O

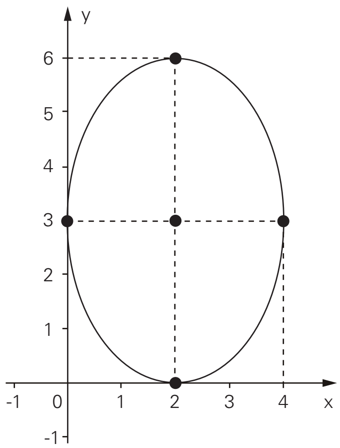
Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$

Equação da elipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

EXERCÍCIOS **DE APLICAÇÃO**

1. Unesp – A figura mostra um plano cartesiano no qual foi traçada uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados.



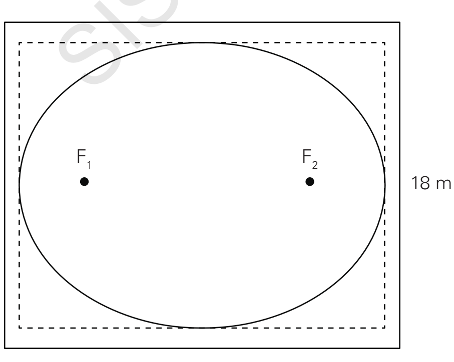
Valendo-se das informações contidas nessa representação, determine a equação reduzida da elipse.

De acordo com a figura:
– O centro da elipse é C(2, 3).
– O semieixo paralelo ao eixo x é a = 2.
– O semieixo paralelo ao eixo y é b = 3.
Sendo assim, a equação da elipse será obtida por:

$$\frac{\left((x-2)^2\right)}{2^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

2. UFRN (adaptado) C2-H9

Um arquiteto projetou, para um salão de dimensões 22 m por 18 m, um teto de gesso em formato de elipse com o eixo maior medindo 20 m e o eixo menor, 16 m, conforme ilustra a figura abaixo.

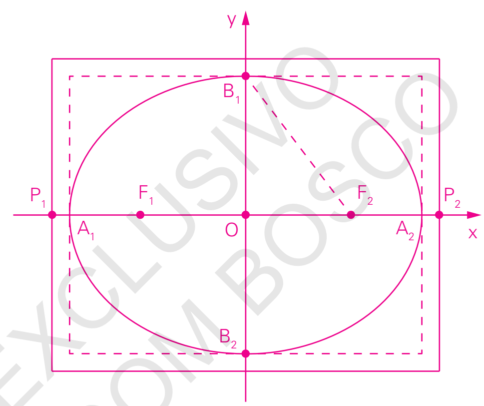


O aplicador do gesso afirmou que saberia desenhar a elipse, desde que o arquiteto informasse as posições dos focos.

Para orientar o aplicador do gesso, o arquiteto informou que, na direção do eixo maior, a distância entre cada foco e a parede mais próxima é de

a) 3 m
b) 4 m
c) 5 m
d) 6 m
e) 12 m

Conforme a ilustração a seguir, temos:



$A_1 = (-10, 0)$
$A_2 = (10, 0)$
$B_1 = (0, 8)$
$B_2 = (0, 8)$
$F_1 = (-c, 0)$
$F_2 = (0, c)$, sendo $c > 0$
Portanto, da relação fundamental da elipse, temos:
$(B_1F_2)^2 = (OF_2)^2 + (OF_1)^2 + (OB_1)^2 \Rightarrow$
$10^2 = c^2 + 8^2 \rightarrow c^2 = 100 - 64 \rightarrow c^2 = 36$
$c = 6$
Sendo assim, a distância solicitada é obtida por:
$OP_2 - OF_2 = 11 - 6 = 5$ m

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

3. Uece – No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, a equação $x^2 + 4y^2 = 4x$ representa

a) uma circunferência
b) duas retas
c) uma parábola
d) uma elipse

Completando os quadrados, temos:
$x^2 + 4y^2 = 4x \rightarrow x^2 - 4x + 4y^2 = 0 \rightarrow (x-2)^2 + 4y^2 = 4$
Dividindo os membros da equação por 4, obtemos:

$$\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y-0)^2}{1^2}=1$$

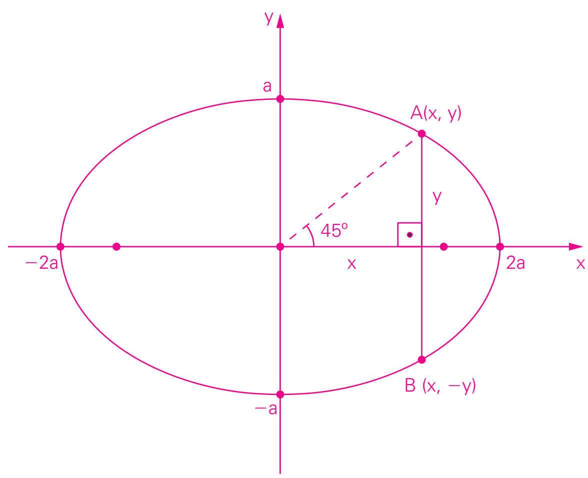
Trata-se de uma elipse com centro em (2, 0) e eixo maior paralelo ao eixo das abscissas.

4. EsPCEx – Uma elipse tem centro na origem e vértices em (2a, 0) e (0, a), com a > 0. A área do quadrado inscrito nessa elipse é

a) $\frac{16a^2}{5}$ c) $\frac{12a^2}{5}$ e) $\frac{20a^2}{5}$

b) $\frac{4a^2}{5}$ d) $\frac{8a^2}{5}$

Do enunciado, temos:



A equação da elipse é obtida por:

$$\frac{x^2}{(2a)^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Traçando um ângulo de 45°, conforme a figura, obtemos os pontos A e B, os quais são vértices do quadrado ABCD inscrito na elipse.

Portanto, o lado AB do quadrado tem medida 2y.

Assim, $A = 2y \cdot 2y \rightarrow A = 4y^2$.

Observe, na ilustração, que x = y. Assim:

$$\frac{y^2}{4a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \rightarrow y^2+4y^2=4a^2 \rightarrow 5y^2=4a^2 \rightarrow y^2=\frac{4}{5}\cdot a^2$$

Substituindo o valor de y em $A = 4y^2$, temos:

$$A=4y^2 \rightarrow A=4\cdot\frac{4}{5}a^2 \rightarrow A=\frac{16a^2}{5}$$

5. EsPCEx – Sobre a curva $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$, assinale a alternativa correta.

a) Seu centro é (–2,1).

b) A medida do seu eixo maior é 25.

c) A medida do seu eixo menor é 9.

d) A distância focal é 4.

e) Sua excentricidade é 0,8.

Temos:

$9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$

$9x^2 - 36x + 36 + 25y^2 + 50y + 25 = 164 + 36 + 25$

$9(x^2 - 4x + 4) + 25(y^2 + 2y + 1) = 164 + 36 + 25$

$9(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 225$

$$\frac{9(x-2)^2}{225}+\frac{25(y+1)^2}{225}=\frac{225}{225}$$

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

Analisando a equação da elipse, concluímos que:

– C (2, −1);

– eixo superior = 10;

– eixo inferior = 6;

– 2c = 8;

– $e=\frac{4}{5}=0,8$.

Sendo assim, a afirmativa E é a correta.

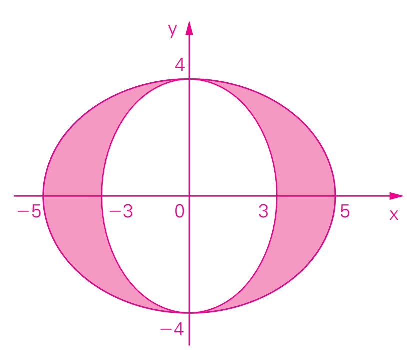
6. Udesc (adaptado) – A área delimitada por uma elipse cuja equação é $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ é dada por $A = ab\pi$. Então, qual a área da região situada entre as elipses das equações $16x + 25y = 400$ e $16x + 9y = 144$?

Reordenando as equações das elipses, temos:

$$16x^2+25y^2=400 \leftrightarrow \frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=\frac{400}{400} \leftrightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

$$16x^2+9y^2=144 \leftrightarrow \frac{16x^2}{144}+\frac{9y^2}{144}=\frac{144}{144} \leftrightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

Portanto, esboçando os gráficos dessas elipses, temos:

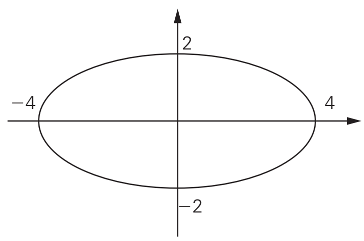


Sendo assim, a área sombreada é obtida por:

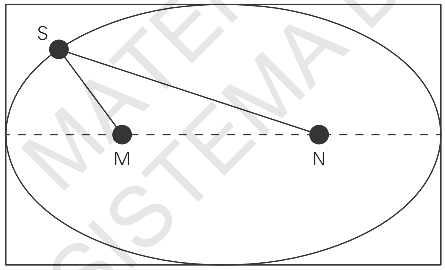
$$A_{sombra}=\pi\cdot(5\cdot 4-4\cdot 3) \rightarrow A_{sombra}=8\pi \text{ u.a.}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Sistema Dom Bosco – Dada a elipse representada na figura abaixo, determine a sua equação:



8. IFPE – Bira adquiriu uma cabra que pasta em um campo retangular. Para delimitar o gramado, ele pretende traçar uma elipse inscrita num terreno retangular de 10 m por 8 m. Para isso, ele deve utilizar um fio esticado preso por duas estacas M e N, conforme mostra a figura.



Qual deve ser a distância entre as estacas M e N?

a) 5
b) 4
c) 8
d) 6
e) 9

9. UEM-PR – Sobre a cônica de equação $x^2 + 4y^2 = 9$, assinale o que for **correto**.

01) Trata-se de uma elipse.

02) A cônica intercepta o eixo das abscissas em (3, 0) e (−3, 0).

04) Se A e B são pontos da cônica que não são colineares com os focos D e E da cônica, os triângulos ADE e BDE possuem o mesmo perímetro.

08) A circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt{2}$ tangencia essa cônica.

16) O ponto $\left(2\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$ pertence à cônica.

10. FGV – Sendo m o maior valor real que x pode assumir na equação analítica $(x-2)^2 + 4(y+5)^2 = 36$, e n o maior valor real que y pode assumir nessa mesma equação, então m + n é igual a

a) 8
b) 7
c) 6
d) 4
e) 3

11. Epcar – Sobre a circunferência de menor raio possível que circunscreve a elipse de equação $x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 88 = 0$, é correto afirmar que

a) tem raio igual a 1.
b) tangencia o eixo das abscissas.
c) é secante ao eixo das ordenadas.
d) intercepta a reta de equação $4x - y = 0$.

12. Mackenzie – Com relação às equações das elipses $25x^2 + 16y^2 + 150x + 256y - 351 = 0$ e $16x^2 + 25y^2 - 96x - 200y + 144 = 0$, podemos afirmar que

a) as elipses têm centros coincidentes.
b) as elipses têm a mesma distância focal.
c) as elipses têm a mesma excentricidade.
d) as elipses têm focos sobre o eixo das abscissas.
e) o eixo maior de uma delas é o dobro do eixo menor da outra.

13. Epcar – No plano cartesiano, os pontos P(x, y) satisfazem à equação $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ da curva λ.

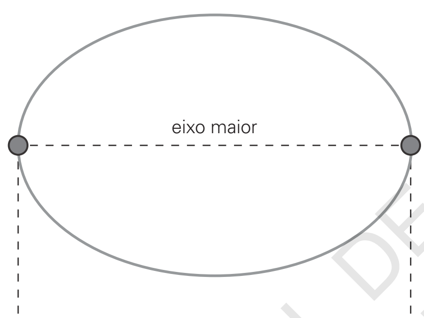
Se F_1 e F_2 são os focos de λ, tais que a abscissa de F_1 é menor que a abscissa de F_2, é INCORRETO afirmar que

a) a soma das distâncias de P e F_1 e de P a F_2 é igual a 10.
b) F_1 coincide com o centro da curva $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$.
c) F_2 é exterior a $x^2 + y^2 = 25$.
d) o ponto de abscissa máxima de λ pertence à reta $y = x - 8$.

14. Unesp – A terceira lei de Kepler sobre o movimento de planetas, aplicada a um certo sistema planetário, afirma que o período P da órbita elíptica de um planeta, em dias, está relacionado ao semieixo maior α da elipse, em milhões de quilômetros, pela fórmula $P = 0{,}199\alpha^{\frac{3}{2}}$. Nos cálculos a seguir, considere 1 ano = 365 dias.

a) Sabendo que o período da órbita de um planeta é 1,99 ano, calcule o valor de $\alpha^{\frac{3}{2}}$.

b) Calcule o período P de um planeta desse sistema planetário cuja órbita elíptica está representada na figura a seguir.



15. EsPCEx (adaptado) – Quais os valores reais de n para os quais a reta (t) $y = x + n$ seja tangente à elipse de equação $2x^2 + 3y^2 = 6$?

16. FGV – Na representação gráfica do sistema de equações $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 4x^2 - y = 2 \end{cases}$ no plano cartesiano, uma das soluções é (0, –2). A distância entre os pontos que representam as duas outras soluções desse sistema é igual a

a) $\sqrt{14}$

b) $\frac{7}{2}$

c) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{14}}{2}$

e) $\frac{3}{2}$

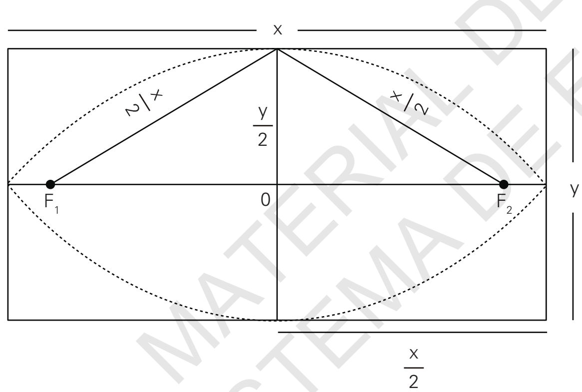
17. Esc. Naval – Seja P (x, y) um ponto da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ de focos F_1 e F_2 e excentricidade e. Calcule $\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}$ e assinale a opção correta.

a) $ex^2 + a(1 + 2e^2)$
b) $ex^2 - a^2(1 + e)$
c) $e^2x^2 - a^2(1 - 2e)$
d) $e^2x + a(1 + e^2)$
e) $e^2x^2 + a^2(1 - 2e^2)$

ESTUDO PARA O ENEM

18. UEPB C2-H9

Deseja-se construir uma praça em forma de elipse em um terreno retangular de dimensões x metros e y metros, com x > y, de perímetro 300 m e área 5000 m², conforme nos mostra a figura.

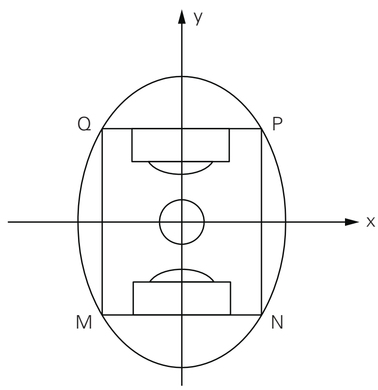


Estando previstas as instalações de duas torres de iluminação, uma em cada foco da elipse, F_1 e F_2, local de melhor distribuição e aproveitamento das mesmas, concluímos que a distância em metros entre as torres é

a) $100\sqrt{3}$
b) $25\sqrt{3}$
c) $50\sqrt{3}$
d) $40\sqrt{3}$
e) $30\sqrt{3}$

19. EsPCEx C5-H22

Num estádio de futebol em forma de elipse, o gramado é o retângulo MNPQ, inscrito na cônica, conforme mostra a figura. Escolhendo o sistema de coordenadas cartesianas indicado e tomando o metro como unidade, a elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{36^2}+\frac{y^2}{60^2}=1$. Sabe-se também que os focos da elipse estão situados em lados do retângulo MNPQ.



Assim, a distância entre as retas MN e PQ é

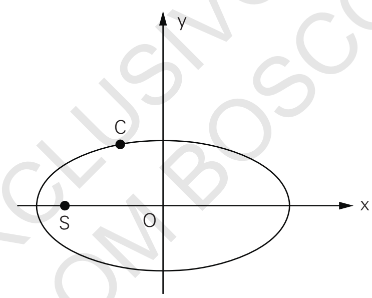
a) 48 m
b) 68 m
c) 84 m
d) 92 m
e) 96 m

20. UnB-DF (adaptado) C6-H24

O vento solar é uma emissão contínua, em todas as direções, de partículas carregadas que têm origem na coroa solar. As partículas emitidas podem ser elétrons, prótons ou neutrinos. A velocidade dessas partículas varia entre 400 km/s e 800 km/s.

Essa emissão contínua gera uma distribuição de íons, prótons e elétrons em todo o espaço do Sistema Solar. Esse plasma de partículas carregadas é comumente denominado mar de prótons, ou mar de elétrons. Ao se aproximarem da Terra, esses íons sofrem alterações em suas trajetórias devido à presença do campo magnético terrestre. Na região do espaço que circunda a Terra, a densidade desse plasma é de aproximadamente 10 partículas por centímetro cúbico. O bombardeamento da atmosfera terrestre pelo vento solar tem efeitos profundos, uma vez que as partículas e a radiação solar interagem com os gases presentes na atmosfera, tais como H_2, N_2, O_2, CO_2, CO, NO_2, N_2O, SO_2.

Planeta	Distância média do Sol, em 10^6 km
Mercúrio	57,9
Vênus	108
Terra	150
Marte	228
Júpiter	778
Saturno	1 430
Urano	2 870
Netuno	4 500
Plutão	5 900



A figura acima ilustra a situação em que um cometa (C) percorre uma órbita elíptica de centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy. Nessa órbita elíptica, o Sol (S) aparece em um dos focos. Considere que a elipse seja representada pela equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, em que $a > b > 0$, e tenha excentricidade igual a 0,96. Nesse caso, se a distância mínima desse cometa ao Sol for igual a 0,58 UA (unidade astronômica), em que 1 UA = 150 106 km é a distância média da Terra ao Sol, então a distância máxima do cometa ao Sol, em milhões de km, será

a) inferior a 3 700.
b) superior a 3 700 e inferior a 4 000.
c) superior a 4 000 e inferior a 4 300.
d) superior a 4 300 e inferior a 5 300.
e) superior a 5 300.

55

CÔNICAS – HIPÉRBOLE

- Hipérbole

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Aplicar conhecimentos algébricos/geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

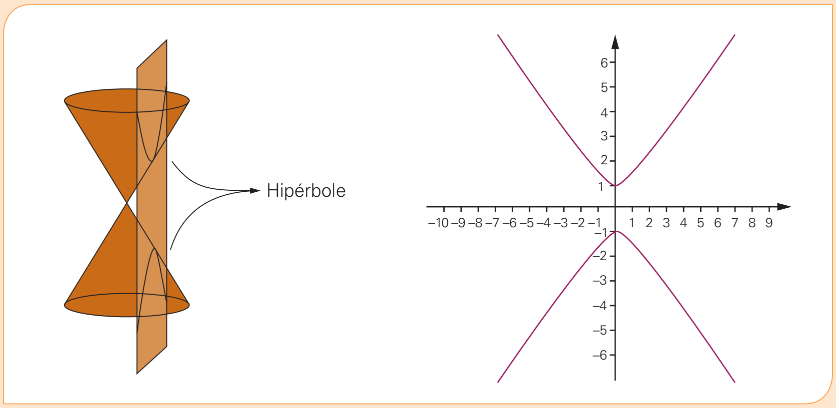

R.M. NUNES/ISTOCKPHOTO

Introdução

A Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida, projetada pelo arquiteto Oscar Niemeyer com a colaboração do engenheiro Joaquim Cardozo na parte dos cálculos estruturais, foi o primeiro monumento a ser criado em Brasília. Tendo sua construção sido iniciada em 1958, ficou pronta em 1960 – porém, só em 31 de maio de 1970 foi inaugurada de fato. Com dezesseis colunas de concreto em um formato hiperboloide, a catedral possui em seu interior uma réplica da imagem da padroeira Nossa Senhora Aparecida, uma vez que a original se encontra em Aparecida, no interior de São Paulo.

HIPÉRBOLE

Nem todos os objetos que circulam no espaço têm órbitas elípticas. Há cometas que percorrem outras trajetórias, inclusive do tipo hiperbólica. Ao passarem próximo de algum planeta com grande densidade, eles alteram sua trajetória para outra hipérbole, com foco situado nesse astro.

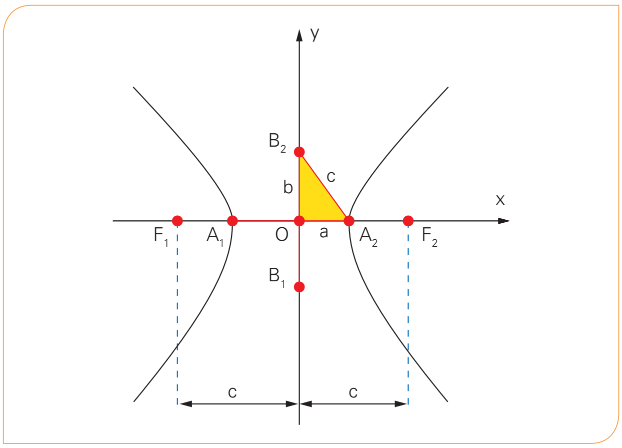


CONCEITO

Hipérbole é um lugar geométrico de pontos no plano cujo módulo de diferença de distâncias a dois pontos fixos no plano é sempre constante. Assim:

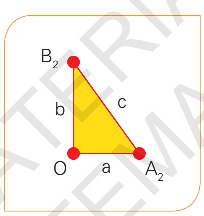
Sejam F_1 e F_2 dois pontos no plano e seja 2c a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos no plano cuja diferença (em módulo) das distâncias à F_1 e à F_2 é a constante 2a ($0 < 2a < 2c$).

ELEMENTOS



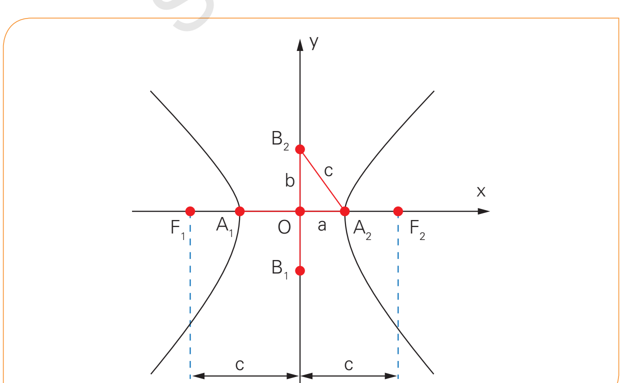
F_1 e F_2: são os focos da hipérbole
O: é o centro da hipérbole
2c: distância focal
2a: medida do eixo real ou transverso
2b: medida do eixo imaginário
$\frac{c}{a}$: excentricidade

No triângulo retângulo B_2OA_2, vale a relação $c^2 = a^2 + b^2$.



EQUAÇÃO REDUZIDA DA HIPÉRBOLE

1º caso: Hipérbole com focos sobre o eixo **x**.

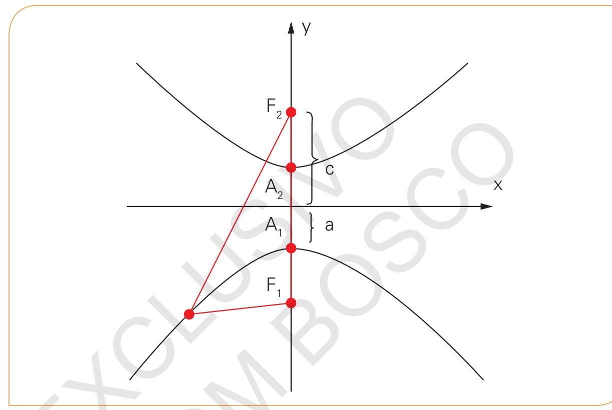


Fica claro que nesse caso os focos terão coordenadas $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Assim, a equação reduzida da elipse com centro na origem do plano cartesiano e focos sobre o eixo **x** será:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2º caso: Hipérbole com focos sobre o eixo **y**.



Neste caso, os focos terão coordenadas $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$.

Assim, a equação reduzida da hipérbole com centro na origem do plano cartesiano e focos sobre o eixo y será:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Observações:

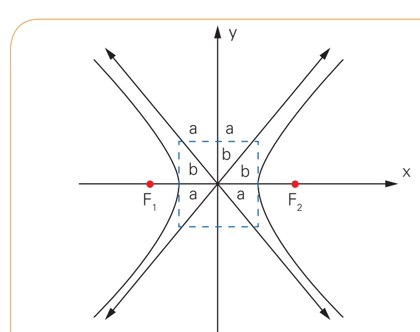
1. Vértices sempre estão na reta que contém os focos.

2. Excentricidade é sempre maior que 1.

ASSÍNTOTAS

Assíntotas de uma hipérbole são retas que contêm as diagonais do retângulo de lados 2a e 2b.

Quando o eixo real é horizontal, o coeficiente angular dessas retas é $m = \pm\frac{b}{a}$; quando é vertical, o coeficiente é $m = \pm\frac{a}{b}$.



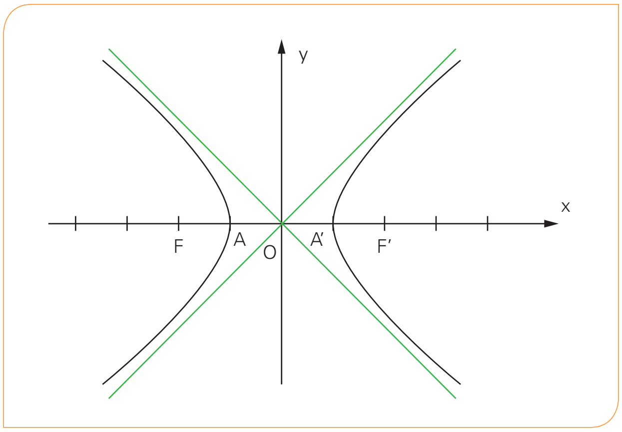
Facilita-se o traçado dos ramos da hipérbole quando se representam as duas assíntotas dela.

EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE

Equação com centro na origem e focos no eixo das abscissas

Consideram-se as seguintes condições:

- Centro da hipérbole coincidindo com a origem do sistema de coordenadas cartesianas.
- Coordenadas dos focos iguais a F(– c, 0) e F'(c, 0).
- Eixo real é igual a 2a.



Pela definição de hipérbole, o módulo da diferença das distâncias do ponto genérico P(x, y) a cada um dos focos é igual ao eixo real.

$|PF + PF'| = 2a$

Distância entre dois pontos no plano:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distância do ponto P(x, y) ao ponto F(– c, o):

$$PF = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}$$

Distância do ponto P(x, y) ao ponto F'(c, 0):

$$PF' = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$$

Aplicando-se a definição de hipérbole $|PF - PF'| = 2a$:

$$\left|\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}\right| = 2a$$

Considerando que o primeiro radical tem módulo maior que o segundo, isola-se no primeiro membro:

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = 2a + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$$

Elevam-se ao quadrado os dois membros da igualdade:

$$\left(\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}\right)^2$$

Efetuando-se as operações e desenvolvendo o quadrado no segundo membro:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a \cdot \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Simplificando-se nos dois membros:

$$2cx = 4a^2 + 4a \cdot \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} - 2cx$$

Isolando-se novamente o radical no primeiro membro:

$$4a \cdot \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = -4a^2 + 4cx$$

Simplificando-se por 4:

$$a \cdot \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = -a^2 + cx$$

Elevando-se ao quadrado novamente os dois membros:

$$\left(a \cdot \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}\right)^2 = (-a^2 + cx)^2$$

$$a^2 \cdot (x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

Aplicando-se a propriedade distributiva no primeiro membro:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

Cancelando-se o termo $2ca^2x$ dos dois membros:

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

Isolando-se os termos:

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Pela relação da hipérbole: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow a^2 - c^2 = -b^2$.

Substituindo-se: $-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$.

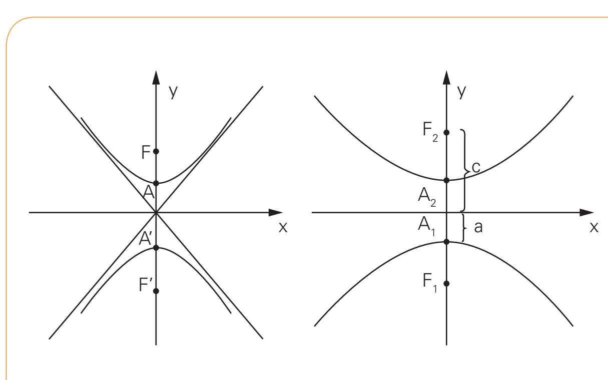
Dividindo-se por $-a^2b^2$ (que é diferente de zero):

$$\frac{-b^2x^2}{-a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{-a^2b^2} = \frac{-a^2b^2}{-a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Essa equação da hipérbole tem os focos no eixo das abscissas e o centro na origem do sistema cartesiano ortogonal.

Equação com centro na origem e focos no eixo das ordenadas



Equação da hipérbole com centro na origem e focos no eixo das ordenadas

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

O semieixo real define se os focos estão no eixo das abscissas ou das ordenadas. Então, a fração possuidora do sinal positivo identifica o eixo real contido na linha das abscissas ou das ordenadas – por consequência, focos situados respectivamente no eixo das abscissas ou das ordenadas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Determine a excentricidade da hipérbole de equação $25x^2 - 16y^2 - 400 = 0$.

Resolução

Temos: $25x^2 - 16y^2 = 400$.

Observe que a equação da hipérbole não está na forma reduzida.

Vamos dividir ambos os membros por 400, obtendo:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$$

Portanto, $a^2 = 16$ e $b^2 = 25$.

Daí, vem: $a = 4$ e $b = 5$.

Como $c^2 = a^2 + b^2$, substituindo e efetuando, vem que $c = \sqrt{41}$.

A excentricidade e será igual a: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{4} = 1{,}60$.

Logo, $e = 1{,}60$.

2. Sistema Dom Bosco – Determine a distância focal, eixos real e imaginário, da hipérbole de equação $25x^2 - 9y^2 = 225$:

Resolução

Dividindo ambos os membros por 225, temos:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$$

Daí: $a^2 = 9$ e $b^2 = 25$, de onde vem imediatamente: $a = 3$ e $b = 5$.

Assim:

Eixo real: $e_r = 2a \rightarrow e_r = 2 \cdot 9 \rightarrow e_r = 18$

Eixo imaginário: $e_i = 2b \rightarrow e_r = 2 \cdot 5 \rightarrow e_r = 10$

Assim,

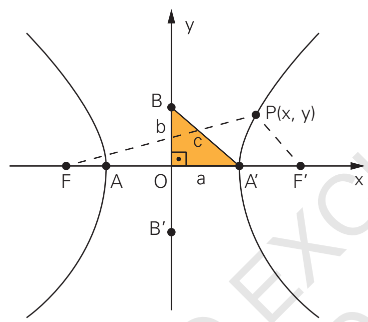
$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 9 + 25 \rightarrow c^2 = 34 \rightarrow c = \sqrt{34}$$

Logo, a distância focal da hipérbole, sendo igual a 2c, será $2 \cdot \sqrt{34}$.

ROTEIRO DE AULA

CÔNICAS – ELIPSE

Hipérbole



Elementos:

Focos: F_1 e F_2

Distância focal: 2c

Vértices: A_1 e A_2

Eixo maior: 2a

Eixo menor: 2b

Centro: O

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$

Equação da hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Esc. Naval – A equação $4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$, no plano xy, representa

a) duas retas
b) uma circunferência
c) uma elipse
d) uma hipérbole
e) uma parábola

Completando os quadrados na equação, obtemos:

$$4x^2 - y^2 - 32x + 8y + 52 = 0$$
$$4x^2 - 32x + 64 - y^2 + 8y - 16 = -52 + 64 - 16$$
$$4x^2 - 32x + 64 - (y^2 - 8y + 16) = -4$$
$$4(x-4)^2 - (y-4)^2 = -4$$
$$-\frac{(x-4)^2}{1} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

Logo, uma hipérbole.

2. Sistema Dom Bosco C2-H7

A catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida, em Brasília, projetada pelo arquiteto Oscar Niemeyer, possui uma estrutura que se destaca pela forma arrojada e pela beleza. Pode-se afirmar que essa estrutura, representada na figura a seguir, é denominada

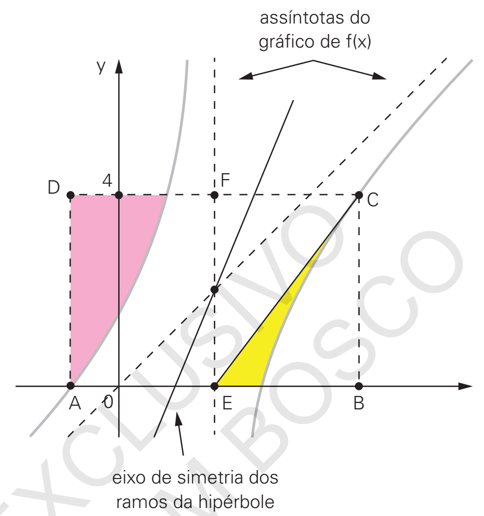
a) Elipsoide
b) Esfera
c) Hiperboloide
d) Paraboloide
e) Cubo

Hiperboloide, um sólido de rotação obtido girando-se uma hipérbole ao redor de seu eixo transversal.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

3. Unesp – O gráfico representa uma hipérbole, dada pela função real $f(x) = x + \frac{3}{2-x}$. Sabe-se que ABCD é um retângulo, que $\overline{EC}$ é a diagonal do retângulo EBCF e que a área da região indicada em rosa é igual a 4,7 cm².



a) Determine as coordenadas (x, y) do ponto A.
b) Calcule a área da região indicada em amarelo no gráfico.

a) O ponto A possui ordenada igual a zero e corresponde a um dos zeros da função f. Assim, temos:

$$f(x) = x + \frac{3}{2-x} = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos:
$x = -1$ ou $x = 3$
Logo, A = (–1, 0).

b) Os pontos C e D possuem a mesma ordenada 4. Assim, obtemos:

$$4 = x + \frac{3}{2-x} \rightarrow 4 - x = \frac{3}{2-x} \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos: $x = 1$ ou $x = 5$.
Assim, temos $x_c = 5$, sendo G o centro do retângulo ABCD. Então:

$$G = \left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{-1+5}{2}; \frac{0+4}{2}\right) = (2, 2)$$

Como o ponto de encontro das assíntotas é o centro da hipérbole, segue que $x_E = x_G = 2$.
E, como a hipérbole é simétrica em relação a G, podemos concluir que a área indicada em amarelo é dada por:

$$A_{\Delta EBC} - 4,7 = \frac{3 \cdot 4}{2} - 4,7 = 6,0 - 4,7 = 1,3 \text{ cm}^2$$

4. Sistema Dom Bosco – No plano cartesiano, a hipérbole $xy = 1$ intersecta uma circunferência $x^2 + y^2 = 1$ em quantos pontos distintos?

a) nenhum
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Primeiro, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} xy = 1 \rightarrow y = \dfrac{1}{x} & \text{(I)} \\ x + y = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), teremos:

$$x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1 \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 1 \rightarrow X^4 + 1 = x^2 \rightarrow x^4 - x^2 + 1 = 0$$

Com $x^2 = t$, temos:

$t^2 - t + 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1) = -3$

Logo, como a equação não possui solução real, a circunferência e a hipérbole não se intersectam.

5. Sistema Dom Bosco – Os vértices das hipérboles sempre estão na reta que contém os focos, e sua excentricidade é sempre maior que 1. Logo, pode-se afirmar que a hipérbole de equação $225x^2 - 25y^2 - 900 = 0$ é:

a) 2
b) 6
c) $2\sqrt{10}$
d) $\sqrt{10}$
e) $5\sqrt{2}$

Temos: $225x^2 - 25y^2 = 900$.

Observe que a equação da hipérbole não está na forma reduzida.

Vamos dividir ambos os membros por 900, obtendo:

$$\frac{225x^2}{900} - \frac{25y^2}{900} = \frac{900}{900} \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$$

Portanto, $a^2 = 4$ e $b^2 = 36$.

Daí, vem: $a = 2$ e $b = 6$. Assim,

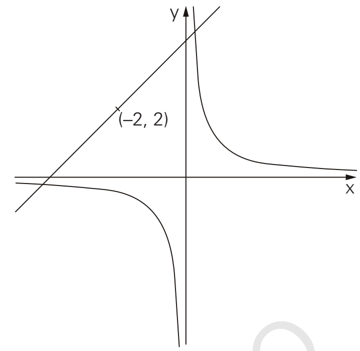
$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 2^2 + 6^2 \rightarrow c^2 = 4 + 36 \rightarrow c^2 = 40 \rightarrow c = \sqrt{40} \rightarrow c = 2\sqrt{10}$$

A excentricidade e será:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{10}}{2}$$

Logo, $e = \sqrt{10}$.

6. PUC-RJ – Considere a hipérbole de equação $y = \dfrac{1}{x}$ mostrada na figura:



a) Determine os pontos de interseção entre a hipérbole e a reta de equação $y - 2 = x + 2$.

b) Determine os pontos de interseção entre a hipérbole e a reta de equação $y - 2 = -x - 2$.

c) Para quais valores do parâmetro real m a reta de equação $y - 2 = m(x + 2)$ intersecta a hipérbole em **exatamente** um ponto?

a) Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} & \text{(I)} \\ y - 2 = x + 2 \rightarrow y = x + 4 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), teremos:

$$\frac{1}{x} = x + 4 \rightarrow x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow x' = -2 + \sqrt{5} \text{ ou } x'' = -2 - \sqrt{5}$$

Substituindo os valores de x na primeira equação, temos:

$$y' = \frac{1}{-2 + \sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$$

$$y'' = \frac{1}{-2 - \sqrt{5}} = 2 - \sqrt{5}$$

Portanto, os pontos de interseção são:

$\left(-2 + \sqrt{5},\ 2 + \sqrt{5}\right)$ e $\left(-2 - \sqrt{5},\ 2 - \sqrt{5}\right)$

b) Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} & \text{(I)} \\ y - 2 = -x - 2 \rightarrow y = -x & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), teremos:

$$\frac{1}{x} = -x \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x \notin \mathbb{R}.$$

Logo, não há interseção entre a hipérbole e a reta.

c) Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} & \text{(I)} \\ y - 2 = m(x+2) \rightarrow y = m(x+2) + 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Igualando as equações, obtemos:

$$\frac{1}{x} = m(x+2) + 2 \rightarrow mx^2 + (2m+2)x - 1 = 0$$

Para que haja apenas uma solução, o discriminante da equação (Δ) deve ser igual a zero.

$$\Delta = 0 \rightarrow (2m+2)^2 - 4m \cdot (-1) \rightarrow 4m^2 + 12m + 4 = 0 \rightarrow m^2 + 3m + 1 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau para m, obtemos os dois valores possíveis de m para que a reta intersecte a hipérbole em apenas um ponto.

$$m = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } m = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. IFCE (adaptado) – A expressão $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ descreve a equação de um(a)

a) hipérbole.
b) parábola.
c) elipse.
d) circunferência.
e) reta.

8. Epcar (adaptado) – Analise as proporções e responda ao que se pede.

a) Em uma hipérbole equilátera, as assíntotas são perpendiculares entre si?

b) A equação $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ representa uma elipse que tem um dos focos no ponto P(1, 4)?

9. UEM – Um aluno desenhou, em um plano cartesiano, duas cônicas (elipse ou hipérbole), uma de excentricidade 0,8 e outra de excentricidade 2,4, tendo ambas como foco o par de pontos (–12, 0) e (12, 0).

Assinale o que for **correto**.

01) A cônica de excentricidade 0,8 é uma hipérbole.

02) A cônica de excentricidade 2,4 passa pelo ponto (5, 0).

04) As cônicas descritas possuem quatro pontos em comum.

08) $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$ é uma equação para a cônica de excentricidade 0,8.

16) A cônica de excentricidade 0,8 passa pelo ponto (0, 9).

10. EsPCEx – A representação no sistema cartesiano ortogonal da equação $9x^2 - y^2 = 36x + 8y - 11$ é dada por

a) duas retas concorrentes.

b) uma circunferência.

c) uma elipse.

d) uma parábola.

e) uma hipérbole.

11. UFPE (adaptado) – Para cada número real a, analise as proposições a seguir, referentes à representação geométrica da equação $x^2 + ay^2 + 2x - 2ay = 0$ em um sistema de coordenadas cartesianas xOy.

a) Se $a = 1$, a equação representa uma circunferência?

b) Se $a = 0$, a equação representa uma reta?

c) Se $a = 3$, a equação representa uma hipérbole?

d) Se $a = -2$, a equação representa uma elipse?

e) Se $a = -1$, a equação representa a união de duas retas?

12. Udesc (adaptado) – Analise as afirmações dadas a seguir e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

( ) A elipse de equação $9x^2 + 4y^2 = 36$ intercepta a hipérbole de equação $x^2 - 4y^2 = 4$ em apenas dois pontos, que são os vértices da hipérbole.

( ) O semieixo maior da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ é paralelo ao eixo real da hipérbole $x^2 - 4y^2 = 4$.

Assinale a alternativa que contém a sequência correta, de cima para baixo.

a) V – V

b) V – F

c) F – V

d) F – F

13. UEM (adaptado) – Baseado em conhecimentos sobre cônicas, assinale o que for **correto**.

01) Elipse é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos distintos fixos chamados focos.

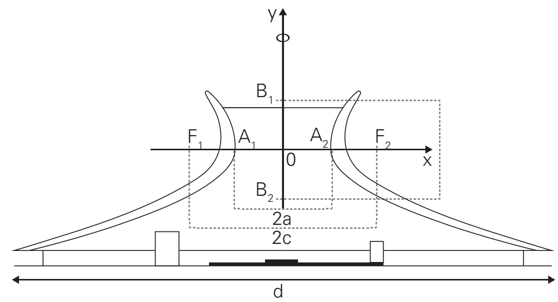
02) A equação $4x^2 - 9y^2 - 25 = 0$ determina uma hipérbole de focos no eixo x.

04) A elipse de focos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, com seu eixo maior de extremidades em $(-3, 0)$ e $(3, 0)$, tem equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

08) O eixo maior da elipse $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$ tem extremidades $(7, 0)$ e $(-7, 0)$.

14. UFSC – Em relação às proposições, é correto afirmar que:

01) A catedral de Brasília foi projetada pelo arquiteto Oscar Niemeyer. Sua estrutura se destaca pela beleza e pela forma, um hiperboloide de rotação. A figura a seguir destaca os principais elementos da hipérbole associada à forma da catedral, e é possível perceber que ela tem como base um círculo de diâmetro d. Supondo que a equação dessa hipérbole seja $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{400} = 1$ e que a medida do diâmetro tenha 10 metros a mais que a distância focal, então a medida d será igual a 60 metros.



02) A excentricidade da elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ é $\frac{1}{3}$.

04) O valor de k na matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$ para que se tenha $A - 1 = A \cdot t$ é $k = 0$.

08) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, então o $\det(A \cdot B_1)$ não existe.

16) Se em uma loja de moda masculina Júlio comprar um par de sapatos, duas calças e três camisas, ele pagará R$ 520,00. Se comprar, na mesma loja, um par de sapatos, três calças e cinco camisas, pagará R$ 760,00. Logo, na compra de um par de sapatos, de uma calça e de uma camisa, nessa mesma loja, Júlio pagará R$ 280,00.

15. IME – Considere uma haste AB de comprimento 10 m. Seja um ponto P localizado nessa haste a 7 m da extremidade A. A posição inicial dessa haste é horizontal sobre o semieixo x positivo, com a extremidade A localizada na origem do plano cartesiano. A haste se desloca de forma que a extremidade A percorra o eixo y, no sentido positivo, e a extremidade B percorra o eixo x, no sentido negativo, até que a extremidade B esteja sobre a origem do plano cartesiano. A equação do lugar geométrico, no primeiro quadrante, traçado pelo ponto P ao ocorrer o deslocamento descrito é

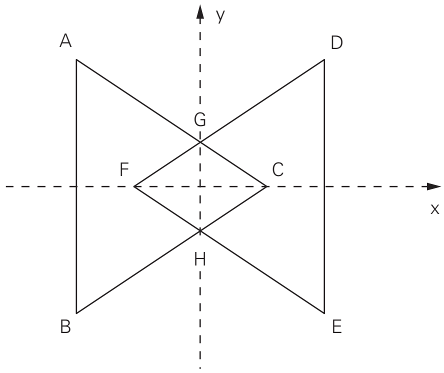
a) $49x^2 + 9y^2 - 280x + 120y - 441 = 0$
b) $49x^2 - 406x - 49y^2 + 441 = 0$
c) $9x^2 + 49y^2 - 441 = 0$
d) $9x^2 + 9y^2 + 120y - 441 = 0$
e) $9x^2 - 49y^2 - 441 = 0$

16. IME – Uma hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$ tem centro na origem e passa pelo ponto $\left(\sqrt{5}, 1\right)$.

A equação de uma reta tangente a essa hipérbole e paralela a y = 2x é:

a) $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 6$
b) $y = -2x + 3\sqrt{3}$
c) $3y = 6x + 2\sqrt{3}$
d) $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 4$
e) $y = 2x + \sqrt{3}$

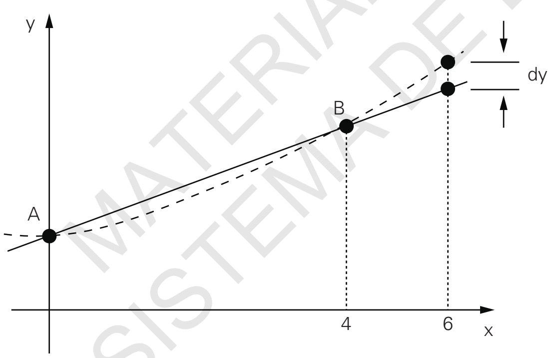
17. IME (adaptado) – Os triângulos ABC e DEF são equiláteros com lados iguais a m. A área da figura FHCG é igual à metade da área da figura ABHFG. Determine a equação da elipse de centro na origem e eixos formados pelos segmentos FC e GH.



ESTUDO PARA O ENEM

18. ESPM C5-H20

Para efeitos práticos, a relação entre as grandezas x e y que, teoricamente, seria dada por $y = 1 + \frac{x^2}{4}$ e cujo gráfico cartesiano se vê a seguir, em linha tracejada, foi substituída pela relação linear representada pela reta que passa por A e B.



Dessa forma, a diferença dy, que se obtém quando x = 6, vale:

a) 1,0
b) 2,0
c) 2,5
d) 3,0
e) 3,5

19. Unesp C5-H23

A figura mostra a representação de algumas das ruas de nossas cidades. Essas ruas possuem calçadas de 1,5 m de largura, separadas por uma pista de 7 m de largura. Vamos admitir que:

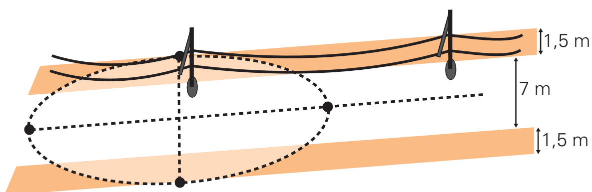
I. os postes de iluminação projetam sobre a rua uma área iluminada na forma de uma elipse de excentricidade 0,943;

II. o centro dessa elipse encontra-se verticalmente abaixo da lâmpada, no meio da rua;

III. o eixo menor da elipse, perpendicular à calçada, tem exatamente a largura da rua (calçadas e pista).

Se desejarmos que as elipses de luz se tangenciem nas extremidades dos eixos maiores, a distância, em metros, entre dois postes consecutivos deverá ser de aproximadamente:

Dados: $0{,}943^2 \approx 0{,}889$ e $\sqrt{0{,}111} \approx 0{,}333$.



a) 35
b) 30
c) 25
d) 20
e) 15

20. Sistema Dom Bosco C6-H26

Planetas descrevem trajetórias elípticas, enquanto as torres de refrigeração em usinas nucleares possuem formato hiperbólico, que é originado da rotação de uma hipérbole.

Dentre os itens a seguir, qual possui a equação canônica de uma elipse e de uma hipérbole, respectivamente?

a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$
b) $x^2 - y^2 = 0$
c) $x + y - 1 = 0$
d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

CÔNICAS – PARÁBOLA

56

- Parábola

HABILIDADES

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Aplicar conhecimentos algébricos/geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

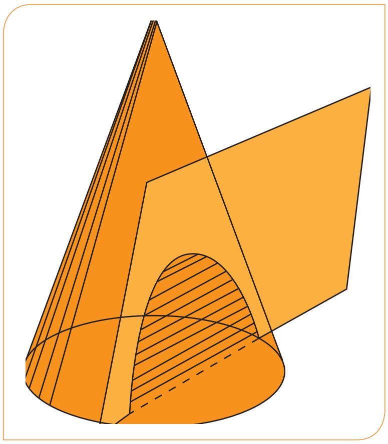
Introdução

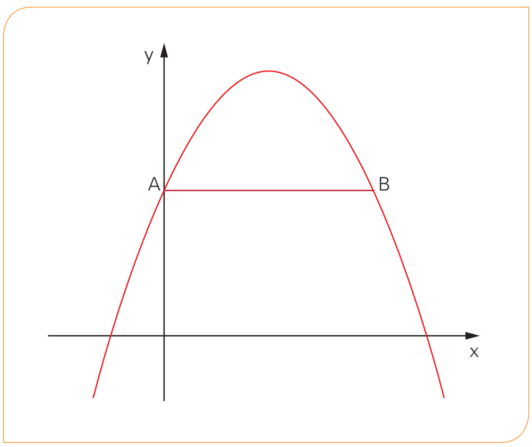
As antenas parabólicas são constituídas de duas partes principais: o paraboloide de revolução, formato obtido a partir da rotação de uma parábola em torno de um eixo central, que serve para captar os sinais de rádio e televisão transmitidos pelos satélites que trabalham para esse tipo de antena; e o decodificador, que deve ser posicionado no foco do paraboloide a fim de obter uma maior amplificação do sinal captado, uma vez que esses sinais possuem baixa intensidade.

PARÁBOLA

Parábola é uma seção cônica gerada pela interseção entre uma superfície cônica de segundo grau e um plano paralelo à reta geratriz do cone – e o plano não a contém. Equivalentemente, uma parábola é a curva plana definida como o conjunto dos pontos que são equidistantes de um ponto dado (chamado de foco) e de uma reta dada (chamada de diretriz). Aplicações práticas são encontradas em diversas áreas da física e da engenharia, como no projeto de antenas parabólicas, radares, faróis de automóveis etc.

Em geral lembra a trajetória de um corpo lançado obliquamente sujeito a uma aceleração igual à da gravidade, ou então o gráfico de uma função do 2º grau.





CONCEITO

Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano, cuja distância a um ponto fixo dele é igual ao espaço até uma reta desse plano.

ELEMENTOS DA PARÁBOLA

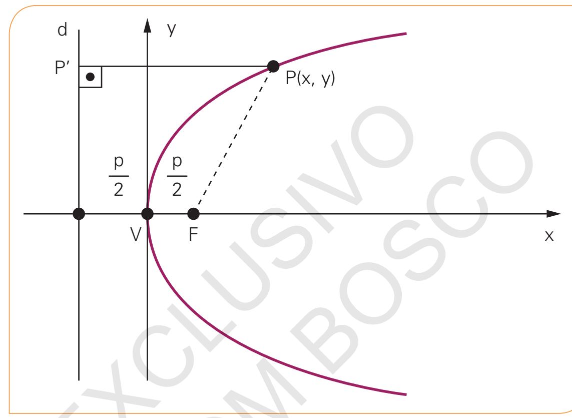
Os elementos da parábola são figuras geométricas mais simples que ela e que fazem parte de sua definição, estando envolvidos em sua construção. São eles:

- **Foco:** o ponto **F** da definição da **parábola** e da imagem anterior é chamado de foco e determina essa figura.
- **Diretriz:** a reta **r**, também presente na definição e na imagem anterior, é chamada de diretriz da parábola. Essa reta é usada junto ao foco para a definição dessa figura. A distância entre qualquer ponto da parábola e sua diretriz é igual à distância entre esse mesmo ponto da parábola e seu foco.
- **Parâmetro:** é a distância entre o **foco** e a **diretriz**. Esse cálculo pode ser feito por meio da distância entre ponto e reta.
- **Vértice:** o **vértice da parábola** é o ponto mais próximo de sua diretriz. Existe uma propriedade que afirma o seguinte:

$$VF = \frac{P}{2}$$

Reforça-se que VF é o segmento de reta que tem início no vértice da parábola e tem fim em seu foco, e p é o parâmetro da parábola. Em outras palavras, o vértice de uma parábola fica no meio do caminho entre seu foco e a diretriz.

- **Eixo de simetria:** é a reta perpendicular à **diretriz** que passa pelo vértice da parábola. Essa reta também contém o foco da parábola. Ela é assim chamada porque divide a **parábola** em duas partes simétricas.



- Foco: **F**
- Diretriz: reta **d**
- Vértice: **V**
- Parâmetro: **p**, distância do foco à diretriz
- Eixo de simetria: reta **VF**, perpendicular à diretriz

EQUAÇÃO DA PARÁBOLA

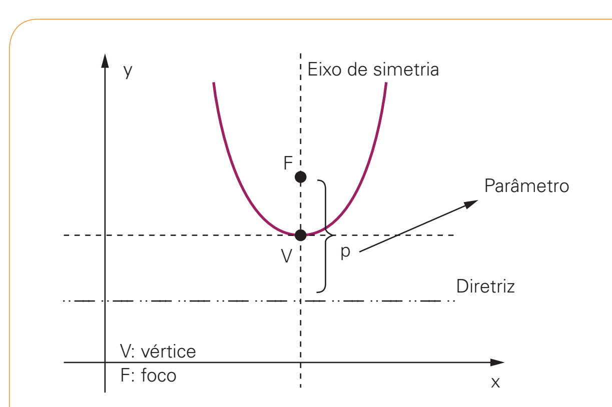
Equação com vértice na origem e focos no eixo das ordenadas

Consideram-se as condições:

- Vértice da parábola coincidindo com a origem do sistema de coordenadas cartesianas.
- Coordenadas dos focos iguais a

$$F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$$

Pela definição de parábola, a distância do ponto genérico P(x, y) aos focos é igual à distância do ponto **P** à reta diretriz da parábola.



No caso, os pontos em questão são:

$$F\left(0,\ \frac{p}{2}\right),\ P(x,\ y)\ e\ Q\left(x, -\frac{p}{2}\right)$$

Distância entre dois pontos no plano:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Distância do ponto P (x, y) ao ponto $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$

$$PF = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$$

Distância do ponto P (x, y) ao ponto $Q\left(0, \frac{-p}{2}\right)$

$$PQ = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Aplicando-se a definição de parábola: PF = PQ

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Elevam-se ao quadrado os dois membros da igualdade:

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = (x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

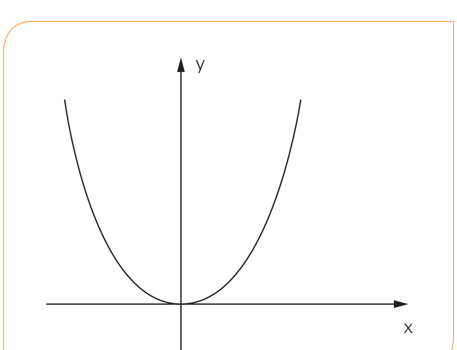
$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = 0 + y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

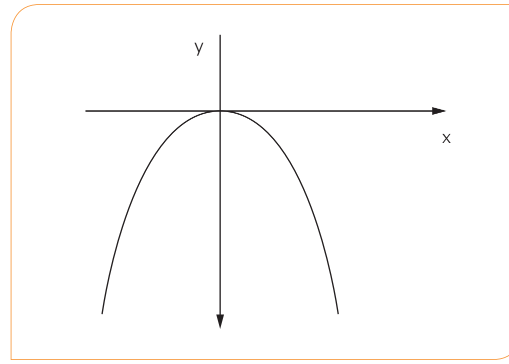
Efetuando-se operações e simplificando termos comuns nos dois membros:

$$x^2 = 2py$$

Essa equação chama-se equação reduzida da parábola, e a concavidade da curva depende do sinal do parâmetro **p**:

- Quando $p > 0$, concavidade voltada para **cima**.
- Quando $p < 0$, concavidade voltada para **baixo**.





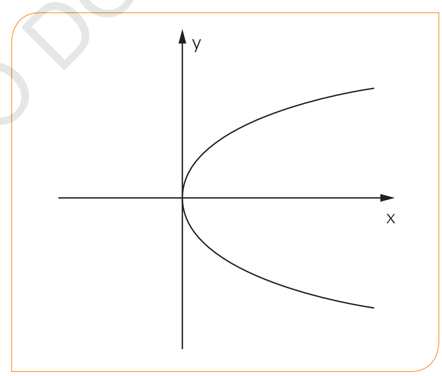
Equação com vértice na origem e focos no eixo das abscissas

Consideram-se as condições:

- Vértice da parábola coincidindo com a origem do sistema de coordenadas cartesianas.
- Coordenadas dos focos iguais a:

$$F = \left(0,\ \frac{p}{2}\right)$$

Pela definição de parábola, a distância do ponto genérico P(x, y) aos focos é igual à distância do P à reta diretriz da parábola.

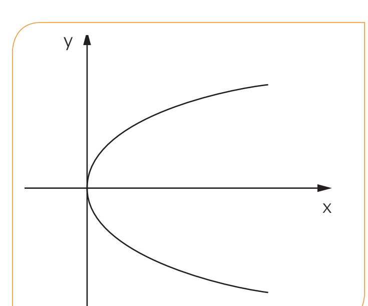


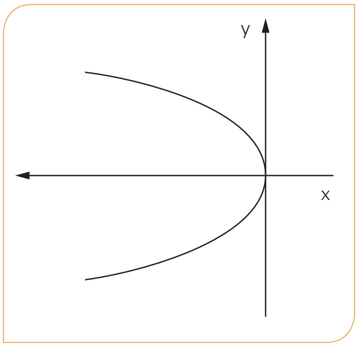
Demonstra-se que a equação obtida é representada por:

$$y^2 = 2px$$

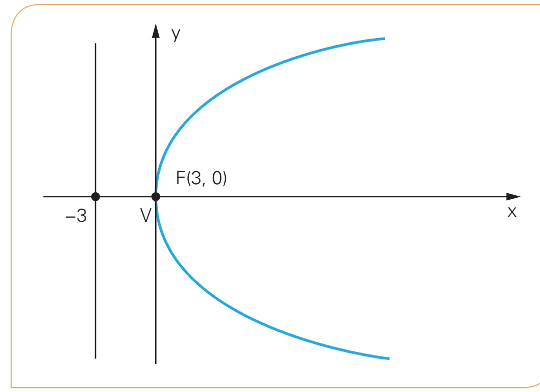
Essa equação chama-se equação reduzida da parábola, e a concavidade da curva depende do sinal do parâmetro p:

- Quando $p > 0$, concavidade voltada para a **direita**.
- Quando $p < 0$, concavidade voltada para a **esquerda**.





Exemplo:
Determinar equação da parábola indicada a seguir:



Equação: $y^2 = 2px$, sendo $p = 6$.
Então, $y^2 = 2 \cdot (6)x = 12x$
$y^2 = 12\,x$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Determine a diretriz da parábola de equação $y^2 = -4x$.

Resolução

A parábola possui concavidade para a esquerda, e a diretriz é uma reta paralela ao eixo das ordenadas. Identificando os elementos, temos:

$$\text{I)} \begin{cases} y^2 = -4x \\ y^2 = -2px \end{cases} \rightarrow -2p = -4 \quad p = 2$$

$$\text{II) Diretriz}: x = \frac{p}{2} \qquad x = \frac{2}{2} = 1$$

2. Sistema Dom Bosco – Determine o foco da parábola de equação $y^2 = 12x$.

Resolução

A parábola possui concavidade para a direita, e o foco está sobre o eixo das abscissas. Identificando os elementos, temos:

$$\text{I)} \begin{cases} y^2 = 12x \\ y^2 = 2px \end{cases} \rightarrow 2p = 12 \rightarrow p = 6$$

$$\text{II) Foco}: \left(\frac{p}{2}, 0\right) = (3, 0)$$

3. Sistema Dom Bosco – Determine os pontos de interseção entre a parábola $x^2 = -2y$ e a reta $y = x$.

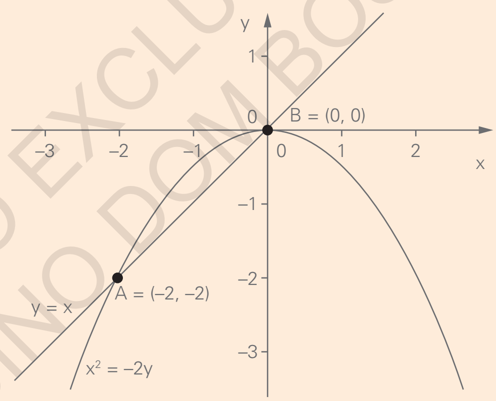
Resolução

Realizando as substituições e resolvendo o sistema, temos:

$$\text{I)} \begin{cases} x^2 = -2y \\ y = x \end{cases} \rightarrow x^2 = -2x \rightarrow x^2 + 2x = 0 \quad x(x+2) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{II) Pontos}: \begin{cases} A: (-2,\ -2) \\ B: (0,\ 0) \end{cases}$$

Esboçando o gráfico, podemos ver os pontos de interseção A e B.



4. Sistema Dom Bosco – Associe as equações apresentadas na coluna da esquerda aos nomes das curvas planas na coluna da direita.

I. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ ( ) Elipse

II. $\frac{x}{5} + \frac{y}{8} = 1$ ( ) Hipérbole

III. $\frac{x^2}{5} + \frac{y}{8} = 1$ ( ) Reta

IV. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} = 1$ ( ) Circunferência

V. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{6} = 1$ ( ) Parábola

Qual é a sequência da associação que relaciona corretamente a equação ao tipo de curva plana?

Resolução

I. Elipse: os números que multiplicam x^2 e y^2 são diferentes e temos uma soma de x^2 e y^2.

II. Reta: x e y possuem expoentes iguais a 1; nem x, nem y podem estar no denominador.

III. Parábola: há apenas x^2.

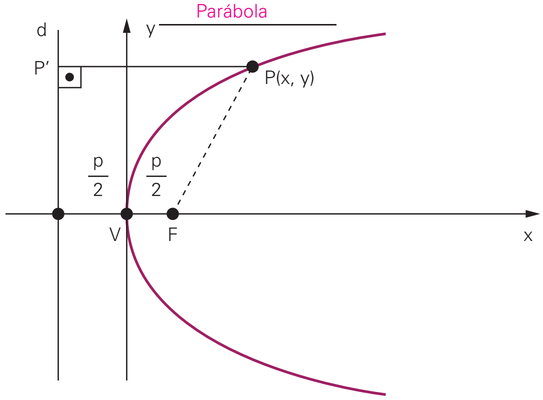
IV. Hipérbole: temos uma subtração de x^2 e y^2.

V. Circunferência: o número que multiplica x^2 e y^2 é sempre o mesmo e temos uma soma entre x^2 e y^2.

Portanto, a sequência correta é I, IV, II, V, III.

ROTEIRO DE AULA

CÔNICAS – PARÁBOLA



Elementos:

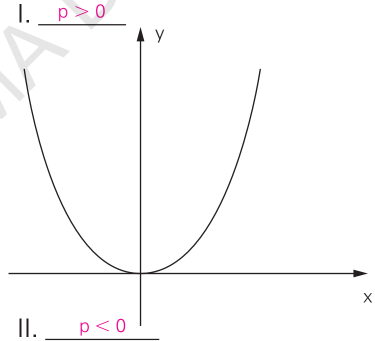
Focos : F
Diretriz reta d
Vértices : V
Parâmetro : p, distância do foco à diretriz
Eixo de simetria : reta VF, perpendicular à diretriz

Equação Reduzida da Parábola

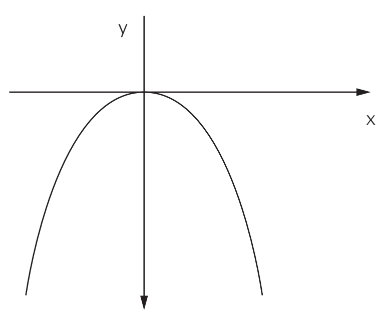
$y^2 =$ 2px

Equação com foco no eixo das ordenadas

I. $p > 0$



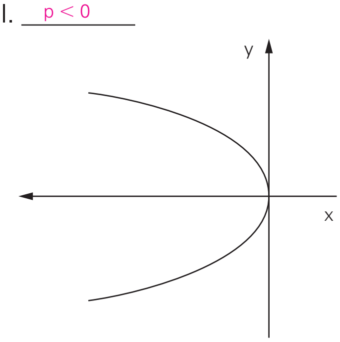
II. $p < 0$



Equação com foco no eixo das abscissas

I. $p > 0$

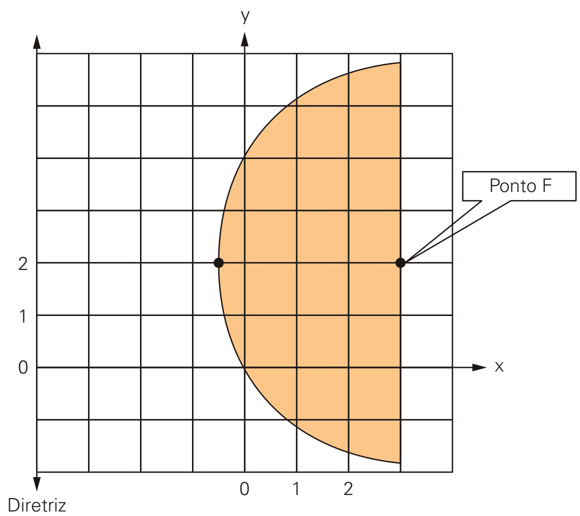
II. $p < 0$



EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Uema C5-H20

Uma família da cidade de Cajapió-MA comprou uma antena parabólica e o técnico a instalou acima do telhado. A antena projetou uma sombra na parede do vizinho, que está reproduzida a seguir, coberta com uma folha quadriculada.



Note que a figura projetada na parede é uma cônica. Considerando as medidas mostradas e o sistema cartesiano contido na folha quadriculada, a equação que representa a cônica será

a) $(y - 2)^2 = 7(2x + 1)$

b) $(y + 2)^2 = 7(2x + 1)$

c) $(y - 3)^2 = 12(x + 1)$

d) $(y-2)^2 = -7\left(2x - \frac{1}{7}\right)$

e) $(y+3)^2 = \frac{12}{7}(x-1)$

Temos:

$F = (3, 2)$, e a diretriz da parábola é a reta $x = -4$.

$p = 3 - (-4) = 7$ e $V = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

A equação da parábola será:

$(y-2)^2 = 2 \cdot 7\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \rightarrow (y - 2)^2 = 7(2x + 1)$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

2. FGV – No plano cartesiano, há dois pontos R e S pertencentes à parábola de equação $y = x^2$ e que estão alinhados com os pontos A(0, 3) e B(4, 0).

A soma das abscissas dos pontos R e S é:

a) – 0,45

b) – 0,55

c) – 0,65

d) – 0,75

e) – 0,85

Sendo r a reta que passa por A (0, 3) e B (4, 0), temos:

$r: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3$

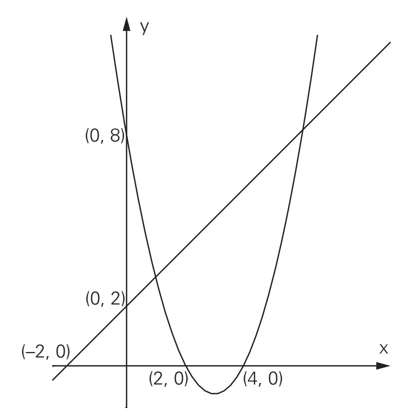
As abscissas de R e S dizem respeito às abscissas dos pontos de interseção da reta r com a parábola $y = x^2$.

$x^2 = -\frac{3}{4}x + 3 \leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x - 3 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau, com $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$ e $c = -3$, temos que a soma das abscissas será:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$

3. PUC-RJ – A figura a seguir mostra uma reta e uma parábola de eixo vertical.



a) Sabendo que a reta corta os eixos nos pontos (−2, 0) e (0, 2), encontre a equação da reta.

b) Sabendo que a parábola corta os eixos nos pontos (0, 8), (2, 0) e (4, 0), encontre a equação da parábola.

c) Encontre os pontos de interseção entre a reta e a parábola.

a) A equação da reta que passa pelos pontos (−2, 0) e (0, 2) será:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x - 2y - 4 = 0 \rightarrow x - y + 2 = 0$$

b) $y = a(x - 2) \cdot (x - 4)$

Como 2 e 4 são raízes da função f(x), e o ponto (0, 8) é pertencente ao gráfico de f, teremos:

$8 = a(0 - 2) \cdot (0 - 4) \rightarrow 8 = 8 \cdot a \rightarrow a = 1.$

Logo:

$y = 1 \cdot (x-2) \cdot (x-4)\ y = x^2 - 6x + 8$

c) Através da resolução do sistema a seguir, obteremos os pontos de interseção entre a reta e a parábola.

$$\begin{cases} y = x+2 \\ y = x^2 - 6x + 8 \end{cases} \rightarrow x+2 = x^2 - 6x + 8 \rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow x = 1$ ou $x = 6$

Para $x = 1$, $y = 3$.

Para $x = 6$, $y = 8$.

Logo, os pontos são: (1, 3) e (6, 8).

4. EsPCEx – O ponto $P\left(a, \frac{1}{3}\right)$ pertence à parábola $x = \frac{y^2+3}{3}$. A equação da reta perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares que passa por P é:

a) $27x + 27y - 37 = 0$
b) $37x + 27y - 27 = 0$
c) $27x + 37y - 27 = 0$
d) $27x + 27y - 9 = 0$
e) $27x + 37y - 9 = 0$

Como P pertence à parábola, teremos:

$$a = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3}{3} = \frac{1}{27} + 1 = \frac{28}{27}$$

Compreendendo que a bissetriz dos quadrantes ímpares é a reta y = x, teremos que o coeficiente angular da reta procurada é –1, e, assim, sua equação é obtida por:

$$y - \frac{1}{3} = (-1) \cdot \left(x - \frac{28}{27}\right) \rightarrow x + y - \frac{1}{3} - \frac{28}{27} = 0 \rightarrow 27x + 27y - 37 = 0$$

5. PUC-SP – Num sistema de eixos cartesianos ortogonais, as interseções das curvas de equações $y = x^2$ e $x + y - 2 = 0$ são as extremidades do diâmetro de uma circunferência cuja equação é:

a) $x^2 + y^2 - 5x + y + 2 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 5x + y - 2 = 0$
c) $x^2 + y^2 + x + 5y + 2 = 0$
d) $x^2 + y^2 + x + 5y - 2 = 0$
e) $x^2 + y^2 + x - 5y + 2 = 0$

Para obter as coordenadas das interseções das curvas fornecidas, resolvemos o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow x + x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 1$$

Quando $x = -2$, $y = 4 \rightarrow P_1(-2, 4)$.

Quando $x = 1$, $y = 1 \rightarrow P_2(1, 1)$.

Para calcular o centro C da circunferência, temos:

$$C\left(\frac{-2+1}{2}; \frac{4+1}{2}\right) \rightarrow C\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

Utilizando as coordenadas de P_1 e P_2, obtemos o raio da circunferência.

$$R = \sqrt{\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(4-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} \rightarrow$$

$$\rightarrow R = \sqrt{\frac{18}{4}}$$

Logo, a equação da circunferência será:

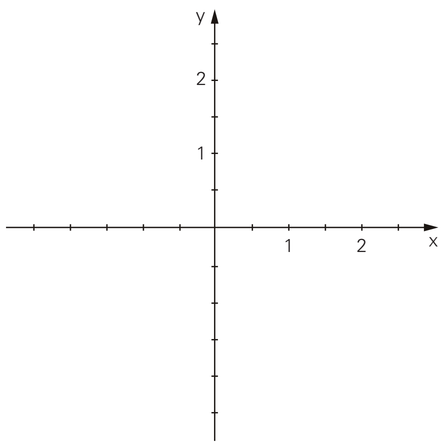
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{18}{4}}\right)^2$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{18}{4} \rightarrow x^2 + y^2 + x - 5y + 2 = 0$$

6. Fuvest – Considere a circunferência λ de equação cartesiana $x^2 + y^2 - 4y = 0$ e a parábola α de equação $y = 4 - x^2$.

a) Determine os pontos pertencentes à interseção entre λ e α.

b) Desenhe, no par de eixos dado, a circunferência λ e a parábola α. Indique, em seu desenho, o conjunto dos pontos (x, y) que satisfaz, simultaneamente, às inequações $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$ e $y \geq 4 - x^2$.



a) Solucionando o sistema composto pelas equações de λ e α, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 - y \\ y^2 - 5y + 4 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 - y \\ y^2 - 5y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 - y \\ y = 1 \text{ ou } y = 4 \end{cases} \leftrightarrow \left(\pm\sqrt{3},\ 1\right) \text{ ou } (0,\ 4)$$

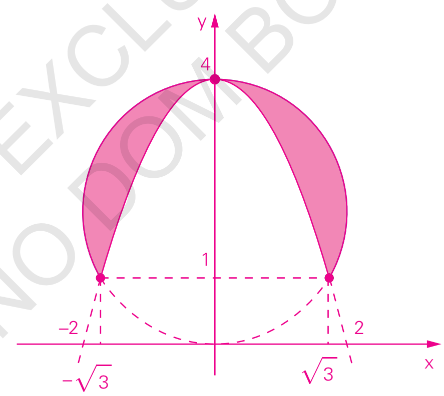
b) Concluindo os quadrados, teremos:

$$x^2 + y2^2 - 4y = 0 \rightarrow (x - 0)^2 + y^2 - 4y + 4 = 4 \rightarrow (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Sendo assim, λ tem centro em $(0, 2)$ e raio 2.

De outra forma, a equação canônica da parábola α é $y = -(x - 0)^2 + 4$. Logo, o ponto máximo do gráfico de α é $(0, 4)$. Contudo, compreendemos que α intersecta λ em $(-\sqrt{3},\ 1)$ e $(\sqrt{3},\ 1)$.

Logo, o conjunto dos pontos (x, y), que contempla ao mesmo tempo as inequações $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$ e $y \geq 4 - x^2$, faz parte da região sombreada da figura a seguir.

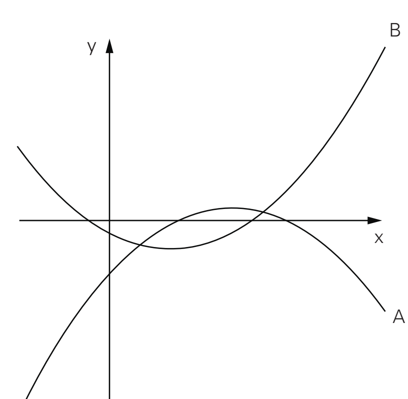


EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. PUC-RJ (adaptado) – Considere a parábola de equação $y = x^2 - 3x + 4$.

Em quais pontos a reta de equação $y = 2x$ intercepta a parábola?

8. UFPE – A seguir, estão ilustradas partes dos gráficos das parábolas A e B, com equações respectivas $y = -x^2 + 8x - 13$ e $y = x^2 - 4x - 3$.



Analise as proposições a seguir, acerca dessa configuração.

( ) Um dos pontos de interseção das parábolas A e B tem coordenadas $(1, -6)$.

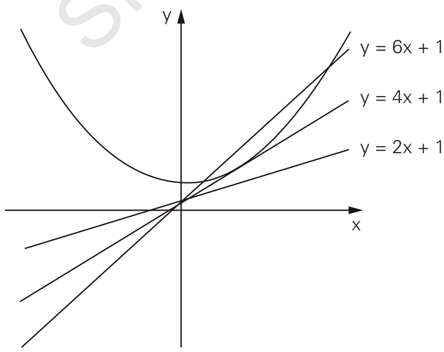
( ) O vértice da parábola A é o ponto $(4, 2)$.

( ) A reta que passa pelos pontos de interseção das parábolas A e B tem equação $y = 2x - 6$.

( ) A distância entre os vértices das parábolas A e B é $\sqrt{102}$.

( ) A parábola B intercepta o eixo das ordenadas no ponto com coordenadas $(0, -3)$.

9. UFPE – Esta questão refere-se à parábola com equação $y = x^2 + 5$ e à reta não vertical com inclinação m e passando pelo ponto $(0, 1)$, que será designada por r_m. A seguir, ilustramos o gráfico da parábola e o gráfico das retas $y = 2x + 1$, $y = 4x + 1$ e $y = 6x + 1$.



Admitindo esses dados, analise as afirmações seguintes.

( ) Uma equação de r_m é $y = mx + 1$.

( ) r_m intercepta a parábola em um único ponto se, e somente se, $m = 4$.

( ) Se $-4 < m < 4$, então r_m não intercepta a parábola.

( ) Se $m < -4$, então r_m intercepta a parábola em dois pontos diferentes.

( ) Se $m > 4$, então r_m intercepta a parábola em um único ponto.

10. EsPCEx – Considere as afirmações:

I. Uma elipse tem como focos os pontos $F_1(-3, 0)$ e $F_2(3, 0)$, e a medida do eixo maior é 8. Sua equação é $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

II. Os focos de uma hipérbole são $F_1(-10, 0)$ e $F_2(10, 0)$, e sua excentricidade é $\frac{5}{3}$. Sua equação é $16x^2 - 9y^2 = 576$.

III. A parábola $8x = -y^2 + 6y - 9$ tem como vértice o ponto $V(3, 0)$.

Com base nessas afirmações, assinale a alternativa correta.

a) Todas as afirmações são falsas.
b) Apenas as afirmações I e III são falsas.
c) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
d) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) Apenas a afirmação III é verdadeira.

11. UEM – Considere um sistema cartesiano ortogonal de origem O = (0, 0). Um ponto nesse sistema é representado por um par ordenado P = (x, y), onde a coordenada x é chamada de abscissa e a coordenada y, de ordenada.

Assinale o que for correto.

01) A parábola de reta diretriz x = − 2 e foco (2, 0) tem equação $y^2 = 2x$.

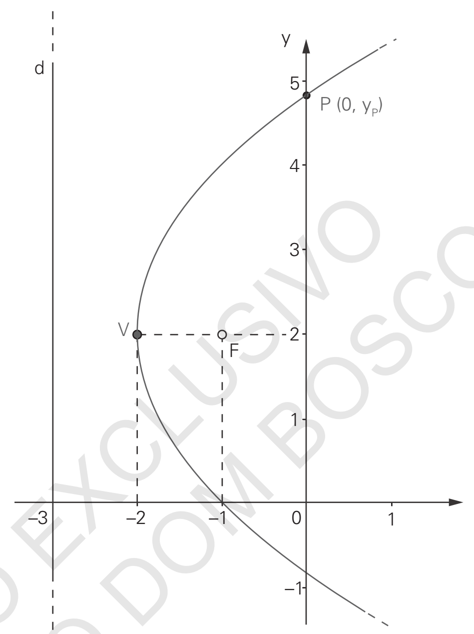
02) A equação da elipse com centro na origem, extremidades do eixo maior nos pontos $A_1 = (-1,0)$ e $A_2 = (1,0)$ e extremidades do eixo menor nos pontos $B_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $B_2 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$ é $x^2 + 4y^2 = 1$.

04) Os pontos $F_2 = (3,0)$ e $F_2 = (-3,0)$ são focos da elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

08) A hipérbole de equação $4x^2 - 25y^2 = 100$ tem seus focos sobre o eixo y.

16) A excentricidade da elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ é $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

12. Unesp – Em um plano cartesiano ortogonal são dadas uma reta d, de equação x = – 3, e um ponto F, de coordenadas (– 1, 2). Nesse plano, o conjunto dos pontos que estão à mesma distância do ponto F e da reta d forma uma parábola. Na figura, estão nomeados dois pontos dessa parábola: o vértice V, de coordenadas (– 2, 2), e o ponto P, de coordenadas (0, y_p).



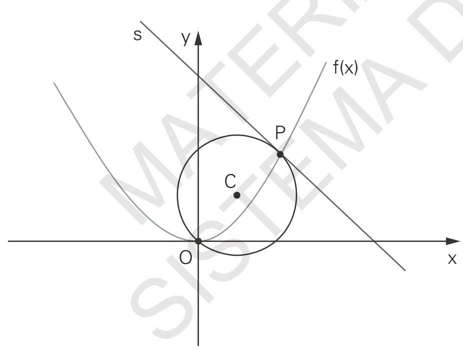
Determine as coordenadas de dois pontos quaisquer dessa parábola que sejam diferentes de V e P. Em seguida, calcule y_p.

13. EsPCEx – Uma reta t passa pelo ponto A $(-3, 0)$ e é tangente à parábola de equação $x = 3y^2$ no ponto P.

Assinale a alternativa que apresenta uma solução correta de acordo com essas informações.

a) t: $x - 10y + 3 = 0$ e $P(27, 3)$
b) t: $2x - 15y + 6 = 0$ e $P(12, 2)$
c) t: $2x - 15y + 6 = 0$ e $P(12, -2)$
d) t: $y = 0$ e $P(0, 0)$
e) t: $x + 6y + 3 = 0$ e $P(3, -1)$

14. PUC-SP – A função $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ e a circunferência de centro C e equação $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$ se interceptam nos pontos P e O, sendo O a origem do sistema cartesiano, conforme mostra o gráfico.

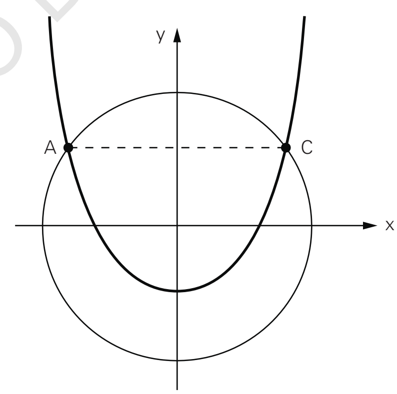


Fora de escala

A equação da reta s, tangente à circunferência no ponto P, pode ser dada por

a) $y = -x$
b) $y = -x + 8$
c) $y = -x + 2$
d) $y = -\dfrac{x}{2}$

15. Unesp – Os pontos A e C são interseções de duas cônicas dadas pelas equações $x^2 + y^2 = 7$ e $y = x^2 - 1$, como mostra a figura fora de escala. Sabendo que $\text{tg } 49° \cong \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$ e tomando o ponto $B(0, -\sqrt{7})$, determine a medida aproximada do ângulo $A\hat{B}C$, em graus.



16. Fuvest – No plano cartesiano, um círculo de centro P = (a, b) tangencia as retas de equações y = x e x = 0. Se P pertence à parábola de equação $y = x^2$ e a > 0, a ordenada b do ponto P é igual a

a) $2+2\sqrt{2}$
b) $3+2\sqrt{2}$
c) $4+2\sqrt{2}$
d) $5+2\sqrt{2}$
e) $6+2\sqrt{2}$

17. IME – Determine o produto dos valores máximo e mínimo de y que satisfazem às inequações dadas para algum valor de x.

$2x^2 - 12x + 10 \leq 5y \leq 10 - 2x$

a) −3,2
b) −1,6
c) 0
d) 1,6
e) 3,2

ESTUDO PARA O ENEM

18. Unifor (adaptado) C2-H8

Uma bola é jogada dentro de uma cesta cuja superfície é obtida girando a parábola $y = x^2$ em torno do eixo y. O centro da bola ocupa um ponto de altura y = 3. O raio da bola é:

a) $\sqrt{11}$
b) $\frac{\sqrt{11}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{11}}{3}$
d) $\frac{\sqrt{11}}{4}$
e) $\frac{\sqrt{11}}{5}$

19. Enem C5-H22

Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como segue:

I. é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;

II. é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1;

III. é o quadrado formado pelos vértices $(-2, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$ e $(-2, 2)$;

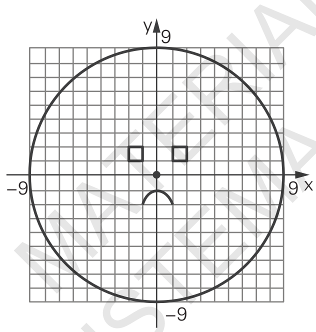
IV. é o quadrado formado pelos vértices $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 2)$;

V. é o ponto $(0, 0)$.

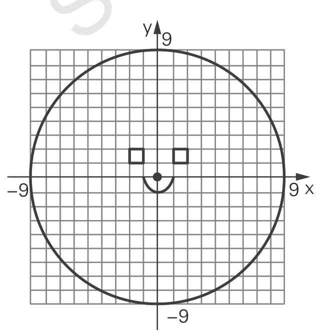
A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento cada um, obtendo uma figura.

Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?

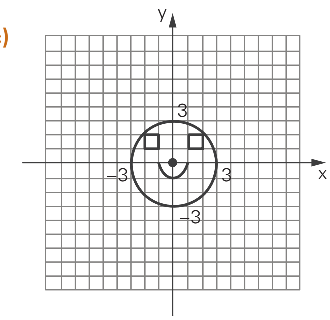
a)



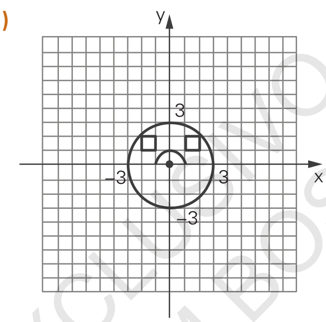
b)



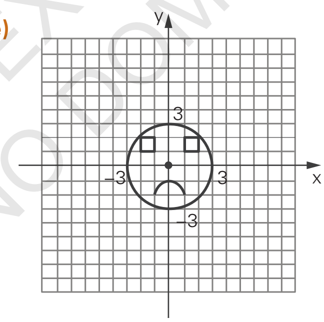
c)



d)

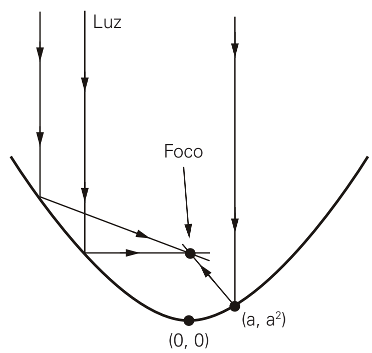


e)



20. UFPR (adaptado) C5-H21

Alguns telescópios usam espelhos parabólicos, pois essa forma geométrica reflete a luz que entra para um único ponto, chamado foco. O gráfico de $y = x^2$, por exemplo, tem a forma de uma parábola. A luz que vem verticalmente, de cima para baixo (paralelamente ao eixo y), encontra a parábola e é refletida segundo a lei de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Essa lei implica que os raios de luz verticais, encontrando a parábola no ponto (a, a^2), serão refletidos na direção da reta $4ay + (1 - 4a^2)x = a$.



Sendo assim, pode-se afirmar que os raios de luz verticais refletidos em (1, 1) e (2, 4) se encontrarão no ponto:

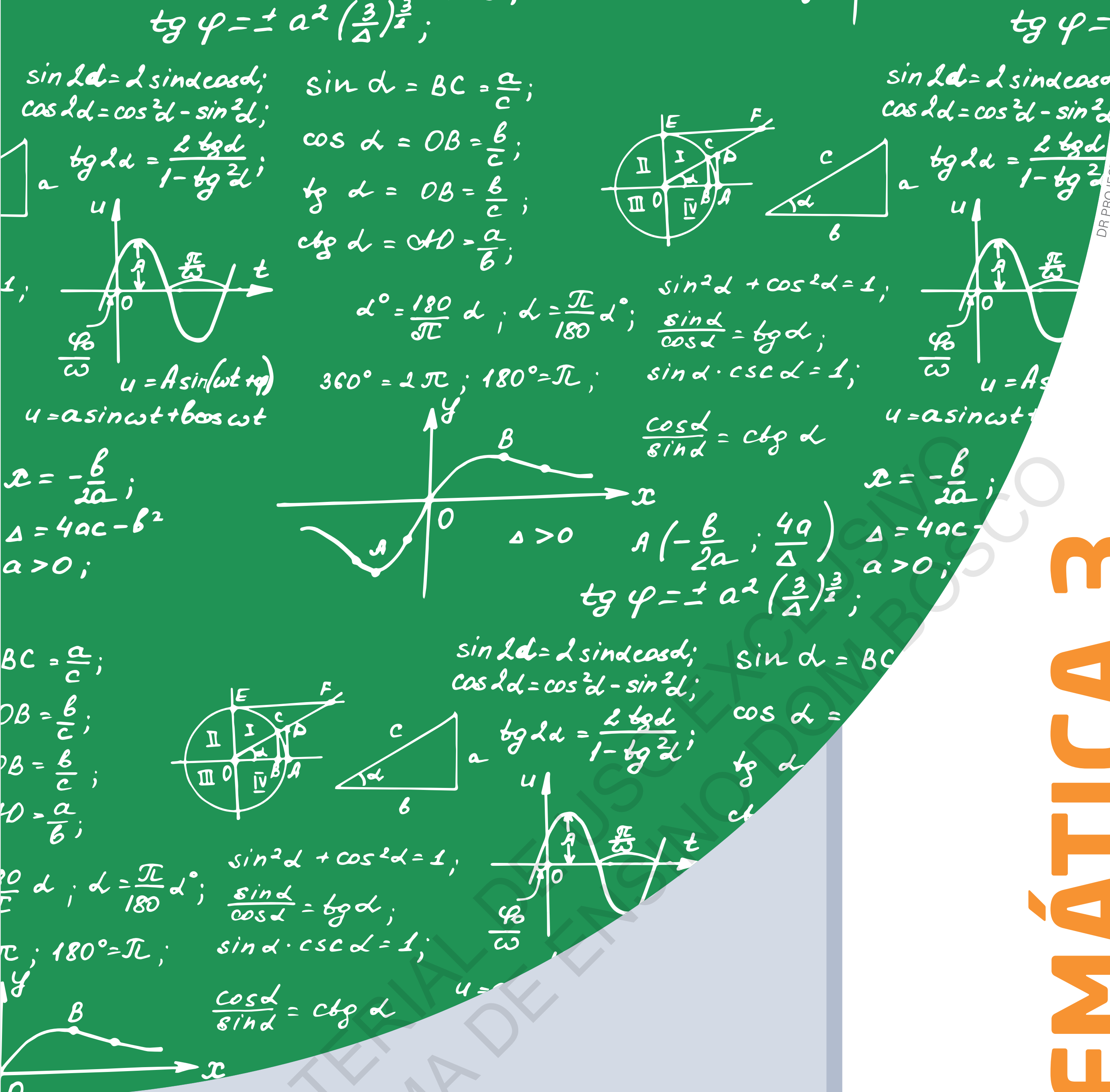
a) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

b) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

c) $(0, 1)$

d) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

e) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$



DR PROJECT/SHUTTERSTOCK

MATEMÁTICA 3

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

23 INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE I

- Probabilidades estatística e teórica

HABILIDADES

- Reconhecer um experimento aleatório para determinar o espaço amostral.
- Definir a probabilidade de um evento ocorrer.
- Aplicar conhecimentos de probabilidade de um evento acontecer.
- Usar conhecimentos de probabilidade para resolver situações-problema e elaborar argumentos.

ALEX ALEKSEEV/SHUTTERSTOCK

Jogos com dados, cartas e outros objetos são praticados pelo ser humano há milênios. Em muitos deles, a probabilidade se faz presente a todo momento.

Introdução

A prática e o gosto por jogos de tabuleiro são bastante antigos. Até hoje estão presentes nas mais variadas sociedades ao redor do planeta.

Há registros comprovando que os jogos de tabuleiro fazem parte da história humana desde a Antiguidade. Sabe-se que em 3500 a.C., na civilização egípcia, fragmentos de ossos eram utilizados em jogos. Cientistas também descobriram que, em meados de 1200 a.C., um pedaço de calcanhar era utilizado como dado. Além disso, na Roma Antiga, jogos envolvendo cartas e dados serviam como opção de lazer cotidiano.

PROBABILIDADE

O cotidiano é permeado de incertezas. Isso se reflete em diversos exemplos, como na tentativa de os pais adivinharem o sexo de um bebê durante a gestação, a previsão do tempo feita por meteorologistas, a ponderação sobre as probabilidades de um candidato vencer uma eleição...

SCOTTBEARD/ISTOCKPHOTO

A aleatoriedade também existe no lançamento de dados.

O desenvolvimento da teoria das probabilidades revelou uma importante ferramenta para calcular a possibilidade de um evento ocorrer em determinado experimento.

Vários matemáticos contribuíram para os avanços na área das probabilidades, com destaque para Girolamo Cardano (1501-1576), que publicou o *Livro dos jogos de azar*, primeiro manual organizado com algumas noções de probabilidade. Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) também ajudaram no progresso dos estudos dessa área do conhecimento, ao trocar cartas em que discutiam problemas ligados aos jogos e ao elaborarem conceitos como **expectativa**, **chance** e **média**. No século XVII, o suíço Jacques Bernoulli (1654-1705) ofereceu grande contribuição ao estudo das probabilidades ao publicar um artigo completo sobre o assunto em que detalhava permutações e combinações.

A teoria moderna das probabilidades constitui a base de um dos ramos mais aplicados nas diversas ciências: a Estatística. Além disso, os conhecimentos ligados à probabilidade são utilizados, por exemplo, em áreas como Biologia, Economia, Saúde e Meteorologia.

EXPERIMENTOS DETERMINÍSTICOS E ALEATÓRIOS

Experimentos determinísticos são aqueles cujos resultados podem ser previstos, isto é, podem ser determinados antes de sua realização. Por exemplo, é possível saber a temperatura em que a água entrará em ebulição se as condições do experimento forem conhecidas.

Alguns experimentos, contudo, não são previsíveis, ainda que sejam mantidas as mesmas condições. São os chamados **experimentos aleatórios** (termo do latim *alea* = sorte). Nesses casos, os resultados podem não ser os mesmos, embora as condições sejam idênticas. Isso acontece, por exemplo, no lançamento de um dado ou de uma moeda.

A teoria das probabilidades estuda a forma de se estabelecerem as possibilidades de um experimento aleatório ocorrer.

HKPNC/ISTOCKPHOTO

Não é possível prever o resultado no lançamento de uma moeda, o que o caracteriza como um **experimento aleatório.**

Matemática e Biologia

A Genética é, provavelmente, o ramo da Biologia em que mais se aplicam os conceitos matemáticos envolvidos na teoria das probabilidades. Isso acontece porque, em probabilidade, consideram-se os eventos denominados aleatórios. Um exemplo dessa espécie de ocorrência é o encontro entre dois tipos de gametas com determinados genes.

Vamos supor que um indivíduo heterozigoto para determinada característica (**Aa**) forme dois tipos de espermatozoides, **A** e **a**. Caso uma mulher também seja heterozigota, formará gametas femininos **A** e **a**. Assim, depende apenas do acaso o fato de ser o espermatozoide **A** ou **a** o responsável pela fecundação. Do mesmo modo, depende apenas do acaso o fato de o gameta feminino **A** ou **a** ser fecundado.

ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTO

Experimentos aleatórios são estudados com resultados equiprováveis (mesma chance de ocorrência) e em número determinado, isto é, finito. Nessas análises, há dois conceitos fundamentais:

- **Espaço amostral** – Conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Indica-se o espaço amostral por **U**.
- **Evento** – Qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

Exemplo

Vamos observar os resultados possíveis no lançamento de três moedas distintas (diferentes).

Sabemos que, ao lançar uma moeda, podemos obter **cara (k)** ou **coroa (c)**. Assim:

a) **Representação do espaço amostral.**
U = {(k, k, k), (k, k, c), (k, c, k), (k, c, c), (c, k, k,), (c, k, c), (c, c, k), (c, c, c)}
O conjunto **U** tem 8 trios ordenados. Portanto, n(U) = 8.

b) **Evento A: saírem faces iguais**.
A = {(c, c, c), (k, k, k)}
n(A) = 2

c) **Evento B: sair exatamente uma face coroa**.
B = {(c, k, k), (k, c, k), (k, k, c)}
n(B) = 3

d) **Evento C: sair ao menos uma face coroa**.
C = {(c, c, k), (c, k, c), (k, c, c), (c, k, k), (k, c, k), (k, k, c)}
n(C) = 6

Observação:
Os números de elementos do espaço amostral e dos eventos de um experimento aleatório podem ser calculados com o auxílio da **análise combinatória**.

TIPOS DE EVENTO

Considere como experimento aleatório o lançamento de um dado comum. Observe o número representado na face voltada para cima.

MICHAL4R/SHUTTERSTOCK

Espaço amostral:
U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Analisam-se os diversos tipos de evento definidos nesse experimento.

Evento elementar:
Qualquer subconjunto unitário de **U**.
Exemplo: **A** = ocorrência de um número múltiplo de 3.
A = {3, 6} $\rightarrow$ n(A) = 2

Evento certo:
Próprio espaço amostral **U**.
Exemplo: **B** = ocorrência de um número natural.
B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\rightarrow$ n(B) = n(U) = 6, pois U = B

Evento impossível:
Conjunto vazio (∅).
Exemplo: **C** = ocorrência de um número com 2 dígitos.
C = ∅ ou C = { } e n(C) = 0

Evento união:
Aproveitando a teoria dos conjuntos e sua simbologia, base para o estudo, temos:

- Evento **A**: ocorrência de um número par $\rightarrow$ $\rightarrow$ A = {2, 4, 6}.
- Evento **B**: ocorrência de números primos $\rightarrow$ $\rightarrow$ B = {2, 3, 5}.
- Evento **A** $\cup$ **B**: ocorrência de um número par ou primo $\rightarrow$ A $\cup$ B = {2, 3, 4, 5, 6}.

Evento interseção:
Interseção de dois eventos.

- Evento **A**: ocorrência de números pares $\rightarrow$ $\rightarrow$ A = {2, 4, 6}.
- Evento **B**: ocorrência de números primos $\rightarrow$ $\rightarrow$ B = {2, 3, 5}.
- Evento **A** $\cap$ **B**: ocorrência de um número par e primo $\rightarrow$ A $\cap$ B = {2}.

Eventos mutuamente exclusivos:
Dois eventos **A** e **B**, de um espaço amostral **U**, são considerados mutuamente exclusivos (ou excludentes) quando A $\cap$ B = ∅.

- Evento **A**: ocorrência de um número ímpar $\rightarrow$ $\rightarrow$ A = {1, 3, 5}.
- Evento **B**: ocorrência de um número múltiplo de 2 $\rightarrow$ B = {2, 4, 6}.
- **A** e **B** são eventos mutuamente exclusivos, pois A $\cap$ B = ∅.

Eventos complementares:
Considerando **U** o espaço amostral e **A** um evento qualquer, define-se o evento complementar $\bar{A}$ como igual ao conjunto diferença entre **U** e **A**. Assim, $\bar{A}$ = U – A.

- Evento **A**: ocorrência de um número ímpar $\rightarrow$ $\rightarrow$ A = {1, 3, 5}.
- Evento $\bar{A}$: ocorrência de um número não ímpar $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\bar{\mathbf{A}}$ = U – A = {2, 4, 6}.
- Note que $\bar{A}$ = U – A = {2, 4, 6}.

Observação:
No caso do exemplo de **eventos complementares**, podemos dizer que o evento é **a não ocorrência** de um número primo.

PROBABILIDADES ESTATÍSTICA E TEÓRICA

Vamos imaginar a seguinte situação: em uma turma de 2ª série do Ensino Médio, há 25 moças e 10 rapazes, e um brinde foi sorteado para um dos membros da turma. Precisamos adivinhar o gênero do contemplado. Intuitivamente, sabemos que é mais fácil uma moça ter sido sorteada. No entanto, não é possível afirmar com certeza o gênero do ganhador. A chance de uma moça ter sido contemplada pode ser traduzida por um número que expressa a chamada **probabilidade**.

A teoria das probabilidades é a maneira matemática de lidar com a incerteza. O cálculo da chance de um evento acontecer, muitas vezes, é feito experimentalmente. Essa probabilidade é chamada **experimental** ou **estatística**.

Por outro lado, no lançamento de dois dados, não é necessário realizarmos um experimento para calcular a probabilidade de obtermos dois números iguais nas faces voltadas para cima. O resultado pode ser alcançado por meio de análise teórica do espaço amostral e do evento. Nesse caso, temos a chamada **probabilidade teórica**.

PROBABILIDADE TEÓRICA DE UM EVENTO

Se, em um fenômeno aleatório, o número de elementos do espaço amostral for denotado por n(B) e o número de elementos do evento **A** for simbolizado por n(A), então a probabilidade de o evento **A** ocorrer é o número P(A), tal que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(B)}$$

Outra forma de definirmos a probabilidade de o evento A ocorrer é:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a A}}{\text{número de casos possíveis}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Em uma urna com 40 bolas (sendo 10 brancas, 10 pretas, 10 azuis e 10 amarelas), qual a probabilidade de sortearmos uma bola azul?

Resolução

O espaço amostral (U) terá 40 elementos. O evento "sair bola azul" tem 10 elementos. Assim:

$$P\ (A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a A}}{\text{número de casos possíveis}}$$

$$P\ (A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

2. Sistema Dom Bosco – Em um lançamento de dois dados, um vermelho e um preto, qual a probabilidade de os números obtidos serem iguais?

Resolução

Lançamento de dois dados diferentes:

U = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

n(U) = 36 (pares ordenados, pois os dados são diferentes).

A: obter as faces iguais voltadas para cima

A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

n(A) = 6

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

3. Sistema Dom Bosco – Entre as permutações possíveis dos números 4, 5, 6, uma é escolhida ao acaso. Considerando o número de três algarismos assim selecionado, determine a probabilidade de o número ser:

a) par.
b) ter a soma dos algarismos igual a 15.
c) ser número primo.

Observação:
O termo **permutar** tem como sinônimo "trocar de lugar". Assim, **permutar 4, 5, 6** significa "apresentar números diferentes com os 3 dígitos". Ou seja:
U = {456, 465, 546, 564, 645, 654} → n(U) = 6
São 6 permutações possíveis.

a) A: obter número par.

Resolução

A = {456, 546, 564, 654} → n(A) = 4

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b) B: obter a soma dos algarismos igual a 15.

Resolução

B = {456, 465, 546, 564, 645, 654} → n(B) = n(U) = 6

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{6}{6} = 1$$

Logo, o evento B é um evento **certo**.

c) C: obter número primo.

Resolução

C = Ø ou C = { }

$$P(C) = \frac{0}{6} \text{ ou } 0\%$$

Neste caso, temos um evento **impossível**.

Observações importantes

I. De acordo com a teoria, no lançamento de um dado "não viciado", a probabilidade de se obter o número 2 é $\frac{1}{6}$. Isso não significa que, sempre que forem feitos seis lançamentos de um dado, certamente ocorrerá, em um deles ou apenas em um, o resultado 2. Na prática, o que se verifica é que, em um grande número de lançamentos, a razão entre o número de vezes em que ocorre o resultado 2 e o número de lançamentos efetuados se aproxima de $\frac{1}{6}$.

II. No lançamento de dois dados idênticos, o espaço amostral (U) terá 21 pares ordenados, pois (1, 2) = (2, 1), ..., (3, 4) = (4, 3), ..., o que diminui a quantidade de possibilidades iniciais quando os dados são iguais (o que resulta 36 pares).

ROTEIRO DE AULA

INTRODUÇÃO A PROBABILIDAE I

Espaço amostral

Conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Indica-se o espaço amostral por U.

Evento

Qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(B)}$

Experimentação

Experimento determinístico

Experimento aleatório

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Enem C7-H28

Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a) $\frac{1}{100}$

b) $\frac{19}{100}$

c) $\frac{20}{100}$

d) $\frac{21}{100}$

e) $\frac{80}{100}$

A chance de ser um número de 1 a 20 nesse caso é $\frac{20}{100}$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

2. Unicamp – Um dado não tendencioso de seis faces será lançado duas vezes. A probabilidade de que o maior valor obtido nos lançamentos seja menor do que 3 é igual a

a) $\frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{5}$.

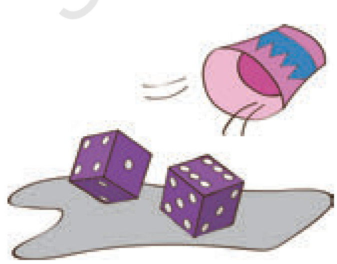
c) $\frac{1}{7}$.

d) $\frac{1}{9}$.

Ao se jogar um dado duas vezes, haverá 36 possíveis respostas. Delas apenas 4 podem ter como maior valor um número menor que 3, sendo (1 e 1), (1 e 2), (2 e 1) e (2 e 2).

Assim, a probabilidade é igual a $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

3. UPE (adaptado)



Se dois dados idênticos e não viciados são lançados, qual a probabilidade aproximada de a soma dos pontos obtidos ser um múltiplo de 2 ou um múltiplo de 3?

$n(U) = 6 \cdot 6 = 36$ (resultados possíveis)

Os resultados cujas somas não são múltiplos nem de 2 nem de 3 são: (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5).

Logo, entre os 36 eventos possíveis, 12 não satisfazem à condição. Assim, o número de elementos do evento n(A) é:

$n(A) = 30 - 12 = 18$

A probabilidade esperada é:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{18}{36} = \frac{2}{3} \cong 66{,}7\%$

4. Enem – O quadro apresenta cinco cidades de um estado, com seus respectivos números de habitantes e quantidade de pessoas infectadas com o vírus da gripe. Sabe-se que o governo desse estado destinará recursos financeiros a cada cidade, em valores proporcionais à probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso na cidade, estar infectada.

Cidade	I	II	III	IV	V
Habitantes	180 000	100 000	110 000	165 000	175 000
Infectados	7 800	7 500	9 000	6 500	11 000

Qual dessas cidades receberá maior valor de recursos financeiros?

a) I

b) II

c) III

d) IV

e) V

Calculando todas as probabilidades, obtemos:

$P(C_1) = \frac{7\,800}{180\,000} \cong 0{,}0433 \cong 4{,}33\%$

$P(C_2) = \frac{7\,500}{100\,000} = 0{,}075 = 7{,}5\%$

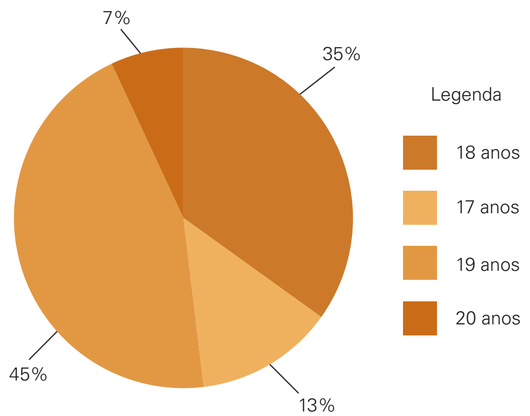
$P(C_3) = \frac{9\,000}{110\,000} \cong 0{,}08181 \cong 8{,}2\%$

$P(C_4) = \frac{6\,500}{165\,000} \cong 0{,}03939 \cong 3{,}9\%$

$P(C_5) = \frac{11\,000}{175\,000} \cong 0{,}06285 \cong 6{,}3\%$

Assim, a cidade que vai receber a maior verba é a III (maior probabilidade).

5. PUC-RS – O gráfico abaixo apresenta a distribuição das idades dos alunos de uma turma. Escolhido um aluno desta turma ao acaso, a probabilidade de que ele tenha idade superior a 18 anos é igual a



a) 0,87
b) 0,52
c) 0,48
d) 0,45
e) 0,13

Compreendendo que (p) é a probabilidade solicitada, do enunciado e do gráfico, temos:

$p = \frac{45\% + 7\%}{100\%}$

$p = \frac{52\%}{100\%}$

p = 0,52

6. Unesp – Em um condomínio residencial, há 120 casas e 230 terrenos sem edificações. Em um determinado mês, entre as casas, 20% dos proprietários associados a cada casa estão com as taxas de condomínio atrasadas, enquanto, entre os proprietários associados a cada terreno, esse percentual é de 10%. De posse de todos os boletos individuais de cobrança das taxas em atraso do mês, o administrador do empreendimento escolhe um boleto ao acaso. Qual a probabilidade de que o boleto escolhido seja de um proprietário de terreno sem edificação?

P = probabilidade solicitada
20% de 120 = 24
10% de 230 = 23

Assim, $P = \frac{23}{23+24} = \frac{23}{47}$.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

7. UFRGS – Considere os números naturais de 1 até 100. Escolhido ao acaso um desses números, a probabilidade de de ele ser um quadrado perfeito é

a) $\frac{1}{10}$.
b) $\frac{4}{25}$.
c) $\frac{3}{10}$.
d) $\frac{1}{2}$.
e) $\frac{9}{10}$.

8. UFRGS – As figuras abaixo representam dez cartões, distintos apenas pelos números neles escritos.

$\frac{99}{100}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$2 \cos 60°$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	π
log 13	$-\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\lvert\cos 180°\rvert$

Sorteando aleatoriamente um cartão, a probabilidade de ele conter um número maior do que 1 é

a) $\frac{1}{5}$.
b) $\frac{3}{10}$.
c) $\frac{2}{5}$.
d) $\frac{1}{2}$.
e) $\frac{3}{5}$.

9. UFG-GO – Para discutir com seus alunos a ideia de sinônimo, um professor adota a seguinte estratégia de ensino: inicialmente, recita parte de um poema, transcrita a seguir.

"...Todo dia é ano novo
no regato cristalino
pequeno servo do mar
nas ondas lavando as praias
na clara luz do luar..."

Disponível em: <http://pensador.uol.com.br/frase/MTUyODAy>. Acesso em: 10 set. 2013.

Posteriormente, escreve no quadro um conjunto com cinco palavras A = {cervo, cativo, veado, prisioneiro, corço}. Por fim, solicita a um aluno que escolha aleatoriamente uma palavra do conjunto A que tenha o mesmo significado da palavra em negrito apresentada no poema.

Diante do exposto, a probabilidade de que o aluno escolha uma palavra que não mude o significado da palavra *servo* é:

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{4}{5}$

e) 1

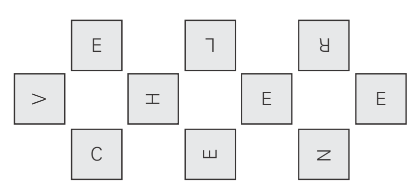
10. Unioeste (adaptado) – Escolhe-se, ao acaso, um número inteiro entre 101 e 150, inclusive. Qual a probabilidade de o número escolhido ser um quadrado perfeito ou divisível por 4?

11. Acafe – Em um determinado jogo de futebol do Campeonato Brasileiro, o resultado final da partida foi 32.

A probabilidade de que o time perdedor tenha marcado os dois primeiros gols é:

a) 10%
b) 30%
c) 50%
d) 90%

12. Uerj – Dez cartões com as letras da palavra "envelhecer" foram colocados sobre uma mesa com as letras viradas para cima, conforme indicado abaixo.



Em seguida, fizeram-se os seguintes procedimentos com os cartões:

1º) foram virados para baixo, ocultando-se as letras;

2º) foram embaralhados;

3º) foram alinhados ao acaso;

4º) foram desvirados, formando um anagrama.

Observe um exemplo de anagrama:

V	E	E	E	R	C	N	H	L	E

A probabilidade de o anagrama formado conter as quatro vogais juntas (EEEE) equivale a:

a) $\frac{1}{20}$

b) $\frac{1}{30}$

c) $\frac{1}{210}$

d) $\frac{1}{720}$

13. Efomm – Um garoto dispõe de um único exemplar de cada poliedro de Platão existente. Para brincar, ele numerou cada vértice, face e aresta de cada poliedro sem repetir nenhum número. Em seguida, anotou esses números no próprio poliedro. Se ele sortear um dos números usados, aleatoriamente, qual será a probabilidade de o número sorteado representar um vértice?

a) $\frac{5}{9}$

b) $\frac{5}{14}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{5}{19}$

e) $\frac{1}{10}$

14. UFPR (adaptado) – Um dado comum, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado duas vezes, fornecendo dois números **a** e **c**, que podem ser iguais ou diferentes. Qual é a probabilidade de a equação $ax^2 + 4x + c = 0$ ter pelo menos uma raiz real?

15. Unicamp – Um caixa eletrônico de certo banco dispõe apenas de cédulas de 20 e 50 reais. No caso de um saque de 400 reais, a probabilidade do número de cédulas entregues ser ímpar é igual a

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{5}$

16. Fuvest-SP (adaptado) – O gamão é um jogo de tabuleiro muito antigo, para dois oponentes, que combina a sorte, em lances de dados, com estratégia, no movimento das peças. Pelas regras adotadas, atualmente, no Brasil, o número total de casas que as peças de um jogador podem avançar, numa dada jogada, é determinado pelo resultado do lançamento de dois dados. Esse número é igual à soma dos valores obtidos nos dois dados, se esses valores forem diferentes entre si; e é igual ao dobro da soma, se os valores obtidos nos dois dados forem iguais. Supondo que os dados não sejam viciados, qual a probabilidade de um jogador poder fazer suas peças andarem pelo menos oito casas em uma jogada?

17. Fuvest-SP – Em uma urna, há bolas amarelas, brancas e vermelhas. Sabe-se que:

I. A probabilidade de retirar uma bola vermelha dessa urna é o dobro da probabilidade de retirar uma bola amarela.

II. Se forem retiradas 4 bolas amarelas dessa urna, a probabilidade de retirar uma bola vermelha passa a ser $\frac{1}{2}$.

III. Se forem retiradas 12 bolas vermelhas dessa urna, a probabilidade de retirar uma bola branca passa a ser $\frac{1}{2}$.

A quantidade de bolas brancas na urna é

a) 8.
b) 10.
c) 12.
d) 14.
e) 16.

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C7-H28

José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.
b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.
c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.
d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.
e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

19. Enem C7-H28

Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

1. Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.

2. Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

3. Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.

4. Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR, I. M.; LOTUFO, P. A. *Epidemiologia*: abordagem prática. São Paulo: Sarvier, 2011. (Adaptado)

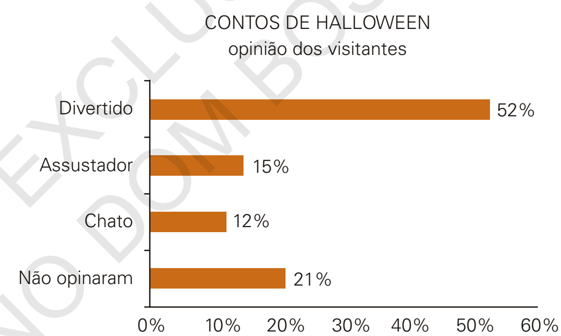
Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de

a) 47,5%
b) 85,0%
c) 86,3%
d) 94,4%
e) 95,0%

20. Enem C7-H30

Em um *blog* de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados "Contos de Halloween". Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em "Divertido", "Assustador" ou "Chato". Ao final de uma semana, o *blog* registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do *blog* irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem "Contos de Halloween".

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto "Contos de Halloween" é "Chato" é mais aproximada por

a) 0,09
b) 0,12
c) 0,14
d) 0,15
e) 0,18

24 INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE II

- Propriedades das probabilidades

HABILIDADES

- Reconhecer um experimento aleatório para determinar o espaço amostral.
- Definir a probabilidade de um evento ocorrer.
- Aplicar conhecimentos de probabilidade de um evento acontecer.
- Usar conhecimentos de probabilidade para resolver situações-problema e elaborar argumentos.

TZOGIA KAPPATOU/DREAMSTIME.COM

Microplaquetas de pôquer, jogo em que os conhecimentos de probabilidade são fundamentais para bons resultados.

A origem do pôquer é incerta. Há relatos de sua existência na China do século X, durante a Dinastia Sung. Outras fontes indicam que era praticado no antigo Império Persa, com o nome de "As Nas". Existem ainda informações de que o pôquer chegou aos Estados Unidos por meio dos colonizadores franceses, no século XVIII.

Seus praticantes reconhecem que esse jogo exige bastante da mente. E o cálculo probabilístico se faz presente a cada nova rodada.

Há algum tempo, o pôquer deixou de ser visto como um simples jogo de cartas. Em 29 de abril de 2010, a Associação Internacional dos Esportes da Mente (IMSA) reconheceu o pôquer como "um esporte mental", tal como o xadrez e a dama.

PROPRIEDADES DAS PROBABILIDADES

Observe algumas propriedades da teoria de probabilidades.

- **Propriedade 1:** a probabilidade do evento impossível é 0.

$$P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(U)} \rightarrow P(\varnothing)=\frac{0}{n(U)} \rightarrow P(\varnothing)=0$$

- **Propriedade 2:** a probabilidade do evento certo é 1.

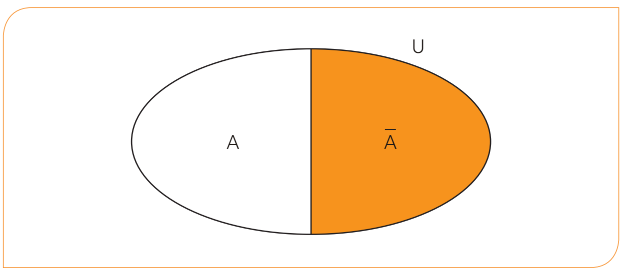
$$P(U)=\frac{n(U)}{n(U)} \rightarrow P(U)=1$$

- **Propriedade 3:** sendo A um evento de espaço amostral U, a probabilidade de A é um número racional pertencente ao intervalo entre 0 e 1, números que ocupam as extremidades. Isto é: $0 \le P(A) \le 1$.

$$0 \le n(A) \le n(U) \rightarrow \frac{0}{n(U)} \le \frac{n(A)}{n(U)} \le \frac{n(U)}{n(U)} \rightarrow 0 \le P(A) \le 1$$

- **Propriedade 4:** sendo A um evento e $\bar{A}$ seu complementar, então:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$



$$n(U) = n(A) + n(\bar{A}) \rightarrow \frac{n(U)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(\bar{A})}{n(U)}$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Observação:
É comum expressar a probabilidade de um evento por meio de porcentagem. Assim, se P(A) = 0,82, por exemplo, é possível dizer que P(A) = 82%.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Fuvest – Escolhido ao acaso um elemento do conjunto dos divisores positivos de 60, a probabilidade de que ele seja primo é:

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{5}$ **e)** $\frac{1}{6}$

Resolução

A decomposição em fatores primos de 60 é (2 · 2 · · 3 · 5) = 22 · 31 · 51.

O número de divisores é calculado pelo produto (2 + 1) · (1 + 1) · (1 + 1) = 12.

Os únicos divisores primos são 2, 3 e 5, em um total de três elementos entre os 12 divisores.

Logo, $P(\text{Div. Primo}) = \frac{3}{12} = \frac{3}{4}$.

2. F. Maringá-PR – Um número é escolhido ao acaso entre 20 inteiros, de 1 a 20. A probabilidade de o número escolhido ser primo ou quadrado perfeito é:

a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{2}{25}$ **c)** $\frac{4}{25}$ **d)** $\frac{2}{5}$ **e)** $\frac{3}{5}$

Resolução

Não há interseção entre esses eventos, pois o número ou é primo ou é quadrado perfeito.

Logo, P(Primo ∪ Q. Perfeito) = P(Primo) + P(Q. Perfeito).

Há, desse modo:

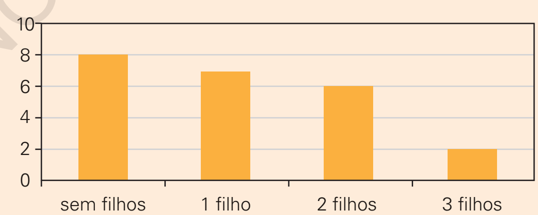
Números primos {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} → → n(Primos) = 8

Números quadrados perfeitos = {1, 4, 9, 16} → → n(Q. Perfeitos) = 4

$$P(\text{Primo} \cup \text{Q. Perfeito}) = \frac{8+4}{20} = \frac{12}{24} = \frac{3}{5}$$

3. Enem C7-H28

As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico. Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:



a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{7}{15}$ **d)** $\frac{7}{23}$ **e)** $\frac{7}{25}$

Resolução

De acordo com o gráfico, há:

- 8 mulheres sem filhos;
- 7 mulheres com 1 filho;
- 6 mulheres com 2 filhos;
- 2 mulheres com 3 filhos.

O total de crianças é: 8(0) + 7(1) + 6(2) + 2(3) = = 7 + 12 + 6 = 25.

O número de mulheres com filho único é 7.

Logo, P(Filho Único) = $\frac{7}{25}$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

ROTEIRO DE AULA

INTRODUÇÃO A PROBABILIDADE II

Propriedade 1

A probabilidade do evento impossível é zero.

$P(\varnothing) = 0$

Propriedade 2

A probabilidade do evento certo é 1.

$P(U) = 1$

Propriedade 3

A probabilidade de um evento A em um espaço amostral U é um número entre 0 e 1.

$0 \leq P(A) \leq 1$

Propriedade 4

A probabilidade de um evento mais o seu complementar é igual a 1.

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Fac. Albert Einstein-SP – Em uma urna vazia foram colocadas fichas iguais, em cada uma das quais foi escrito apenas um dos anagramas da palavra HOSPITAL. A probabilidade de que, ao sortear-se uma única ficha dessa urna, no anagrama nela marcado as letras inicial e final sejam ambas consoantes é

a) $\frac{5}{14}$

b) $\frac{3}{7}$

c) $\frac{4}{7}$

d) $\frac{9}{14}$

O total de anagramas possíveis da palavra HOSPITAL é idêntico à permutação de 8, ou seja, 8!.

O número de anagramas que começam e terminam com consoantes é:

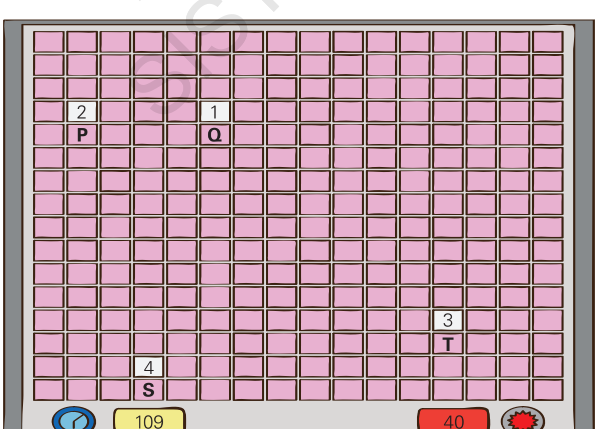
$5 \cdot 4 \cdot P6 = 5 \cdot 4 \cdot 6!$

Ao se sortear uma única ficha da urna, a probabilidade de as letras inicial e final consistirem em consoantes no anagrama marcado nela é:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 6!}{8!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 6!}{8 \cdot 7 \cdot 6!} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

2. Enem C7-H28

A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16 x 16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contêm minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.



Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras P, Q, R, S e T um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina.

O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra

a) P.

b) Q.

c) R.

d) S.

e) T.

De acordo com o enunciado:

$P \to P(x) = \frac{2}{8} = 0{,}25$

$Q \to P(x) = \frac{1}{8} = 0{,}125$

$R \to P(x) = \left(\frac{40}{16^2 - 4}\right) = \frac{40}{252} = 0{,}1587$

$S \to P(x) = \frac{4}{8} = 0{,}50$

$T \to P(x) = \frac{3}{8} = 0{,}375$

Portanto, o jogador terá de abrir o quadrado Q.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

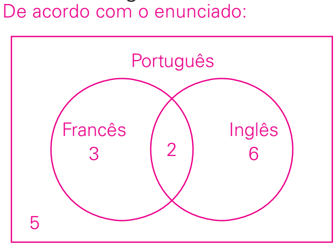
Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

3. Unifesp – Em uma classe de 16 alunos, todos são fluentes em português. Com relação à fluência em línguas estrangeiras, 2 são fluentes em francês e inglês, 6 são fluentes apenas em inglês e 3 são fluentes apenas em francês.

a) Dessa classe, quantos grupos compostos por 2 alunos podem ser formados sem alunos fluentes em francês?

b) Sorteando ao acaso 2 alunos dessa classe, qual é a probabilidade de que ao menos um deles seja fluente em inglês?

De acordo com o enunciado:



a) Há 16 alunos na classe. Deles, 11 não falam francês. Logo, devem-se combinar esses 11 alunos de 2 em 2.

$C_{11,2} = \frac{11!}{2! \cdot 9!} = 55$ grupos

b) Há 8 alunos fluentes em inglês que irão se combinar de 2 em 2. E há 16 alunos na classe que podem se combinar de 2 em 2. Assim:

$$P(\text{inglês}) = 1 - \frac{C_{8,2}}{C_{16,2}} = 1 - \frac{28}{120} = \frac{92}{120} = \frac{23}{30}$$

4. FGV – Uma fração, definida como a razão entre dois inteiros, chama-se imprópria quando o numerador é maior ou igual ao denominador e chama-se decimal quando o denominador é uma potência de dez.

Dois dados convencionais, de seis faces equiprováveis, possuem cores diferentes: um deles é branco, e o outro, preto. Em um lançamento aleatório desses dois dados, o número obtido no dado branco será o numerador de uma fração, e o obtido no dado preto será o denominador.

A probabilidade de que a fração formada seja imprópria e equivalente a uma fração decimal é igual a

a) $\frac{17}{36}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{19}{36}$

d) $\frac{5}{9}$

e) $\frac{7}{12}$

É subentendido que existem $6 \cdot 6 = 36$ resultados possíveis. Entre esses resultados, não são adequados: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3) (4, 5), (4, 6), (5, 3) e (5, 6).

Portanto, a resposta é $1 - \frac{17}{36} = \frac{19}{36}$.

5. UPF-RS – Um pescador pescou 10 peixes, dos quais 3 tinham um tamanho inferior ao permitido pela lei. Esse pescador foi abordado por um fiscal que, dentre os 10 peixes, resolveu inspecionar apenas 2, escolhendo-os aleatoriamente. A probabilidade de o pescador não ser flagrado infringindo a lei é de:

a) $\frac{7}{10}$

b) $\frac{7}{15}$

c) $\frac{3}{100}$

d) $\frac{13}{45}$

e) $\frac{9}{100}$

A probabilidade solicitada é obtida por:

$$\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{7!}{2!\cdot 5!}}{\frac{10!}{2!\cdot 8!}} = \frac{7}{15}.$$

6. PUC-Rio – Temos um baralho com 10 cartas, numeradas de 1 a 10. Depois de embaralhar, viramos três cartas lado a lado sobre a mesa e somamos os três números que aparecem.

a) Qual a probabilidade de a soma total ser 6?

b) Qual a probabilidade de a soma total ser 9?

a) Há somente o subconjunto {1, 2, 3} de três elementos, de modo que a soma dos elementos é 6.

Sendo assim, a probabilidade solicitada é obtida por:

$$P = \frac{1}{C_{10,3}} = \frac{1}{\frac{10!}{3!\cdot 7!}} = \frac{1}{120}$$

Logo, $P = \frac{1}{120}$

b) Há três subconjuntos do baralho, de maneira que a soma das cartas é 9:

{1, 2, 6}, {1, 3, 5} e {2, 3, 4}

Sendo assim, a probabilidade solicitada é obtida por:

$$P = \frac{3}{C_{10,3}} = \frac{3}{\frac{10!}{3!\cdot 7!}} = \frac{3}{120} = \frac{1}{40}$$

Logo, $P = \frac{1}{40}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. FGV – Dois dados convencionais e honestos são lançados simultaneamente. A probabilidade de que a soma dos números das faces seja maior que 4, ou igual a 3, é

a) $\frac{35}{36}$

b) $\frac{17}{18}$

c) $\frac{11}{12}$

d) $\frac{8}{9}$

e) $\frac{31}{36}$

8. Enem C7-H28

O número de frutos de uma determinada espécie de planta se distribui de acordo com as probabilidades apresentadas no quadro.

Número de frutos	Probabilidade
0	0,65
1	0,15
2	0,13
3	0,03
4	0,03
5 ou mais	0,01

A probabilidade de que, em tal planta, existam, pelo menos, dois frutos é igual a

a) 3%

b) 7%

c) 13%

d) 16%

e) 20%

9. UEMG – Em uma empresa, foi feita uma pré-seleção para sorteio de uma viagem. Esta pré-seleção se iniciou com a distribuição, entre os funcionários, de fichas numeradas de 1 a 23. Em seguida, foram selecionados os funcionários com as fichas numeradas, com as seguintes regras:

- Fichas com um algarismo: o algarismo tem que ser primo;
- Fichas com dois algarismos: a soma dos algarismos deverá ser um número primo.

Após essa pré-seleção, Glorinha foi classificada para o sorteio.

A probabilidade de Glorinha ganhar essa viagem no sorteio é de, aproximadamente,

a) 7%

b) 8%

c) 9%

d) 10%

10. Unicamp – Uma loteria sorteia três números distintos entre doze números possíveis.

a) Para uma aposta em três números, qual é a probabilidade de acerto?

b) Se a aposta em três números custa R$ 2,00, quanto deveria custar uma aposta em cinco números?

11. FMP – Um grupo é formado por três homens e duas mulheres. Foram escolhidas, ao acaso, três pessoas desse grupo. Qual é a probabilidade de as duas mulheres do grupo estarem entre as três pessoas escolhidas?

a) $\frac{3}{10}$

b) $\frac{1}{10}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{1}{3}$

12. Efomm (adaptado) – Seis alunos da Efomm – três paranaenses, dois cariocas e um alagoano – são colocados em uma fila aleatoriamente. Qual é a probabilidade, então, de que nenhum conterrâneo fique ao lado do outro?

13. Udesc – Em uma associação serão eleitos um presidente, um tesoureiro e dois revisores. Cada membro vota em um candidato para presidente, um para tesoureiro e um para revisor. Supondo que haja 4 candidatos para presidente, 3 para tesoureiro e 6 para revisor, então a probabilidade de todos os candidatos de um eleitor qualquer, que não anulou nem votou em branco, serem eleitos é de:

a) $\frac{1}{36}$

b) $\frac{1}{360}$

c) $\frac{1}{180}$

d) $\frac{1}{90}$

e) $\frac{1}{72}$

14. UPE – Algumas diagonais do decágono regular passam pelo seu centro e outras não. Sendo assim, escolhendo-se ao acaso uma diagonal desse polígono, qual é a probabilidade de ela não passar pelo centro do decágono?

a) $\frac{6}{7}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{1}{7}$

15. ESPM – Em uma urna são depositadas x bolas pretas e 20 bolas brancas. Em uma segunda urna são colocadas 50 bolas a mais que na primeira, das quais 3x são pretas. Retira-se, ao acaso, uma única bola de cada urna. Se a probabilidade P da bola retirada ser preta for a mesma para cada urna, o valor de P é:

a) 20%

b) 25%

c) 10%

d) 15%

e) 30%

16. FGV

Sob o olhar do juiz, o confronto entre advogados e promotores para convencer sete jurados, cuja decisão traçará o destino dos réus, é a imagem mais conhecida da Justiça. Retratados em filmes e obras literárias, os tribunais do júri são o momento mais aguardado e costumam selar histórias de dor e sofrimento. No Brasil, o júri popular é previsto no Código de Processo Penal para julgar crimes contra a vida. [...]

Podem alistar-se para participar de julgamentos os cidadãos maiores de 18 anos de "notória idoneidade", ou seja, sem antecedentes criminais [...] No dia do julgamento, devem comparecer ao tribunal 25 jurados, assim como as testemunhas convocadas e o réu [...]. Se ao menos 15 jurados convocados comparecerem, são instalados os trabalhos.

Disponível em: <http://www.terra.com.br/noticias/infograficos/juri-popular/>. (Adaptado)

São sorteados sete jurados para compor o chamado Conselho de Sentença. O advogado de defesa e o Ministério Público podem recusar os jurados sorteados, até três cada parte, sem motivar a recusa.

Considere o cenário apresentado e responda:

a) Para a condução do sorteio, utilizam-se pequenas esferas sólidas de raio 1 cm. Se 25 esferas forem armazenadas em uma urna em forma de cubo, qual deve ser o valor da aresta desse cubo, de forma que a soma do volume das esferas corresponda a 10% do volume da urna? Utilize a aproximação $\pi = 3$.

b) Considere que, após os vetos do advogado de defesa e do Ministério Público, tenham restado apenas 9 indivíduos aptos a compor o Conselho de Sentença. Qual é o número de possíveis composições (de 7 jurados cada) para o conselho?

c) Suponha que existam 4 mulheres e 5 homens no grupo de indivíduos aptos a compor o Conselho de Sentença. Nessa situação, qual é a probabilidade de que as quatro mulheres participem, juntas, do conselho?

17. Insper-SP – Quatro moedas de 25 centavos e quatro de 50 centavos são misturadas ao acaso e colocadas em uma fila. A probabilidade de que a primeira e a última moeda dessa fila sejam de 50 centavos é igual a

a) $\frac{2}{7}$

b) $\frac{7}{25}$

c) $\frac{3}{14}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{9}{5}$

ESTUDO PARA O ENEM

18. Enem C7-H30

Uma fábrica possui duas máquinas que produzem o mesmo tipo de peça. Diariamente a máquina M produz 2 000 peças e a máquina N produz 3 000 peças. Segundo o controle de qualidade da fábrica, sabe-se que 60 peças, das 2 000 produzidas pela máquina M, apresentam algum tipo de defeito, enquanto que 120 peças, das 3 000 produzidas pela máquina N, também apresentam defeitos. Um trabalhador da fábrica escolhe ao acaso uma peça, e esta é defeituosa.

Nessas condições, qual a probabilidade de que a peça defeituosa escolhida tenha sido produzida pela máquina M?

a) $\frac{3}{100}$

b) $\frac{1}{25}$

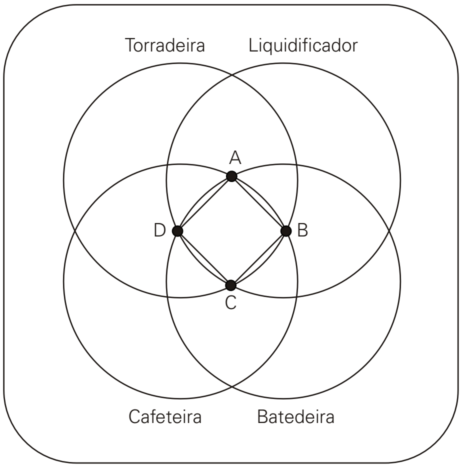
c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{3}{7}$

e) $\frac{2}{3}$

19. Enem C7-H30

Ao realizar uma compra em uma loja de departamentos, o cliente tem o direito de participar de um jogo de dardo, no qual, de acordo com a região do alvo acertada, ele pode ganhar um ou mais prêmios. Caso o cliente acerte fora de todos os quatro círculos, ele terá o direito de repetir a jogada, até que acerte uma região que dê o direito de ganhar pelo menos um prêmio. O alvo é o apresentado na figura:

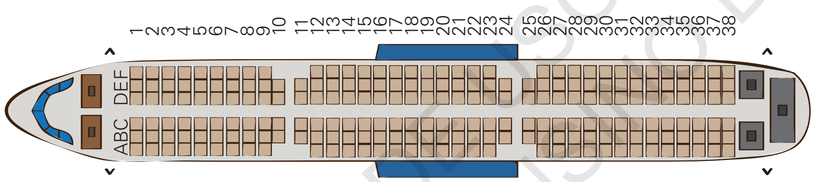


Ao acertar uma das regiões do alvo, ele terá direito ao(s) prêmio(s) indicado(s) nesta região. Há ainda o prêmio extra, caso o cliente acerte o dardo no quadrado *ABCD*. João Maurício fez uma compra nessa loja e teve o direito de jogar o dardo. A quantidade de prêmios que João Maurício tem a menor probabilidade de ganhar, sabendo que ele jogou o dardo aleatoriamente, é exatamente:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

20. Enem C7-H29

Uma empresa aérea lança uma promoção de final de semana para um voo comercial. Por esse motivo, o cliente não pode fazer reservas e as poltronas serão sorteadas aleatoriamente. A figura mostra a posição dos assentos no avião:



Avião com 38 fileiras de poltronas.

Por ter pavor de sentar entre duas pessoas, um passageiro decide que só viajará se a chance de pegar uma dessas poltronas for inferior a 30%.

Avaliando a figura, o passageiro desiste da viagem, porque a chance de ele ser sorteado com uma poltrona entre duas pessoas é mais aproximada de

a) 31% **b)** 33% **c)** 35% **d)** 68% **e)** 69%

25

PROBABILIDADE

- Probabilidade do evento união
- Probabilidade de um espaço amostral não equiprovável

HABILIDADES

- Reconhecer diferentes tipos de evento para determinar as respectivas probabilidades de ocorrência.
- Aplicar os conhecimentos de probabilidade para resolver situações-problema e elaborar argumentos.

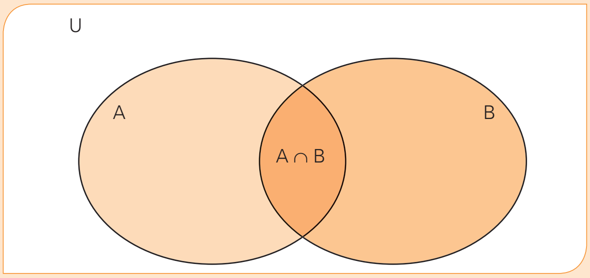
Loterias são jogos de azar presentes em todo o mundo. A aposta é feita com o preenchimento de alguns números contidos em um bilhete. Se todos os números escolhidos (ou certa quantidade deles) forem sorteados, é possível ganhar prêmios que vão de quantias baixas até valores milionários, ou mesmo bilionários.

Por exemplo, o pagamento da maior cifra em uma loteria na história ocorreu em janeiro de 2016, nos EUA. A prêmio da loteria *America Powerball* foi no valor de 1,5 bilhão de dólares!

Acontece que não existem segredos por trás das loterias. Seu funcionamento é bastante simples, e o fascínio que elas exercem nas pessoas é imenso. No entanto, há uma infinidade de combinações possíveis. Por esse motivo, a probabilidade de acerto é extremamente baixa – o que acrescenta mais emoção e expectativa aos sorteios.

PROBABILIDADE DO EVENTO UNIÃO

Dados dois eventos **A** e **B** de um espaço amostral **U**, o evento união $A \cup B$ é a probabilidade de acontecer, pelo menos, um dos eventos **A** ou **B**.



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Ao dividirmos ambos os membros da igualdade por n(∪), temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)}$$

Pela definição de probabilidade: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Podemos dizer, então, que a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B é dada pela soma das probabilidades de acontecer A ou B menos a probabilidade de os dois eventos (A e B) ocorrerem simultaneamente.

Caso particular

Vamos considerar que os eventos A e B sejam mutuamente exclusivos. Isto é:

$$A \cap B = \emptyset,\ P(A \cap B) = 0$$

Nesse caso, a fórmula anterior se reduz a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

PROBABILIDADE DE UM ESPAÇO AMOSTRAL NÃO EQUIPROVÁVEL

No espaço amostral equiprovável, todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrência. Por isso, em problemas envolvendo dados e moedas, por exemplo, precisamos **sempre** tomar o cuidado de especificar que os dados e as moedas são "honestos" ou "não viciados".

Moedas ou dados "viciados" passam por um processo de manipulação em que uma de suas faces fica mais pesada, de modo a gerar maior ocorrência de um resultado.

No entanto, como estudar as probabilidades com moedas ou dados "viciados"?

Nesses casos, a seguinte fórmula **não é válida**:

$$P(E) = \frac{\text{número de resultados favoráveis de E}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

Isso acontece porque, em um contexto com moedas ou dados viciados, não importa apenas a quantidade de resultados favoráveis, já que eles não têm necessariamente a mesma chance de ocorrência.

Vamos considerar um experimento com espaço amostral $U = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Chamando de $P(a_1)$, $P(a_2)$, ..., $P(a_n)$ as probabilidades de ocorrência dos resultados $a_1, a_2, ..., a_n$, respectivamente:

I. $P(a_1) + P(a_2) + ... + P(a_n) = 1$

II. $0 \leq P(a_i) \leq 1$, para i = 1, 2, ..., n

Desse modo, considerando o evento $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ $(m \leq n)$, usamos a seguinte fórmula para calcular a probabilidade desse evento:

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + ... + P(a_m)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – De um baralho comum de 52 cartas, uma carta é retirada aleatoriamente. Qual a probabilidade de sair um rei ou uma carta de ouros?

Resolução

Evento **A** (a carta é um rei):

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

Evento **B** (a carta é de ouros):

$$P(B) = \frac{13}{52}$$

Evento **A ∩ B** (a carta é um rei de ouros):

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

Evento **A ∪ B** (a carta ou é um rei ou é de ouros):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Logo:

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{16}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{13}$$

2. Sistema Dom Bosco – Considere um experimento com espaço amostral $U = \{x, y, z\}$, sendo P(x), P(y) e P(z) as possibilidades dos resultados x, y e z, de modo que $P(x) = \frac{1}{6}$ e $P(y) = \frac{1}{2}$.

a) Calcule P(z)

Resolução

$$P(x) + P(y) + P(z) = 1$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + P(z) = 1 \rightarrow P(z) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$$

$$P(z) = \frac{6-1-3}{6} \rightarrow P(z) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

b) Calcule a probabilidade do evento $A = \{x, y\}$

Resolução

$$P(A) = P(x) + P(y)$$

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \rightarrow P(A) = \frac{1+3}{6} \rightarrow P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A) = \frac{2}{3}$$

3. Sistema Dom Bosco – Lançando uma moeda e um dado, simultaneamente, e considerando U o espaço amostral, haverá U constituído por 12 elementos (sendo K = cara e C = coroa):

U = {K1, K2, K3, K4, K5, K6, C1, C2, C3, C4, C5, C6} $\rightarrow$ $\rightarrow$ n(U) = 12

Com base em U:

I. Escreva e calcule a probabilidade dos eventos

a) A (obter caras e um número par);

b) B (obter um número primo);

c) D (obter coroa e um número ímpar).

II. Escreva e calcule a probabilidade dos seguintes eventos e responda quais dos eventos A, B e D são mutuamente exclusivos (não têm elementos comuns)?

a) Probabilidade de A **ou** B ocorrer.

b) Probabilidade de B **e** D ocorrerem.

Resolução

I.

a) Para obter A, escolhemos os elementos de U constituídos de K (cara) e um número par:

A = {K2, K4, K6} $\rightarrow$ n(A) = 3.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

b) Para obter B, escolhemos os pontos de U constituídos de números primos, independentemente da face da moeda: B = {K2, K3, K5, C2, C3, C5} $\rightarrow$ n(B) = 6.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

c) Para obter D, escolhemos os pontos de U constituídos de C (coroa) e um número ímpar:

D = {C1, C3, C5} $\rightarrow$ n(D) = 3.

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(U)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

II.

a) A ou B = A $\cup$ B = {K2, K4, K6, K3, K5, C2, C3, C5}
n(A $\cup$ B) = 8

Foram tomados todos os elementos que pertenciam a A ou a B, sem serem repetidos, pois eles têm elementos comuns. São eventos denominados não mutuamente exclusivos (ou não ME).

Assim:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

b) **B** e **D** $= B \cap D = \{C3, C5\} \cdot n(B \cap D) =$

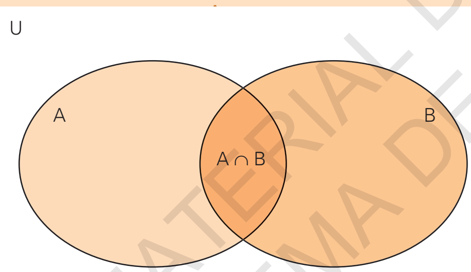
$$= 2 \cdot P(B \cap D) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Também aqui, B e D não são mutuamente exclusivos.

PROBABILIDADE

Probabilidade do evento união

$P(A \cup B) =$ $P(A) + P(B)$



Probabilidade de um espaço amostral não equiprovável

$P(A) =$ $P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_m)$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. UPF-RS – Duas bolsas de estudo serão sorteadas entre 9 pessoas, sendo 7 mulheres e 2 homens. Considerando-se que uma pessoa desse grupo não pode ganhar as duas bolsas, qual a probabilidade de duas mulheres serem sorteadas?

a) $\frac{7}{12}$ **c)** $\frac{2}{7}$ **e)** $\frac{7}{36}$

b) $\frac{7}{9}$ **d)** $\frac{1}{21}$

Total de sorteios: $C_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!2!} = 36.$

Total de sorteios em que os ganhadores são mulheres:

$C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!2!} = 21.$

Logo, $P = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$

2. Enem C7-H28

Uma caixa contém uma cédula de R\$ 5,00, uma de R\$ 20,00 e duas de R\$ 50,00 de modelos diferentes. Retira-se aleatoriamente uma cédula dessa caixa, anota-se o seu valor e devolve-se a cédula à caixa. Em seguida, repete-se o procedimento anterior.

A probabilidade de que a soma dos valores anotados seja pelo menos igual a R\$ 55,00 é

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{2}{9}$ **e)** $\frac{5}{9}$

Resultados possíveis: $n(U) = 4 \cdot 4 = 16$.

Soma inferior a R\$ 55,00: A (5, 5), (5, 20), (20, 5) e (20, 20).

Logo, $n(A) = 4$.

Assim, $P = 1 - P(A)$

$P = 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

3. UFJF-MG – Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. Cada bola tem peso proporcional ao número marcado nela, de modo que, após o sorteio de uma bola, a probabilidade de observarmos um número é proporcional a este número, com a mesma constante de proporcionalidade para todos os números.

Determine a probabilidade de sortearmos:

a) um número ímpar.

b) um número par, maior ou igual a 6.

a) Seja p(n) a probabilidade de sortearmos o número (n). De acordo com o enunciado, podemos escrever:

k = constante de proporcionalidade

$p(n) = n \cdot k$

$p(1) = 1 \cdot k$

$p(2) = 2 \cdot k$

$p(3) = 3 \cdot k...$

$P(10) = 10 \cdot k$

A soma de todas as probabilidades será 100%. Logo:

$p(1) + p(2) + p(3) + ... + p(10) = 1 = 100\%$

$k + 2k + 3k + ... + 10k = 1 \rightarrow 55k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{55}$

Contudo, para números ímpares {1, 3, 5, 7, 9}, temos:

$p(x) = p(1) + p(3) + p(5) + p(7) + p(9) \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{55} + \frac{3}{55} + \frac{5}{55} + \frac{7}{55} + \frac{9}{55} \rightarrow$

$\rightarrow p(x) = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$

b) Já para números pares maiores ou iguais a 6, obtemos:

$p(x) = p(6) + p(8) + p(10) = \frac{6}{55} + \frac{8}{55} + \frac{10}{55} = \frac{24}{55}$

4. UPE – Uma urna contém 18 bolas vermelhas, 12 amarelas e 20 brancas, sendo todas idênticas. Quantas bolas brancas devem ser retiradas dessa urna, de modo que, ao sortear uma bola, a probabilidade de ela ser branca seja igual a $\frac{1}{6}$?

a) 16 **c)** 14 **e)** 12

b) 15 **d)** 13

Compreendendo que x seja o número de bolas brancas que serão retiradas, temos:

$\frac{20-x}{50-x} = \frac{1}{6} \rightarrow 50 - x = 120 - 6x \rightarrow 5x = 70$

Logo, $x = 14$.

5. UFRGS – Escolhe-se aleatoriamente um número formado somente por algarismos pares distintos, maior do que 200 e menor do que 500.

Assinale a alternativa que indica a melhor aproximação para a probabilidade de que esse número seja divisível por 6.

a) 20%
b) 24%
c) 30%
d) 34%
e) 50%

Do enunciado, obtemos:

- 1º algarismo: 2 possibilidades (2 ou 4).
- 2º algarismo: 4 possibilidades.
- 3º algarismo: 3 possibilidades.
- Quantidade de números possíveis: $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

Dos números apontados, temos:

- Número divisíveis por 6 que começam por 2: 204, 240, 246, 264.
- Números divisíveis por 6 que começam por 4: 402, 420, 426, 462, 408, 480, 468, 486.
- Quantidade de números divisíveis por 6: $4 + 8 = 12$.

Logo:

$P = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0{,}5$, ou seja, 50%.

6. PUC-Rio – Temos uma urna com 100 bolas numeradas de 1 a 100.

a) Escolhendo duas bolas distintas simultaneamente, qual a probabilidade de que a soma seja 3?

b) Escolhendo duas bolas distintas simultaneamente, qual a probabilidade de que a soma seja menor ou igual a 7?

c) Escolhendo duas bolas distintas simultaneamente, qual a probabilidade de que o produto seja um número par?

Adota-se que a seleção é feita de modo aleatório. Logo:

a) Evento A (seleciona duas bolas simultaneamente, de modo que a soma resulte 3).

$A = \{(1, 2)\}$

$U = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), ..., (99, 100)\}$

$n(A) = 1$

$n(U) = C_{100,\,2} = \frac{100!}{2! \cdot 98!} = 50 \cdot 99$

Logo:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} \rightarrow P(A) = \frac{1}{50 \cdot 99}$

Logo, $P(A) = \frac{1}{4\,950}$

b) Evento B (seleciona duas bolas simultaneamente, de modo que a soma seja menor ou igual a 7).

Observe:

- soma igual a 3: (1, 2).
- soma igual a 4: (1, 3).
- soma igual a 5: (1, 4), (2, 3).
- soma igual a 6: (1, 5), (2, 4).
- soma igual a 7: (1, 6), (2, 5), (3, 4).

Assim:

$B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (1, 5), (2, 4), (1, 6), (2, 5), (3, 4)\}$

$n(B) = 9$

$n(U) = 50 \cdot 99$

Logo:

$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{9}{50 \cdot 99} = \frac{1}{550}$

c) Evento C (seleciona duas bolas simultaneamente, de modo que o produto seja ímpar).

$n(C) = C_{50,\,2} = \frac{50!}{2! \cdot 48!}$

Portanto, $n(C) = 25 \cdot 49$

Logo:

$P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{25 \cdot 49}{50 \cdot 99}$

Assim, $P(C) = \frac{49}{198}$

A probabilidade de o produto ser um número par é obtida fazendo o complementar: $P(C) + P(\bar{C}) = 1$.

Então:

$P(\bar{C}) = 1 - P(C) \rightarrow P(\bar{C}) = 1 - \frac{49}{198}$

Portanto, $P(\bar{C}) = \frac{149}{198}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Sistema Dom Bosco – De um baralho comum de 52 cartas, uma delas é retirada aleatoriamente. Qual a probabilidade de ser uma dama ou uma carta de copas?

8. Unicamp – Uma moeda balanceada é lançada quatro vezes, obtendo-se cara exatamente três vezes. A probabilidade de que as caras tenham saído consecutivamente é igual a

a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{3}{4}$

9. FGV – Uma loteria consiste no sorteio de três números distintos entre os 20 números inteiros de 1 a 20 – a ordem deles não é levada em consideração. Ganha um prêmio de R$ 100.000,00 o apostador que comprou o bilhete com os números sorteados. Não existem bilhetes com a mesma trinca de números. O ganho esperado do apostador que comprou um determinado bilhete é igual ao prêmio multiplicado pela probabilidade de ganho.

Quem apostou na trinca {4, 7, 18} tem um ganho esperado de aproximadamente

a) R$ 88,00
b) R$ 89,00
c) R$ 90,00
d) R$ 91,00
e) R$ 92,00

10. Mackenzie – Um professor de Matemática entrega aos seus alunos uma lista contendo 10 problemas e avisa que 5 deles serão escolhidos ao acaso para compor a prova final. Se um aluno conseguiu resolver, corretamente, apenas 7 dos 10 problemas, a probabilidade de que ele acerte todos os problemas da prova é

a) $\frac{7}{84}$ **b)** $\frac{21}{84}$ **c)** $\frac{59}{84}$ **d)** $\frac{77}{84}$ **e)** 1

11. UFPR (adaptado) – Um programa de computador usa as vogais do alfabeto para gerar aleatoriamente senhas de 5 letras. Por exemplo: EEIOA e AEIOU são duas senhas possíveis.

Uma senha é dita insegura se possuir a mesma vogal em posições consecutivas. Por exemplo: AAEIO, EIIIO, UOUUO são senhas inseguras. Qual a probabilidade de o programa gerar aleatoriamente uma senha insegura?

a) $\frac{1}{3\,125}$ **b)** $\frac{19}{3\,125}$ **c)** $\frac{369}{625}$ **d)** $\frac{251}{625}$ **e)** $\frac{7}{415}$

12. Famerp-SP – O banco de sangue de um hospital possui 100 bolsas de sangue, cada uma obtida de um doador diferente. As bolsas estão distribuídas por grupo sanguíneo, conforme mostra a tabela.

Grupo sanguíneo	Número de bolsas
O	45
A	29
B	22
AB	4
Total	100

Dois dos 100 doadores das bolsas indicadas na tabela pretendem voltar ao hospital para fazer nova doação de uma bolsa de sangue cada um. Considerando que os dados da tabela não tenham se alterado até que essas duas pessoas voltem a fazer sua doação, a probabilidade de que a proporção de bolsas do grupo sanguíneo AB, desse hospital, passe a ser igual a $\frac{1}{17}$ do total de bolsas após essas duas novas doações é de

a) $\frac{1}{425}$ **b)** $\frac{1}{625}$ **c)** $\frac{1}{289}$ **d)** $\frac{1}{825}$ **e)** $\frac{1}{51}$

13. UFJF-MG – Para um campeonato de voleibol, um técnico convocou 12 jogadores, sendo um líbero e dois levantadores. Para o início de uma partida, devem ser escolhidos 6 jogadores que ficarão em seis posições distintas, sendo 3 na parte superior da quadra e 3 na parte inferior.

a) Determine o número de maneiras distintas de o time ser escalado para o início de uma partida, sendo que quaisquer jogadores podem começar a jogar, independente de serem levantadores ou líbero.

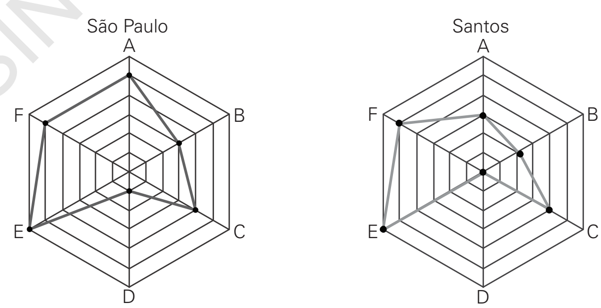
b) Sabendo que esse técnico sempre começa o jogo com exatamente um levantador e que o líbero sempre joga em uma das três posições da parte inferior da quadra, determine o número de maneiras diferentes de iniciar uma partida.

c) Supondo que o técnico não compareceu no dia da partida e que o auxiliar recém-contratado escalou o time aleatoriamente, calcule a probabilidade dessa escalação estar de acordo com as condições do item b).

14. UFRGS – Considere um hexágono convexo com vértices A, B, C, D, E e F. Tomando dois vértices ao acaso, a probabilidade de eles serem extremos de uma diagonal do hexágono é

a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{2}{5}$ **c)** $\frac{3}{5}$ **d)** $\frac{4}{5}$ **e)** 1

15. Unifesp – Em uma pesquisa de mercado realizada nas cidades de São Paulo e de Santos, cada entrevistado teve que escolher apenas uma dentre seis marcas de sabonete (A, B, C, D, E e F). Os gráficos de radar indicam os resultados dessa pesquisa nas duas cidades. Por exemplo, cinco pessoas escolheram a marca A em São Paulo, e três em Santos; três pessoas escolheram a marca B em São Paulo, e duas em Santos.



a) Sorteando-se ao acaso um dos entrevistados, considerando as duas cidades, qual é a probabilidade de que essa pessoa tenha escolhido ou a marca D ou a marca F?

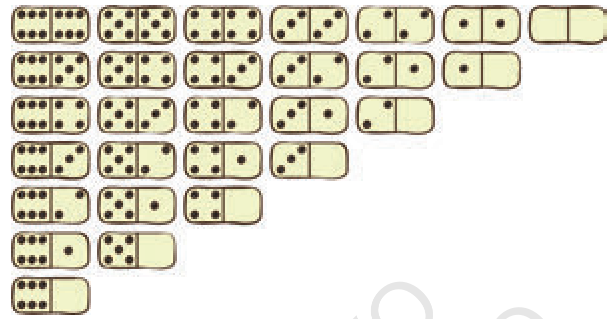
b) A mesma pesquisa foi realizada na cidade de Campinas, com 17 pessoas: a marca F foi a única mais votada, com seis escolhas; a marca C foi a única menos votada, com nenhuma escolha; nenhuma marca obteve apenas um voto. Levando em consideração apenas essas informações, calcule o total de configurações diferentes possíveis de um gráfico de radar (no mesmo formato das pesquisas de São Paulo e Santos) com os resultados da pesquisa realizada em Campinas.

16. Fuvest – Em um experimento probabilístico, Joana retirará aleatoriamente 2 bolas de uma caixa contendo bolas azuis e bolas vermelhas. Ao montar-se o experimento, colocam-se 6 bolas azuis na caixa.

Quantas bolas vermelhas devem ser acrescentadas para que a probabilidade de Joana obter 2 azuis seja $\frac{1}{3}$?

a) 2 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 8 **e)** 10

17. Uerj (adaptado) – Cada uma das 28 peças do jogo de dominó convencional, ilustradas abaixo, contém dois números, de zero a seis, indicados por pequenos círculos ou, no caso do zero, por sua ausência.



Admita um novo tipo de dominó, semelhante ao convencional, no qual os dois números de cada peça variem de zero a dez. Observe o desenho de uma dessas peças:

Considere que uma peça seja retirada ao acaso do novo dominó. Qual a probabilidade de essa peça apresentar um número seis ou um número nove?

a) $\frac{17}{22}$ **b)** $\frac{11}{22}$ **c)** $\frac{7}{22}$ **d)** $\frac{5}{28}$ **e)** $\frac{13}{28}$

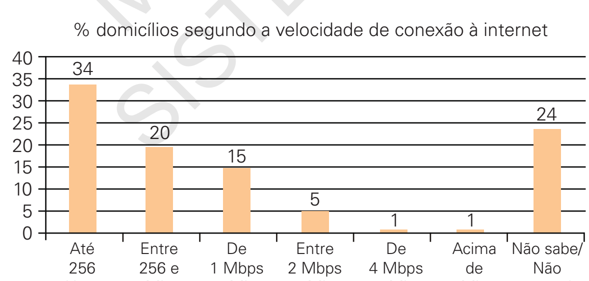
18. Enem C7-H28

Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{5}{8}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{5}{6}$ **e)** $\frac{5}{14}$

19. Enem C6-H25

O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).

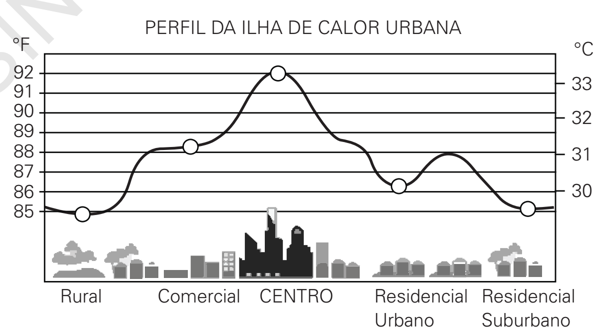


Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicílio?

a) 0,45
b) 0,42
c) 0,30
d) 0,22
e) 0,15

20. Enem C7-H30

Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31 °C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Fonte: EPA

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

a) $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{3}{5}$ **e)** $\frac{3}{4}$

26 PROBABILIDADE CONDICIONAL E DA INTERSECÇÃO DE EVENTOS

- Probabilidade condicional
- Probabilidade do evento interseção

HABILIDADES

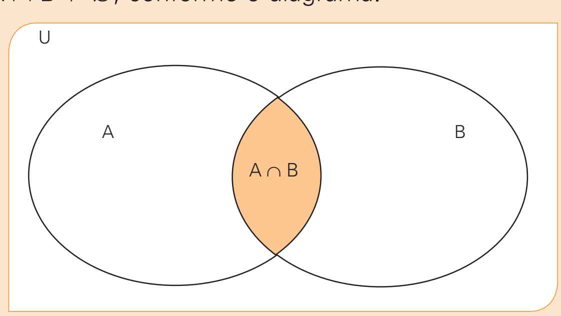
- Reconhecer diferentes tipos de evento para determinar as respectivas probabilidades de ocorrência.
- Aplicar os conhecimentos de probabilidade para resolver situações-problema e elaborar argumentos.

GORODENKOFF/ISTOCKPHOTO

A estatística se faz presente em vários âmbitos do cotidiano. Com ela é possível obter importantes informações sobre os mais diversos contextos. No ramo da saúde, por exemplo, existe a aplicação prática da **probabilidade condicional**, em que se calcula a incidência de doenças em determinados grupos de pessoas. Nesse caso, podem-se identificar grupos de riscos ou indicação de possíveis formas de prevenções para problemas epidêmicos. Ou seja, com a probabilidade condicional, calcula-se a probabilidade de um evento ocorrer com base em um evento anterior.

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Vamos considerar, em um experimento aleatório de espaço amostral $\cup$, os eventos **A** e **B**, com $A \cap B \neq \varnothing$, conforme o diagrama.



Na medida em que sabemos da ocorrência do evento **B**, este passa a ser o espaço amostral do experimento, pois todos os resultados possíveis pertencem a **B**. Assim, a probabilidade de ocorrer o evento **A**, dado que o evento **B** já ocorreu, é:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

Sistema Dom Bosco – Uma excursão para uma cidade histórica era formada por um grupo de 200 pessoas, sendo 60 homens e 140 mulheres. Sabe-se que 40 homens e 60 mulheres já tinham visitado essa cidade anteriormente. Uma pessoa é sorteada ao acaso. Nessas condições, qual a probabilidade de ela

a) ser mulher, uma vez já ter visitado essa cidade antes?

b) ter visitado a cidade antes e ser homem?

Resolução

a) Os dados do enunciado podem ser organizados em uma tabela:

	Já visitou a cidade antes	Visitava a cidade pela 1ª vez	Total
Homem	40	20	60
Mulher	60	80	140
Total	100	100	200

Evento A: a pessoa sorteada já visitou a cidade antes.

Evento B: a pessoa sorteada é mulher.

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}\rightarrow P(A|B)=\frac{60}{100}\rightarrow P(A|B)=\frac{3}{5}$$

Logo, a probabilidade de ser mulher e já ter visitado essa cidade antes é $\frac{3}{5}$.

b) Por meio dos dados do item **a** da tabela, temos:

Evento A: a pessoa sorteada já visitou a cidade.

Evento C: a pessoa sorteada é homem.

$$P(A|C)=\frac{n(A\cap C)}{n(C)}\rightarrow P(A|C)=\frac{40}{60}\rightarrow P(A|C)=\frac{2}{3}$$

Logo, a probabilidade de ter visitado a cidade antes e ser homem é $\frac{2}{3}$.

PROBABILIDADE DO EVENTO INTERSECÇÃO

Dados dois eventos **A** e **B** de espaço amostral **U**, dizer que ocorreu o evento **A** $\cap$ **B** (evento interseção) significa que os eventos **A** e **B** aconteceram simultaneamente.

Para calcular a probabilidade de ocorrer $A \cap B$, usamos a fórmula da probabilidade condicional:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(U)}}{\frac{n(B)}{n(U)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Assim:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) \quad \{I\}$$

Podemos também usar a fórmula de $P(B \mid A)$:

$$P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(U)}}{\frac{n(A)}{n(U)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Então:

$$P(A \mid B) = P(B) \cdot P(B \mid A) \quad \{II\}$$

Com as fórmulas {I} e {II}, concluímos que:

Dados dois eventos **A** e **B** de espaço amostral **U**, a probabilidade de eles ocorrerem simultaneamente é dada pelo produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, dado que ocorreu o primeiro.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

Sistema Dom Bosco – Duas bolas vão ser retiradas de uma urna que contém 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 verdes. Qual a probabilidade de ambas:

a) serem verdes?

b) serem da mesma cor?

Resolução

Temos:

U = {B1, B2, P1, P2, P3, V1, V2, V3, V4}

n(U) = 9

B: bola branca

P: bola preta

V: bola verde

a) Para que as duas bolas sejam verdes, na medida em que a primeira seja extraída, deixaremos de ter 9 bolas no espaço amostral. Isso acarretará 3 bolas verdes, e não mais 4. Assim, de acordo com o teorema:

$$P(V\cap V)=P(V)\cdot P(V|V)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$$

b) $P(\text{Mesma Cor}) = P(B \cap B) + P(P \cap P) + P(V \cap V)$: teremos duas bolas brancas ou duas bolas pretas ou as duas bolas verdes. Assim, devemos somar todas as possibilidades:

$$P(\text{Mesma Cor})=P(B\cap B)+P(P\cap P)+P(V\cap V)$$

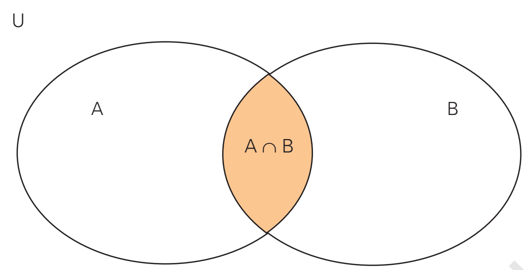
$$P(\text{Mesma Cor})=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}$$

$$P(\text{Mesma Cor})=\frac{20}{72}=\frac{5}{18}$$

ROTEIRO DE AULA

PROBABILIDADE CONDICIONAL E DA INTERSECÇÃO DE EVENTOS

Probabilidade do evento intersecção



Probabilidade do evento intersecção

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A \mid B)$

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(B \mid A)$

$P(B \mid A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)}$

$P(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Enem C7-H30

Uma aluna estuda numa turma de 40 alunos. Em um dia, essa turma foi dividida em três salas, A, B e C, de acordo com a capacidade das salas. Na sala A ficaram 10 alunos, na B, outros 12 alunos e na C, 18 alunos. Será feito um sorteio no qual, primeiro, será sorteada uma sala e, posteriormente, será sorteado um aluno dessa sala.

Qual é a probabilidade de aquela aluna específica ser sorteada, sabendo que ela está na sala C?

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{18}$
c) $\frac{1}{40}$
d) $\frac{1}{54}$
e) $\frac{7}{18}$

De acordo com o enunciado, temos:

– Probabilidade de ser a sala C: $\frac{1}{3}$.

– Probabilidade de sortear um aluno da sala C: $\frac{1}{18}$.

– Probabilidade de sortear aquela aluna específica, e ela está na sala C: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{54}$.

2. Famema-SP – Um professor colocou em uma pasta 36 trabalhos de alunos, sendo 21 deles de alunos do 1º ano e os demais de alunos do 2º ano. Retirando-se aleatoriamente 2 trabalhos dessa pasta, um após o outro, a probabilidade de os dois serem de alunos de um mesmo ano é

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{1}{6}$

Há chance de serem selecionados dois trabalhos do 1º ano ou dois trabalhos de 2º ano. Assim, a probabilidade (P) solicitada será dada por:

$P = \frac{21}{36} \cdot \frac{20}{35} + \frac{15}{36} \cdot \frac{14}{35} \rightarrow P = \frac{630}{1\,260}$

Logo, $P = \frac{1}{2}$.

3. FGV – Seis bolas brancas e seis bolas pretas estão distribuídas em três caixas e nenhuma caixa contém bolas de uma só cor. A primeira caixa contém 3 bolas, a segunda 4 bolas e a terceira, 5 bolas.

Sabe-se que a segunda caixa é a única em que o número de bolas pretas é maior do que o número de bolas brancas.

Retirando uma bola de cada caixa, determine a probabilidade de que sejam da mesma cor.

Pelo enunciado, podemos deduzir:

– Caixa 1: Branca, Branca, Preta

– Caixa 2: Branca, Preta, Preta, Preta

– Caixa 3: Branca, Branca, Branca, Preta, Preta

Calculando, temos:

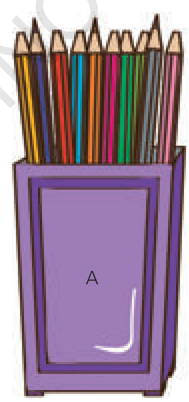
$P(\text{Brancas}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

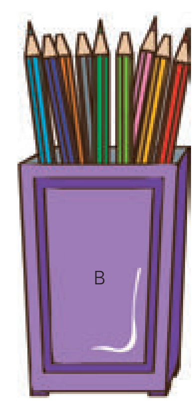
$P(\text{Pretas}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

Somando as probabilidades de retirar bolas brancas ou pretas, obtemos:

$P = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

4. Uerj – Em um escritório, há dois porta-lápis: o porta-lápis A, com 10 lápis, dentre os quais 3 estão apontados, e o porta-lápis B, com 9 lápis, dentre os quais 4 estão apontados.





Um funcionário retira um lápis qualquer ao acaso do porta-lápis A e o coloca no porta-lápis B. Novamente ao acaso, ele retira um lápis qualquer do porta-lápis B.

A probabilidade de que este último lápis retirado não tenha ponta é igual a:

a) 0,64
b) 0,57
c) 0,52
d) 0,42

Resolvemos por etapas:

Etapa 1

Probabilidade de o lápis removido do porta-lápis A ser apontado e de o lápis removido do porta-lápis B não ter ponta:

$P1 = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{15}{100}$

Etapa 2

Probabilidade de o lápis removido do porta-lápis A não ter ponta e de o lápis removido do porta-lápis B não ter ponta:

$P2 = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{42}{100}$

Contudo, a probabilidade de o último lápis removido do porta-lápis não ter ponta será:

$P = P1 + P2 = \frac{15}{100} + \frac{42}{100} = \frac{57}{100} = 0,57.$

5. Unisinos-RS – Em uma gaveta, há 12 meias brancas e 8 meias cinzas. Retiram-se duas meias, sem reposição.

Qual a probabilidade de as duas meias que foram retiradas serem de cores diferentes?

a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{24}{95}$ **c)** $\frac{10}{17}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{48}{95}$

Temos que:

$n(U) = C_{20,2}$

$n(U) = C_{20,2}$

$n(U) = C_{20,2}$

Assim:

$$P = \frac{\binom{12}{1} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{12 \cdot 8}{\frac{20!}{2! \cdot 18!}} = \frac{48}{95}$$

6. FGV – De forma consecutiva extraímos de uma urna três bolas numeradas de 1 a 9, repondo a bola retirada após cada extração, formando um número de três algarismos. O primeiro algarismo sorteado é o algarismo das centenas; o segundo, o das dezenas; e o terceiro, o das unidades.

a) Calcule a probabilidade de que saia um número

I. Com três algarismos repetidos;

II. Sem nenhum algarismo repetido;

III. Com exatamente dois algarismos exatamente iguais.

b) Em uma caixa com 10 lapiseiras, 4 delas estão com defeito. Se um cliente compra 2 lapiseiras escolhidas aleatoriamente, é certo afirmar que a probabilidade de que nenhuma lapiseira esteja com defeito é maior que 30%?

a) Resolvendo cada probabilidade, temos:

I. $P_I(A) = \frac{9}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$

II. $P_{II}(B) = \frac{9}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{56}{81}$

III. $P_{III}(C) = 1 - \frac{1}{81} - \frac{56}{81} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$

b) De acordo com o enunciado, temos:

– Probabilidade de a primeira lapiseira estar sem defeito: $\frac{6}{10}$

– Probabilidade de a segunda lapiseira estar sem defeito: $\frac{5}{9}$

A probabilidade de as duas lapiseiras escolhidas estarem sem defeito:

$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3} \approx 33\%.$

Ou seja, a probabilidade de que nenhuma lapiseira esteja com defeito é maior que 30%.

EXERCÍCIOS **PROPOSTOS**

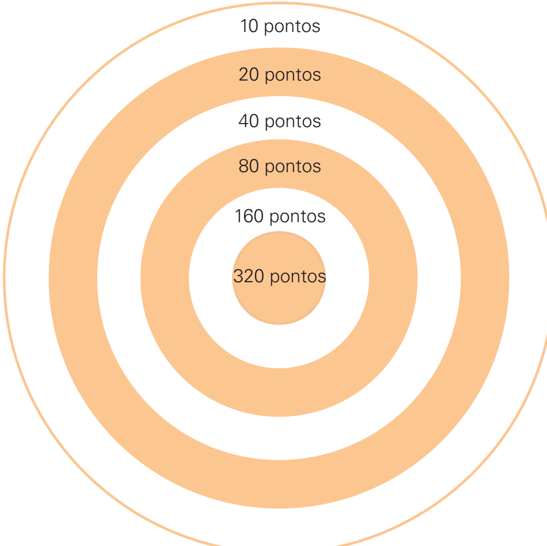
7. ESPM – A distribuição dos alunos nas 3 turmas de um curso é mostrada na tabela abaixo.

	A	B	C
Homens	42	36	26
Mulheres	28	24	32

Escolhendo-se uma aluna desse curso, a probabilidade de ela ser da turma A é:

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{2}{5}$ **e)** $\frac{2}{7}$

8. Insper-SP (adaptado) – Esta figura mostra o alvo de uma academia de arco e flecha. A pontuação que um jogador recebe ao acertar uma flecha em cada uma das faixas circulares está indicada na respectiva faixa. O raio do círculo maior mede 60 cm, o do menor mede 10 cm e a diferença entre os raios de quaisquer dois círculos consecutivos é de 10 cm. Todos os círculos têm o mesmo centro.



O treinador de Rafael propôs a ele o cálculo de um índice de precisão que avalie a sua habilidade como atirador. Para calculá-lo, Rafael precisa:

– multiplicar cada pontuação possível do alvo pela probabilidade de ele acertar uma flecha na faixa correspondente;

– somar os resultados das multiplicações feitas para as 6 faixas.

Rafael registrou na tabela a seguir as pontuações que ele obteve durante um treino no qual ele lançou 200 flechas.

Pontuação	10	20	40	50	160	320
Acertos	20	30	40	50	40	20

Usando os dados da tabela para estimar as probabilidades, o índice de precisão de Rafael é

a) 96 **b)** 97 **c)** 98 **d)** 99 **e)** 100

9. FGV – Em uma rifa, são vendidos 100 bilhetes com números diferentes, sendo que 5 deles estão premiados. Se uma pessoa adquire 2 bilhetes, a probabilidade de que ganhe ao menos um dos prêmios é de

a) $\frac{31}{330}$ **b)** $\frac{47}{495}$ **c)** $\frac{19}{198}$ **d)** $\frac{16}{165}$ **e)** $\frac{97}{990}$

10. Uerj – Em uma urna, foram colocadas trinta bolas, numeradas de 1 a 30. Uma dessas bolas foi sorteada aleatoriamente. Em relação a essa experiência, considerem-se os dois eventos abaixo.

Evento A: {a bola sorteada tem número menor ou igual a 20}.

Evento B: {a bola sorteada tem número maior do que k}.

Sabendo que $k < 20$, $k \in \mathbb{N}$ e $P(a \cap b) = \frac{1}{6}$, determine o valor de k.

11. PUC-Rio – Sejam os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {6, 7, 8, 9, 10}. Escolhendo-se ao acaso um elemento de A e um elemento de B, a probabilidade de que a soma dos dois números escolhidos seja um número par é:

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{5}$ **c)** $\frac{12}{25}$ **d)** $\frac{6}{25}$ **e)** $\frac{7}{10}$

12. UEG-GO – Renata está grávida e realizará um exame que detecta o sexo do bebê. Se o exame detectar que é um menino, a probabilidade de ela pintar o quarto do bebê de azul é de 70%, ao passo que de branco é de 30%. Mas, se o exame detectar que é uma menina, a probabilidade de ela pintar o quarto do bebê de rosa é de 60%, contra 40% de pintar de branco. Sabendo-se que a probabilidade de o exame detectar um menino é de 50%, a probabilidade de Renata pintar o quarto do bebê de branco é de

a) 70%
b) 50%
c) 35%
d) 30%
e) 20%

13. UPE – Numa aula de Matemática, o professor pediu que seus alunos construíssem argumentos, envolvendo conhecimentos sobre probabilidade, a partir do seguinte enunciado: “Um saco contém fichas idênticas, mas com cores diferentes, sendo 2 vermelhas, 4 verdes, 6 amarelas e 3 pretas”. Foram apresentados três argumentos, presentes nas afirmativas a seguir:

I. Mariana falou que, se uma ficha fosse retirada ao acaso, a probabilidade de ela ser preta seria $\frac{1}{3}$.

II. Antônia afirmou que, se forem retiradas duas fichas do saco ao acaso, a probabilidade de elas serem vermelhas ou verdes seria de $\frac{4}{15}$.

III. Bruna disse: "Caso sejam retiradas 3 fichas ao acaso, uma a uma, sem reposição, a probabilidade de sair uma amarela, uma verde e uma vermelha, nessa ordem, será de $\frac{48}{225}$".

Analisando as afirmativas das três alunas, é CORRETO afirmar que

a) apenas I é verdadeira.
b) apenas I e II são verdadeiras.
c) apenas II e III são verdadeiras.
d) I, II e III são verdadeiras.
e) I, II e III são falsas.

14. Fuvest (adaptado)

DINCER.AGIN/SHUTTERSTOCK

João e Maria jogam dados em uma mesa. São cinco dados em forma de poliedros regulares: um tetraedro, um cubo, um octaedro, um dodecaedro e um icosaedro. As faces são numeradas de 1 a 4 no tetraedro, de 1 a 6 no cubo etc. Os dados são honestos, ou seja, para cada um deles, a probabilidade de qualquer uma das faces ficar em contato com a mesa, após o repouso do dado, é a mesma.

Em um primeiro jogo, Maria sorteia, ao acaso, um dos cinco dados, João o lança e verifica o número da face que ficou em contato com a mesa.

a) Qual é a probabilidade de que esse número seja maior do que 12?
b) Qual é a probabilidade de que esse número seja menor do que 5?

Em um segundo jogo, João sorteia, ao acaso, dois dos cinco dados. Maria os lança e anota o valor da soma dos números das duas faces que ficaram em contato com a mesa, após o repouso dos dados.

c) Qual é a probabilidade de que esse valor seja maior do que 30?

Poliedros regulares	
Tetraedro	4 faces
Cubo	6 faces
Octaedro	8 faces
Dodecaedro	12 faces
Icosaedro	20 faces

16. Unesp (adaptado) – Renato e Alice fazem parte de um grupo de 8 pessoas que serão colocadas, ao acaso, em fila. Calcule a probabilidade de haver exatamente 4 pessoas entre Renato e Alice na fila que será formada. Generalize uma fórmula para o cálculo da probabilidade do problema descrito acima com o mesmo grupo de "8 pessoas", trocando "4 pessoas" por "m pessoas", em que $1 \leqslant m \leqslant 6$. A probabilidade deverá ser dada em função de m.

a) $\frac{5}{28}$

b) $\frac{3}{28}$

c) $\frac{1}{28}$

d) $\frac{7}{33}$

e) $\frac{13}{33}$

15. Esc. Naval – Um exame de laboratório tem eficiência de 90% para detectar uma doença quando essa doença existe de fato. Entretanto, o teste aponta um resultado "falso-positivo" (o resultado indica doença, mas ela não existe) para 1% das pessoas sadias testadas. Se 1,5% da população tem a doença, qual a probabilidade de uma pessoa ter a doença, dado que seu exame foi positivo?

a) $\frac{95}{294}$

b) $\frac{160}{433}$

c) $\frac{270}{467}$

d) $\frac{75}{204}$

e) $\frac{73}{255}$

17. Fuvest – Deseja-se formar uma comissão composta por sete membros do Senado Federal brasileiro, atendendo às seguintes condições: (i) nenhuma unidade da Federação terá dois membros na comissão, (ii) cada uma das duas regiões administrativas mais populosas terá dois membros e (iii) cada uma das outras três regiões terá um membro.

a) Quantas unidades da Federação tem cada região?

b) Chame de N o número de comissões diferentes que podem ser formadas (duas comissões são consideradas iguais quando têm os mesmos membros). Encontre uma expressão para N e simplifique-a de modo a obter sua decomposição em fatores primos.

c) Chame de P a probabilidade de se obter uma comissão que satisfaça às condições exigidas, ao se escolher sete senadores ao acaso. Verifique que $P < \frac{1}{50}$.

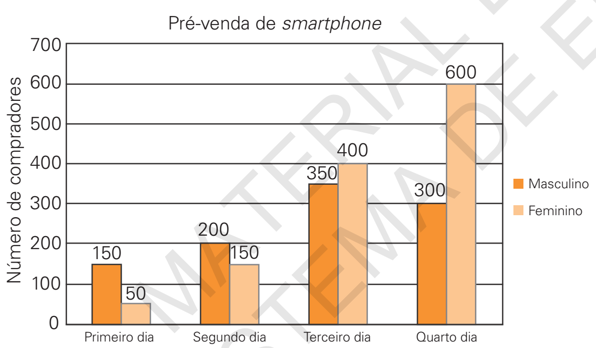
Segundo a Constituição da República Federativa do Brasil – 1988, cada unidade da Federação é representada por três senadores.

ESTUDO PARA O **ENEM**

18. UFU-MG (adaptado) C6-H26

Uma loja que comercializa celulares registrou, em uma campanha de lançamento, o número de compradores, femininos e masculinos, de um novo modelo de *smartphone*.

O gráfico a seguir descreve o ocorrido nos quatro dias de pré-venda desse modelo.



Com o sucesso de vendas, a loja decidiu sortear um acessório para esse modelo de *smartphone* entre os compradores femininos e outro acessório entre os compradores masculinos.

Qual é a probabilidade de que um dos sorteados tenha feito sua compra no primeiro dia de pré-venda e o outro, no último dia de pré-venda?

a) $\frac{17}{20}$

b) $\frac{11}{20}$

c) $\frac{7}{80}$

d) $\frac{1}{40}$

e) $\frac{1}{20}$

19. Enem C7-H29

Em um jogo há duas urnas com 10 bolas de mesmo tamanho em cada uma. A tabela a seguir indica as quantidades de bolas de cada cor em cada urna.

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

Uma jogada consiste em:

1º) o jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;

2º) ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;

3º) em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2;

4º) se a cor da última bolsa retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo.

Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar?

a) Azul
b) Amarela
c) Branca
d) Verde
e) Vermelha

20. Enem C7-H30

Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso.

Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{100}$ eram defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{100}$ dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos.

O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq P < \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \leq P < \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \leq P < \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \leq P < \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{100} \leq P < 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como

a) excelente.
b) bom.
c) regular.
d) ruim.
e) péssimo.

27 PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPENDENTES

- Eventos independentes

HABILIDADES

- Reconhecer diferentes tipos de evento para determinar as respectivas probabilidades de ocorrência.
- Aplicar os conhecimentos de probabilidade para resolver situações-problema e elaborar argumentos.

MICHAELJUNG/SHUTTERSTOCK

Introdução

Quando a ocorrência de um evento não afeta a probabilidade de outro, temos os chamados **eventos independentes**. Por exemplo, o nascimento de uma criança com determinado gênero, cor de pele, altura e cor dos olhos é um evento independente em relação ao nascimento de outros filhos do mesmo casal.

Tal fato também acontece com a probabilidade de um casal ter dois filhos do gênero feminino. Isso porque o nascimento da primeira filha não afeta a chance de o segundo filho ser do gênero feminino. Ou seja, a formação de cada filho é um evento independente, pois existe 50% de chance de a criança ser do gênero masculino e 50% de ser do gênero feminino, como em qualquer nascimento.

EVENTOS INDEPENDENTES

Dados dois eventos A e B de espaço amostral U, dizemos que eles são independentes se a ocorrência de um deles não modificar a probabilidade de ocorrência do outro.

$$A \text{ e } B \text{ independentes} \leftrightarrow P(B \mid A) = P(B) \text{ e } P(A \mid B) = P(A)$$

Quando A e B são eventos independentes:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Então, quando $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, os eventos são dependentes.

Se n eventos são independentes: $P(A \cap B \cap C \cap ...) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)...$

Eventos independentes – Exemplo 1

No lançamento simultâneo de dois dados, o resultado de um deles não influencia no resultado do outro.

SADEUGRA/ISTOCKPHOTO

Eventos independentes – Exemplo 2

No lançamento sucessivo de dois dados, o resultado de um deles não influencia no resultado do outro.

FANGXIANUO/ISTOCKPHOTO

Eventos independentes – Exemplo 3

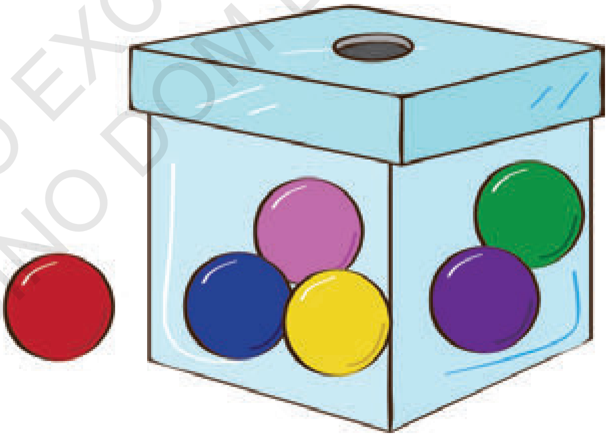
Durante a seletiva para um importante jogo de futebol feminino, uma treinadora deve escolher a capitã do time entre as 11 atletas que começarão o jogo.

Caso a técnica mude de ideia e resolva selecionar outra jogadora sem mudar a formação inicial do time, a primeira escolha não influencia no resultado da segunda escolha. Ou seja, a probabilidade de se escolher A, B ou C permanece a mesma.

SKYNESHER/ISTOCKPHOTO

Eventos dependentes – Exemplo 1

Na extração de duas bolas, uma azul e outra vermelha, em uma urna com 6 bolas de cores distintas, se antes de extrair a segunda bola não for feita a reposição da primeira, o resultado da primeira influencia no resultado da segunda, pois o espaço amostral passa a ter 5 elementos.



Eventos dependentes – Exemplo 2

Quando você vai pegar seu ônibus de costume na parada, é necessário sair de casa em determinado horário e chegar ao ponto antes de o ônibus passar nele. Esse é um exemplo bem claro de eventos dependentes.

OLASER/ISTOCKPHOTO

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Uma urna tem 30 bolas, sendo 10 vermelhas e 20 azuis. Se sortearmos 2 bolas, 1 de cada vez, e repormos a sorteada na urna, qual a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser azul?

Resolução

Como os eventos são independentes, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada e azul na segunda retirada é igual ao produto das probabilidades de cada condição, ou seja, P(A e B) = P(A) · P(B). Ora, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada é $\frac{10}{30}$. Já a probabilidade de sair azul na segunda retirada é $\frac{20}{30}$.

Então, usando a regra do produto, temos: $\frac{10}{30} \cdot \frac{20}{30} = \frac{2}{9}$.

Observe que na segunda retirada foram consideradas todas as bolas, pois houve a reposição. Assim, $P\left(\frac{B}{A}\right)$ = P(B), porque o fato de sair bola vermelha na primeira retirada não influenciou a segunda retirada, já que ela foi reposta na urna.

2. Sistema Dom Bosco – Em uma festa beneficente, foram vendidos 20 números. Serão sorteados dois prêmios. Qual a probabilidade de uma pessoa que tenha adquirido quatro números ganhe os dois prêmios?

Resolução

Pelo enunciado, temos:

– A: sair um dos bilhetes comprados $P(A) = \frac{4}{20}$.

– B: ganhar os dois prêmios (o segundo, uma vez já ter sido inicialmente sorteado):

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} = \frac{12}{380} = \frac{3}{95} = 3{,}16\%$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} = \frac{12}{380} = \frac{3}{95} =$

$= 0{,}0316 = 3{,}16\%$

Portanto, a probabilidade de uma pessoa que tenha adquirido quatro números ganhar os dois prêmios é de 3,16%.

3. Sistema Dom Bosco – São retiradas, com reposição, 2 cartas de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de que ambas sejam de ouros?

Resolução

Como há reposição das cartas no baralho, as probabilidades são iguais:

$P(A) = \frac{13}{52}$ e $P(B) = \frac{13}{52}$

Assim:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{16}$

Portanto, a probabilidade de que as 2 cartas sejam de ouros é de $\frac{1}{16}$.

4. Sistema Dom Bosco – Um casal de idosos, analisado sob a ótica de uma seguradora, tem as seguintes probabilidades de estarem vivos daqui a 20 anos: o homem tem probabilidade de 60% e a mulher, de 70%. Qual a probabilidade de

a) um dos dois estar vivo daqui a 20 anos?

b) os dois estarem vivos daqui a 20 anos?

Resolução

Vamos considerar:

H (homem vivo): P(H) = 60% = 0,60

M (mulher viva): P(M) = 70% = 0,70

$\bar{H}$ (homem não vivo): $P(\bar{H}) = 0{,}40 = 40\%$

$\bar{M}$ (mulher não viva): $P(\bar{M}) = 0{,}30 = 30\%$

Assim, temos:

a) P(homem vivo ∩ mulher não) ou

P(homem não vivo ∩ mulher viva) ou

P(homem vivo ∩ mulher viva) =

$P(H \cap \bar{M}) + P(\bar{H} \cap M) + P(H \cap M) =$

$= 0{,}60 \cdot 0{,}30 + 0{,}40 \cdot 0{,}70 + 0{,}60 \cdot 0{,}70 =$

$= 0{,}18 + 0{,}28 + 0{,}42 =$

$= 0{,}88 = 88\%$

Logo, a probabilidade de um dos dois estar vivo daqui a 20 anos é de 88%.

b) No caso de os dois estarem vivos daqui a 20 anos, a probabilidade é de:

$P(H \cap M) = 0{,}60 \,.\, 0{,}70 = 0{,}42 = 42\%$

PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPENDENTES

Eventos independentes

$P(A \cap B) =$ P(A) · P(B)

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. PUC-Rio – Ao lançar um dado 3 vezes sucessivas, qual é a probabilidade de obter ao menos um número ímpar?

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{5}{8}$

e) $\frac{7}{8}$

Com um dado não viciado de seis faces, numeradas de 1 a 6, temos:

P (Par): a probabilidade de se conseguirem três números pares em três lançamentos sucessivos.

$P(Par) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \rightarrow P(Par) = \frac{1}{8}$

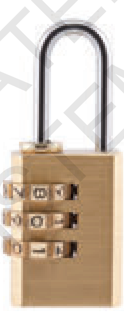
$\overline{P}$: probabilidade de se conseguir ao menos um número ímpar no lançamento de tal dado, três vezes sucessivas.

$P + \overline{P} = 1$

Logo:

$\frac{1}{8} + \overline{P} = 1 \rightarrow \overline{P} = 1 - \frac{1}{8} \rightarrow \overline{P} = \frac{7}{8}$

2. UPE (adaptado) – Um cadeado está protegido pela combinação dos números em três cilindros numerados de 0 a 9 cada um, conforme a figura a seguir. Qual é a probabilidade de, em uma única tentativa, se acertar uma senha formada apenas por números primos?



JAKUB KRECHOWICZ/ DREAMSTIME.COM

Entre 0 e 9, há 4 números primos: (2, 3, 5 e 7).

Assim:

$P = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{64}{1\,000} = 0{,}064 \rightarrow P = 6{,}4\%$

3. Sistema Dom Bosco C7-H28

Um caso de vazamento de informações estava sendo investigado pela prefeitura de uma cidade do interior de São Paulo. A probabilidade de um delegado resolver um problema é de $\frac{2}{3}$ e a do investigador é de $\frac{3}{7}$. Qual é a probabilidade de que seja resolvido o problema?

a) $\frac{17}{42}$

b) $\frac{19}{23}$

c) $\frac{13}{19}$

d) $\frac{17}{19}$

e) $\frac{17}{21}$

$P_{del \cup inv} = P_{del} + P_{inv} - P_{dep \cap inv}$

$P_{del \cup inv} = \frac{2}{3} + \frac{3}{7} - \frac{6}{21}$

$P_{del \cup inv} = \frac{14 + 9 - 6}{21}$

$P_{del \cup inv} = \frac{17}{21}$

A chance de o caso ser resolvido é $\frac{17}{21} \cong 80\%$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

4. Mackenzie – Se um dado honesto é arremessado 4 vezes, a probabilidade de obtermos, pelo menos, 3 resultados iguais é

a) $\frac{5}{36}$

b) $\frac{12}{108}$

c) $\frac{5}{54}$

d) $\frac{7}{72}$

e) $\frac{15}{216}$

Temos:

$P(\text{4 resultados idênticos}) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

$P(\text{3 resultados idênticos}) = \frac{6 \cdot 5 \cdot P_4^3}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{20}{216}$

$\text{Logo}: P = \frac{1}{216} + \frac{20}{216} = \frac{21}{216} = \frac{7}{72}$

5. UEG-GO (adaptado) – Um nadador vai disputar duas provas nas Olimpíadas, primeiro os 100 metros borboleta e depois os 100 metros nado livre. A probabilidade de ele vencer a prova dos 100 metros borboleta é de 70%, ao passo que a de ele vencer ambas é de 60%.

Se ele vencer a prova dos 100 metros borboleta, qual a probabilidade aproximada de ele vencer a prova dos 100 metros nado livre?

De acordo com o enunciado, temos:

p: corresponde à probabilidade solicitada. Sabendo que os eventos são independentes, temos:

$0{,}7 \cdot p = 0{,}6 \rightarrow p = \dfrac{0{,}6}{0{,}7} \rightarrow p \cong 86\%$

6. Enem C7-H28

Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\dfrac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\dfrac{1}{3}$.

Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que essa pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

a) $\dfrac{10 \cdot 2}{3^{10}}$

b) $\dfrac{10 \cdot 2^{9}}{3^{10}}$

c) $\dfrac{2^{10}}{3^{100}}$

d) $\dfrac{2^{90}}{3^{100}}$

e) $\dfrac{2}{3^{10}}$

Calculando, temos:

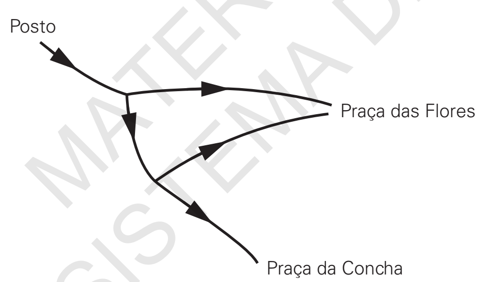
$P(x) = C_{10,1} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{9} = 10 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3^{9}} = \dfrac{10 \cdot 2}{3^{10}}$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. PUC-Minas – Dois ciclistas partem do posto onde estão, em direção à Praça das Flores e à Praça da Concha, localizadas na cidade, seguindo a ciclovia indicada no esquema:



Em cada bifurcação encontrada na ciclovia, eles escolhem, com igual probabilidade, qualquer um dos caminhos e seguem adiante. Nessas condições, a probabilidade de eles chegarem à Praça das Flores é:

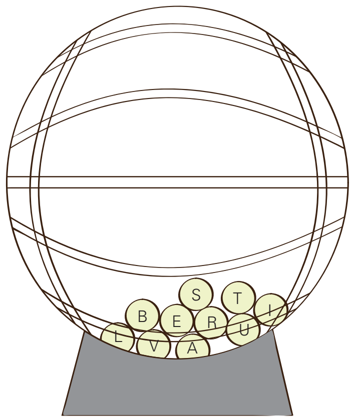
a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{3}{4}$

d) $\dfrac{4}{5}$

8. PUC-Rio – Mônica inventou um jogo de bingo onde as bolas que são sorteadas contêm letras ao invés de números. Em uma das rodadas, usamos as letras da palavra VESTIBULAR, conforme figura abaixo.



a) Ao sortear uma bola, qual é a probabilidade de que seja a letra V?

b) Ao sortear uma bola, qual é a probabilidade de que ela seja uma vogal?

c) Ao sortear 3 bolas sem reposição, qual é a probabilidade de que nenhuma delas seja consoante?

9. Fac. Albert Einstein-SP – Uma escola possui duas turmas que estão no terceiro ano, A e B. O terceiro ano A tem 24 alunos, sendo 10 meninas, e o terceiro ano B tem 30 alunos, sendo 16 meninas. Uma dessas turmas será escolhida aleatoriamente e, em seguida, um aluno da turma sorteada será aleatoriamente escolhido. A probabilidade de o aluno escolhido ser uma menina é

a) $\frac{13}{27}$

b) $\frac{15}{32}$

c) $\frac{19}{40}$

d) $\frac{21}{53}$

10. Enem C7-H28

Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

a) 0,075

b) 0,150

c) 0,325

d) 0,600

e) 0,800

11. PUC-Rio – Jogamos dois dados comuns, com faces numeradas de 1 a 6. Um dado é azul; o outro, vermelho.

a) Qual é a probabilidade de que os dois dados mostrem o mesmo número?

b) Qual é a probabilidade de que o dado azul mostre um número maior do que o do dado vermelho?

12. UEM-PR – Considere um campeonato com 16 times de futebol, nomeados de T_1 até T_{16}. Sobre a formação dos jogos e resultados das partidas, assinale o que for correto.

01) A probabilidade de, no primeiro sorteio, sair o time T_3 é de 30%.

02) Existem 16! possibilidades de escolher o primeiro jogo (dois times).

04) Se, no campeonato, em cada jogo tivermos um vencedor e se o perdedor for eliminado, então teremos 15 jogos até conhecermos o vencedor.

08) Existem exatamente 1 820 possibilidades de se formar 4 grupos de 4 times.

16) A chance de um time ganhar seus 3 primeiros jogos, considerando-se que não existe a possibilidade de empate, é de 12,5%.

13. Esc. Naval – Considere uma urna contendo cinco bolas brancas, duas pretas e três verdes. Suponha que três bolas sejam retiradas da urna, de forma aleatória e sem reposição. Qual é, aproximadamente, a probabilidade de que as três bolas retiradas tenham a mesma cor?

a) 9,17%
b) 27,51%
c) 7,44%
d) 15,95%
e) 8,33%

14. FGV – Uma seguradora vende um tipo de seguro empresarial contra certo evento raro. A probabilidade de ocorrência do referido evento em cada empresa, no prazo de um ano, é p; a ocorrência do evento em uma empresa é independente da ocorrência do mesmo evento em outra. Há 10 empresas seguradas pagando cada uma R$ 90.000,00 pelo seguro anual. Caso ocorra o evento raro em uma empresa em um ano, a seguradora deve pagar a ela R$ 1.000.000,00.

A probabilidade da seguradora ter prejuízo nessa modalidade de seguro em um ano é:

a) p^{10}
b) $(1 - p)^{10}$
c) $1 - (1 - p)^{10}$
d) $1 - p^{10}$
e) $p^5 (1 - p)^5$

15. Unifesp – Uma população de 10 camundongos, marcados de 1 a 10, será utilizada para um experimento em que serão sorteados aleatoriamente 4 camundongos. Dos 10 camundongos, apenas 2 têm certa característica C_1, 5 têm certa característica C_2 e nenhum deles tem as duas características. Pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade de que ao menos um dos camundongos com a característica C_1 esteja no grupo sorteado?

b) Qual é a probabilidade de que o grupo sorteado tenha apenas 1 camundongo com a característica C_1 e ao menos 2 com a característica C_2?

16. Enem C7-H30

Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida.

Os organizadores, então, decidiram fazer um exame *antidoping*. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que P(I), P(II) e P(III) sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III.

Comparando-se essas probabilidades, obtém-se

a) P(I) < P(III) < P(II)
b) P(I) < P(II) = P(III)
c) P(I) < P(III) < P(II)
d) P(I) = P(II) < P(III)
e) P(I) = P(II) = P(III)

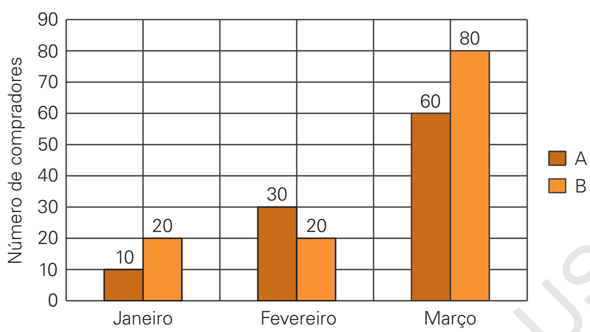
17. IME – O time de futebol "X" irá participar de um campeonato no qual não são permitidos empates. Em 80% dos jogos, "X" é o favorito. A probabilidade de "X" ser o vencedor do jogo quando ele é o favorito é 0,9. Quando "X" não é o favorito, a probabilidade de ele ser o vencedor é 0,02.

Em um determinado jogo de "X" contra "Y", o time "X" foi o vencedor. Qual a probabilidade de "X" ter sido o favorito nesse jogo?

a) 0,80
b) 0,98
c) $\frac{180}{181}$
d) $\frac{179}{181}$
e) $\frac{170}{181}$

18. Enem C6-H24

Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B.

Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

a) $\frac{1}{20}$

b) $\frac{3}{242}$

c) $\frac{5}{22}$

d) $\frac{6}{25}$

e) $\frac{7}{15}$

19. Enem C7-H30

O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

a) 0,02048

b) 0,08192

c) 0,24000

d) 0,40960

e) 0,49152

20. Enem C7-H30

O HPV é uma doença sexualmente transmissível. Uma vacina com eficácia de 98% foi criada com o objetivo de prevenir a infecção por HPV e, dessa forma, reduzir o número de pessoas que venham a desenvolver câncer de colo de útero. Uma campanha de vacinação foi lançada em 2014 pelo SUS, para um público-alvo de meninas de 11 a 13 anos de idade. Considera-se que, em uma população não vacinada, o HPV acomete 50% desse público ao longo de suas vidas. Em certo município, a equipe coordenadora da campanha decidiu vacinar meninas entre 11 e 13 anos de idade em quantidade suficiente para que a probabilidade de uma menina nessa faixa etária, escolhida ao acaso, vir a desenvolver essa doença seja, no máximo, de 5,9%. Houve cinco propostas de cobertura, de modo a atingir essa meta:

Proposta I: vacinação de 90% do público-alvo.
Proposta II: vacinação de 55,8% do público-alvo.
Proposta III: vacinação de 88,2% do público-alvo.
Proposta IV: vacinação de 49% do público-alvo.
Proposta V: vacinação de 95,9% do público-alvo.

Para diminuir os custos, a proposta escolhida deveria ser também aquela que vacinasse a menor quantidade possível de pessoas.

Disponível em: <www.virushpv.com.br>. Acesso em: 30 ago. 2014. (Adaptado)

A proposta implementada foi a de número

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

28 BINÔMIO DE NEWTON

- Binômio de Newton

HABILIDADES

- Compreender os conceitos e as fórmulas do binômio de Newton para resolver situações-problemas.
- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- Resolver situações-problemas envolvendo conhecimentos numéricos.

Introdução

O físico e matemático inglês Isaac Newton (1643-1727) foi um dos mais respeitados cientistas de todos os tempos. Dedicou-se aos estudos desde cedo e se graduou na Universidade de Cambridge, instituição na qual foi professor. Newton foi presidente da Royal Society e diretor da Casa da Moeda Inglesa.

Algumas de suas principais descobertas foram a lei da gravitação universal, as três lei de Newton, o cálculo diferencial e os estudos relacionados à óptica geométrica. Tantos feitos ao longo da vida lhe renderam, em 1705, o título de "Sir" Isaac Newton, o primeiro cientista a receber tal honraria. Tudo o que Newton representou em vida foi reconhecido pela Coroa Inglesa em morte. Sepultado em março de 1727, na Abadia de Westminster, foi homenageado com uma estátua na Universidade de Cambridge com os dizeres: "Ultrapassou os humanos pelo poder de seu pensamento".

EMOTIONART/DREAMSTIME.COM

Estátua de Isaac Newton na Universidade de Cambrigde, na Inglaterra.

BINÔMIO DE NEWTON

Os produtos notáveis são vistos desde o Ensino Fundamental. Deles sabemos que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Caso o expoente do binômio seja 3, temos:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Mantendo-se essa relação, é possível calcular as demais potências e obter o desenvolvimento do binômio $(a + b)^n$. Porém, para um elevado valor de n, o desenvolvimento do binômio se torna extremamente complexo e pouco funcional.

Há um método para o desenvolvimento da enésima potência de um binômio, conhecido como **binômio de Newton**. Para desenvolvê-lo, vamos recorrer aos conceitos já estudados em módulos anteriores: os números binomiais e algumas de suas propriedades e o triângulo de Pascal.

O teorema do binômio trata do desenvolvimento de $(a + b)^n$ para **n** natural. Um dispositivo para encontrar os coeficientes obtidos do desenvolvimento do binômio já era conhecido muito antes de Newton. O grego Euclides (300 a.C.) elaborou o binômio para n = 2 e Omar Khayyam (1100 d.C.), apesar de não haver comprovação disso, afirmava poder encontrar as potências quarta, quinta ou até outras de expoente mais elevado.

Já Isaac Newton foi responsável pela generalização do teorema do binômio para valores negativos e fracionários de **n**, os quais não abordaremos. Apesar de outros tantos terem trabalhado algebricamente o binômio, com a generalização de Newton, o teorema do binômio ficou completo. Por esse motivo passou a ser chamado **binômio de Newton**.

Produto de Stevin

Podemos determinar a lei de formação do produto **n** binômios do primeiro grau da forma $(x + a_1)$, $(x + a_2)$, ..., $(x + a_n)$, os quais diferem entre si somente pelos segundos termos.

- **Produto de dois fatores $(x + a_1) \cdot (x + a_2)$**

  $(x + a_1) \cdot (x + a_2) = x^2 + a_2x + a_1x + a_1a_2$

  Logo:

  $(x + a_1) \cdot (x + a_2) = x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2$

- **Produto de três fatores $(x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdot (x + a_3)$**

  $(x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdot (x + a_3) = x^3 + a_3x^2 + a_2x^2 + a_2a_3x + a_1x^2 + a_1a_3x + a_1a_2x + a_1a_2a_3$

  Logo:

  $(x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdot (x + a_3) = x^3 + (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)x + a_1a_2a_3$

De modo geral, no produto de **n** fatores, chamamos de:

- $S_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n$ (combinações de **n** segundos termos 1 a 1);
- $S_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_{n-1}a_n$ (combinações de **n** segundos termos 2 a 2);
- $S_3 = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + ...$ (combinações dos **n** segundos termos 3 a 3);
- $S_n = a_1a_2a_3 ... a_n$ (combinações dos **n** segundos termos **n** a **n**).

Assim, obtemos o **produto de Stevin**:

$(x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdot ... \cdot (x + a_n) = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + ... + S_n$

Observação:

- O número de parcelas de S_1 é $C_{n,1} = \binom{n}{1}$.
- O número de parcelas de S_2 é $C_{n,2} = \binom{n}{2}$.
- O número de parcelas de S_3 é $C_{n,3} = \binom{n}{3}$.
- O número de parcelas de S_n é $C_{n,n} = \binom{n}{n}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Sistema Dom Bosco – Encontre o produto $(x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 4)$

Resolução

$S_1 = 2 + 3 + 4 = 9$

$S_2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 26$

$S_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Logo, $(x + 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 4) =$

$= x^3 + 9x^2 + 26x + 24$

2. Sistema Dom Bosco – Encontre o produto $(x + 2) \cdot (x – 1) \cdot (x + 5) \cdot (x – 3)$

Resolução

$S_1 = 2 + (–1) + 5 + (–3) = 3$

$S_2 = 2 \cdot (–1) + 2 \cdot 5 + 2 \cdot (–3) + (–1) \cdot 5 + (–1) \cdot (–3) + 5 \cdot (–3) = –15$

$S_3 = 2 \cdot (–1) \cdot 5 + 2 \cdot (–1) \cdot (–3) + 2 \cdot 5 \cdot (–3) + (–1) \cdot 5 \cdot (–3) = –19$

$S_4 = 2 \cdot (–1) \cdot 5 \cdot (–3) = 30$

Logo, $(x + 2) \cdot (x – 1) \cdot (x + 5) \cdot (x – 3)$

$x^4 + 3x^3 – 15x^2 – 19x + 30$

Desenvolvimento de $(x + a)^n$

Por meio do produto de Stevin, fazendo $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = a$, obtemos:

- $S_1 = a + a + a + \ldots + a = C_{n,1} \cdot a = \binom{n}{1} \cdot a$
- $S_2 = a^2 + a^2 + a^2 + \ldots + a^2 = C_{n,2} \cdot a^2 = \binom{n}{2} \cdot a^2$
- $S_3 = a^3 + a^3 + a^3 + \ldots + a^3 = C_{n,3} \cdot a^3 = \binom{n}{3} \cdot a^3$
- $S_n = a^n$

Assim:

$(x + a)^n = x^n + \binom{n}{1} ax^{n-1} + \binom{n}{2} a^2x^{n-2} + \binom{n}{3} a^3x^{n-3} + \ldots + \binom{n}{n} a^n$

Como $\binom{n}{0} = 1$, obtemos o **binômio de Newton**:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot ax^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot a^2x^{n-2} + \binom{n}{3} \cdot a^3x^{n-3} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot a^n$$

Ele também pode ser escrito da seguinte forma:

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

Observações:

- O desenvolvimento de um binômio de grau **n** tem **n + 1** termos.
- A soma dos expoentes, em qualquer termo, é o grau **n** do binômio.
- O expoente de **x** no 1º termo é **n** e vai decrescendo de 1 em 1 até atingir 0, no último termo.
- O expoente de **a** no 1º termo é o 0 e vai decrescendo de 1 em 1 até atingir **n**, no último termo.
- Os coeficientes dos termos extremos são iguais a um $\left\{\binom{n}{0} \text{ e } \binom{n}{n}\right\}$.
- O coeficiente de qualquer termo é um número binomial de numerador **n** e denominador igual ao número de termos precedentes. Assim, por exemplo, o coeficiente do 6º termo é $\binom{n}{5}$.
- Os coeficientes do desenvolvimento de (x + a)n são os elementos da linha **n** do triângulo de Pascal.
- A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^n$ é 2^n.

Termo geral do binômio de Newton

Observando o binômio de Newton a seguir, podemos notar que ele é segmentado em muitas partes, denominadas **termos**.

$$(x+a)^n = \underbrace{\binom{n}{0} x^n}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1} ax^{n-1}}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2} a^2x^{n-2}}_{T_3} + \underbrace{\binom{n}{3} a^3x^{n-3}}_{T_4} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n} a^n}_{T_{n+1}}$$

No desenvolvimento de $(x + a)^n$, temos:

- **1º termo:** $T_1 = \binom{n}{0} a^0x^n$
- **2º termo:** $T_2 = \binom{n}{1} a^1x^{n-1}$
- **3º termo:** $T_3 = \binom{n}{2} a^2x^{n-2}$
- **4º termo:** $T_4 = \binom{n}{3} a^2x^{n-3}$
- Último termo: $T_{n+1} = \binom{n}{n} a^nx^0$

Supondo que um termo tenha **p** termos precedentes, para o termo de ordem **p + 1**, chegamos à fórmula do termo geral do binômio de Newton.

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^px^{n-p}$$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1. Sistema Dom Bosco – Qual o quarto termo do binômio $(x^2 + y)^5$?

Resolução

Para encontrar o quarto termo do binômio de Newton, p = 3 e n = 5.

Assim, aplicando a fórmula do termo geral, obtemos:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^px^{n-p} \rightarrow T_{3+1} = \binom{5}{3} y^3(x^2)^{5-3}$$

Portanto, $T_4 = 10y^3x^4$.

2. Sistema Dom Bosco – Dado o binômio $(x^2 + y)^7$, calcule o coeficiente do termo em x^8.

Resolução

Devemos, primeiramente, determinar o termo geral do desenvolvimento:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^px^{n-p} \rightarrow T_{p+1} = \binom{7}{p} y^p(x^2)^{7-p} \rightarrow$$

$$\rightarrow T_{p+1} = \binom{7}{p} y^px^{14-2p}$$

O expoente de **x** no termo geral é igual a 6. Logo:

$14 - 2p = 8 \rightarrow 2p = 6 \rightarrow p = 3$

Assim, o termo em x^8 é:

$$T_{3+1} = \binom{7}{3} y^3x^{14-2 \cdot 3} \rightarrow T_4 = 35y^3x^8$$

Logo, o número 35 é o coeficiente do termo que tem x^8.

3. Sistema Dom Bosco – Calcule o termo independente de **x** no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{20}$.

Resolução

Devemos, primeiramente, determinar o termo geral do desenvolvimento:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^px^{n-p} \rightarrow T_{p+1} = \binom{20}{p}\left(\frac{1}{x^3}\right)^p (x)^{20-p} \rightarrow$$

$$\rightarrow T_{p+1} = \binom{20}{p} x^{-3p}x^{20-p} \rightarrow$$

$$\rightarrow T_{p+1} = \binom{20}{p} x^{20-4p}$$

Para que o termo de **x** seja independente, o expoente de **x** deve ser igual a zero.

Assim, temos:

$20 - 4p = 0 \rightarrow 4p = 20 \rightarrow p = 5$

Logo:

$$T_{5+1} = \binom{20}{3} x^{20-4 \cdot 5} = \binom{20}{3} x^0$$

Portanto, $T_6 = 1\,140$.

BINÔMIO DE NEWTON

Produto de Stevin

$(x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdot \ldots\ x\ (x + a_n) = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \cdots + S_n$

Binômio de Newton

$(x + a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$

$(x + a_1)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} ax^{n-1} + \binom{n}{2} a^2x^{n-2} + \binom{n}{3} a^3x^{n-3} + \ldots + \binom{n}{n} a^n$

Termo geral

$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1. Esc. Naval – O coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x}+x^3\right)^7$ é

a) 30
b) 90
c) 120
d) 270
e) 560

Devemos, primeiramente, determinar o termo geral do desenvolvimento:

$T_{p+1} = \binom{7}{p}\left(\frac{2}{x}\right)^{7-p}(x^3)^p \rightarrow T_{p+1} = \binom{7}{p}2^{7-p}x^{-7+p}x^{3p} = \binom{7}{p}2^{7-p}x^{-7+4p}$

O expoente de x no termo geral é igual a 5. Logo:

$-7 + 4p = 5 \rightarrow 4p = 12 \rightarrow p = 3$

Assim, o termo em x^5 é:

$T_{3+1} = \binom{7}{3}2^{7-3}x^{-7+4\cdot 3} \rightarrow T_4 = 35 \cdot 2^4 = 35 \cdot 16x^5$

Logo, $T_4 = 560x^5$

O número 560 é o coeficiente do termo que tem x^5.

2. FGV (adaptado) – Qual o termo independente de x do desenvolvimento de $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^{12}$?

Termo geral:

$T_{p+1} = \binom{12}{p}\left(\frac{1}{x^3}\right)^p (x)^{12-p} \rightarrow T_{p+1} = \binom{12}{p}x^{-3p}x^{12-p} \rightarrow$

$\rightarrow T_{p+1} = \binom{12}{p}x^{12-4p}$

Para que o termo de **x** seja independente, o expoente de **x** deve ser igual a zero.

Assim, temos:

$12 - 4p = 0 \rightarrow 4p = 12 \rightarrow p = 3$

Logo:

$T_{3+1} = \binom{12}{3}x^{12-4\cdot 3} = \binom{12}{3}x^0$

Portanto, $T_4 = 220$.

3. Ifal (adaptado) C1-H2

Dando um desafio sobre o conteúdo novo aos seus alunos, o professor passa o seguinte exercício:

A expressão $(x + y)^n$, com n natural, é conhecida como binômio de Newton. Seu desenvolvimento é dado assim:

$(x + y)^n = C_{n,0}\,x^ny^0 + C_{n,1}\,x^{n-p}y^p + C_{n,n}\,x^{n-n}y^n$

Por exemplo:

$(x + y)^3 = C_{3,0}\,x^3y^0 + C_{3,1}\,x^{3-1}y^1 + C_{3,2}\,x^{3-2}y^2 + C_{3,3}\,x^{3-3}y^3 =$

$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Assim, a expressão $4x^2 + 4xy + y^2$ corresponde a

a) $C_{2,0}\,(2x)^2\,y^0 + C_{2,1}\,(4x)^1\,y^1 + C_{2,2}\,(2x)^0\,y^2$
b) $C_{2,0}\,(2x)^2\,y^0 + C_{2,1}\,(2x)^1\,y^1 + C_{2,2}\,(4x)^0\,y^2$
c) $C_{2,0}\,(4x)^2\,y^0 + C_{2,1}\,(2x)^1\,y^1 + C_{2,2}\,(2x)^0\,y^2$
d) $C_{2,0}\,(4x)^2\,y^0 + C_{2,1}\,(4x)^1\,y^1 + C_{2,2}\,(4x)^0\,y^2$
e) $C_{2,0}\,(2x)^2\,y^0 + C_{2,1}\,(2x)^1\,y^1 + C_{2,2}\,(2x)^0\,y^2$

$C_{2,0}(2x)^2y^0 = 4x^2$

$C_{2,1}(2x)^1y^1 = 4xy$

$C_{2,2}(2x)^0y^2 = y^2$

$4x^2 + 4xy + y^2 = C_{2,0}(2x)^2y^0 + C_{2,1}(2x)^1y^1 + C_{2,2}(2x)^0y^2$

4. UFPE – Encontre o inteiro positivo n para o qual o quinto termo da expansão binomial de $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ seja independente de x na expansão em potências decrescentes de x.

Para que o quinto termo de x seja independente, o expoente de x deve ser igual a zero em T_{4+1}.

Termo geral:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{n-p}(x^{-1})^p \rightarrow T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{\frac{n-p}{3}}x^{-p} \rightarrow T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{\frac{n-4p}{3}}$$

$$T_{4+1} = \binom{n}{4}x^{\frac{n-4\cdot 4}{3}}$$

$$\frac{n-4\cdot 4}{3} = 0 \rightarrow n - 16 = 0$$

Portanto, $n = 16$.

5. Unioeste-PR – O valor da expressão $153^4 - 4 \cdot 153^3 \cdot 3 + 6 \cdot 153^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 153 \cdot 3^3 + 3^4$ é igual a

a) $153\ (153 - 3)^3 + 3$
b) 147^4
c) $15^4 \cdot 3^4$
d) 153^4
e) $15^4 \cdot 10^4$

Substituindo 153 por x e 3 por y, obtemos:

$153^4 - 4 \cdot 153^3 \cdot 3 + 6 \cdot 153^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 153 \cdot 3^3 + 3^4$

$x^4y^0 - 4 \cdot x^3y^1 + 6x^2y^2 - 4 \cdot x^1y^3 + x^0y^4 = (x - y)^4$

$(x - y)^4 = (153 - 3)^4 = 150^4 = 15^4 \cdot 10^4$

6. Uern – Qual é o valor do termo independente de x do binômio $\left(\frac{2}{x^2} + x\right)^n$ considerando que o mesmo corresponde ao sétimo termo de seu desenvolvimento?

a) 435
b) 672
c) 543
d) 245

O termo geral será:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^{n-p} \cdot x^p = \binom{n}{p} \cdot \frac{2^{n-p}}{x^{2n-2p}} \cdot x^p \rightarrow$$

$$\rightarrow T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot 2^{n-p} \cdot x^{3p-2n}$$

Como o termo independente de x é o sétimo termo, $p = 6$. Assim, obtemos:

$$T_{6+1} = \binom{n}{6} \cdot 2^{n-6} \cdot x^{3\cdot 6-2n} \rightarrow T_7 = \binom{n}{6} \cdot 2^{n-6} \cdot x^{18-2n}$$

$18 - 2n = 0 \rightarrow 2n = 18 \rightarrow n = 9.$

Dessa forma, encontramos o valor numérico do sétimo termo:

$$T_7 = \binom{9}{6} \cdot 2^{9-6} \cdot x^{18-2\cdot 9}$$

$$T_7 = 84 \cdot 2^3 = 672$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. EsPCEx (Aman) – O termo independente de x no desenvolvimento de

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$$ é igual a

a) 110
b) 210
c) 310
d) 410
e) 510

8. FGV – Desenvolvendo-se o binômio $P(x) = (x + 1)^5$, podemos dizer que a soma de seus coeficientes é

a) 16
b) 24
c) 32
d) 40
e) 48

9. UPF-RS (adaptado) – Desenvolvendo o binômio $(2x - 3y)^{3n}$, obtém-se um polinômio de 16 termos. Qual o valor de n?

10. Ifal – O termo independente no desenvolvimento do binômio $\left(2x^2 - \frac{3}{x^3}\right)^5$ é

a) –720
b) –360
c) 0
d) 360
e) 720

11. Uema – Seja o desenvolvimento do Teorema Binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b +$$

$$+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

onde $n \in \mathbb{N}$, a e $b \in \mathbb{R}$ e os coeficientes binomiais $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ determinados por $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$, com n e $p \in \mathbb{R}$ e $n > p$.

Considerando as condições acima em relação ao Teorema Binomial,

a) desenvolva $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$;

b) para determinar um termo específico do binômio de Newton, é utilizado o termo geral $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$. Determine o 8º termo do binômio $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$.

12. Uern – A soma dos algarismos do termo independente de x no desenvolvimento do binômio de Newton $\left(\frac{2}{x} + x\right)^8$ é

a) 3
b) 4
c) 6
d) 7

13. Uece – No desenvolvimento de $x(2x + 1)^{10}$, o coeficiente de x^3 é

a) 480 **b)** 320 **c)** 260 **d)** 180

14. UEM-PR – Dados os inteiros não negativos n e k, sendo $k \le n$, define-se o símbolo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Para cada inteiro $n > 1$, considere $p_n(x)$ como sendo o polinômio

$$\binom{n}{n}x^n = \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n-2}x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{1}x + \binom{n}{0}.$$

Assinale o que for **correto**.

01) $p_4(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

02) Para todo inteiro n positivo, o polinômio $p_n(x)$ admite raízes não reais.

04) Para todos os valores de n, o polinômio $p_n(x)$ é divisível por $x + 1$.

08) Para todo inteiro $n > 2$, existem dois números racionais distintos, a e b, para os quais $p_n(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$.

16) Para cada inteiro positivo n, a soma de todos os coeficientes de $p_n(x)$ é 2^n.

15. Uece – As soluções, em $\mathbb{R}$, da equação $\cos^4 x - 4\cos^3 x + 6\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$ são

Sugestão: use o desenvolvimento do binômio $(p - q)^4$.

a) $x = 2k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

b) $x = (2k + 1)\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

c) $x = k\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

d) $x = (4k + 1)\pi$, onde k é um inteiro qualquer.

16. Uece (adaptado) – Se **n** é um número natural maior do que dois, ao ordenarmos o desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^n$ segundo as potências decrescentes de x, verificamos que os coeficientes dos três primeiros termos estão em progressão aritmética. Nessas condições, qual é o valor de **n**?

17. Uece – O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de

$$\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^3$$ é

a) 18 **b)** 24 **c)** 34 **d)** 30

ESTUDO PARA O ENEM

18. EsPCEx (adaptado) C1-H2

A escala de energia solta por um experimento de um professor de Física pode ser calculada através da expressão

$E = (999)^5 + 5 \cdot (999)^4 + 10 \cdot (999)^3 + 10 \cdot (999)^2 + 5 \cdot (999) + 1$

a) $9 \cdot 10^3$
b) $9 \cdot 10^{15}$
c) 10^{15}
d) $999 \cdot 999$
e) $999 \cdot 10^{15}$

19. FGV-RJ C1-H2

Um grupo de oito alunos está sendo liderado em um passeio por dois professores e, em determinado momento, deve se dividir em dois subgrupos. Cada professor irá liderar um dos subgrupos e cada aluno deverá escolher um professor.

A única restrição é que cada subgrupo deve ter no mínimo um aluno.

O número de maneiras distintas de essa subdivisão ser feita é

a) 128
b) 64
c) 248
d) 254
e) 256

20. FGV C1-H3

Uma aplicação financeira de C reais à taxa mensal de juros compostos de x% é resgatada depois de 8 meses no montante igual a C_8 reais. Sendo assim, $\frac{C_8}{C}$ é um polinômio P(x) de grau 8 cujo coeficiente do termo em x^5 será

a) $70 \cdot 10^{-8}$
b) $35 \cdot 10^{-8}$
c) $56 \cdot 10^{-10}$
d) $35 \cdot 10^{-10}$
e) $21 \cdot 10^{-10}$

EXERCÍCIOS INTERDISCIPLINARES

21. UEM-PR (adaptado) – Em uma Reserva Extrativista com 100 km², existem 3 espécies (A, B e C) de árvores – de interesse comercial para extração legal de madeira – que, somadas, totalizam 550 indivíduos.

A espécie A tem o dobro de indivíduos da espécie B e $\frac{1}{4}$ de indivíduos da espécie C. A cada cinco anos, nessa área, podem ser legalmente extraídos 10% dos indivíduos de interesse de somente uma espécie, e a espécie extraída nesses cinco anos somente poderá ser novamente extraída após a extração das outras duas espécies, visando assim garantir os ciclos reprodutivos de cada espécie.

Com base no texto e nos conhecimentos científicos, julgue as afirmações e assinale o que for correto:

I. A cada cinco anos, 50 indivíduos de C podem ser legalmente extraídos.

II. 5 indivíduos de B podem ser legalmente extraídos a cada 15 anos.

III. Em média, existe 1 indivíduo de A por km².

IV. A exploração controlada de ambientes naturais que permita às espécies tempo hábil para sua reprodução leva ao desmatamento e à extinção das espécies.

V. A porção de interesse econômico das árvores, denominada madeira, onde podem ser evidenciados os anéis de crescimento, é constituída principalmente por xilema.

a) Apenas I, II e III estão corretas.
b) Apenas I, II e V estão corretas.
c) Apenas II, III e IV estão corretas.
d) Apenas II, III e V estão corretas.
e) Apenas III, IV e V estão corretas.

22. UEM-PR – Um estudante representou a estrutura cíclica espacial da molécula da frutose, $C_6H_{12}O_6$, por meio de um polígono de cinco lados com vértices nos pontos A(0, 7), B(– 5, 5), C(– 3, 3), D(3, 3) e E(5, 5) num sistema cartesiano. Assinale o que for correto.

01) Todos os átomos de carbono, na estrutura da frutose, são carbonos primários.

02) Os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AE}$ desta representação são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

04) Nesta representação, a reta definida pelos pontos C e D é paralela ao eixo das ordenadas.

08) A frutose é um monossacarídeo porque não se desdobra em açúcares mais simples.

16) Se a = b, então o ponto P(a, b) está alinhado com os pontos D e E.

23. Fuvest-SP – Francisco deve elaborar uma pesquisa sobre dois artrópodes distintos. Eles serão selecionados, ao acaso, da seguinte relação: aranha, besouro, barata, lagosta, camarão, formiga, ácaro, caranguejo, abelha, carrapato, escorpião e gafanhoto.

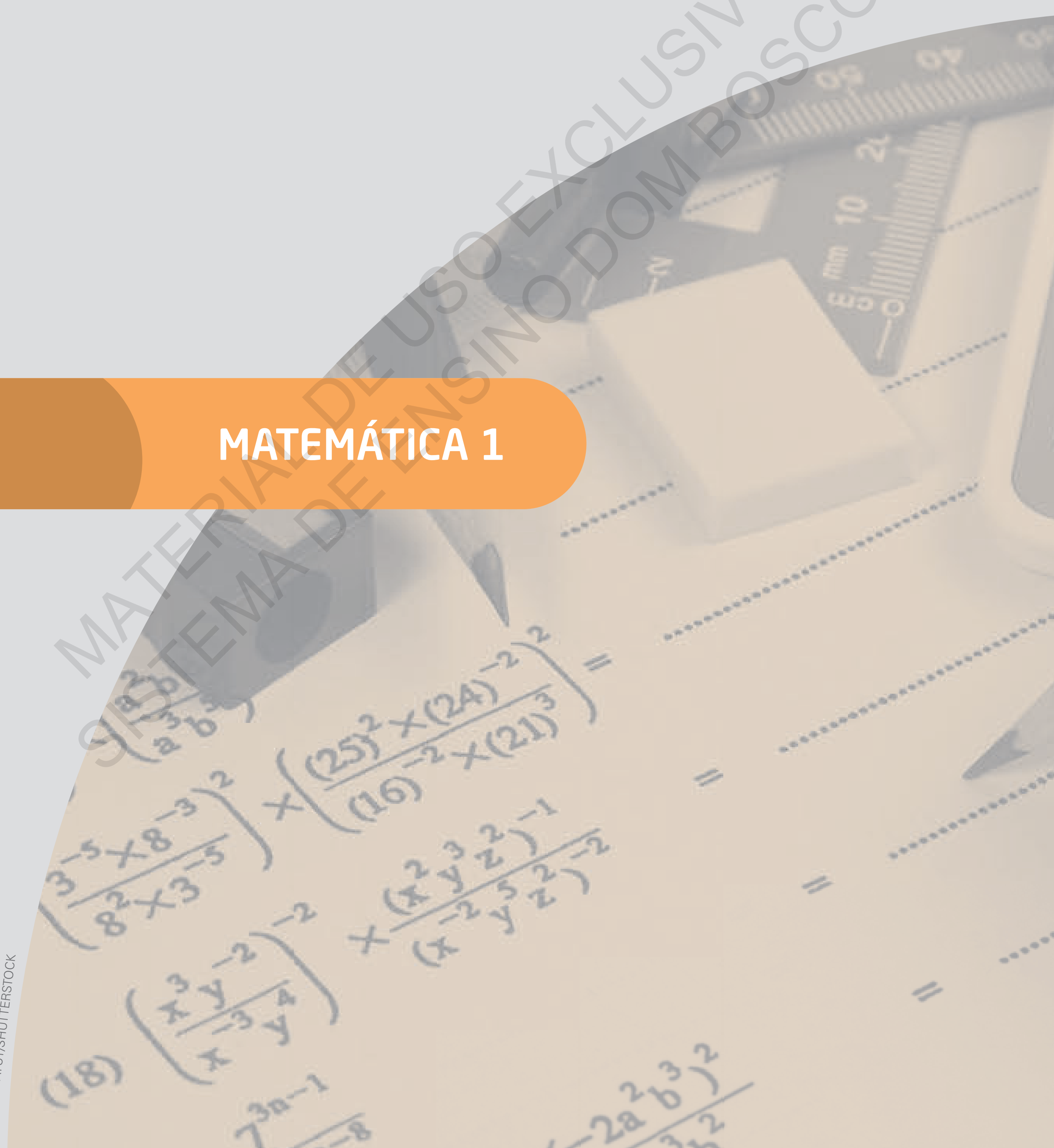
Qual é a probabilidade de que ambos os artrópodes escolhidos para a pesquisa de Francisco não sejam insetos?

a) $\frac{49}{144}$ **b)** $\frac{14}{33}$ **c)** $\frac{7}{22}$ **d)** $\frac{5}{22}$ **e)** $\frac{15}{144}$

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 1



WITTAYAYUT/SHUTTERSTOCK

APRESENTAÇÃO

A disciplina de Matemática é uma ciência de características específicas, que se organiza por **meio de definições**, **teoremas** e **demonstrações**. Os alunos do ensino pré-vestibular devem demonstrar teoremas, justificar definições e, principalmente, usar a Matemática para **resolver problemas do cotidiano** e compreender fenômenos de outras áreas do conhecimento. Para tanto, precisam valorizar o raciocínio matemático, nos aspectos de formular questões, indagar a existência de solução, estabelecer hipóteses e conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos e argumentar de maneira lógico-dedutiva.

Este material respalda-se na qualidade dos conhecimentos e na prática de sala de aula, abrangendo as áreas de conhecimento do Ensino Médio, cujos conteúdos conceituais são exigidos nos principais vestibulares do Brasil e no novo Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), e contempla uma **ampla coletânea de questões** extraídas de tais provas, com respectivos gabaritos e resoluções comentadas.

Por critério de organização didática, os conteúdos conceituais estão separados da sequência de exercícios e distribuídos para atender à demanda das diversas formatações de cursos, considerando as prioridades dos principais vestibulares e do Enem. Com base nisso, o material didático produzido para essa etapa de ensino contempla e destaca inúmeras competências da nova Matriz de Referências para o Enem e, consequentemente, habilidades a elas relacionadas.

CONTEÚDO

MATEMÁTICA 1

Volume	Módulo	Conteúdo
4	45	Introdução a matrizes
	46	Operações com matrizes
	47	Matriz inversa e equação matricial
	48	Determinantes
	49	Determinantes de matriz de ordem n
	50	Propriedades do determinante
	51	Introdução a sistemas lineares
	52	Sistemas lineares – método da igualdade
	53	Sistemas lineares – método da redução
	54	Sistemas lineares – escalonamento
	55	Sistemas lineares – gráfico e matriz associada
	56	Sistemas lineares – regra de Cramer

MATEMÁTICA 2

Volume	Módulo	Conteúdo
4	45	Introdução à geometria analítica
	46	Introdução à geometria analítica – área de polígonos
	47	Estudo da reta real – equação fundamental da reta
	48	Estudo da reta real – outras equações da reta
	49	Estudo da reta real – posição relativa entre retas
	50	Distância entre ponto e reta
	51	Equações da circunferência – equação reduzida
	52	Equações da circunferência – equação geral
	53	Equações da circunferência – posições relativas
	54	Cônicas – elipse
	55	Cônicas – hipérbole
	56	Cônicas – parábola

MATEMÁTICA 3

Volume	Módulo	Conteúdo
4	23	Introdução à probabilidade I
	24	Introdução à probabilidade II
	25	Probabilidade
	26	Probabilidade condicional e da intersecção de eventos
	27	Probabilidade de eventos independentes
	28	Binômio de Newton

45 INTRODUÇÃO A MATRIZES

Comentários sobre o módulo

O tema deste módulo são as matrizes e sua representação. Além disso, são abordadas as matrizes especiais e transpostas e a igualdade entre matrizes.

É possível levar para as aulas tabelas de jornais quaisquer e, com base nelas, instigar a representação matricial, identificando se é ou não especial. Tal atividade objetiva fixar os conteúdos abordados.

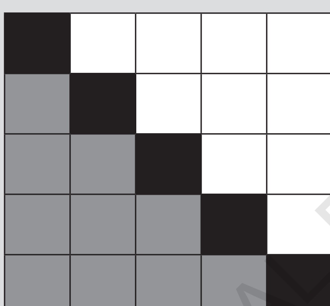
Exercícios propostos

7. A

Do enunciado, temos que a matriz M será:

$$\begin{bmatrix} 0 & 255 & 255 & 255 & 255 \\ 127 & 0 & 255 & 255 & 255 \\ 127 & 127 & 0 & 255 & 255 \\ 127 & 127 & 127 & 0 & 255 \\ 127 & 127 & 127 & 127 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, utilizando as cores, obtemos:



Assim, haverá o mesmo número de *pixels* brancos e cinzas.

8. A

Para determinar o quanto o amigo A_j deve, é preciso somar tudo o que ele pegou emprestado e subtrair daquilo que ele emprestou. Ou seja, é necessário somar todos os elementos da coluna j_4 e, então, subtrair do valor obtido na soma de todos os elementos da linha i_4 das duas matrizes.

Assim, temos:

Valor pego $= 10 + 1 + 4 + 2 + 2 + 7 + 11 + 4 = 41 \rightarrow$ R\$ 41,00.

Valor emprestado $= 5 + 2 + 10 + 4 + 5 + 5 = 31 \rightarrow$ R\$ 31,00.

Saldo devido $= 41 - 31 = 10 \rightarrow$ R\$ 10,00.

Portanto, A_4 ainda deve R\$ 10,00.

9. C

Do enunciado, sabemos que os apartamentos de número 3 comportam 12 pessoas. Logo:

$5 + y + x + 1 = 12 \rightarrow x + y = 6$

Assim, $n = 4 + 1 + 6 + x + 3 + y + 12 = 26 + x + y$.

Como $x + y = 6 \rightarrow n = 26 + 6 = 32$.

10. Do enunciado, sabemos que as entradas são descritas como "o número de desafios que 'i' fez a 'j'". Assim, "i" é quem mais desafia, e "j", o mais desafiado. Devemos somar os valores de todas as linhas e colunas.

Sendo assim, o maior valor das entradas de uma linha somada será o matemático que mais desafiou. Por sua vez, o maior valor das entradas de uma coluna somada será o matemático que mais foi desafiado. Logo:

Linha 1 $\rightarrow 0 + 5 + 2 + 7 = 14$
Coluna 1 $\rightarrow 0 + 6 + 1 + 2 = 9$

Linha 2 $\rightarrow 6 + 0 + 4 + 1 = 11$
Coluna 2 $\rightarrow 5 + 0 + 7 + 1 = 13$

Linha 3 $\rightarrow 1 + 7 + 0 + 3 = 11$
Coluna 3 $\rightarrow 2 + 4 + 0 + 8 = 14$

Linha 4 $\rightarrow 2 + 1 + 8 + 0 = 11$
Coluna 4 $\rightarrow 7 + 1 + 3 + 0 = 11$

Verificamos, portanto, que a linha 1 e a coluna 3 têm as maiores somas.

Do enunciado, sabemos que a primeira linha se refere a Anselmo e a terceira coluna, a Pedro. Logo, Anselmo foi o maior desafiador e Pedro, o maior desafiado.

11. C

Para que a matriz seja simétrica, é preciso que:

$x + y + z = 4$ (I)

$3y - z + 2 = y - 2z + 3 \rightarrow 2y = 1 - z$ (II)

$z = -5$ (III)

Substituindo III em II, temos:

$2y = 1 - (-5) \rightarrow y = \dfrac{6}{2} \rightarrow y = 3$

Substituindo os valores de y e z em I, temos:

$x + 3 + (-5) = 4 \rightarrow x = 4 + 2 \rightarrow x = 6$.

12. A

Do enunciado, temos:

$$A^2 = aA + bI \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2a \\ 0 & a+b \end{bmatrix}$$

Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a=4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Logo, $a \cdot b = 2 \cdot (-1) = -2$.

13. E

Analisando os itens, temos:

I) Para verificarmos o número de populações de insetos, devemos somar todos os elementos da matriz. Logo:

24 + 19 + 21 + 15 + 11 + 18 + 12 + 16 + 14 = 150

Portanto, correto.

II) A quantidade de populações de cupins é dada somando-se os elementos da coluna 3. Logo, 21 + 18 + 14 = 53.

Portanto, correto.

III) Do enunciado, sabemos que o número de populações pertencentes à ordem Hymenoptera refere-se a abelhas e formigas. Assim, devemos somar os valores das colunas 1 e 2. Dessa forma, 24 + 15 + 12 + 19 + 11 + 16 = 97.

Portanto, correto.

14. Podemos verificar que os termos das matrizes estão em progressão aritmética de razão 16, ou seja:

(0, 16, 32, ...) a_{11}

(4, 20, 36, ...) a_{21}

(8, 24, 40, ...) a_{31}

(12, 28, 44, ...) a_{41}

Das progressões aritméticas, temos:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$.

$$\begin{array}{l|l} a_n & r \\ \hline a_1 & (n-1) \end{array}$$

Ou seja:

$$\begin{array}{r|l} 75\,432 & 16 \\ \hline 8 & 4714 \end{array}$$

Logo, 75 432 = 4 714 · 16 + 8.

Como o resto da divisão é 8, concluímos que o termo está em a_{31}. Ou seja, i = 3 e j = 1.

Como n – 1 = 4 714 → n = 4 715.

15. B

Analisando os itens, temos:

I) Se a matriz F é identidade, $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ e $a_{33} = 1$. Os demais elementos serão iguais a zero, o que significa que o fungo 1 tem capacidade de se reproduzir apenas no meio 1; o fungo 2, apenas no meio 2; o fungo 3, apenas no meio 3. Portanto, incorreto.

II) Se a matriz é simétrica, $a_{ij} = a_{ji}$. Assim, a espécie F_1 tem a mesma capacidade de reprodução no meio M_2 que a espécie F_2 no meio M_1. Logo, correto.

III) Das informações dadas no enunciado, temos a matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Como esta é uma matriz triangular, o item está correto.

16. E

Analisando os itens, temos:

I) Do enunciado, sabemos que $a_{ij} = 2^{i-1}(2j - 1)$ e $1 \leq i, j \leq 5$.

Logo, temos que $a_{ij11} = 2^{i-1}(2(j+1) - 1) = 2^{i-1}(2j - 1) + 2 \cdot 2^{i-1} = a_{ij} + 2^i$. Assim, trata-se de uma PA de razão 2^i. De outro modo, se calcularmos os valores, obtemos a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 18 \\ 4 & 12 & 20 & 28 & 36 \\ 8 & 24 & 40 & 56 & 72 \\ 16 & 48 & 80 & 112 & 144 \end{pmatrix}$$

Portanto, verdadeiro.

II) Do item anterior, podemos verificar que cada coluna da matriz está em PG de razão 2. Portanto, verdadeiro.

III) tr(A) ou traço é dado pela soma dos elementos da diagonal de A. Sendo assim, temos que tr(A) = 1 + 6 + 20 + 56 + 144 = 227. Como 227 é um número primo, este item também é verdadeiro.

17. Em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas, há $6 \cdot 5 = 30$ elementos.

As primeiras e últimas linhas e colunas têm, juntas, $2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 10 + 12 = 22$ elementos. Como 4 são repetidos, há 18 elementos não internos ao todo. Logo, temos $30 - 18 = 12$ elementos internos.

Estudo para o Enem

18. A

Da matriz apresentada no enunciado, temos que o dia é representado pelas colunas (j). Assim, as medições no dia 4 estão na coluna 4. Obtendo a média, temos:

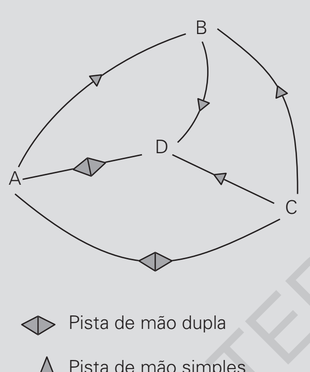
$$\text{Média} = \frac{44+48+52+40}{4} = 46 \text{ dB}.$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. B

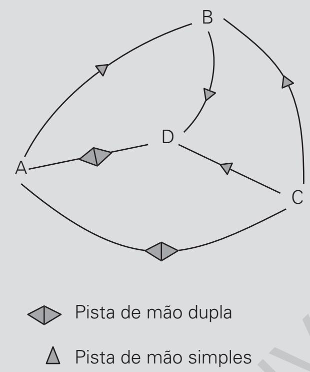
Do enunciado, temos:



$$\begin{array}{cc} & \text{destino} \\ & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \text{origem} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Logo, as linhas representam as cidades de origem e as colunas, as cidades de destino.

Após as mudanças nas vias, a nova matriz obtida é:



$$\begin{array}{cc} & \text{destino} \\ & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \text{origem} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Assim, 6 elementos mudarão.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. C

Do enunciado, sabemos que $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 3$. Logo, a ordem da matriz A é $5 \cdot 3$. Sendo $10\% = 0{,}1$ a taxa de crescimento, o fator de crescimento dos reservatórios é igual a $(1 + 0{,}1)$. Logo, $B_{5\times3} = (1+k) \cdot A_{5\times3}$, com $k = 0{,}1$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

46 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos as operações com matrizes. Vimos a adição, a subtração e a multiplicação entre matrizes e suas propriedades, bem como a multiplicação de um número real por uma matriz. Discutir situações concretas com a aplicação desses conhecimentos no cotidiano faz que os alunos possam compreender melhor o conteúdo; para isso, é possível aprofundar o que foi discutido na abertura da aula, por exemplo.

Exercícios propostos

7. A

Para obtermos miligramas do nutriente 2 presente em um quilograma da mistura de rações, calculamos o produto das matrizes. Logo:

$$\begin{bmatrix} 340 & 520 & 305 & 485 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 35\% \\ 25\% \\ 30\% \\ 10\% \end{bmatrix} =$$

$$= 340 \cdot 0{,}35 + 520 \cdot 0{,}25 + 305 \cdot 0{,}30 + 485 \cdot 0{,}10 =$$
$$= 389 \text{ mg}.$$

8. A

A soma dos elementos da diagonal secundária da matriz B é:

$$b_{13} + b_{22} + b_{31} = a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} + a_{21}a_{12} + a^2_{22} + a_{23}a_{32} + a_{11}a_{31} + a_{32}a_{21} + a_{33}a_{31}$$

$$b_{13} + b_{22} + b_{31} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 2 + 4^2 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 4 = 149$$

9. A

Do enunciado, temos que o número total de samambaias na reserva florestal é dado por:

$$0 \cdot 8 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 14 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 3$$

Para obtermos essa expressão, a operação necessária entre as matrizes A e B é $A^t \times B$.

10. a) Do enunciado, temos que $c_{ij} = (2i - 3j)^2$ e $b_{ij} = i + j$. Logo:

$$C = \begin{bmatrix} (2-3)^2 & (2-6)^2 & (2-9)^2 & (2-12)^2 \\ (4-3)^2 & (4-6)^2 & (4-9)^2 & (4-12)^2 \\ (6-3)^2 & (6-6)^2 & (6-9)^2 & (6-12)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 16 & 49 & 100 \\ 1 & 4 & 25 & 64 \\ 9 & 0 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & 2+4 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Assim, $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

b) Do enunciado, temos que $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times1}$. Do item anterior, temos que B é $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$. Logo, X é:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3+4+5 \\ 3+4+5+6 \\ 4+5+6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 22 \end{bmatrix}$$

O número total, em milhares de unidades, de produtos transportados da fábrica 1 a todas as quatro lojas é dado por todo x_{ij}.

A matriz Y é:

$$Y = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 16 & 49 & 100 \\ 1 & 4 & 25 & 64 \\ 9 & 0 & 9 & 36 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 16 & 49 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 746 & 912 & 1078 \end{bmatrix}$$

O custo total com transporte da fábrica 1 até as quatro lojas é indicado por y_{11}. Já y_{1k}, com $2 \le k \le 3$, refere-se ao custo total que a fábrica 1 teria para transportar a produção das fábricas 2 e 3 até as quatro lojas.

11. B

Do enunciado, temos que $AB = I_2$, e A é do tipo 2×3. Portanto, B deve ser do tipo 3×2.

Sabendo que $b_{ij} = i - 2j$, temos que $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Assim:

$$A \cdot B = I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} b & -2a-b \\ d & -2c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -\frac{1}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Logo, como $b = 1$, este é o maior elemento de A.

12. A

Fazendo A^2, temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Já A^3 será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, é possível observar que, quando A é elevado a um expoente par, obtemos uma matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quando o expoente é ímpar, obtemos $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Logo, a soma pode ser representada por:

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{39} + A^{40} =$$

$$= 20\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 20\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -20 & 20 \end{pmatrix}.$$

13. B

Temos que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = A^4 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...

$$A^{2016} = A^{2014} \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{2017} = A^{2016} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto, $A^{2017} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

14. Para que o produto das matrizes A e B seja comutativo, $c_{ij} = d_{ij}$ para todo i e j, com $(c_{ij})_{3\times3} = C = A \times B$ e $(d_{ij})_{3\times3} = D = B \times A$.

Como $c_{11} = 2$ e $d_{11} = 0$, o produto de A e B não é comutativo.

Fazendo $A \times B$ e $B \times A$, concluímos que não são comutativas:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

15. Do enunciado, temos a seguinte equação matricial: $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot K = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para que a multiplicação seja possível, a matriz K deve ser do tipo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Logo:

$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Assim, teremos:

$6x + 2y = -6$ (I)

$4x + 3y = 1$ (II)

Multiplicando I por -3 e II por 2, temos:

$-18x - 6y = 18$

$8x + 6y = 2$

Somando as equações:

$$-10x = 20 \rightarrow x = \frac{20}{-10} \rightarrow x = -2$$

Substituindo x na equação 1:

$$6(-2) + 2y = -6 \rightarrow -12 + 2y = -6 \rightarrow 2y = 6 \rightarrow$$
$$\rightarrow y = 3$$

Assim, a soma de todos os elementos de K será:

$$x + y = (-2) + 3 = 1$$

16. C

Analisando os itens, temos:

$$\text{I)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Sim, pois todos os elementos acima da diagonal principal serão nulos. Logo, correta.

II) A matriz diagonal é aquela cujos elementos são nulos, exceto os da diagonal principal. Portanto, incorreta.

III) A matriz identidade deve ser sempre quadrada (mesmo número de linhas e colunas). Logo, incorreta.

IV) Não é possível somar matrizes com diferentes números de linhas e colunas. Portanto, incorreta.

V) A matriz transposta será do tipo $n \times m$. Logo a multiplicação de A por sua transposta A^t será uma matriz $m \times m$. Portanto, correta.

17. a) Correta, pois:

$$A = \begin{bmatrix} c & 5^b \\ \cos\theta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 5^{-1} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \ln\sqrt[3]{e} & \frac{10}{50} \\ \ln\sqrt{e} & 7^{a+2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 7^0 \end{bmatrix}$$

b) Correta, pois:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \cos\theta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{10}{50} \\ \frac{1}{2} & 7^{a+2b} \end{bmatrix} \rightarrow a_{11} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \ln\sqrt[6]{e}$$

Estudo para o Enem

18. B

Do enunciado, temos que a mensagem final M é dada por A + B = M. Logo:

$$M = \begin{bmatrix} 12 & 20 & 13 & 8 & 50 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 34 & 32 & 3 & 4 & 0 \\ 45 & 26 & 13 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 45 & 16 & 20 & 11 & 17 & 0 \\ 1 & 50 & 21 & 3 & 35 & 42 & 11 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 10 & 11 & 10 & 15 & -8 & 30 & -1 \\ 14 & 31 & 19 & 19 & -3 & -4 & 0 \\ 6 & -4 & 8 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & 16 & 32 & 20 & -17 & 0 \\ 44 & -8 & 13 & 30 & 20 & 10 & 20 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 31 & 23 & 23 & 42 & 55 & 0 \\ 14 & 31 & 53 & 51 & 0 & 0 & 0 \\ 51 & 22 & 21 & 55 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 51 & 32 & 52 & 31 & 0 & 0 \\ 45 & 42 & 34 & 33 & 55 & 52 & 31 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a mensagem enviada pela chefia a José foi: "Sorria, você está sendo filmado".

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. C

Se $Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$, a matriz

$V = (v_{ij})_{3\times1}$ será dada por $V = Q \cdot C$. Logo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,400 \\ 7\,100 \\ 8\,900 \end{pmatrix}.$$

Portanto, sendo cada elemento v_{i1} da matriz V o custo unitário da casa Tipo i, com i = 1, 2, 3, o preço unitário de cada tipo de casa e o custo total serão, respectivamente, 4 400, 7 100, 8 900 e 81 700.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

20. E

Para calcular a média aritmética de quatro notas, somamos todas elas e as dividimos por 4. A matriz 4×4 obtida pelas notas deve ser multiplicada por uma matriz coluna 4×1. Assim:

$$\begin{bmatrix} 5{,}9 & 6{,}2 & 4{,}5 & 5{,}5 \\ 6{,}6 & 7{,}1 & 6{,}5 & 8{,}4 \\ 8{,}6 & 6{,}8 & 7{,}8 & 9{,}0 \\ 6{,}2 & 5{,}6 & 6{,}9 & 7{,}7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5{,}9+6{,}2+4{,}5+5{,}5}{4} \\ \frac{6{,}6+7{,}1+6{,}5+8{,}4}{4} \\ \frac{8{,}6+6{,}8+7{,}8+9}{4} \\ \frac{6{,}2+5{,}6+5{,}9+7{,}7}{4} \end{bmatrix}$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

47 MATRIZ INVERSA E EQUAÇÃO MATRICIAL

Comentários sobre o módulo

Os temas deste módulo são as matrizes inversas e as equações matriciais.

Para os estudos desses conteúdos, é importante que as operações entre matrizes tenham sido compreendidas pelos alunos. Buscar situações relacionadas à tecnologia e que envolvam matrizes pode motivá-los nesse sentido.

Aproveite os conceitos de matriz inversa e equações matriciais para identificar se algum conceito de operações entre matrizes não foi fixado.

Para ir além

Andrei Andreyevich Markov (1856-1922) foi um notável matemático russo. Formou-se em 1878, na Universidade Estatal de São Petersburgo, instituição na qual se tornou professor em 1886.

Entre seus estudos, o de maior notoriedade são as chamadas "Cadeias de Markov", um processo estocástico caracterizado por seu estado futuro depender apenas de seu estado atual, e os estados passados não influenciam no estado futuro.

As cadeias de Markov apresentam muitas aplicações, como modelos estatísticos de processos do mundo real.

Pesquise mais sobre o estudo de Markov e as aplicações desse conhecimento em nosso cotidiano.

Exercícios propostos

7. A

Sabendo que $A \cdot A^{-1} = I$, sendo I a matriz identidade de ordem 2, temos que:

$$X \cdot A = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X \cdot I = B \cdot A^{-1}$$

$$X = [8 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow X = [24 - 15 \quad -8 + 6] =$$

$$= [9 \quad -2]$$

Logo, a soma dos elementos de X será $9 + (-2) = 7$.

8. D

Analisando os itens, temos:

I) Como $A = [x \quad y \quad 1]$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ -1 & 9 & -2 \\ 8 & 2 & 12 \end{bmatrix}$

$$AB = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ -1 & 9 & -2 \\ 8 & 2 & 12 \end{bmatrix} =$$

$$= [4x - y + 8 \quad x + 9y + 2 \quad 8x - 2y + 12]$$

Ou seja, uma matriz linha. Portanto, correta.

II) Não é possível realizar esta multiplicação. Logo, incorreta.

III) Sendo $A = [x \quad y \quad 1]$, A^t será uma matriz do tipo 3×1. Portanto, correta.

IV) Calculando $ABA^t = 0$, temos:

$$AB = [4x - y + 8 \quad x + 9y + 2 \quad 8x - 2y + 12]$$

$$ABA^t = [4x - y + 8 \quad x + 9y + 2 \quad 8x - 2y + 12] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (4x - y + 8) \cdot x + (x + 9y + 2) \cdot y + (8x - 2y + 12)$$

Assim, $4x^2 + 9y^2 + 16x + 12 = 0$. Logo, incorreta.

V) Do item anterior, temos que $4x^2 + 9y^2 + 16x + 12 = 0$. Ou seja, representa uma cônica. Portanto, correta.

9. C

Do enunciado, sabemos que a matriz B é igual à transposta da inversa da matriz A. Ou seja:

$$B = (A^{-1})^T$$

Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix}$, sua transposta será $A^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x}{3x-5} & -\frac{5}{3x-5} \\ -\frac{1}{3x-5} & \frac{3}{3x-5} \end{bmatrix}.$$

Assim, a transposta da inversa da matriz A será:

$$(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} \frac{x}{3x-5} & -\frac{1}{3x-5} \\ -\frac{5}{3x-5} & \frac{3}{3x-5} \end{bmatrix}$$

Ou seja, $\begin{bmatrix} x & y+4 \\ y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{3x-5} & -\frac{1}{3x-5} \\ -\frac{5}{3x-5} & \frac{3}{3x-5} \end{bmatrix}$.

Dessa forma, podemos afirmar que:

$$3 = \frac{3}{3x-5} \rightarrow 3x - 5 = 1 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

Como $x = 2$, então:

$$y = -\frac{5}{3x-5} \rightarrow y = -\frac{5}{3 \cdot 2 - 5}$$

$$y = -\frac{5}{1}$$

$$y = -5$$

Assim:

$$x + y = 2 - 5$$

$$x + y = -3$$

10. Dada a equação $R - 6S = T$, temos:

$$R - 6S = \begin{bmatrix} 4 & (16)^y & -1 \\ 9^x & a & 0 \end{bmatrix} - 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 & (4)^{(2y-1)} & 2^{-1} \\ 3^x & b & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & (16)^y & -1 \\ 9^x & a & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 6 \cdot (4)^{(2y-1)} & 3 \\ 6 \cdot 3^x & 6b & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & (16)^y - 6 \cdot (4)^{(2y-1)} & -4 \\ 9^x - 6 \cdot 3^x & a - 6b & -6 \end{bmatrix} =$$

$$R - 6S = T \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & (16)^y - 6 \cdot (4)^{(2y-1)} & -4 \\ 9^x - 6 \cdot 3^x & a - 6b & -6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b & (2)^{(2y-1)} - 10 & c \\ 27 & 13 & -6 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$b = -2$$

$$c = -4$$

$$a - 6b = 13 \rightarrow a = 13 + 6 \cdot (-2) \rightarrow a = 13 - 12 \rightarrow a = 1$$

$$(16)^y - 6 \cdot (4)^{(2y-1)} = (2)^{(2y-1)} - 10 \rightarrow (4^y)^2 - \frac{6}{4} \cdot (4^y)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (4^y) - 10 \rightarrow (4^y)^2 + 4^y - 20 = 0$$

Chamando $4^y = z$, temos:

$$z^2 + z - 20 = 0 \rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)$$

$$z = -\frac{1 \pm 9}{2} \rightarrow z_1 = -5 \rightarrow 4^y = -5 \text{ (não convém)}$$

$$z_2 = 4 \rightarrow 4^y = 4 \rightarrow y = 1$$

$$9^x - 6 \cdot 3^x = 27 \rightarrow (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

Chamando $3^x = w$, temos:

$$w^2 - 6w - 27 = 0 \rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27)$$

$$w = \frac{6 \pm 12}{2} \rightarrow w_1 = -3 \rightarrow 3^x = -3 \text{ (não convém)}$$

$$w_2 = 9 \rightarrow 3^x = 9 \rightarrow x = 2$$

Assim, a soma dos quadrados das variáveis será:

$(-2)^2 + (-4)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (2)^2 = 4 + 16 + 1 + 1 + 4 = 26.$

11. D

Analisando cada item, temos:

I) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Esta identidade é válida apenas se as matrizes A e B comutarem, ou seja, se $AB = BA$. Portanto, falsa.

II) $(A - B)^2 = A^2 - B^2$

Esta identidade é válida apenas quando $AB = -BA$. Portanto, falsa.

III) $CI = C$

Como são matrizes quadradas, seja $C = (c_{jk})_{n \times n}$ e $I = (i_{kl})_{n \times n}$, o termo geral da matriz $A = CI$ será dado por $a_{jl} = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} \cdot i_{kl}$.

Como $i_{kl} = 0$, se $k \neq l$, e $i_{kl} = 1$, se $k = l$, temos que $a_{jl} = c_{jl}$ para todo j e todo l, com $j, l = 1, 2, ..., n$. Portanto, $A = C$. Logo, verdadeira.

12. B

Realizando o produto dado no enunciado, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\alpha \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$3\operatorname{tg}\alpha + 6\cos\beta = 0 \rightarrow 3\operatorname{tg}\alpha = -6\cos\beta \text{ (I)}$$

$$6\operatorname{tg}\alpha + 8\cos\beta = -2\sqrt{3} \rightarrow -3\operatorname{tg}\alpha - 4\cos\beta = \sqrt{3} \text{ (II)}$$

Substituindo I em II:

$$-(-6\cos\beta) - 4\cos\beta = \sqrt{3} \rightarrow 2\cos\beta = \sqrt{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\beta = \dfrac{\pi}{6}$ rad

Logo, $3\,\text{tg}\,\alpha + 6\cos\dfrac{\pi}{6} = 0 \rightarrow \text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3} \rightarrow$

$\rightarrow \alpha = -\dfrac{\pi}{3}$ rad

Assim, $\alpha + \beta = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6}$ rad.

13. C

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$,

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}$, temos:

$$A \cdot Y + B \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3y \\ 8x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x^2 + 3y \\ y^2 + 8x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ y^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 \\ x(x^3 + 8) = 0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$$

Logo, $x \cdot y = (-2) \cdot (-4) = 8$.

14. C

Para que a matriz A seja ortogonal, temos que $A^t = A^{-1} \rightarrow A \cdot A^t = A \cdot A^{-1} \rightarrow A \cdot A^t = I$

Assim:

$$\begin{pmatrix} x-3 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & x-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & x-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} (x-3)^2 + 5 & \sqrt{5} \cdot (x-3) - \sqrt{5} \cdot (x-3) \\ \sqrt{5} \cdot (x-3) - \sqrt{5} \cdot (x-3) & (x-3)^2 + 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 - 6x + 14 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então, $x^2 - 6x + 14 = 1 \rightarrow x^2 - 16x + 13 = 0$.

Pelas relações de Girard, podemos encontrar a soma dos valores de x.

Logo: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \rightarrow x_1 + x_2 = -\dfrac{(-6)}{1} = 6$.

15. D

Dada a equação matricial $[x,y]\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [1]$, temos:

$$[x,y]\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [1] \rightarrow [2x+4y \;\; -4x+2y] \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [1]$$

$(2x + 4y) \cdot x + (-4x + 2y) \cdot y = 1 \leftrightarrow 2x^2 + 4xy - 4xy + 2y^2 = 1 \leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = 1 \leftrightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$ Essa é a equação de uma circunferência de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas e raio $R = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

16. D

Do enunciado, temos $A + BX = X + 2C$

$\rightarrow BX = X + 2C - A \rightarrow$

$\rightarrow BX - X = 2C - A \rightarrow$

$\rightarrow X(B - I) = 2C - A$, em que I é a matriz identidade de ordem n.

Logo, $(B - I)^{-1}(B - I)X = (B - I)^{-1}(2C - A)$.

Assim, $X = (2C - A) \cdot (B - I)^{-1}$.

Portanto, para que a equação tenha solução, será necessário que B – I seja invertível, em que I é a matriz identidade de ordem n.

17.

a) $A_\alpha + A_{2\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\dfrac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ -\dfrac{1}{2\alpha} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\dfrac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix}$

Logo, $(A_\alpha + A_{2\alpha})^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\dfrac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\dfrac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$

b) Dado $A_\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\dfrac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+\alpha y \\ -\dfrac{x}{\alpha} - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Logo:

$x + \alpha y = -6$ (I)

$-\dfrac{x}{\alpha} - y = 2$ (II)

Multiplicando II por α e somando I, temos $0 = 2\alpha - 6$.

Portanto, $\alpha = 3$.

Estudo para o Enem

18. C

Para a mensagem EU ESTUDEI NO INSPER, a matriz-mensagem é:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 19 & 20 & 21 & 4 & 5 & 9 \\ 14 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 14 & 19 & 16 & 5 & 18 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como M e M_C são matrizes 4 × 7, para que $M_C = C \cdot M$ seja possível, C deve necessariamente ser da ordem 4 × 4.

Além disso:

$D \cdot M_C = D \cdot C \cdot M = M \rightarrow D \cdot C \cdot M - M = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (D \cdot C - I) \cdot M = 0 \rightarrow D \cdot C = I \rightarrow D = C^{-1}$

Logo, a matriz C é invertível.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. B

Dada a matriz B, a matriz inversa B^{-1} é:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{6}{7} & -\dfrac{1}{7} \\ -\dfrac{5}{7} & \dfrac{2}{7} \end{bmatrix}$$

Assim:

$b_{11} = \dfrac{6}{7}$ (positivo) $\rightarrow$ linha 6 e coluna 7 de A $\rightarrow$ L

$b_{12} = -\dfrac{1}{7}$ (negativo) $\rightarrow$ linha 7 e coluna 1 de A $\rightarrow$ U

$b_{21} = -\dfrac{5}{7}$ (negativo) $\rightarrow$ linha 7 e coluna 5 de A $\rightarrow$ P

$b_{22} = \dfrac{2}{7}$ (positivo) $\rightarrow$ linha 2 e coluna 7 de A $\rightarrow$ A

As letras correspondentes formam a palavra LUPA.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

20. D

Devemos primeiro encontrar a matriz inversa de A:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{21}a & \frac{1}{21}b & \frac{1}{21}c & \frac{1}{21}d \\ \frac{1}{11}e & \frac{1}{11}f & \frac{1}{11}g & \frac{1}{11}h \\ \frac{3}{5}i & \frac{3}{5}j & \frac{3}{5}k & \frac{3}{5}l \\ \frac{1}{4}m & \frac{1}{4}n & \frac{1}{4}o & \frac{1}{4}p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 21 \\ f = 11 \\ k = \frac{5}{3} \\ p = 4 \end{cases}$$

Fora essas letras, as outras são nulas. A matriz inversa A^{-1} é dada por:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Agora, basta determinar o código C:

$A^{-1} \cdot B = C$

$$\begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] =$$

$$= \begin{bmatrix} 21 \\ 22 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Logo, o código será 21, 22, 5 e 16, o que corresponde à palavra TUDO.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

48 DETERMINANTES

Comentários sobre o módulo

Neste módulo iniciamos o estudo dos determinantes e abordamos como calcular os de ordens 1 e 2. É importante que os alunos compreendam que o determinante não é simplesmente um número, e sim uma ferramenta facilitadora no cálculo e na solução de problemas. Por isso, instigar a busca por outras aplicações do uso de determinantes valoriza ainda mais os estudos do tema.

Exercícios propostos

7. B

Do enunciado, sabemos que $2X - 2Y = A \cdot B$ e $-X + 2Y = A^t$. Logo:

$$X - Y = \frac{1}{2} \cdot A \cdot B \text{ (I)}$$

$$-X + 2Y = A^t \text{ (II)}$$

Fazendo I + II, temos:

$$Y = \frac{1}{2} \cdot A \cdot B + A^t$$

Calculando $A \cdot B$ e A^t, temos:

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Assim, } Y = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores na equação II, temos:

$$-X + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 13 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Portanto, } \det X + \det Y = \begin{vmatrix} -1 & 13 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\det X + \det Y = (-1) \cdot (-4) - 13 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) - 3 \cdot 8$$

$$\det X + \det Y = 4 - 52 - 24 = -72$$

8. C

Da definição apresentada no enunciado, para todo n inteiro e positivo, $V^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Assim, $Y = V + V^2 + V^3 + K + V^{2016}$. Logo:

$Y =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 4\,032 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\,016 & 2\,016 \cdot 2\,017 \\ 0 & 2\,016 \end{pmatrix}$$

Assim, $\det Y = 2\,016 \cdot 2\,016 - 0 \cdot (2\,016 \cdot 2\,017) = 2\,016 \cdot 2\,016$.

9. A

Do enunciado, temos que

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 4 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = x \cdot (x-2) - ((-1) \cdot 4) = .$$

$$= x^2 - 2x + 4.$$

Como $\Delta = 0$:

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

Assim, resolvendo a equação:

$$x = -\frac{(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}.$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Como $x \in \mathbb{R}$, há 0 elemento no conjunto A.

10. Sabendo que B^t é a transposta de B:

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Logo, } A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1 \cdot 2) + (0 \cdot 1) & (1 \cdot 0) + (0 \cdot 2) \\ (2 \cdot 2) + (1 \cdot 1) & (2 \cdot 0) + (1 \cdot 2) \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculando a inversa da matriz:

$$\det M = 2 \cdot 2 - 5 \cdot 0 = 4$$

Para encontrarmos a matriz inversa de M, dividimos a matriz pelo determinante.

$$\text{Assim, } M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Assim, det $M^{-1} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2}\cdot 0\right)$.

Logo, det $M^{-1} = \frac{1}{4}$.

11. C

$$\det \begin{vmatrix} \text{sen } 2x & 2\cos^2 x \\ -\cos x & \text{sen } x \end{vmatrix} = \text{sen } 2x \cdot \text{sen } x - 2\cos x \cdot \cos x$$

Como $\text{sen } 2x = 2\text{sen}^2\ x \cos^2 x$ e $\text{sen } x + \cos x = 1$:

$\text{sen } 2x \cdot \text{sen } x - 2\cos^2 x \cdot \cos x =$

$= 2\ \text{sen } x \cos x \cdot \text{sen } x + 2\cos^3 x =$

$= 2\cos x \cdot \text{sen}^2 x + 2\cos^2 x =$

$= 2\cos x(1 - \cos x) + 2\cos^3 x =$

$= 2\cos x - 2\cos^3 x + 2\cos^3 x = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

12. B

Temos que det $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 8 - 3\cdot 4 = 16 - 12 = 4$.

Assim:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{4}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \text{ assim}$$

$$2\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Já $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.

Então, como $B = A^T - 2A^{-1}$, temos:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{11}{2} \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} -2 & \frac{11}{2} \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 7 - 5\cdot\frac{11}{2} = -\frac{83}{2}$$

13. D

Temos que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sabe-se que $A \cdot I = A$. Logo:

$A^2 = I$

$A^3 = A$

$A^4 = I$

$A^5 = A$

...

$A^9 = A$

$A^{10} = I$

$A^{11} = A$

Dessa forma, pode-se notar que há 5 matrizes identidade e 6 matrizes A.

Para somarmos as matrizes identidade, basta multiplicar o número de matrizes pela matriz identidade:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A soma das 6 matrizes A será:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, somando os dois termos:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$$

Finalmente, o det $S = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} = 5\cdot 5 - 12\cdot 3 =$

$= 25 - 36 = -11$

14. Sendo $\text{sen } \alpha = 0{,}6$ e sabendo que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos: $0{,}6^2 + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow$ $\rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0{,}36 \rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}64$ $\cos\alpha = 0{,}8$. Então, o det (A) será: det (A) $= 0{,}8 \cdot 3 - 4 \cdot 1 =$ $= 2{,}4 - 4 \rightarrow$ det (A) $= -1{,}6$

15. A

De acordo com a lei de formação apresentada:

$$A = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^2 \\ 1^2 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Considerando B a matriz identidade de ordem 2, temos que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Assim:

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Logo, det $(A^t + B)$ será:

$$\det (A^t + B) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 1\cdot 4 = 15 - 4 = 11$$

16. D

Analisando cada item, temos:

I) A matriz será diagonal se, e somente se, $\cos x = 0$. Ou seja, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Por outro lado, $\operatorname{sen} x = \pm 1$ se, e somente se, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, verdadeira.

II) Calculando o determinante de A, temos:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Logo, para qualquer valor de x, o determinante será 1. Portanto, falsa.

III) Para que a matriz seja simétrica, $\cos x = -\cos x$. Ou seja, $\cos x = 0$. Do item I, temos que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, verdadeira.

IV) Para que A seja invertível, o det A deve ser diferente de zero. Logo, sabendo que det A = 1, o item é verdadeiro.

17. Dada a matriz A, para que ela não seja invertível, seu determinante deve ser igual a 0.

Assim:

$\det A = \log_2(x) \cdot \log_2(x) - \log_2(x) - 2 = 0$

$\log_2(x) - \log_2(x) - 2 = 0$

Considerando $\log_2(x) = y$:

$y^2 - y - 2 = 0$

Resolvendo a equação de 2º grau, temos:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$

$\Delta = 1 + 8$

$\Delta = 9$

$y = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$

$y = \dfrac{1 \pm 3}{2}$

$y_1 = 2 \rightarrow \log_2(x) = 2 \rightarrow x = 4$

$y_2 = -1 \rightarrow \log_2(x) = -1 \leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Como x é um número natural, então x = 4.

Estudo para o Enem

18. D

Como a senha do cadeado é o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 31 & 16 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$:

$\det = \begin{vmatrix} 31 & 16 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} = (31 \cdot 14) - (5 \cdot 16) = 434 - 80 =$

$= 354$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

19. E

Do enunciado, temos que p(x) = det A. Então:

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -x \\ 4 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot \frac{2}{3} - (4 \cdot (-x)) = 2 + 4x$

$p(7) = 4 \cdot 7 + 2 = 26$ kg.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

20. C

Calculando o determinante de A, temos:

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - ((-1) \cdot 5) = 6 + 5 = 11.$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

49 DETERMINANTES DE MATRIZ DE ORDEM N

Comentários sobre o módulo

Neste módulo estudamos alguns métodos para calcular o determinante de matrizes de ordem maior ou igual a 3. Abordamos a utilização da regra de Sarrus e do teorema de Laplace, e qual deles é mais bem aplicado de acordo com a ordem da matriz.

Exercícios propostos

7. A

Supondo que o $\det M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k$.

$$\det N = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2i & 2c \\ 0 & 0 & 2j & 0 \\ 2d & 2e & 2a & 2f \\ 2g & 2h & 2c & 2i \end{vmatrix}$$

Dos cofatores, temos então que $\det N = (-1)^{2+3} \cdot$

$$\cdot\, 2j \cdot \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} =$$

$$-1 \cdot 2j \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Logo, $-16j \cdot k$.

8. B

Se $M = \begin{bmatrix} x+y & x-y & xy \\ 1 & y-x & 2y \\ 6 & x+1 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica:

$x - y = 1$ (I)

$x \cdot y = 6$ (II)

$x + 1 = 2y$ (III)

Fazendo III – I:

$1 + y = 2y - 1$

$y = 2$

Substituindo y em II, temos:

$x \cdot 2 = 6$

$x = 3$

Assim, $\det M = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$

$= (5 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 6 + 6 \cdot 1 \cdot 4) - (6 \cdot (-1) \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 1)$

$\det M = -5 + 24 + 24 + 36 - 80 - 1 - 84 - 86 = -2$

9. D

Do enunciado, temos que $V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Logo, $\det V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.

Pela regra de Sarrus:

$$\det V = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right|$$

$\det V = [1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 \cdot 1 + 4 \cdot 1\,(-2)] - [4 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 9 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 4]$

$\det V = 22 - 2 = 20$

10. Utilizando o teorema de Laplace, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + (-2) \cdot (-1)^{1+3} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 2(9 + 1 - 3) - 2(3 + 2 - 1) - 1(6 - 3 - 2) =$
$= 14 - 8 - 1$

Assim, o valor do determinante é 5.

11. E

Desenvolvendo o determinante pela regra de Sarrus, temos:

$$-3x^3 - 5xy + 3x\left(x^2 + y^2\right) + 2x^2y = 0$$

$$-3x^3 - 5xy + 3x^3 + 3xy^2 + 2x^2y = 0$$

$$5xy + 3xy^2 + 2x^2y = 0$$

$xy(-5+3y+2x)=0$

Como x · y não é nulo:

$-5+3y+2x=0$

$2x+3y=5$

12. C

Utilizando a regra de Sarrus, o determinante é:

det M=

$$\begin{vmatrix} a & a^3-b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3^a4+5ab-2^{a3}b-3^a4+3ab^3 =$$

$$= ab(5-2a^2+3b^2)=0$$

Logo, a = 0 ou b = 0 ou $5-2a+3b=0$.

Como **a** e **b** não são nulos, devemos considerar:

$5-2a^2+3b^2=0$

$2a^2-3b^2=5$

Assim:

$14a^2 - 21b^2$

$7(2a^2 - 3b^2)$

$7 \cdot 5 = 35$

13. B

Dado M = $\begin{bmatrix} \cos 17° & 0 & \text{sen}\,17° \\ 1 & 1 & 1 \\ \text{sen}\,28° & 0 & \cos 28° \end{bmatrix}$, temos que:

$$\det M = \begin{bmatrix} \cos 17° & 0 & \text{sen}\,17° \\ 1 & 1 & 1 \\ \text{sen}\,28° & 0 & \cos 28° \end{bmatrix}$$

Pela regra de Sarrus:

$$\det M = (\cos 17° \cdot 1 \cdot \cos 28° + 0 \cdot 1 \cdot \text{sen}\,28° + \text{sen}\,17° \cdot 1 \cdot 0) -$$
$$-(\text{sen}\,17° \cdot 1 \cdot \text{sen}\,28° + \cos 17° \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot \cos 28°)$$

$$\det M = \cos 17° \cdot \cos 28° - \text{sen}\,17° \cdot \text{sen}\,28°$$

$$\det M = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\det M^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} = \det M = \frac{1}{32}$$

14. Pela regra de Sarrus, det (B) é dado por:

$$\det(B) = \cos^2\theta + \text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta - \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta = 1$$

Como $\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1$, temos:

$$1 - \text{sen}\,\theta - \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta = 1$$

$$-\text{sen}\,\theta - \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta = 0$$

$$\text{sen}\,\theta\left(1+\sqrt{2}\cos\theta\right) = 0$$

Logo:

$\text{sen}\,\theta = 0 \rightarrow \theta = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ ou

$\sqrt{2} \cdot \cos\theta = 1 \rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta = k2\pi \pm \dfrac{3\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z})$

15. B

O determinante é:

$$\begin{vmatrix} \text{sen}(x) & 0 & 1 \\ 1 & \sec(x) & 0 \\ 0 & 0 & \text{cotg}(x) \end{vmatrix}$$

$$\text{sen}(x) \cdot \sec(x) \cdot \cot(x)$$

$$\text{sen}(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} = 1$$

16. B

Analisando os itens, temos:

I) Como det A = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 8 − 10 − 6 = − 8.

Ou seja, é diferente de zero. Portanto, correta.

II) Fazendo A · B, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Logo, correta.

III) Como a matriz B não é quadrada, não é possível calcular o determinante. Logo, incorreta.

IV) Conforme calculado no item I, o det A = − 8.

Logo det $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = -\dfrac{1}{8}$. Portanto, incorreta.

V) Como A é uma matriz 3 × 3 e B é uma matriz 3 × 4, pode-se concluir que A · B existe, porém B · A, não. Logo, os produtos não podem ser iguais. Portanto, incorreta.

17. Do enunciado, temos que $S_n = 2n^2 + 5n$.

Logo:

$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 7$

$S_2 = a_1 + a_2$

Porém, $S_2 = 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 18$.

Assim, $18 = 7 + a_2 \rightarrow a_2 = 11$.

Calculando a razão da progressão, $r = a_2 - a_1 = 11 - 7 = 4$.

Dessa forma:

$a_3 = 11 + 4 = 15$

$a_4 = a_3 + 4 = 15 + 4 = 19$

$a_5 = a_4 + 4 = 19 + 4 = 23$

$a_6 = a_5 + 4 = 23 + 4 = 27$

$a_7 = a_6 + 4 = 27 + 4 = 31$

$a_8 = a_7 + 4 = 31 + 4 = 35$

$a_9 = a_8 + 4 = 35 + 4 = 39$

Obtemos assim os valores da matriz. E o determinante é:

$$x = \begin{vmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 19 & 23 & 27 \\ 33 & 35 & 39 \end{vmatrix}$$

Multiplicando a coluna 1 por (–1) e somando as colunas 2 e 3, temos:

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 19 & 23 & 27 \\ 33 & 35 & 39 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 19 & 4 & 8 \\ 33 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 19 & 2 & 4 \\ 33 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

No determinante $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 19 & 2 & 4 \\ 33 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, multiplicamos a coluna 2 por (–2). Somando à coluna 3, temos:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 19 & 2 & 4 \\ 33 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 19 & 2 & 0 \\ 33 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 19 & 2 & 0 \\ 33 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 19 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 19 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 19 \cdot 2 = -24$$

Portanto, $x = 2 \cdot 2 \cdot (-24) = -96$.

Estudo para o Enem

18. B

Dada a matriz, o determinante é:

$(8 + 75 + 12p) - (10p + 40 + 18) = 2p + 25$

Como o determinante é igual a 50:

$2p + 25 = 50 \rightarrow 2p = 25 \rightarrow p = 2{,}5$ kg.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. A

A área de um triângulo pode ser calculada utilizando o determinante da matriz formada pelos três vértices. Quando o triângulo está no plano, a última coluna da matriz é preenchida por 1. Quando ele está no espaço, as três colunas indicam as coordenadas dos vértices.

Sendo **D** a matriz dos vértices:

$$D = \begin{bmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

A área do triângulo será obtida por:

$$A = \frac{1}{2}|D|$$

Calculando o determinante de D pela regra de Sarrus, temos:

$$(1 + 9 + 35) - (3 + 5 + 21) = 45 - 29 = 16$$

Logo:

$|D| = 16$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 16$$

Assim, a área vale 8.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

20. E

Dada a matriz M, temos que:

$$M-\lambda\cdot I=\begin{vmatrix}0 & 17 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}-\lambda\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda & 17 & 2\\ 2 & -\lambda & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}$$

Então, det $(M-\lambda I)$ = 0 implica em:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 17 & 2\\ 2 & -\lambda & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

Assim:

$$-\lambda^3+2\lambda+34\lambda=0 \leftrightarrow -\lambda\cdot(\lambda^2-36)=0$$

Os valores possíveis para λ são:

$\lambda_1=0;\ \ \lambda_2=-6;\ \ \lambda_3=6$

Portanto, o valor positivo de λ é 6.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

50 PROPRIEDADES DO DETERMINANTE

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos as propriedades dos determinantes e o teorema de Binet e o de Jacobi. Apresentamos também a regra de Chió, uma aplicação direta do teorema de Jacobi que pode ser explorada mais detalhadamente, de modo a oferecer aos alunos mais recursos no momento da resolução de exercícios sobre determinantes.

Para ir além

Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) foi um matemático alemão e ingressou com apenas 17 anos na Universidade de Berlim. Assim como Niels Henrik Abel (1802-1829) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Jacobi buscou uma solução geral para equações quínticas (do quinto grau), sem obter bons resultados, no entanto.

Em 1827, algumas de suas pesquisas no campo da teoria dos números chamaram a atenção de Gauss. Esse fato fez o ministro da Educação da Alemanha à época promover Jacobi para um posto acima de seus colegas, uma posição importante para um jovem de 23 anos.

Busque mais informações sobre Jacobi e as contribuições dele para a Matemática.

Exercícios propostos

7. D

Analisando os itens, temos:

I) Calculando A – B:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 14 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -13 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -13 & -17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -5a-5b & -5c-5d \\ -13a-17b & -13c-17d \end{pmatrix}$$

Logo, $a = -\frac{17}{20}$, $b = \frac{13}{20}$, $c = d = -\frac{1}{3}$. Portanto, verdadeira.

$$\text{II)} \begin{cases} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -13 & -17 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -13 & -17 \end{pmatrix}$$

Logo, $2 + e = -5 \rightarrow e = -7$

$3 + g = -5 \rightarrow g = -8$

$1 + f = -13 \rightarrow f = -14$

$-1 + h = -17 \rightarrow h = -16$. Portanto, falsa.

III) Pelo teorema de Binet, sabemos que $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Logo, $\det A = 2 \cdot (-1) - (3 \cdot 1) = -2 - 3 = -5$.

Assim, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{-5} = -\dfrac{1}{5}$. Portanto, verdadeira.

IV) Do teorema de Binet, $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(B \cdot A)$. Portanto, verdadeira.

8. A

Sabendo que $\det(A^n) = (\det A)^n$ e que $\det(kA) = k^n \cdot \det A$, com A sendo uma matriz quadrada de ordem n e sendo k um número real, temos que:

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9}\det(3M) \rightarrow$$

$$\det(\sqrt[3]{2})^3 \cdot (\det M)^3 - 2^3 \cdot (\det M)^2 + \frac{2}{9} \cdot 3^3 \cdot$$

$$\cdot \det M = 0$$

$$2 \cdot \det M \cdot ((\det M)^2 - 4 \cdot \det M + 3) = 0$$

$$2 \cdot \det M \cdot (\det M - 3) \cdot (\det M - 1) = 0$$

$\det M = 0$ ou $\det M = 3$ ou $\det M = 1$

Como M é invertível, $\det M = 0$ não é possível.

Assim, para $\det M = 3 \rightarrow \det M^{-1} = \frac{1}{3}$, ou $\det M = 1 \rightarrow \det M^{-1} = 1$.

9. D

Pelo teorema de Binet, temos que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Assim:

$$\det A = 2 \cdot \operatorname{sen} x + \frac{7}{16} - 3 \cdot \operatorname{sen} x + \frac{21}{16} - \operatorname{sen}^2 x - 2 =$$

$$= -\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - \frac{1}{4}$$

$$\det B = 48 + 12 + \frac{3}{2} + 6 - 12 + 12 = 66 + \frac{3}{2} = \frac{135}{2}$$

Para que det A · det B seja zero:

$$\left(-\text{sen}^2\, x - \text{ sen } x - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{135}{2}\right) = 0$$

Assim, $-\text{ sen}^2 x - \text{sen } x - \dfrac{1}{4} = 0 \rightarrow \text{sen } x = -\dfrac{1}{2}$.

Portanto, o conjunto é

$$\left\{x \in \mathbb{R} |\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right\}.$$

10. Supondo que o determinante de $\begin{bmatrix} 3 & x \\ 4 & x+1 \end{bmatrix}$ seja y e sabendo que $\det (k \cdot A_{n \times n}) = k^n \cdot \det A$, com k sendo um número real e sendo n a ordem da matriz quadrada, temos:

$49 \cdot y = y^2 \cdot y$

$y(y^2 - 49) = 0$

$y = 0$ ou $y = 7$ ou $y = -7$

Assim, para $y = 0$:

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ 4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

Logo, $3 \cdot (x + 1) - 4x = 0 \rightarrow 3x + 3 - 4x = 0 \rightarrow$
$\rightarrow -x + 3 = 0 \rightarrow x = 3$.

Para $y = 7$:

$-x + 3 = 7 \rightarrow x = -4$.

Para $y = -7$:

$-x + 3 = -7 \rightarrow x = 10$.

Assim, os possíveis valores de x são –4, 3 e 10.

11. D

Analisando os itens, temos:

I) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Portanto, incorreta.

II) $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Portanto, correta.

III) Sabemos que, para que a matriz seja invertível, o determinante deve ser diferente de zero. Assim:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 5$$

Pelo teorema de Binet, temos:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Logo:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{5}$$

Portanto, correta.

IV) Com base nas propriedades das matrizes, o determinante da matriz e de sua transposta são iguais.

Logo, $\det B = \det B^t = 6$. Como $\det A = 5$, item incorreto.

V) $[\det (A) + \det (B)]^2 = \det (A^2) + \det (\sqrt{2} \cdot AB) +$
$+ \det (B^2)$

Conforme calculado, det A = 5 e det B = 6. Assim:

$\det (A^2) = (\det A)^2 = 5^2 = 25$

$\det (B^2) = (\det B)^2 = 6^2 = 36$

$$\det (\sqrt{2} \cdot AB) = \begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{vmatrix} = 20 - (-40) = 60$$

Portanto:

$[\det (A) + \det (B)]^2 = (5 + 6)^2 = 11^2 = 121$

$\det (A^2) + \det (\sqrt{2} \cdot AB) + \det (B^2) = 25 + 60 + 36 =$
$= 121$

Portanto, correta.

12. B

Analisando os itens, temos:

I) Supondo que a ordem da matriz P é n:

$\det (2P) = 96 \rightarrow 2^n \cdot \det (P) = 96$.

Como det (P) = 3, então:

$2^n \cdot 3 = 96 \rightarrow 2^n = 32 \rightarrow n = 5$.

P é uma matriz quadrada de ordem 5. Portanto, falsa.

II) Seja c_{ij} o termo geral da matriz 3A – 2B:

$c_{ij} = 3a_{ij} - 2b_{ij} \rightarrow c_{ij} = 9i - 3j - 2i - 4j \rightarrow c_{ij} = 7i - 7j$

Assim, $c_{43} = 7 \cdot 4 - 7 \cdot 3 = 7$. Portanto, verdadeira.

III) Sabemos que $\det M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}$. Assim:

$$\det M = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 3 - 8 + 2 - 6 = -9$$

Logo, $\det M^{-1} = \dfrac{1}{-9} = -\dfrac{1}{9}$. Portanto, falsa.

IV) Calculando o det da matriz, temos que $\begin{vmatrix} 2k & -1 \\ 3 & k \end{vmatrix} = 2k^2 + 3$.

Assim, $\begin{vmatrix} 2k & -1 \\ 3 & k \end{vmatrix} > 0$ para todo k real. Portanto, verdadeira.

V) Se existe o produto $(A \cdot B) \cdot C$, então existe $A_{6\times 8} \cdot B_{m\times 5} = D_{6\times 5}$.

Logo, também existe $D_{6\times 5} \cdot C_{n\times 3}$. Assim, m = 8 e n = 5. Portanto, falsa.

13. D

Analisando os itens, temos:

I) $(X^t)^{-1} = A \cdot (B + C) \rightarrow [(X^t)^{-1}]^{-1} = [A \cdot (B + C)]^{-1} \rightarrow X^t = (B + C)^{-1} \cdot A^{-1} \rightarrow$

$\rightarrow (X^t)^t = [(B + C)^{-1} \cdot A^{-1}]^t \rightarrow$

$\rightarrow X = (A^{-1})^t \cdot [(B + C)^{-1}]^t$. Portanto, verdadeira.

II) $\det (X^t)^{-1} = \det A(B + C) \rightarrow \dfrac{1}{\det (X^t)} = \det A(B+C) \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{1}{\det X} = \det A(B+C) \rightarrow \det X = \dfrac{1}{\det A(B+C)}$. Portanto, verdadeira.

III) $(X^t)^{-1} = A(B + C) \rightarrow (X^{-1})^t = A(B + C) \rightarrow [(X^{-1})^t]^t = [A(B + C)]^t \rightarrow$

$\rightarrow X^{-1} = (B + C)^t \cdot A^t \rightarrow X^{-1} = (B^t + C^t) \cdot A^t$. Portanto, verdadeira.

14. Temos que $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}$. Então:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Já a transposta de N é $N^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim, $MN^T - M^{-1}N =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

15. A

Analisando os itens, temos:

I) $A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 15° - \text{sen } 15° & -\cos 15° \cdot \text{sen} 15° - \cos 15° \cdot \text{sen} 15° \\ \cos 15° \cdot \text{sen} 15° + \cos\ 15° \cdot \text{sen} 15° & -\cos^2 15° + \text{sen } 15° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\text{sen} 30° \\ \text{sen } 30° & -\cos 30° \end{pmatrix}.$

Portanto, verdadeira.

II) $\det (A) = \cos^2 15 + \text{sen}^2 15 = 1$. Portanto, verdadeira.

III) $A + A^t = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos 15° & 0 \\ 0 & 2 \cdot \cos 15° \end{pmatrix}$. Logo, falsa.

IV) $\det (2A) = 2^2 \cdot \det (A) = 4 \cdot 1 = 4$. Portanto, falsa.

V) $\det A^2 = (\det A)^2 = 1^2 = 1$. Logo, falsa.

16. E

Analisando os itens, temos:

I) Pelo teorema de Binet, $\det (M \cdot N) = \det M \cdot \det N =$

$= \det N \cdot \det M = \det (N \cdot M)$. Portanto, verdadeira.

II) Temos que $\det M^t = \det M$, para qualquer matriz quadrada. Portanto, falsa.

III) Calculando o det C pelo teorema de Laplace, temos:

$$\det C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}.$$

Para isso, é necessário calcular apenas o cofator A_{12}:

$$A_{12} = (-1)^{112} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - (3 + 0 + 0) = (-1)^3 \cdot 1 = -1$$

Logo, $\det C = -1$. Portanto, falsa.

IV) $A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = D_{2\times2}$. Ou seja, tem duas linhas e duas colunas. Portanto, falsa.

V) Fazendo $A \cdot B$, temos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Logo, $\det (A \cdot B) = 14 \cdot 14 - 10 \cdot 10 = 196 - 100 = 96$. Portanto, verdadeira.

17. Pelo teorema de Binet, sabemos que $\det (A \cdot B) = \det (A) \cdot \det (B)$, com A e B sendo matrizes invertíveis. Além disso, $\det (kA) = k^n \cdot \det (A)$, sendo k um número real e sendo n a ordem da matriz invertível de A.
Assim:

$\det (3A) = \det (A^2)$

$3^3 \det (A) = \det^2 (A)$

$27 = \det (A)$

Estudo para o Enem

18. C

Por meio do teorema de Binet:

$$\det(A \cdot B) = 3x \leftrightarrow \det A \cdot \det B = 3x \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x-2) \cdot (x+2) = 3x \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

Então, $x = -1$ ou $x = 4$.

Logo, a diferença dos valores de x pode ser igual a $4 - (-1) = 5$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

19. D

Pelo enunciado, sabemos que:

$$2 + a = a + b + 1 = b + 4$$

Logo, $a = 3$ e $b = 1$.

Calculando o determinante e aplicando a regra de Chió, temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 10.$$

Portanto, a prova vale 10 pontos.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

20. A

Do enunciado, sabemos que $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \varphi \\ \beta & \alpha & \gamma \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$.

Assim, sendo $\det A = 0$ e $a_{11} \neq 0$, pela propriedade das filas paralelas, deve-se ter $\beta = \alpha$ ou $\varphi = \alpha$. Portanto, $a_{11} \in \{a_{21}, a_{13}\}$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

51 INTRODUÇÃO A SISTEMAS LINEARES

Comentários sobre o módulo

Neste módulo estudamos os sistemas lineares. Abordamos, além das equações lineares, os sistemas equivalentes, a classificação de sistemas e o método da substituição para resolver sistemas lineares.

Discutir situações cotidianas nas quais o sistema linear pode ser útil para solucioná-las leva os alunos a perceberem a importância do estudo desse tema. É possível aprofundar o assunto da abertura do módulo para iniciar essas discussões.

Exercícios propostos

7. E

Pelo enunciado, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{k+b+z}{2} = 30 \\ \dfrac{b+z}{2} = 20 \to z = 40 - b \\ k = b + 30 \end{cases}$$

As variáveis aqui são representadas pelas iniciais de cada nome.

Pelo método da substituição, obtemos:

$$\frac{k+b+z}{3} = 30 \to \frac{b+30+b+40-b}{3} = 30$$

$b + 70 = 90 \to b = 20$

$k = b + 30 \to k = 20+30 \to k = 50$

$z = 40 - b \to z = 40 - 20 \to z = 20.$

8. E

Sendo V o peso do recipiente de vidro; M, o peso do recipiente de metal; P, o peso do recipiente de plástico; K, o peso do recipiente de papel.

Pelo enunciado, temos o sistema:

$$\begin{cases} V = 3 \\ M + P = K \\ M = 1{,}2 + P \\ V + M + P + K = 8 \end{cases}$$

Pelo método da substituição:

$V + M + P + K = 8 \to 3 + K + K = 8 \to 2K = 5 \to K = 2{,}5$ kg

$M + P = K \to 1{,}2 + P + P = 2{,}5 \to 2P = 1{,}3 \to P = 0{,}65$ kg

$M = 1{,}2 + P \to M = 1{,}2 + 0{,}65 \to M = 1{,}85$ kg

Logo, $K - P = 2{,}5 - 1{,}85 = 0{,}65$ kg.

Ou seja, 650 gramas.

9. E

Pelo enunciado, temos:

$$\begin{cases} p = 3r \\ q = 2r \\ p + q = 0{,}2 \cdot 75 = 15 \end{cases}$$

Logo, por substituição:

$p + r = 3r + 2r = 5r = 15 \to r = 3$

$$\text{Assim, } M = \frac{2 \cdot p \cdot (3 + r)}{q} = \frac{2 \cdot 3r \cdot (3 + r)}{(2r)} =$$

$$= \frac{6r \cdot (3 + r)}{(4r)}$$

$$\frac{3 \cdot (3 + r)}{2r} = \frac{9 + 3r}{2r} = \frac{9 + 9}{6} \to M = 3$$

10.

a) Se considerarmos cada carro que chega e sai do cruzamento:

Em A $\to x + y = 500 + 800 \to x + y = 1\,300$

Em B $\to y + z = 400 + 1\,400 \to y + z = 1\,800$

Em C $\to z + 500 = 700 + 1\,300 \to z = 1\,500$

Em D $\to x + 500 = 300 + 1\,200 \to x = 1\,000$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1300 \\ y + z = 1800 \\ z = 1500 \\ x = 1000 \end{cases}$$

Por substituição, temos:

$x + y = 1\,300 \to 1\,000 + y = 1\,300 \to y = 300$

Logo, $x = 1\,000$, $y = 300$ e $z = 1\,500$.

b) Temos:

Em A $\to x + y = 500 + 800 \to x + y = 1\,300$

Em B $\to y + z = 400 + 1\,400 \to y + z = 1\,800$

Em C $\rightarrow$ z + t = 700 + 1 300 $\rightarrow$ z + t = 2 000

Em D $\rightarrow$ x + t = 300 + 1 200 $\rightarrow$ x + t = 1 500

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} x+y=1300 \\ y+z=1800 \\ z+t=2\,000 \\ x+t=1500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1300 \\ y+z=1800 \\ z=2\,000-t \\ x=1500-t \end{cases}$$

Por substituição:

y + z = 1 800 $\rightarrow$ y + (2 000 – t) = 1 800 $\rightarrow$ y = = t – 200

Assim, como $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ e $t \geq 0$:

1 500 – t $\geq$ 0 $\rightarrow$ t $\leq$ 1 500

t – 200 $\geq$ 0 $\rightarrow$ t $\geq$ 0

2 000 – t $\geq$ 0 $\rightarrow$ t $\leq$ 2 000

Logo, 200 $\leq$ t $\leq$ 1 500 $\rightarrow$ 1 301 (valores inteiros possíveis).

11. B

Pelo enunciado, temos o sistema:

xy = 7 200

(x – 5) · (y + 120) = 7 200

xy + 120x – 5y – 600 = 7 200 $\rightarrow$ 120x – 5y = 600

Por substituição: $\dfrac{120 \cdot 7\,200}{y} - 5y = 600$ $\rightarrow$ multiplicando por y

$-5y^2 - 600y + 864\,000 = 0 \rightarrow y^2 + 120y - 172\,800 = 0$

$\Delta = 120^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-172\,800) \rightarrow \Delta = 705\,600$

$$y = \frac{-120 \pm \sqrt{705\,600}}{2} \rightarrow y = \frac{-120 \pm 840}{2}$$

$$y_1 = \frac{720}{2} = 360 \text{ e } y_2 = \frac{-960}{2} = -480 \text{ (não convém)}$$

Assim, x · 360 = 7 200 $\rightarrow$ x = 20

Portanto, há 20 condôminos.

12. D

Pelo enunciado, ainda seriam necessários R$ 4.100,00 para pagar a entrada de R$ 12.000,00.

Renata (r) tem R$ 500,00 a mais que Carlos (c).

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} r+c+4100=12\,000 \\ r=c+500 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r+c=7\,900 \\ r=c+500 \end{cases}$$

Por substituição:

c + 500 + c = 7 900 $\rightarrow$ 2c = 7 900 – 500

$c = \dfrac{7\,400}{2} \rightarrow c = 3\,700$

Assim, r = 3 700 + 500 $\rightarrow$ r = 4 200.

Portanto, Carlos tem em sua conta R$ 3.700,00.

13. B

Considerando o preço de um pacote de algodão como x, de um rolo de gaze como y e de um rolo de esparadrapo como z, podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 16 \\ z = x - 2 \\ z = y + 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 16 \\ x = z + 2 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por substituição, temos:

z + 2 + z – 1 + z = 16 $\rightarrow$ 3z = 16 – 1 $\rightarrow$ 3z = = 15 $\rightarrow$ z = 5

Logo, x = z + 2 $\rightarrow$ x = 7 e y = z – 1 $\rightarrow$ y = 4.

Uma pessoa que comprou 2 pacotes de algodão, 5 rolos de gaze e 3 rolos de esparadrapo gastou:

2x + 5y + 3z $\rightarrow$ 2 · 7 + 5 · 4 + 3 · 5

14 + 20 + 15 $\rightarrow$ R$ 49,00

Sabendo que essa pessoa pagou a compra com uma nota de R$ 50,00, o valor do troco recebido foi de R$ 1,00.

14.

Chamando os preços de cada borracha, lápis, caneta e mochila, respectivamente, de x, y, z e w, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} w = 10x + 8z + 6y \\ 20x = 2 \cdot 10y + 2 \cdot 4z \\ 4z = 10y \\ 20x + 4z + 10y + w = 106 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} w = 10x + 8z + 6y & \text{(I)} \\ 5x = 5y + 2z & \text{(II)} \\ 2z = 5y & \text{(III)} \\ 20x + 4z + 10y + w = 106 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Por substituição, temos de III e II:

$5x = 5y + 5y \rightarrow 5x = 10y \rightarrow x = \dfrac{10y}{5} \rightarrow x = 2y$

Substituindo em I:

$w = 10 \cdot (2y) + 8 \cdot \left(\dfrac{5y}{2}\right) + 6y$

$w = 20y + 20y + 6y \rightarrow \ w = 46y$

Substituindo em IV:

$20 \cdot (2y) + 4 \cdot \left(\dfrac{5y}{2}\right) + 10y + 46y = 106$

$40y + 10y + 10y + 46y = 106 \rightarrow \ 106y = 106 \rightarrow$
$\rightarrow y = 1$

Logo, $2z = 5y \rightarrow z = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$.

$x = 2y \rightarrow x = 2$

$w = 10 \cdot 2 + 8 \cdot 2{,}5 + 6 \cdot 1 \rightarrow w = 20 + 20 +$
$+ 6 \rightarrow \ w = 46$

Assim, os preços de cada produto são:

Lápis: R$ 1,00.

Borracha: R$ 2,00.

Caneta: R$ 2,50.

Mochila: R$ 46,00.

15. D

Para resolver o sistema, primeiro vamos igualar z na terceira equação, depois substituir na segunda, isolar as incógnitas novamente e substituir na primeira. Assim, teremos:

I: $x - y + z = 6 \rightarrow z = 6 - x + y$

II: $x - y - (6 - x + y) = -2 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$

Substituindo o valor de x em I temos:

I: $z = 6 - 2 + y = 4 + y$

Finalmente, substituindo os valores de z e de x na primeira equação, teremos:

III: $2 + y + (4 + y) = 4 \rightarrow 2y - 2 \rightarrow y = -1$

Logo, $(x, y, z) = (2, -1, 3)$.

16. A

Considerando que:

x = número de moedas de R$ 1,00;

y = número de moedas de R$ 0,50;

z = número de moedas de R$ 0,25;

t = número de moedas de R$ 0,10.

Podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} x + 0{,}5y + 0{,}25z = 6{,}75 \\ 0{,}5y + 0{,}25z + 0{,}1t = 4{,}45 \\ 0{,}25z + 0{,}1t = 2{,}95 \end{cases}$$

Por substituição da equação III em II, temos:

$0{,}5y + 2{,}95 = 4{,}45 \rightarrow y = 3$

Da equação III, temos que $t = \dfrac{295 - 25z}{10}$.

Assim, como y = 3, para que t seja um número inteiro, devemos considerar z um número ímpar. Logo:

Para z = 1, t = 27 e x = 5. Logo x + y + z +
+ t = 36.

Para z = 3, t = 22 e x = 4,5 (não convém).

Para z = 5, t = 17 e x = 4. Logo, x + y + z +
+ t = 29.

Para z = 7, t = 12 e x = 3,5 (não convém).

Para z = 9, t = 7 e x = 3. Logo, x + y + z +
+ t = 22.

Para z = 11, t = 2 e x = 2,5 (não convém).

Para z = 13 e x = –3 (não convém).

17. a) Do enunciado, sabemos que os círculos são tangentes dois a dois. Logo, podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a + c = 6 \\ b + c = 9 \rightarrow c = 9 - b \end{cases}$$

Por substituição:

$a + (9 - b) = 6 \rightarrow \ a - b = -3 \rightarrow \ a = b - 3$

Logo, $(b - 3) + b = 5 \rightarrow \ 2b = 8 \rightarrow \ b = 4$.

Portanto, a = 1, b = 4 e c = 5.

b) Se c > b, a hipotenusa do triângulo ABC é BC.

Pelo teorema de Pitágoras temos:

$(c + 3)^2 = (c + 2)^2 + 5^2$

$(c + 3 + c + 2) \cdot (c + 3 - c - 2) = 25$

$2c + 5 = 25 \rightarrow c = \dfrac{20}{2} = 10$ cm

Estudo para o Enem

18. C

Do enunciado temos:

$V_i = v \cdot l^2 = v \cdot 2^2 = 4v$

$V_f = 400$

Como V_f é dado por $v \cdot (2l)^2$, pelo método da substituição:

$v \cdot (2l)^2 = v \cdot l^2 \cdot 4 = 4v \cdot 4 = 400 \rightarrow$

$v = \dfrac{400}{16} \rightarrow v = 25$

Assim, $V_i = 4 \cdot 25 = 100$ m³/s.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

19. A

Do enunciado, sabemos que $P(t) = A + B\cos(kt)$.

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} A + B\cos(kt) = 120 \\ A - B\cos(kt) = 78 \end{cases} \rightarrow B\cos(kt) = A - 78$$

Pelo método da substituição:

$A + (A - 78) = 120$

$2A = 120 + 78 = 198 \rightarrow A = 99$

$P_{máx}$ será quando $\cos(kt) = 1$. Logo:

$99 + B = 120 \rightarrow B = 21$

Fazendo $\dfrac{90 \text{ batimentos}}{60 \text{ segundos}} = \dfrac{1}{T} \rightarrow T = \dfrac{6}{9}\text{ s} = \dfrac{2}{3}\text{ s}$

$k = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi$

Assim, $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

20. E

Sendo a quantidade de pão = x e a de queijo = y, temos o sistema:

$$\begin{cases} 1{,}6x + 5y = 830 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

Por substituição:

$1{,}6x + 5(200 - x) = 830 \rightarrow 1{,}6x + 1\,000 - 5x = 830 \rightarrow 3{,}4x = 170 \rightarrow x = 50$ g.

Logo, $50 + y = 200 \rightarrow y = 150$ g.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

52 SISTEMAS LINEARES – MÉTODO DA IGUALDADE

Comentários sobre o módulo

Neste módulo estudamos mais um método para solucionar um sistema linear: o método da igualdade. Ele é um dos mais utilizados e exige que sejam seguidos alguns passos a fim de se obter a solução do sistema. É importante que os alunos pratiquem com exemplos cotidianos e genéricos para que o método seja fixado.

Exercícios propostos

7. D

Sendo y a distância entre A e B e z a distância entre C e D, temos o sistema:

$$\begin{cases} y+5=3z \\ 5+z=\dfrac{y}{2} \end{cases}$$

$y = 3z - 5$ e $y = 2z + 10$

Pelo método da igualdade:

$3z - 5 = 2z + 10 \rightarrow z = 15$ km

Logo, $y + 5 = 3z \rightarrow y = 3z - 5$

$= 3 \cdot (15) - 5 \rightarrow y = 40$ km

Portanto, $\dfrac{15}{40} \cdot 100\% = 37{,}5\%$.

8. A

Pelo enunciado, temos o sistema:

$$\begin{cases} p+a=20 \\ 4p+\dfrac{2}{3}a=20 \end{cases}$$

Reescrevendo, encontramos:

$$\begin{cases} a=20-p \\ \dfrac{2}{3}a=20-4p \end{cases} \rightarrow a = \frac{(20-4p)\cdot 3}{2} \rightarrow a = 30 - 6p$$

Por igualdade:

$20 - p = 30 - 6p \rightarrow 6p - p = 30 - 20 \rightarrow 5p = 10 \rightarrow p = 2$

Assim, inicialmente, Pedro possuía 2 cartões. Como após a disputa ele quadriplicou esse número, ao final ficou com 4 . 2 = 8. Ou seja, 8 cartões. Logo, Pedro ganhou 6 cartões.

9. B

Da última equação, encontramos o valor de d (positivo):

$d = \sqrt{144} = 12$

Substituímos na segunda equação e isolamos o valor de x:

$$5y = 12x + 12 \rightarrow x = \frac{5y - 12}{12}$$

Ao isolarmos x na primeira equação e isolarmos com o resultado acima, obtemos:

$$x = \frac{y}{4} \rightarrow \frac{y}{4} = \frac{5y-12}{12} \rightarrow y = \frac{5y-12}{3}$$

$3y = 5y - 12 \rightarrow 2y = 12 \rightarrow y = 6$

10. Sendo $N \rightarrow abc$:

$a + b + c = 18$ e $c = 2b$

Então:

$N = 100a + 10b + c$

$M = 100c + 10b + a$

$M = N + 198$

Por igualdade, temos $100c + 10b + a = N + 198$.

Como $N = 100a + 10b + c \rightarrow 100c + 10b + a = 100a + 10b + c + 198$

$100c + a = 100a + c + 198 \rightarrow 99c - 99a = 198$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} a+b+c=18 \rightarrow a=18-b-c \\ c=2b \\ 99c-99a=198 \rightarrow 99(c-a)=198 \rightarrow c-a= \\ =2 \rightarrow a=c-2 \end{cases}$$

Por igualdade:

$18 - b - c = c - 2$

Como $c = 2b$, temos:

$18 - b - 2b = 2b - 2 \rightarrow 5b = 20 \rightarrow b = 4$

Então, $c = 2 \cdot 4 \rightarrow c = 8$.

Assim:

$a = c - 2 \rightarrow a = 8 - 2 \rightarrow a = 6$

$N = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$

$N = 100 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 8 \rightarrow N = 648$

11. A

Sendo b (número de figurinhas do Brasil), e (número de figurinhas da Espanha) e a (número de figurinhas da Argentina), temos o sistema:

$$\begin{cases} b+e+a=30 \\ 3b+2e+a=58 \\ b=3e \end{cases}$$

Reescrevendo, encontramos:

$$\begin{cases} b+e+a=30 \rightarrow b=30-e-a \\ 3b+2e+a=58 \\ b=3e \end{cases}$$

Por igualdade:

$30 - e - a = 3e \rightarrow 4e + a = 30 \rightarrow a = 30 - 4e$

Substituindo na equação II, temos:

$3 \cdot (3e) + 2e + (30 - 4e) = 58$

$9e + 2e + 30 - 4e = 58 \rightarrow 7e = 28 \rightarrow e = 4$

Logo, $a = 30 - 4 \cdot 4 \rightarrow a = 14$

$b = 3 \cdot 4 \rightarrow b = 12$

Analisando os itens, temos:

I) Como b = 12, é verdadeira.

II) Ele comprou figurinhas da Argentina. Como cada uma vale R$ 1,00, ele gastou 1 · 14 = R$ 14,00. Portanto, falsa.

III) Temos que a = 14 e e = 4. Logo, o número de figurinhas da Argentina é maior que o da Espanha. Portanto, falsa.

12. E

Faremos as seguintes considerações:

$x \rightarrow$ 1 colher de arroz

$y \rightarrow$ 1 colher de azeite

$z \rightarrow$ 1 fatia de queijo branco

$w \rightarrow$ 1 bife de 100 g

Do enunciado, é possível estabelecer as seguintes relações entre as variáveis e a pontuação de cada alimento, obtendo o sistema linear:

$$\begin{cases} 4x+2y+z=85 \\ x+2z+w=85 \\ 4x+y+2z=85 \\ 4x+w=85 \end{cases}$$

Igualando a primeira e a terceira equações, temos:

$4x + 2y + z = 4x + y + 2z \rightarrow y = z$

Isolamos z na primeira equação e substituímos o resultado anterior:

$z = 85 - 4x - 2y = 85 - 4x - 2y \rightarrow y = \dfrac{85 - 4x}{3}$

Da segunda e da quarta equações, obtemos:

$x + 2z + w = 4x + w \rightarrow 3x = 2z$

Substituímos y = z e isolamos y, o que resulta $y = \dfrac{3x}{2}$.

Agora, podemos igualar y e encontrar o valor de x:

$\dfrac{3x}{2} = \dfrac{85 - 4x}{3} \rightarrow 9x = 2 \cdot 85 - 8x \rightarrow 17x = 170 \rightarrow$

$\rightarrow x = 10$

Das relações anteriores:

$y = \dfrac{3x}{2} \rightarrow y = 3 \cdot \dfrac{10}{2} \rightarrow y = 15$

$z = y \rightarrow z = 15$

$w = 85 - 5x \rightarrow w = 45$

Assim, x = 10, y = 15, z = 15 e w = 45.

I. Como 1 bife de 100 g corresponde a w = 45 pontos, a afirmação está correta.

II. Como o arroz é constituído majoritariamente por amido, um tipo de carboidrato, a alternativa está correta.

III. Calculando a mesma quantidade para ambos, temos:

25% de 20 g de arroz (1 colher) → 10 pontos

100% de 5 g de azeite (1 colher) →15 pontos

Portanto, $\dfrac{\text{número de pontos do lipídeo}}{\text{número de pontos do carboidrato}} =$

$= \dfrac{15}{10} = 1{,}5$. A afirmação está correta.

Todas as afirmações são corretas.

13. E

Adotando as idades de Ana, Bia e Carla como a, b e e, respectivamente, temos que:

$$\begin{cases} b = c + 6 \\ b - 2 = 3(a - 2) \\ b + 1 = (a + 1) + (c + 1) \end{cases}$$

Reescrevemos o sistema e mantemos as igualdades para b:

I) $b = c + 6$

II) $b = 3a - 4$

III) $b = a + c + 1$

Igualamos a equação I e a equação II:

$c + 6 = 3a - 4 \rightarrow c = 3a - 10$

Igualamos a equação II e a equação III:

$a + c + 1 = 3a - 4 \rightarrow c = 2a - 5$

Assim, obtemos o valor de a ao igualar as expressões de c:

$3a - 10 = 2a - 5 \rightarrow a = 5$

Substituímos na equação II:

$b = 3 \cdot 5 - 4 = 15 - 4 \rightarrow b = 11$

O valor de c, pela equação I, é:

$c = b - 6 \rightarrow c = 11 - 6 \rightarrow c = 5$

14. Utilizando a 1ª linha e a 1ª coluna:

$A + 17 + B = A + 13 + 14 \rightarrow B = 10$

Pela 2ª coluna e pelas diagonais:

$17 + C + E = A + C + 15 = B + C + 14$

Substituindo B = 10 e simplificando o termo C, temos:

$17 + E = A + 15 = 10 + 14$

$A = 9$

$E = 7$

Da 2ª linha e da 2ª coluna:

$13 + C + D = 17 + C + E \rightarrow D = 17 + E - 13 \rightarrow$
$\rightarrow D = 11$

Portanto:

$D + E = 11 + 7 = 18$

O valor de D + E é igual a 18.

15. B

Verificamos que a soma apresentada é uma PG de razão $-\frac{1}{3}$. Logo:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{x-y}{2}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3x-3y}{8} \rightarrow \frac{3x-3y}{8} = -1$$

Reescrevendo o sistema, temos:

$3x - 3y = -8 \rightarrow 3x = 3y - 8$

$3x - y = -2 \rightarrow 3x = y - 2$

Por igualdade:

$3y - 8 = y - 2 \rightarrow 2y = 6 \rightarrow y = 3$

Logo, $3x = y - 2 \rightarrow 3x = 3 - 2 \rightarrow x = \frac{1}{3}$.

Assim, $x + y = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$.

16. A

I) Verdadeira.

Uma vez que o padrão de colheita é linear, podemos relacionar a, o tempo x e o número de quilogramas y de uvas colhidas pela função afim $y = ax + b$.

Pelas informações do enunciado:

$$\begin{cases} 3650 = 14a + b \\ 730 = 9a + b \end{cases}$$

Isolamos b e igualamos as expressões resultantes:

$3\,650 - 14a = 730 - 9a$

$(14 - 9)\,a = 3\,650 - 730$

$5a = 2\,920 \rightarrow a = 584$

Substituindo o valor de a na segunda equação, obtemos o valor de b:

$b = -4\,526$

Assim, a expressão para calcular o número de quilogramas y em função do tempo x é dada por $y = 584x - 4\,526$.

II) Verdadeira.

Substituindo o valor de $x = 18$ horas, obtemos:

$y = 584x - 4\,526 \rightarrow y = 584 \cdot 18 - 4\,526 \rightarrow y = 5\,986$ kg.

III) Falsa.

No início da colheita, o número de quilogramas colhido é zero. Então:

$y = 0 = 584 \cdot 0 - 4\,526 \rightarrow x = 7{,}75$ horas

$x = 7$ horas e 45 minutos.

17. Dado que a soma dos 100 primeiros termos é 100, encontramos:

$$100 = (a_1 + a_{100}) \cdot \frac{100}{2} \rightarrow a_1 + a_{100} = 2$$

Como a soma do a_{101} até o a_{200} é 200:

$$200 = (a_{101} + a_{200}) \cdot \frac{100}{2} \rightarrow a_{101} + a_{200} = 4$$

Essas duas igualdades podem ser escritas como:

$a_1 + a_{100} = 2 \rightarrow a_1 + a_1 + 99r = 2$

$a_{101} + a_{200} = 4 \rightarrow a_1 + 100r + a_1 + 199r = 4$

Assim, temos o seguinte sistema linear:

$2a_1 + 99\,r = 2$

$2a_1 + 299\,r = 4$

Isso resulta:

$$2 - 99\,r = 4 - 299\,r \rightarrow 200\,r = 2 \rightarrow r = \frac{2}{200} =$$

$$= \frac{1}{100} \rightarrow r = 10^{-2}$$

Portanto, a razão da progressão aritmética é 10^{-2}.

Estudo para o Enem

18. C

Chamando de x a memória ocupada por um minuto de vídeo e denominando y a memória ocupada por uma foto, temos:

$10x + 190y = 15x + 150y \rightarrow x = 8y$

Assim, a capacidade total do disco é:

$10 \cdot 8y + 190y = 270y$. Ou seja, o resultado é 270.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. B

Em cada ciclo Y temos:

Luz vermelha acesa = V segundos

Luz verde acesa = X segundos e $\frac{2}{3}$ de V

Luz amarela acesa = 5 segundos

Logo:

$$X = \frac{2}{3} \cdot V \rightarrow V = \frac{3X}{2}$$

$Y = 5 + X + V$

Do sistema, podemos escrever:

$V = Y - 5 - X$

Por igualdade:

$$\frac{3X}{2} = Y - 5 - X \rightarrow 3X = 2Y - 10 - 2X$$

$5X - 2Y + 10 = 0$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. C

Do enunciado, temos o sistema:

$$\begin{cases} h + m = 177 \\ \dfrac{h}{m} = \dfrac{29}{30} \end{cases}$$

Reescrevendo, encontramos:

$$\begin{cases} h = 177 - m \\ h = \dfrac{29m}{30} \end{cases}$$

Por igualdade:

$$177 - m = \frac{29m}{30} \rightarrow 177 \cdot 30 - 30m = 29m$$

$59m = 5\,310 \rightarrow m = 90$

Logo, $h = 177 - 90 \rightarrow h = 87$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

53 SISTEMAS LINEARES – MÉTODO DA REDUÇÃO

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos o método da redução para solucionar sistemas lineares. Assim como o método da igualdade, o da redução requer alguns passos para se obter a solução do sistema. É importante que os alunos pratiquem com exemplos cotidianos e genéricos a fim de que o método seja fixado. É interessante também instigá-los a reconhecer o melhor método a empregar em cada tipo de exercício.

Exercícios propostos

7. A

Consideramos b (valor do bombom) e t (valor da trufa) e escrevemos o sistema:

$$\begin{cases} 25b + 15t = 107{,}5 \\ 20b + 45t = 185 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por –3:

$$\begin{cases} -75b - 45t = -322{,}5 \\ 20b + 45t = 185 \end{cases}$$

Somamos as equações:

$-55b = -137{,}5 \rightarrow b = 2{,}5$

Assim, o valor das trufas é:

$20b + 45t = 185 \rightarrow 20(2{,}5) + 45 \cdot t = 185 \rightarrow$
$\rightarrow 45t = 185 - 50 \rightarrow t = 3$

Logo, o aluno gastou $4 \cdot 2{,}5 + 3 \cdot 3 = 10 + 9 =$ $= 19$, ou seja, R$ 19,00.

8. B

Sendo a gasolina = x e o álcool = y e sabendo que o preço de 2 litros de gasolina com mais 4 litros de álcool é R$ 20,00 e que 1 litro de gasolina com mais 12 litros de álcool é vendido por R$ 40,00, podemos escrever o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 20 \\ x + 12y = 40 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema e multiplicamos a segunda equação por –2:

$$\begin{cases} -2x - 24y = -80 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$$

Somamos as equações:

$-20y = -60 \rightarrow y = 3$

Logo, o valor do litro de álcool é de R$ 3,00.

9. C

Vamos representar as massas de Tales, Platão e Fermat por t, p e f, respectivamente:

$$\begin{cases} t + p = 159 \\ p + f = 147 \\ t + f = 134 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por –1 e somamos todas as equações:

$2t = 146$

Então, $t = \dfrac{146}{2} \rightarrow t = 73.$

Pela primeira equação:

$p = 159 - t \rightarrow p = 159 - 73 \rightarrow p = 86$

Pela última equação:

$f = 134 - t \rightarrow f = 134 - 73 \rightarrow f = 61$

Somamos todos os pesos:

$t + p + f = 73 + 86 + 61 = 220$ kg

10. Consideramos x (o número de notas de R$ 5,00) e y (número de notas de R$ 20,00). Obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 5x + 20y = 580 \\ x + y = 47 \end{cases}$$

Simplificamos a primeira equação:

$$\begin{cases} x + 4y = 116 \\ x + y = 47 \end{cases}$$

Subtraímos a segunda equação da primeira:

$3y = 69$

Assim, $y = \dfrac{69}{3} \rightarrow y = 23.$

Substituímos o valor de y:

$x + y = 47 \rightarrow x = 47 - y \rightarrow x = 24.$

Portanto, a pessoa recebeu 24 notas de R$ 5,00 e 23 notas de R$ 20,00.

11. E

Do enunciado, temos o sistema:

$$\begin{cases} c+m+t=50 \\ 4c+2m+3t=165 \\ c=2m \end{cases}$$

Substituímos c nas equações:

$$\begin{cases} 2m+m+t=50 \\ 8m+2m+3t=165 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3m+t=50 \\ 10m+3t=165 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por –3:

$$\begin{cases} -9m-3t=-150 \\ 10m+3t=165 \end{cases}$$

Somamos as equações:

$m = 15$

O número de carros é $c = 2m \rightarrow c = 30$.

O número de triciclos é $10 \cdot 15 + 3t = 165 \rightarrow$
$\rightarrow 3t = 15 \rightarrow t = 5$.

Assim, o número de motos é igual ao triplo de triciclos.

12. C

Dado o sistema, fazemos $a = \dfrac{1}{x}$, $b = \dfrac{27}{y^2}$ e $c = \dfrac{8}{z^3}$:

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ 4a+3b+5c=10 \\ 2a+2b+3c=7 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por 2:

Fazemos III – I:

$3c - 2c = 1 \rightarrow c = 1$

Logo:

$$\begin{cases} a+b+1=3 \\ 4a+3b+5\cdot1=10 \\ 2a+2b+3\cdot1=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 4a+3b=5 \\ 2a+2b=4 \end{cases}$$

Multiplicamos a terceira equação por 2:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 4a+3b=5 \\ 4a+4b=8 \end{cases}$$

Fazemos III – II:

$4b - 3b = 3 \rightarrow b = 3$

Logo, $a + b = 2 \rightarrow a = 2 - 3 \rightarrow a = -1$.

Assim:

$a = \dfrac{1}{x} \rightarrow -1 = \dfrac{1}{x} \rightarrow x = -1$

$b = \dfrac{27}{y^2} \rightarrow 3 = \dfrac{27}{y^2} \rightarrow y^2 = 9 \rightarrow y = 3$

$c = \dfrac{8}{z^3} \rightarrow 1 = \dfrac{8}{z^3} \rightarrow z^3 = 8 \rightarrow z = 2$

Logo, $|x| + |y| + |z| = |-1| + |3| + |2| = 6$.

13. C

Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} x+y+z=\sqrt[4]{9} \\ x+y-z=\sqrt{3} \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por –1:

$$\begin{cases} -x-y-z=-\sqrt[4]{9} \\ x+y-z=\sqrt{3} \end{cases}$$

Então somamos:

$-2z = -\sqrt{3} + \sqrt[4]{9} \rightarrow z = \dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt[4]{9}}{2}$

Elevamos a segunda equação ao quadrado:

$x + y + z = \sqrt[4]{9}$

$x + y = \sqrt{3} + z \rightarrow (x + y)^2 = (\sqrt{3} + z)^2 \rightarrow x^2 +$
$+ 2xy + y^2 = 3 + 2\sqrt{3}z + z^2$

$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 3 + 2\sqrt{3}z \rightarrow x^2 + 2xy +$
$+ y^2 - z^2 = 3 + 2\sqrt{3}\left(\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt[4]{9}}{2}\right)$

$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 3 - 3 + \sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3^2} = 3$

Portanto: $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 3$.

14. Do enunciado, resolvemos a igualdade:

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+C}{x^2+4} \rightarrow$$

$\rightarrow Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Dx^3 + 2Dx^2 + 2Dx +$
$+ Cx^2 + 2Cx + 2C = 1 \rightarrow$

$\rightarrow (A + D)x^3 + (B + C + 2D)x^2 + 2(2A + C + D)x +$
$+ (4B + 2C) = 1$

Logo:

$$\begin{cases} A+D=0 \\ B+C+2D=0 \\ 2A+C+D=0 \\ 4B+2C=1 \end{cases}$$

b) Resolvemos o sistema do item anterior:

$$\begin{cases} A+D=0 \\ B+C+2D=0 \\ 2A+C+D=0 \\ 4B+2C=1 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por –2 e a somamos com a equação 3:

$C - D = 0$

Logo:

$$\begin{cases} A+D=0 \\ B+C+2D=0 \\ C-D=0 \\ 4B+2C=1 \end{cases}$$

Multiplicamos agora a segunda equação por –4 e a somamos com a equação 4:

$-2C - 8D = 1$

Logo:

$$\begin{cases} A+D=0 \\ B+C+2D=0 \\ C-D=0 \\ -2C-8D=1 \end{cases}$$

Multiplicamos a equação 3 por 2 e a somamos com a equação 4:

$-10D = 1 \rightarrow D = -\frac{1}{10}$

Assim, da equação 3 temos que $C = D = -\frac{1}{10}$.

Logo:

$A + D = 0 \rightarrow A = -D \rightarrow A = \frac{1}{10}$

$B + C + 2D = 0 \rightarrow B = -C - 2D$

$B = -\left(-\frac{1}{10}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$

15. C

Chamamos de x, y e z os preços da bola, da raquete e do boné, respectivamente:

$$\begin{cases} x+2y+3z = 100 \\ 3x+7y+11z = 320 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por –3 e a somamos com a segunda:

$y + 2z = 20$

Somamos a primeira equação e o último resultado, multiplicado por –1:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & x & + & 2y & + & 3z & = & 100 \\ + & & & -y & - & 2z & = & -20 \\ \hline & x & + & y & + & z & = & 80 \end{array}$$

A última equação é a soma dos valores da bola, da raquete e do boné.

16. D

Consideramos as seguintes associações:

$x \rightarrow$ preço do brigadeiro

$y \rightarrow$ preço do beijinho

$z \rightarrow$ preço do cajuzinho

Utilizamos a tabela e obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + 3y + 6z = 12 \\ 2x + 5y + 4z = 11 \\ 5x + 3y + 2z = 14 \end{cases}$$

A primeira equação pode ser simplificada dividindo-se todos os termos por 3:

$x + y + 2z = 4$

Multiplicamos essa equação por –2 e a somamos com a segunda.

Dessa operação temos o novo sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 0 + 3y + 0 = 3 \\ 5x + 3y + 2z = 14 \end{cases}$$

Então, $3y = 3 \rightarrow y = 1$.

Multiplicamos a primeira equação por –5 e a somamos com a terceira:

$0 - 2y - 8z = -6$

Substituímos $y = 1$:

$8z = 6 - 2y \rightarrow 8z = 6 - 2 \rightarrow z = \frac{4}{8} \rightarrow z = \frac{1}{2}$

Pela primeira equação:

$x = 4 - y - 2z \rightarrow x = 4 - 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow x = 2.$

Portanto:

$x = 2$ (brigadeiro)

$y = 1$ (beijinho)

$z = 0{,}5$ (cajuzinho)

Avaliamos, então, as afirmações:

I) O brigadeiro é o mais caro. (Falsa)

II) O cajuzinho é o mais barato. (Falsa)

III) 25% de 2 é 0,5. (Verdadeira)

IV) O dobro do preço do beijinho resulta $2 \cdot 1 = 2$. (Verdadeira)

V) O preço do beijinho é 1. (Falsa)

Portanto, são verdadeiras as afirmações III e IV.

17. a) Sendo x o número de GB consumidos:
$100 < 28 + 4{,}5x \rightarrow 72 < 4{,}5x \rightarrow x > 16$

Para um consumo maior que 16 GB/mês, o Plano Ilimitado é mais vantajoso.

b) Do enunciado, temos:

$3 \text{ GB} \rightarrow V_{simples} = 12 \cdot 3 = 36$

$8 \text{ GB} \rightarrow V_{intermediário} = 28 + 4{,}5 \cdot 8 = 64$

Plano simples $\rightarrow y = ax + b$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} 36 = 3a + b \\ 64 = 8a + b \end{cases}$$

Calculamos II – I:

$28 = 5a \rightarrow a = \frac{28}{5} \rightarrow a = 5{,}6$

Assim, $36 = 3 \cdot (5{,}6) + b \rightarrow b = 19{,}2$.

Portanto, a mensalidade do Plano Simples deve ser igual a R$ 19,20 e o custo por GB, igual a R$ 5,60.

Estudo para o Enem

18. B

Consideramos x (o número de provas disputadas apenas por homens), y (o número de provas disputadas apenas por mulheres) e z (o número de provas mistas):

$$\begin{cases} x + y + z = 306 \\ y + z = 145 \\ x - y = 25 \end{cases}$$

Calculamos I – III:

$2y + z = 281$

Subtraímos a equação obtida e a equação II:

$y = 136$

$y + z = 145 \rightarrow 136 + z = 145 \rightarrow z = 9$

$x - y = 25 \rightarrow x - 136 = 25 \rightarrow x = 161$

Logo, o número de provas mistas é 9.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. D

Do enunciado, temos o sistema:

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}5y = 921 \\ x + y = 2\,438 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por 10 e a segunda por –3:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 9\,210 \\ -3x - 3y = -7\,314 \end{cases}$$

Somamos as equações:

$2y = 1\,896 \rightarrow y = 948$

Logo, $x + y = 2\,438 \rightarrow x = 2\,438 - 948 \rightarrow$
$\rightarrow x = 1\,490$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. E

Consideramos x (o número de pontos correspondentes a cada pessoa inscrita), y (o número de pontos correspondentes a cada atualização) e z (o número de pontos correspondentes a cada visualização). Então:

$$\begin{cases} 100x + 100y + 300z = 2000 \\ 300x + 600y + 300z = 6300 \\ 600x + 600y + 800z = 9000 \end{cases}$$

Simplificando, temos:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 20 \\ x + 2y + z = 21 \\ 3x + 3y + 4z = 45 \end{cases}$$

Calculamos II – I:

$y - 2z = 1$

Multiplicamos a primeira equação por 3 e subtraímos a equação III:

$5z = 15 \rightarrow z = 3$

Logo:

$y - 2z = 1 \rightarrow y = 1 + 2 \cdot 3 \rightarrow y = 7.$

$x + y + 3z = 20 \rightarrow x = 20 - 7 - 3 \cdot 3 \rightarrow x = 4$

Dessa forma, $900 \cdot 4 + 450 \cdot 7 + 700 \cdot 3 = 8\,850$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

54 SISTEMAS LINEARES - ESCALONAMENTO

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos o sistema escalonado e o método do escalonamento.

É possível trazer exemplos de sistemas lineares para os quais o método do escalonamento não é recomendado. Geralmente sistema possíveis e indeterminados ou sistemas impossíveis são exemplos, pois não será possível encontrar uma incógnita isolada ou haverá equações contraditórias.

Permita que os alunos experimentem essas situações e reconheçam em quais delas o método torna o processo mais árduo.

Exercícios propostos

7. B

Do enunciado temos o sistema:

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=27 \\ 3x+4y+4z=44 \\ 4x+5y+6z=59 \end{cases}$$

$L_2 \rightarrow L_1 \cdot (-3) + L_2\,(-2)$

$L_3 \rightarrow L_1 \cdot (-2) + L_3$

Escalonando, temos:

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=27 & \text{(I)} \\ y-\dfrac{z}{2}=\dfrac{7}{2} & \text{(II)} \\ y=5 \end{cases}$$

Substituindo y em II, temos:

$5 - \dfrac{z}{2} = \dfrac{7}{2} \rightarrow 10 - z = 7 \rightarrow z = 3$

Substituindo y e z na equação I, temos:

$2x + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 27 \rightarrow 2x + 10 + 9 = 27 \rightarrow$
$\rightarrow 2x = 27 - 19 \rightarrow x = 4$

Portanto, temos que $3 < 4 < 5$, logo $z < x < y$.

8. D

Considerando que

$x \rightarrow$ preço unitário das margaridas

$y \rightarrow$ preço unitário dos lírios

$z \rightarrow$ preço unitário das rosas

Pelas informações do enunciado, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 4x+2y+3z=42 \\ x+2y+z=20 \\ 2x+4y+z=32 \end{cases}$$

Trocando a ordem da primeira e da segunda equação

$$\begin{cases} x+2y+z=20 \\ 4x+2y+3z=42 \\ 2x+4y+z=32 \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação pelo resultado da multiplicação da primeira equação por –4 somado à segunda equação

$$\begin{cases} x+2y+z=20 \\ -6y-z=-38 \\ 2x+4y+z=32 \end{cases}$$

Trocamos a terceira equação pelo resultado da multiplicação da primeira equação por –2 somado à terceira equação

$$\begin{cases} x+2y+z=20 \\ -6y-z=-38 \\ -z=-8 \end{cases}$$

Assim, $z = 8$.

Fazendo a substituição na segunda equação

$y = \dfrac{-z + 38}{6} \rightarrow y = \dfrac{-8+38}{6} \rightarrow y = 5$

Substituindo y e z na primeira equação resulta

$x = 20 - 2y - z \rightarrow x = 20 - 2 \cdot 5 - 8 \rightarrow x = 2$

Portanto, um arranjo simples, com uma margarida, um lírio e uma rosa custará

$x + y + z = 2 + 5 + 8 = 15$, ou seja, R\$ 15,00.

9. C

Chamaremos:

$x \rightarrow$ valor de cada hambúrguer

$y \rightarrow$ valor de cada suco

$z \rightarrow$ valor de cada sobremesa

Podemos montar o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 15 \\ 4x + 3y = 24 \\ 5y + 3z = 35 \end{cases}$$

A matriz aumentada dos coeficientes é

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 15 \\ 4 & 3 & 0 & 24 \\ 0 & 5 & 3 & 35 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a 1ª linha por –2 e somando-a à segunda linha, resulta

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 5 & 3 & 35 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a 2ª linha por –5 e somando-a à terceira linha, obtemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 13 & 65 \end{pmatrix}$$

Assim, o sistema fica

$$\begin{cases} 2x + y + z = 15 \\ y - 2z = -6 \\ 13z = 65 \end{cases}$$

Então,

$z = 5$

$y = -6 - 2z = -6 - 2 \cdot 5 = 4$

$x = \dfrac{15 - y - z}{2} = \dfrac{15 - 4 - 5}{2} = 3$

Os gastos de cada um foram

Carlos $\rightarrow 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 32$ reais

Paulo $\rightarrow 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 21$ reais

José $\rightarrow 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 21$ reais

Assim, os gastos de Paulo e José foram iguais.

10. Considerando que o número de padeiros dos tipos A, B e C sejam a, b e c, respectivamente. Temos, então, o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 30a + 30b + 90c = 420 \\ 100a + 70b + 30c = 770 \\ 20a + 20b + 100c = 360 \end{cases}$$

Simplificando o sistema, obtemos

$$\begin{cases} a + b + 3c = 14 \\ 10a + 7b + 3c = 77 \\ a + b + 5c = 18 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 14 \\ 1 & 0 & 7 & 77 \\ 1 & 1 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

Fazendo

linha 2 $\rightarrow -10 \cdot$ linha 1 + linha 2

linha 3 $\rightarrow -1 \cdot$ linha 1 + linha 3

resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 14 \\ 0 & -3 & -27 & -63 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Então,

$2c = 4 \rightarrow c = 2$

$b = \dfrac{63 - 27 \cdot c}{3} = \dfrac{63 - 27 \cdot 2}{3} = \dfrac{63 - 54}{3} = \dfrac{9}{3} \rightarrow$

$\rightarrow b = 3$

$a = 14 - 3c - b = 14 - 3 \cdot 2 - 3 \rightarrow a = 5$

Portanto, a quantidade de padeiros dos tipos A, B e C são 5, 3 e 2, respectivamente.

11. D

Calculando o determinante dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & b \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 192 + 16b$$

O sistema linear terá solução única se:

$192 + 16b \neq 0 \rightarrow b \neq -12$

Assim, verificando o que acontece com o sistema quando $b = -12$, temos:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 6z = -3 \\ 16y + 12z = a \\ x - 4y + 2z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 4y + 2z = 3 \\ 3x + 4y - 6z = -3 \\ 16y - 12z = a \end{cases}$$

Fazendo o escalonamento do sistema, multiplicamos a primeira equação por –1 e a somamos com a segunda, trocando a segunda equação pela equação obtida.

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 3 \\ 0 + 16y - 12z = -12 \\ 0 + 16y - 12z = a \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por –1 e a somando com a terceira, temos:

$$\begin{cases} x-4y+2z=3 \\ 0+16y-12z=-12 \\ 0+0+0=a+12 \end{cases}$$

O sistema terá infinitas soluções se b = a = – 12 e será impossível se b = – 12 e a ≠ – 12.

Portanto, somente as afirmativas [I] e [II] são corretas.

12. E

Vamos considerar as seguintes associações:

□ → x ○ → y ● → z

A partir do esquema das balanças, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} 2x=2y+z \\ x+2=2y+3z \\ x+1+2z=4y \end{cases}$$

Rearranjando os termos, resulta o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x-2y-z=0 \\ x-2y-3z=-2 \\ x-4y+2z=-1 \end{cases}$$

Invertendo a ordem das equações, temos que

$$\begin{cases} x-2y-3z=-2 \\ x-4y+2z=-1 \\ 2x-2y-z=0 \end{cases}$$

Assim, a matriz aumentada dos coeficientes é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por –1 e a somando com a segunda linha

Multiplicando a primeira linha por –2 e a somando com a terceira linha

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Somando a segunda linha com a terceira linha,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Reescrevendo o sistema, temos

$$\begin{cases} x-2y-3z=-2 \\ -2y+5z=1 \\ 10z=5 \end{cases}$$

Então,

$$z = \frac{10}{5} = 0{,}5$$

$$y = \frac{5z-1}{2} = \frac{5\cdot 0{\cdot}5-1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$x = -2 + 2y + 3z = -2 + 2 \cdot 0{,}75 + 3 \cdot 0{,}5 = 1$

Portanto, $x + y + z = 1 + 0{,}75 + 0{,}5 = 2{,}25$

ou seja, a soma dos pesos dos objetos é 2,25 kg. Então é um número maior que 2 kg e menor que 2,5 kg.

13. B

Como o sistema deve ser possível e indeterminado, o determinante da matriz do sistema deve se anular, assim

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -6 + 5a + 2 - 4a - 5 + 3 = 0$$

$\rightarrow a = 6$

Substituindo o valor de a = 6 no sistema, resulta

$$\begin{cases} x+y+6z=1 \\ x+2y+z=2 \\ 2x+5y-3z=b \end{cases}$$

Fazemos, então:

linha 2 → linha 1 – linha 2

linha 3 → linha 3 – 2 · linha 1

Temos:

$$\begin{cases} x+y+6z=1 \\ 0+y-5z=1 \\ 0+3y-15z=b-2 \end{cases}$$

Fazemos, então:

linha 3 → –3 · linha 2 + linha 3 obtemos

$$\begin{cases} x+y+6z=1 \\ 0+y-5z=1 \\ 0+0+0=b-5 \end{cases}$$

Então, b = 5. Assim, a + b = 6 + 5 = 11.

14. I) O sistema obtido do problema é

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{10}z = 20 \\ \dfrac{5}{2}x + y + \dfrac{3}{2}z = 57 \\ x + \dfrac{1}{2}y + 2z = 52 \end{cases}$$

II) A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1}{10} & 20 \\ \dfrac{5}{2} & 1 & \dfrac{3}{2} & 57 \\ 1 & \dfrac{1}{2} & 2 & 52 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por $\dfrac{2}{5}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1}{10} & 20 \\ 1 & \dfrac{2}{5} & \dfrac{3}{5} & \dfrac{114}{5} \\ 1 & \dfrac{1}{2} & 2 & 52 \end{pmatrix}$$

Fazemos, então:

(II) → (I) – (II)

(III) → (I) – (III)

Resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1}{10} & 20 \\ 0 & \dfrac{3}{5} & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{14}{5} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{19}{10} & -32 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a segunda linha por $\dfrac{5}{3}$ e a terceira linha por 2, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1}{10} & 20 \\ 0 & 1 & -\dfrac{5}{6} & -\dfrac{14}{5} \\ 0 & 1 & -\dfrac{19}{10} & -64 \end{pmatrix}$$

Fazemos, assim:

(III) → (II) – (III)

Logo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1}{10} & 20 \\ 0 & 1 & -\dfrac{5}{6} & -\dfrac{14}{3} \\ 0 & 0 & \dfrac{89}{30} & \dfrac{178}{3} \end{pmatrix}$$

Então,

$$z = \frac{178}{3} \cdot \frac{30}{89} \rightarrow z = 20$$

$$y = -\frac{14}{3} + \frac{5}{6}z = -\frac{14}{3} + \frac{5}{6} \cdot 20 \rightarrow y = 12$$

$$x = 20 - y - \frac{z}{10} = 20 - 12 - 2 \rightarrow x = 6$$

Portanto, a solução do sistema é a terna (6, 12, 20).

15. A

Fazemos o escalonamento do sistema:

2ª linha → substituída pelo resultado da multiplicação da primeira linha por –1 somado à segunda linha

3ª linha → substituída pelo resultado da multiplicação da primeira linha por –3 somado à terceira linha

$$\begin{cases} x+y+4z=2 \\ 0+y+3z=1 \\ 0-2y+(a-12)z=b-6 \end{cases}$$

3ª linha → substituída pelo resultado da multiplicação da segunda linha por 2 somado à terceira linha

$$\begin{cases} x+y+4z=2 \\ 0+y+3z=1 \\ 0+0+(a-6)z=b-4 \end{cases}$$

Para o sistema ser impossível, devemos ter, assim

$a - 6 = 0 \rightarrow a = 6$

e

$b - 4 \neq 0 \rightarrow b \neq 4.$

16. B

Do enunciado, $\det A(t) = 1$, o que implica

$$\begin{vmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \leftrightarrow 4e^{-2t} + 3e^{2t} + 1 - 3 - 2e^{-2t} - 2e^{2t} = 1$$

$$\leftrightarrow 2e^{-2t} + e^{2t} - 3 = 0 \leftrightarrow e^{4t} - 3e^{2t} + 2 = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow e^{2t} = 1 \text{ ou } e^{2t} = 2$$

Novamente, pelo enunciado, $t \neq 0$, então, $e^{2t} = 2$. Desse modo,

$$A(t)X = B(t) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pelo sistema acima, a matriz ampliada é

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo o escalonamento:

linha 2 → linha 1 + linha 2

linha 3 → 3 · linha 1 + linha 3

Obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

linha 3 → −5 linha 2 + linha 3

Dessa forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Então,

$x = -2\sqrt{2}$

$y = 0$

$z = -3\sqrt{2}$

17. D

Considerando que as quantidades de carros, motos e ônibus sejam x, y e z, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 20x + 10y + 40z = 1900 \\ x - 2y - z = 6 \end{cases}$$

Simplificamos a segunda equação, a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 2 & 1 & 4 & 190 \\ 1 & -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

2ª linha → −2 · 1ª linha + 2ª linha

3ª linha → −1 · 1ª linha + 3ª linha

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & -3 & -2 & -94 \end{bmatrix}$$

3ª linha → −3 · 2ª linha + 3ª linha

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & -8 & -64 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$z = \frac{-64}{-8} \rightarrow z = 8$$

Substituimos z na segunda equação

$y = 2z + 10 = 2 \cdot 8 + 10 \rightarrow y = 26.$

E, pela primeira equação,

$x = 100 - y - z = 100 - 26 - 8 \rightarrow x = 66.$

Portanto, foram 66 carros, 26 motos e 8 ônibus.

Estudo para o Enem

18. D

Fazendo as seguintes associações:

x → número de alunos que compraram 3 bilhetes

y → número de alunos que compraram 1 bilhete

z → número total de bilhetes que foram vendidos

A partir do enunciado, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + y - z = 158 \\ 10y - 2z = 0 \\ 3x + y - z = -90 \end{cases}$$

Escalonando a matriz aumentada, temos

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -90 \\ 0 & 10 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -158 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \end{array}$$

Fazemos, então:

$(II) \to -3 \cdot (I) + (II)$

Desse, modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 158 \\ 0 & 10 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 384 \end{pmatrix}$$

Substituindo (III) por (II) + (III),

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 158 \\ 0 & 10 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 384 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$y = \frac{384}{8} \to y = 48$$

Portanto, 48 alunos compraram apenas 1 bilhete.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. B

Sejam c, p e m, respectivamente, os preços do cachorro-quente, do pastel e do milho-verde, temos:

$$\begin{cases} 24c + 36p + 24m = 324 \\ 33c + 55p + 33m = 462 \\ 20c + 40p + 30m = 350 \end{cases} = \begin{cases} 2c + 3p + 2m = 27 \\ 3c + 5p + 3m = 42 \\ 2c + 4p + 3m = 35 \end{cases}$$

Escalonando e resolvendo, temos:

c = R$ 4,00, p = R$ 3,00 e m = R$ 5,00. Assim, analisando cada item, temos:

I) $4 + 3 < 2 \cdot 5$, portanto, falsa.

II) $3 + 5 = 2 \cdot 4$, portanto, verdadeira.

III) Como o preço de cada milho é 5, e esse é um número primo, falsa.

IV) Dos cálculos anteriores, falsa.

V) $4 + 3 + 5 = 12$, que é um número inteiro, portanto, falsa.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. B

Das equações informadas no enunciado, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ -i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ 4i_1 + 2i_2 = 8 \\ 2i_2 + 5i_3 = 9 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ -6i_2 + 4i_3 = -8 \\ 19i_3 = 19 \end{cases}$$

Resolvendo, temos:

$I_3 = 1A.$

Logo

$-6i_2 + 4i_3 = -8 \to -6i_2 + 4 \cdot 1 = -8 \to -6i_2 = -8 - 4 \to i_2 = 2A$

E, por fim, $i_1 - i_2 + i_3 = 0 \to i_1 - 2 + 1 = 0 \to i_1 = 1A$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

55 SISTEMAS LINEARES - GRÁFICO E MATRIZ ASSOCIADA

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudarmos os métodos gráfico e de matriz associada para a resolução de sistemas lineares.

É importante utilizar as discussões realizadas em aulas anteriores para aplicar o conceito de resolução gráfica de sistemas. Permita que os alunos experimentem solucionar sistemas por meio de gráficos.

Aproveite para recapitular o conceito de equações matriciais quando estiver apresentando o método de resolução por matriz associada.

Exercícios propostos

7. A

Podemos escrever um sistema 3 x 3 nas incógnitas x, y e z, como

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \ (\alpha) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \ (\beta) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \ (\gamma) \end{cases}.$$

Esse sistema possui infinitas soluções quando a intersecção dos planos dados por α, β e γ ocorrem em uma reta ou em um plano.

figura 5: três planos distintos, tal que a interceptação entre eles é uma única reta. Então, no sistema, duas variáveis são livres e uma variável é nula;

figura 7: um plano interceptando outros dois planos coincidentes, resultando em uma única reta. Assim, o sistema tem duas variáveis livres e uma variável nula;

figura 8: três planos coincidentes. Assim, o sistema tem três variáveis livres.

8. A

Para o casal, o excesso de bagagem foi x, então,

$x + 2z = 60.$

Para o senhor, o excesso de bagagem foi y. Assim:

$y + z = 60.$

Como o valor pago pelo senhor corresponde a 3,5 vezes o valor pago pelo casal, resulta $y = 3{,}5x$.

Essas equações resultam no sistema linear

$$\begin{cases} x + 0 \cdot y + 2z = 60 \\ 0 \cdot x + y + z = 60 \\ 3{,}5x - y + 0 \cdot z = 0 \end{cases}$$

Reescrevendo na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3{,}5 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9. D

Chamando os elementos de M de A_{ij}, pela relação apresentada, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_{11}\ x + a_{12}\ y + a_{13}\ z = 10000 \\ a_{21}\ x + a_{22}\ y + a_{23}\ z = 8000 \\ a_{31}\ x + a_{32}\ y + a_{33}\ z = 12000 \end{cases}$$

Notamos que os coeficientes que multiplicam as quantidades de cada alimento devem corresponder à quantidade em unidades por grama de cada vitamina. Ao observamos a tabela, essas quantidades aparecem em cada uma das colunas. Assim, a matriz M é dada pela matriz transposta daquela correspondente à tabela, ou seja

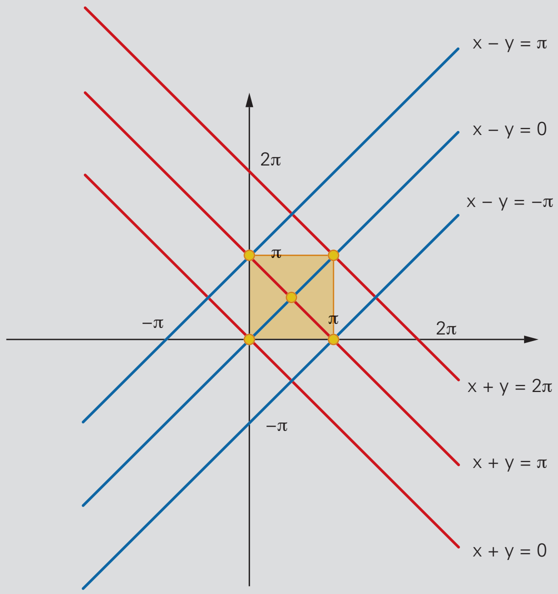
$$M=\begin{bmatrix} 15 & 30 & 35 \\ 50 & 45 & 20 \\ 30 & 25 & 50 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 15 & 50 & 30 \\ 30 & 45 & 25 \\ 35 & 25 & 50 \end{bmatrix}$$

10. Do sistema, resulta que

$\text{sen}\,(x + y) = 0 \rightarrow x + y = 0$ ou $x + y = \pi$ ou $x + y = 2\pi$

$\text{sen}\,(x - y) = 0 \rightarrow x - y = 0$ ou $x - y = -\pi$ ou $x - y = \pi$

As igualdades representam retas no plano cartesiano. As soluções são dadas pelas interseções das retas, respeitando as condições impostas para x e y.



Portanto, as soluções são dadas pelo conjunto

$\left\{(0,\,0),\,(\pi,\,0),\,(0,\,\pi),\,(\pi,\,\pi),\,\left(\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$

11. D

A tabela 1 pode ser representada pela matriz A_{2x3}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

e a tabela 2, pela matriz B_{3x2}

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Assim, a quantidade de puxadores que foram utilizados em cada modelo é dada pela multiplicação C = B · A. Obtendo essa matriz, temos

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & 86 & 100 \\ 56 & 64 & 72 \\ 36 & 38 & 46 \end{pmatrix}$$

Então, para cada modelo e para cada tipo,

	Puxadores por modelo		
Tipo	Lisa	Nita	Bia
Acinzentado	78	86	100
Ouro-velho	56	64	72
Prateado	36	38	46

Portanto, no modelo Bia foram utilizados 100 + + 72 + 46 = 218 puxadores.

12. B

Dado o sistema, substituindo os valores fornecidos para x, y e z, temos:

$70 \cdot 3 + a \cdot 1 = 260 \rightarrow a = 50$

$a \cdot 3 + b \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 194 \rightarrow b = 30$

Reescrevendo o sistema, temos

$$\begin{cases} 70x + 50y = 260 \\ 50x + 30y + 7z = 194 \\ 20x + 12z = 84 \end{cases}$$

Escrevendo a matriz associada, temos:

$$\begin{vmatrix} 70 & 50 & 0 \\ 50 & 30 & 7 \\ 20 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 100 \cdot (252 + 70 - 300) =$$

$= 100 \cdot 22 = 2200.$

13. B

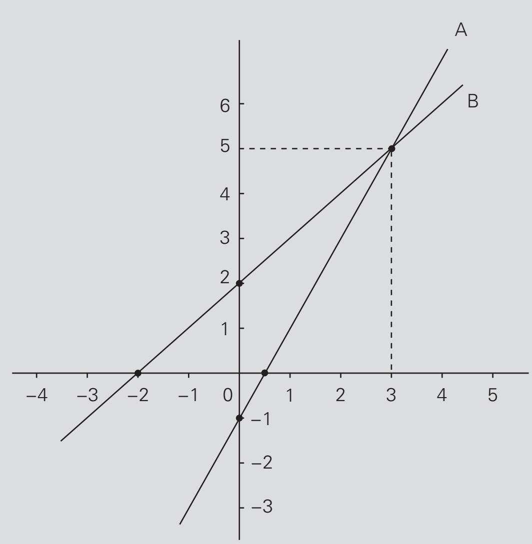
Consideramos que a palavra volume representa um dos sacos que carregam, e sendo x e y as quantidades de sacos que o asno e o mulo carregam, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} y + 1 = 2x \\ y - 1 = x + 1 \end{cases}$$

As equações definem as retas:

$y(x) = 2x - 1$ (A)

$y(x) = x + 2$ (B)



Pela solução gráfica, temos, x = 3 e y = 5. Assim, o produto é 3 · 5 = 15, um número múltiplo de 3.

14. Consideramos que x, y e z representam o número de questões de 1, 2 e 3 pontos, respectivamente, respondidas corretamente. Então, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ -x + y = 5 \\ x + 2y + 3z = 55 \end{cases}$$

A matriz aumentada associada ao sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 30 \end{pmatrix}$$

Substituímos a segunda linha pela soma da primeira linha e da segunda linha.

Substituímos a terceira linha pela soma da primeira linha e da terceira linha multiplicada por –1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 2 & 1 & 35 \\ 0 & 1 & 2 & 25 \end{pmatrix}$$

Substituímos a terceira linha pela soma da segunda linha e da terceira linha multiplicada por –2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 2 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

Assim, obtemos

$$z = \frac{-15}{-3} \rightarrow z = 5$$

Portanto, o número de questões de 3 pontos respondidas corretamente foi 5.

15. A

i) O determinante de uma matriz de ordem n multiplicada por um inteiro k é dado por

$\det(kA) = k^n \cdot \det A$. Como $k = 2$ e $\det A = 3$,

$\det(2A) = 2^3 \cdot 3 = 48$. Portanto, verdadeira.

ii) Substituindo $a = 12$ e $b = 20$, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 8x + 12y = 20 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira linha por 4, obtém-se a segunda linha. Assim, o sistema é possível e indeterminado. Portanto, falsa.

iii) Verdadeira, pois trata-se da condição para uma matriz quadrada ser invertível.

iv) Para a multiplicação de matrizes, o produto notável não se aplica, ou seja, a matriz resultante do produto AB não é necessariamente igual ao produto BA, portanto, falsa.

Assim, a sequência é V – F – V – F.

16. B

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B + 3C = 36 \\ 3A + 2B + 2C = 42 \\ 4A + 3B + 2C = 54 \end{cases}$$

Ele é equivalente à equação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 42 \\ 54 \end{pmatrix}$$

Tomando a matriz aumentada, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 36 \\ 3 & 2 & 2 & 42 \\ 4 & 3 & 2 & 54 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos a primeira equação por –3 e a somando com a segunda.

Multiplicando a primeira equação por –4 e a somando com a terceira.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 36 \\ 0 & -1 & 4 & -66 \\ 0 & -1 & -10 & -90 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos a segunda equação por. –1 e a somando com a terceira.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 36 \\ 0 & -1 & -7 & -66 \\ 0 & 0 & -3 & -24 \end{pmatrix}$$

Assim

$C = 8$

$B = 66 - 7C = 10$

$A = 30 - B - 3C = 2$

Portanto, $B = A + C$.

17. a) Do enunciado, temos que

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix}, \text{ logo}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} m^2+4 & 0 & 4m \\ m+1 & 1 & m+1 \\ 4m & 0 & m^2+4 \end{pmatrix} \text{ e, portanto,}$$

$2m^2 + 8 + 3 = 2m^2 + 8 + 2m + 2 + 8m + 1 \rightarrow$
$\rightarrow 10m = 0 \rightarrow m = 0$

b) Para $m = 2$ temos:

$2x + 2z = 4 \rightarrow x + z = 2$

$x - y + z = 3 \rightarrow x + z = 3 + y$

Por igualdade temos:

$2 = 3 + y \rightarrow y = -1$

$x + z = 2 \rightarrow z = 2 - z$

O produto $xyz = x(-1)(2-x) = x^2 - 2x$ representa uma parábola de concavidade para cima. Assim o produto é mínimo para $x = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$. Logo, a solução é $x = 1$, $y = -1$ e $z = 2 - 1 = 1$. Ou seja, $V = \{(1; -1; 1)\}$.

Estudo para o Enem

18. D

Por tratar-se de uma representação de plano cartesiano, o sistema possui duas incógnitas. O número de equações é dado pelo número de retas que aparecem no gráfico. Uma vez que a solução gráfica de um sistema linear é dada pelo ponto de interseção entre as retas, o sistema teria solução apenas se houvesse um ponto que fosse determinado pela interseção de todas as retas. No gráfico, não existe um ponto que satisfaça a essa condição.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

19. D

Determinando a equação matricial, temos

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \end{pmatrix}$$

A matriz inversa é

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Portanto, $x + y = -1 + 3 = 2$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

20. A

Vamos utilizar o determinante do sistema para descobrir o valor de a.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2a + 21 + 4 - 24 - 7 - a = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow a = 6$

Resolvendo o sistema temos

$$\begin{cases} 3x+y+6z=b \\ x+2y+7z=3 \\ x+y+4z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+y+6z=b \\ -5y-15z=b-9 \\ -2y-6z=b-6 \end{cases}$$

Tentando eliminar a incógnita de II e III encontramos que:

$2b - 18 - 5b + 30 = 0 \rightarrow -3b = -12 \rightarrow b = 4$

Como o sistema deve ser impossível, então $a = 6$ e $b \neq 4$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

56 SISTEMAS LINEARES - REGRA DE CRAMER

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, estudamos a regra de Cramer na solução de sistemas de equações e abordamos a discussão de um sistema linear.

Uma vez que o aluno conheça todas as técnicas de solução de sistemas lineares, será possível dividir a sala de aula em dois grupos e organizar uma batalha, de modo a promover a resolução de sistemas lineares e pontuar aquele grupo que solucioná-los em menor tempo.

Caso o grupo que solucionar em menor tempo concorde, poderá apresentar a resolução para todos e, assim, ganhar mais um ponto.

Dessa forma, será proporcionada interação entre os alunos e será possível observar quais deles apresentam mais dificuldades.

Para ir além

A cada dia estamos mais preocupados com o consumo energético no Brasil e no mundo. A utilização de energias renováveis e não poluentes (como a energia obtida de rios, marés, ventos e do Sol) é resultado dessa preocupação com o meio ambiente.

Por exemplo, a energia eólica (gerada pelos ventos) é uma grande tendência para as próximas décadas. Você sabia que a quantidade desse tipo de energia é calculada por meio de complexos sistemas de equações?

Pesquise mais sobre aplicações de sistemas de equações em nosso cotidiano.

Exercícios propostos

7. E

Do enunciado, temos $P(x) = mx^3 + nx^2 + p$. Logo:

$P(1) = m + n + p = 1$

$P(2) = 8m + 4n + 2p = 5$

$P(3) = 27m + 9n + 3p = 14.$

Pela regra de Cramer, temos:

$$m = \frac{D_m}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 54 + 72 - 108 - 24 - 18 = -12$$

$$D_m = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 14 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 28 + 45 - 56 - 15 - 18 = -4$$

Como $m = \frac{D_m}{D} \to m = \frac{-4}{-12} \to m = \frac{1}{3}.$

8. A

Calculamos o determinante pela matriz dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$$

Então, $a - 1 \neq 0 \to a \neq 1$.

Ou seja, se $a \neq 1$, o sistema tem solução única.

Consideramos o caso em que $a = 1$ e obtemos a matriz aumentada:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & m \end{vmatrix}$$

Fazemos, então, o escalonamento:

3ª linha $\to (-1) \cdot$ 1ª linha + 3ª linha

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & m-1 \end{vmatrix}$$

3ª linha $\to (-1) \cdot$ 2ª linha + 3ª linha

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-2 \end{vmatrix}$$

Então, se $m - 2 = 0 \to m = 2$, o sistema tem infinitas soluções.

Caso $m - 2 \neq 0 \to m \neq 2$, o sistema não tem soluções.

Resumindo, temos:

$a \neq 1$ e $m \in \mathbb{R}$: solução única

$a = 1$ e $m = 2$: infinitas soluções

$a = 1$ e $m \neq 2$: não possui soluções

9. A

Para que o sistema tenha solução não nula, é necessário que o determinante se anule. Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ m & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Então:

$m + m - 1 + m^2 + 1 + 1 = 0$

$(m + 1)^2 = 0$

$m = -1$

Portanto, para ter solução não nula, $m = -1$.

10. Como ambos os sistemas devem ser compatíveis, as seguintes proporções são válidas:

$$\frac{2}{c} = \frac{b}{1} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{c}{4} = \frac{3}{d}$$

Então:

$$\frac{2}{c} = \frac{c}{4} \rightarrow c^2 = 8 \rightarrow c = \pm 2\sqrt{2}$$

Consideramos que $c = 2\sqrt{2}$ e obtemos os seguintes valores para b, d e β:

$$\frac{2}{c} = \frac{b}{1} \rightarrow b = \frac{2}{c} \rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{c}{4} = \frac{3}{d} \rightarrow d = \frac{12}{c} \rightarrow d = 3\sqrt{2}$$

$$b = \frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \beta = \alpha\sqrt{2}$$

Se $c = -2\sqrt{2}$, os valores para b, d e β são:

$$\frac{2}{c} = \frac{b}{1} \rightarrow b = \frac{2}{c} \rightarrow b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{c}{4} = \frac{3}{d} \rightarrow d = \frac{12}{c} \rightarrow d = -3\sqrt{2}$$

$$b = \frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \beta = -\alpha\sqrt{2}$$

11. B

O determinante é dado por D:

$$D = \begin{vmatrix} \text{sen}\,\theta & 0 & 1 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 1 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & -1 \end{vmatrix} = -2\,\text{sen}\,\theta\ \cos\theta =$$

$$= \text{sen}\,(2\theta) \neq 0$$

Então, o sistema é possível e determinado. Para a coluna y:

$$Dy = \begin{vmatrix} \text{sen}\,\theta & 0 & 1 \\ -\text{sen}\,\theta & 0 & 1 \\ -\text{sen}\,\theta & \text{sen}\,\theta & -1 \end{vmatrix} = -2\text{sen}^2\,\theta$$

Então:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-\,2\text{sen}\,\theta}{-2\,\text{sen}\,\theta\,\cos\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\,\theta$$

12. D

Resolvemos o sistema S_1:

$x = 3$ e $y = -1$

Para que o sistema S_2 seja possível e determinado, é necessário que:

$$\frac{m}{3} \neq \frac{4}{-1} \rightarrow m \neq -12$$

Caso $m = -12$:

$$\frac{4}{-1} = \frac{5}{k} \rightarrow k = -\frac{5}{4}$$

Nesse caso, o sistema é possível e indeterminado.

Se $k \neq -\frac{5}{4}$, o sistema é impossível.

Assim:

I) É falsa, pois nesse caso o sistema é possível e indeterminado.

II) É verdadeira, como analisado acima.

III) É verdadeira, pois, substituindo $x = 3$ e $y -1$ no sistema S_2, temos:

$m \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = 5$

$3 \cdot 3 - (-1) = k$

Assim, $m = 3$ e $k = 10$. Ou seja, $m + k = 13$.

IV) É falsa, de acordo com a análise acima.

V) É falsa, pois $x = 3$ e $y -1$. Portanto, $x + y = 3 - 1 = 2$.

Desse modo, são verdadeiras II e III.

13. A

Pelo enunciado, como $a < b < c$ são números inteiros e consecutivos:

$b = a + 1$

$c = b + 1 = a + 2$

Com base na primeira equação do sistema, substituímos os valores de b e c, em função de a:

$a + 2 \cdot (a + 1) + 3 \cdot (a + 2) = 20 \rightarrow a = 2$

Então, como $(x, y, z) = (a, b, c)$:

$x = 2$

$y = 3$

$z = 4$

Desse modo, pela segunda equação:

$7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 - m \cdot 4 = 26 \rightarrow m = 3$

14. Utilizando a regra de Cramer:

SI ou SPI implica em D = 0:

$$\begin{cases} x+ay+z=2 \\ -x-2y+3z=-1 \\ 3x+az=5 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2 + 7a + 6 = 0 \rightarrow a = -1$$

ou a = –6

Para a = –1:

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ -x-2y+3z=-1 \\ 3x-z=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x-y=7 \\ 4x-y=7 \end{cases} \rightarrow SPI$$

Para a = –6:

$$\begin{cases} x-6y+z=2 \\ -x-2y+3z=-1 \\ 3x-6z=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x-36y=27 \\ 9x-36y=17 \end{cases} \rightarrow SI$$

Ou, ainda, $x = \frac{D_x}{D} \rightarrow Dx \neq 0$:

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2 + 11a + 10 \neq 0 \rightarrow a \neq -1$$

ou $a \neq -10$

Assim, a = –6.

15. D

Dado que o sistema é indeterminado e $abcd \neq 0$, os determinantes Dx e Dy devem ser nulos. Então:

$$D_x = \begin{vmatrix} a & c \\ p & d \end{vmatrix} = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} c & b \\ d & q \end{vmatrix} = 0$$

Assim:

$ad - pc = cq - bd \rightarrow ad + bd = cq + pc$

$d \cdot (a + b) = c \cdot (p + q)$

$n \cdot c \cdot m = c \cdot (p + q) \rightarrow p + q = m \cdot n$

16. B

Como o sistema admite infinitas soluções, o determinante da matriz dos coeficientes se anula. Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2a & 2a^4-a \\ 1 & a & a^3-1 \end{vmatrix} = 0$$

Então:

$2a^2 \cdot (a^3 - 1) + 2a^4 - a - 2a^2 - a \cdot (2a^4 - a) = 0$

$2a^4 - 3a^2 - a = 0 \rightarrow a \cdot (2a^3 - 3a - 1) = 0$

Desse modo, a = 0 ou $2a^3 - 3a - 1 = 0$.

Por inspeção, –1 é raiz da equação $2a^3 - 3a - 1 = 0$. Então, por Briot-Ruffini:

–1	2	0	–3	–1
	2	–2	–1	0

Temos desse modo a equação $2a^2 - 2a - 1 = 0$, cujas raízes também são raízes da equação anterior.

Resolvendo $2a^2 - 2a - 1 = 0$, obtemos:

$a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ou $a = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Portanto, os valores de a para que o sistema tenha infinitas soluções são 0, –1, $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

17. Chamando a matriz dos coeficientes do sistema de A:

$$\det A = \begin{vmatrix} (m-2) & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & (m+1) \end{vmatrix}$$

$\det A = m^3 - 3m^2 + 2m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2)$

1º caso: $m \neq 0$ ou $m \neq 1$ ou $m \neq 2$.

Nesse caso, $\det A \neq 0$. Então, o sistema é possível e determinado.

2º caso: $m = 0$.

Nesse caso, $\det A = 0$. O sistema se torna:

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 2z = 2 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

Calculando Dx, Dy e Dz, temos:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 4 - 4 - 4 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 6 + 12 - 2 = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 + 8 + 12 = 0$$

Então, o sistema é possível e indeterminado.

3º caso: $m = 1$.

Nesse caso, $\det A = 0$. O sistema se torna:

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$$

Fazemos, então:

2ª linha → 2 · 1ª linha + 2ª linha

3ª linha → 2 · 1ª linha + 3ª linha

Como resultado, temos:

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 5y = 7 \\ 8y = 8 \end{cases}$$

Então, o sistema é impossível.

4º caso: $m = 2$.

Nesse caso, $\det A = 0$. O sistema se torna:

$$\begin{cases} 2y - z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ 4x + 6y + 3z = 11 \end{cases}$$

Fazemos, então:

3ª linha → –2 · 2ª linha + 3ª linha

Como resultado, temos:

$$\begin{cases} 2y - z = 3 \\ 2y - z = -1 \end{cases}$$

Então, o sistema é impossível.

Portanto:

$m \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\} \rightarrow$ sistema possível e determinado.

$m = 0 \rightarrow$ sistema possível e indeterminado.

$m \in \{1, 2\} \rightarrow$ sistema impossível.

Estudo para o Enem

18. A

$x \rightarrow$ Carro

$y \rightarrow$ Moto

$$\begin{cases} 21x + 7y = 7000 \\ x + y = 550 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 21 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 21 - 7 = 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7\,000 & 7 \\ 550 & 1 \end{vmatrix} = 7\,000 - 7 \cdot 550 = 3\,150$$

$$C = \frac{D_x}{D} = \frac{3\,150}{550} \rightarrow C = 225$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 21 & 7\,000 \\ 1 & 550 \end{vmatrix} = 21 \cdot 550 - 7\,000 =$$

$$= 11\,500 - 7\,000 = 4\,550$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{4\,550}{14} \rightarrow y = 325$$

Deverá andar 225 km de carro e 325 km de moto.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

19. B

Fazendo as correspondências, obtemos:

$x \rightarrow$ sanduíches

$y \rightarrow$ sucos

Podemos, então, escrever o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2s + 3c = 9 \\ 3s + 2c = 11 \end{cases}$$

O determinante D é:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5$$

Temos que:

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 33 = -15$$

Então:

$$s = \frac{D_x}{D} = \frac{-15}{-5} \rightarrow s = 3$$

Ou seja, o valor apenas do sanduíche é R$ 3,00.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. C

Pelo enunciado, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \dfrac{NV}{NF} + \dfrac{NA}{NV} = 1{,}2 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{NV}{NF} + \dfrac{NA}{NV} = 1 \end{cases}$$

Chamando $x = \frac{NV}{NF}$ e $y = \frac{NA}{NV}$, temos:

$$\begin{cases} x + y = 1{,}2 \\ \dfrac{1}{2}x + y = 1 \end{cases}$$

O determinante da matriz dos coeficientes do sistema é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1{,}2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1{,}2 - 1 \rightarrow D_x = 0{,}2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1{,}2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1{,}2}{2} \rightarrow D_y = 0{,}4$$

Assim:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{0{,}2}{\frac{1}{2}} \rightarrow D_x = 0{,}4$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{0{,}4}{\frac{1}{2}} \rightarrow D_y = 0{,}8$$

Então, $\frac{NV}{NF} = 0{,}4$ e $\frac{NA}{NV} = 0{,}8$. Como NA + NV =

= 3 600, temos:

$NA + NV = 0{,}8\ NV + NV = 3\,600 \rightarrow NV = 2\,000$

Assim:

$$NF = \frac{NV}{0{,}4} = \frac{2\,000}{0{,}4} \rightarrow NF = 5\,000$$

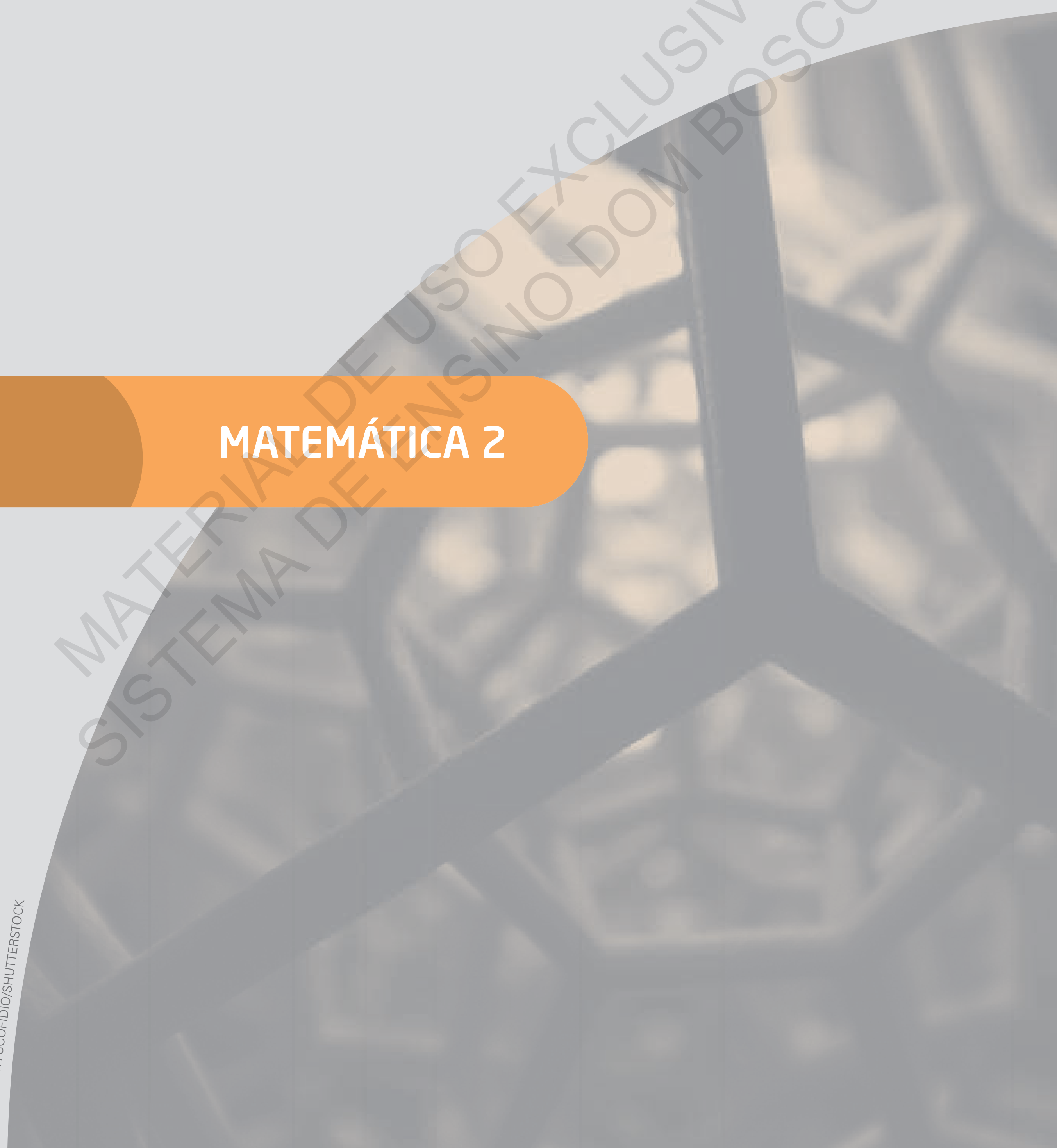
Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 2



ELIZABETH SCOFIDIO/SHUTTERSTOCK

45 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA

Comentários sobre o módulo

Neste módulo iniciamos os estudos de mais uma importante área da Matemática, a Geometria analítica. São apresentados os conceitos de localização unidimensional, bidimensional e eixo. Além disso, abordamos o sistema cartesiano e deduzimos as fórmulas da distância entre dois pontos em um plano e o ponto médio de um segmento.

Para ir além

- O artigo "A Geometria analítica e algumas tendências metodológicas para seu processo de ensino e aprendizagem" aborda diferentes maneiras de trabalhar Geometria analítica no ensino médio. Disponível em:

  http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/902/12

  Acesso em: abr. 2019.

- O artigo "A matemática e a filosofia de René Descartes" trata do contexto histórico envolvendo as contribuições matemáticas do filósofo francês René Descartes. Disponível em:

  http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/FILOSOFIA/Artigos/Duelci.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. C

A(−2, 1) e B(4, 2)

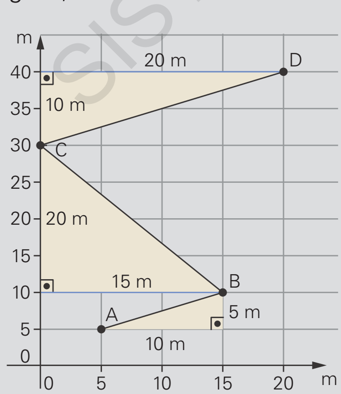
$$d=\sqrt{(4-(-2))^2+(2-1)^2}=\sqrt{37}\approx 6{,}08\text{ km}$$

8. A distância d entre os pontos A e B será dada por:

$$d=\sqrt{(2-8)^2+(8-0)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

9. A

Considerando os triângulos retângulos destacados na figura, temos:



$$AB^2=10^2+5^2\rightarrow AB=\sqrt{125}\rightarrow AB=5\sqrt{5}\text{ m}$$

$$BC^2=20^2+15^2\rightarrow BC=\sqrt{625}\rightarrow BC=25\text{ m}$$

$$CD^2=10^2+20^2\rightarrow CD=\sqrt{500}\rightarrow CD=10\sqrt{5}$$

Portanto, o deslocamento d da pessoa será dado por:

$$d = AB + BC + CD$$

$$d=5\sqrt{5}+25+10\sqrt{5}$$

$$d=15\sqrt{5}+25$$

$$d=5\left(3\sqrt{5}+5\right)\text{ m}$$

10. D

Sabendo que as coordenadas do baricentro correspondem à média aritmética simples das coordenadas dos vértices do triângulo, obtemos:

$$\left(\frac{1+3+5}{3}, \frac{1-1+3}{3}\right)=(3, 1)$$

11. D

Determinando o ponto M (ponto médio do segmento AB), temos:

$$x_M=\frac{0+2}{2}=1$$

$$y_M=\frac{10+12}{2}=11$$

Estabelecendo, agora, o ponto N (ponto médio do segmento CD), temos:

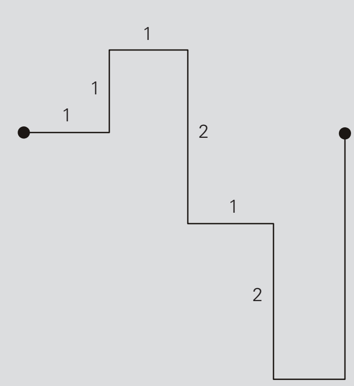
$$x_N=\frac{-2+4}{2}=1$$

$$y_N=\frac{3+3}{2}=3$$

Os pontos pedidos são M(1, 11) e N(1, 3).

12. C

A poligonal toda é formada por partes cujo comprimento é 12 cm. Na figura a seguir, temos uma dessas partes representadas:



Com 8 partes como na figura, teremos uma poligonal de comprimento 96 cm. Portanto, o ponto Q será dado por:

$X_Q = 0 + 8 \cdot 4 = 32$ e $y_Q = 3 - 2 = 1$

Logo, Q(32, 1).

13. $f(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2 + x - 2x^2 - 2x = -x^2 - x$

$$g(x) = \begin{vmatrix} x & 11 & -4 \\ 10 & 11 & x \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 11x - 80 + 44 - 2x^2 = -2x^2 + 11x - 36$$

$-2x^2 + 11x - 36 + -x^2 - 12x + 36 = 0 \rightarrow x = 6$

$f(x) = y = -x^2 - x = -36 - 6 \rightarrow y = -42$

14. C

Sejam C(0, 0), V(−8, 20), P(12, 24) e A(x, y), respectivamente, os pontos que indicam as posições da casa, do vestiário, do poço e da piscina. Temos então:

d(A, C) = d(A, V) = d(A, P)

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x+8)^2 + (y-20)^2} = \sqrt{(x-12)^2 + (y-24)^2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = (x+8)^2 + (y-20)^2 \\ (x+8)^2 + (y-20)^2 = (x-12)^2 + (y-24)^2 \end{array} \right.$$

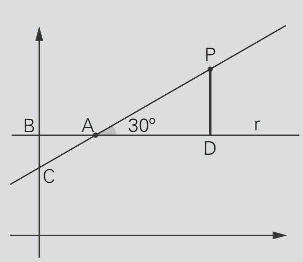
$$\left| \begin{array}{l} 2x - 5y = -58 \\ 5x + y = 32 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x \cong 3{,}8 \text{ m} \\ y \cong 13{,}1 \text{ m} \end{array} \right.$$

Portanto, a piscina deverá ser construída, em relação à casa, na posição dada por, aproximadamente, 3,8 metros para leste e 13,1 metros para o norte.

15. D

Calculando, temos:



$\Delta ABC \approx \Delta APD \rightarrow$ triângulos 30 / 60 / 90 $\rightarrow$

$\rightarrow$ lados $x / 2x / x\sqrt{3}$

$BC = 1 \rightarrow AC = 2 \rightarrow AB = \sqrt{3}$

$AP = 4 \rightarrow PD = 2 \rightarrow AD = 2\sqrt{3}$

$A\left(\sqrt{3},\ 3\right)$

$D\left((\sqrt{3} + 2\sqrt{3}),\ 3\right) = D\left(3\sqrt{3},\ 3\right)$

$P\left(3\sqrt{3},\ (3+2)\right) = P\left(3\sqrt{3},\ 5\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 5^2 = 27 + 25 = 52$

16. E

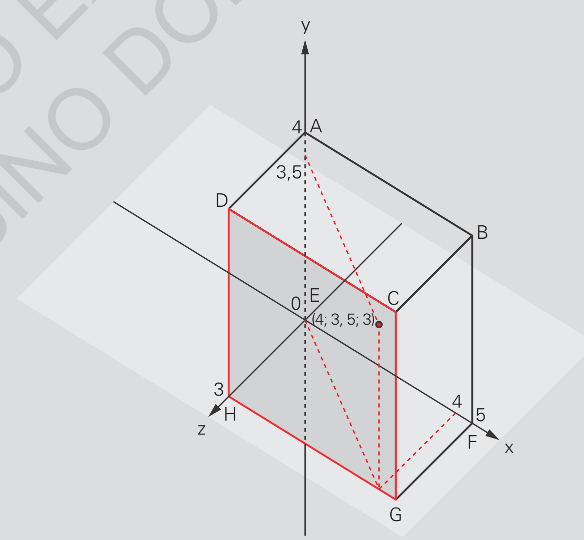
$$\text{De} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2{,}5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$3 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}5 = x \rightarrow x = 4$

$3 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}5 = x \rightarrow x = 3{,}5$

$2{,}5 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}5 = z \rightarrow z = 3$

Dessa forma, a solução da equação matricial apresentada acima é o ponto (4; 3; 5; 3), que está localizado na face DCGH, conforme a figura:

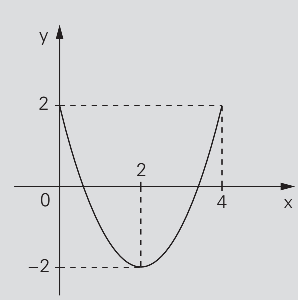


17. a) Sendo $-\dfrac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ a abscissa do vértice, a ordenada deve ser igual a −2.

Logo, temos:

$-2 = 2^2 - 4 \cdot 2 + c \rightarrow c = -2 + 4 - 8 \rightarrow c = 2$

Portanto, segue o gráfico de f.



b) Desde que a < b, temos:

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{a+b}{2}=1\\ \dfrac{a^2-4a+c+b^2-4b+c}{2}\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}b=2-a\\ a^2-4a+(2-a)^2-4(2-a)=0\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}b=2-a\\ a^2-2a-2=0\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}a=1-\sqrt{3}\\ b=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Estudo para o Enem

18. A

Após 2 horas, a formiga que caminhou horizontalmente para o lado direito percorreu 8 km (velocidade de 4 km/h). Assim, sua coordenada será (8; 0).

Após 2 horas, a formiga que caminhou verticalmente para cima percorreu 6 km (velocidade de 3 km/h). Assim, sua coordenada será (0; 6).

19. E

A distância entre os pontos P e Q no percurso indicado é igual a:

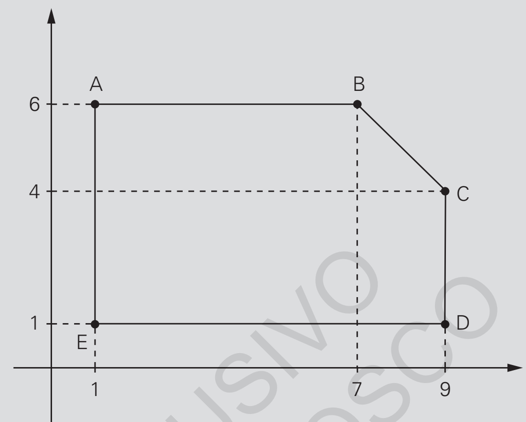
$(550 - 30) + (320 - 20) = 820$

Logo, a distância entre T e os pontos P e Q deverá ser de $\dfrac{820}{2}=410$.

Portanto, como $30 + 410 = 440 < 550$, segue que T= (440, 20).

20. C

Considere a figura:



Dada a escala de 1:500 e sendo as coordenadas em centímetros, concluímos que cada centímetro na figura corresponde a 5 metros. Assim, queremos calcular o valor de:

$5 \cdot [d(A, B) + d(B, C) + d(C, D) + d(D, E) + d(e, A)]$

É fácil ver que d(A, B) = 6 cm, d(C, D) = 3 cm, d(D, E) = 8 cm e d(E, A) = 5 cm. Além disso, temos:

$d(B, C) = \sqrt{(9-7)^2+(4-6)^2} = \sqrt{8} \cong 2,8$ cm

Portanto, o resultado é:

$5 \cdot (6 + 28 + 3 + 8 + 5) = 124$ m

46 INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA - ÁREA DE POLÍGONOS

Comentários sobre o módulo

Neste módulo, continuamos os estudos de Geometria analítica. Demonstramos a fórmula para a área de um triângulo com base nas coordenadas de seus vértices e apresentamos a relação para o cálculo da área de um polígono qualquer.

Para ir além

- O artigo "A aprendizagem da Geometria analítica no ensino médio: um olhar a partir das suas representações semióticas no GrafEq" aborda o ensino da Geometria analítica com o uso do adware GrafEq. Disponível em:

  http://www.lematec.net.br/CDS/XVIIIEBRAPEM/PDFs/GD6/halberstadt6.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

- O artigo "O *software* Geogebra como alternativa metodológica" aborda a possibilidade do uso desse *software* no ensino de Matemática. Disponível em:

  http://educonse.com.br/2012/eixo_06/PDF/122.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

- O artigo "Surgimento da geometria analítica" aborda o contexto histórico resumido sobre o surgimento dessa área da Matemática. Disponível em:

  https://www.somatematica.com.br/historia/analitica.php

  Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. Utilizando a regra de Sarrus para calcular o determinante, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

$$\Delta = -4+6-1-12-1-2=-14 \rightarrow \Delta\ = -14$$

Logo, a área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |-14| = 7 \text{ u.a.}$$

8. E

Utilizando a regra do agrimensor, podemos identificar se são colineares ou não e conseguimos calcular a área, se existir $A=\frac{1}{2}\cdot|-14|=7$ u.a.

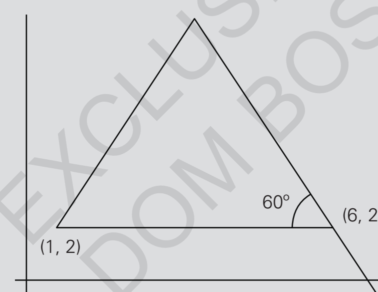
Logo, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2+0+12-0-8+4=6$$

Assim, os pontos A, B e C não são colineares, formando um triângulo. A área do triângulo será:

$$A=\frac{1}{2}\cdot|6|=3 \text{ u.a.}$$

9. E



$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

10. A

Como a razão entre a área do triângulo inteiro é metade da área do triângulo com os vértices nos pontos médios, podemos ver que:

$$k^2 = \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow A_1 = 4 \cdot A_2 \text{, já que } \frac{b_2}{b_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}$$

Portanto, podemos calcular usando a regra do agrimensor:

$$A=\frac{1}{2}\cdot 4 \cdot |A_2|$$

Logo:

$$A_2 = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 1 \\ 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 6+0+8-28-2-0=-16$$

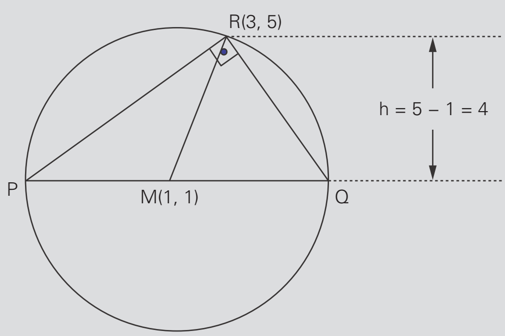
$$A=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot|A_2| = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot |-16| = 2\cdot 16 = 32 \text{ u.a.}$$

11. Usando a regra do agrimensor, temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |15 - 4 + 16 - 2 - 24 + 20| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |21| = \frac{21}{2} \text{ u.a.}$$

12.



$$PM = MQ = MR = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20} \text{ (raios)}$$

$$PQ = 2 \cdot \sqrt{20}$$

Portanto, a área do triângulo PRQ é dada por:

$$A = \frac{2\sqrt{20} \cdot 4}{2} = 4\sqrt{20}$$

13. C

Do enunciado, temos:

A(14, 4); B(6, –2); C(16, –2)

$$\begin{vmatrix} 14 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ 16 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -28 + 64 - 12 + 32 + 28 - 24 = 60$$

Logo, a área do triângulo ABC é dada por:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |60|$$

$$A_{ABC} = 30$$

14. E

Do enunciado e do gráfico, temos:

$A(x_A, 2)$, $B(1, y_B)$ e $C(x_A, y_B)$

Como $A(x_A, 2)$ é um ponto da função $f(x) = 2^{-x} - 2$:

$$2 = 2^{-x_A} - 2$$

$$4 = 2^{-x_A}$$

$$2^2 = 2^{-x_A}$$

$$x_A = -2$$

Como $B(1, y_B)$ é um ponto da função $f(x) = 2^{-x} - 2$:

$$y_B = 2^{-1} - 2$$

$$y_B = -\frac{3}{2}$$

Assim, os pontos $A(-2, 2)$, $B\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ e $C\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ formam o triângulo ABC retângulo no vértice C.

A área do triângulo ABC é dada por:

$$A_{ABC} = (1+2) \cdot \left(2 + \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_{ABC} = \frac{21}{4}$$

15. A

Primeiramente devemos obter as coordenadas dos pontos A, B, C, D e E.

Assim, temos:

$$f(x) = g(x) \rightarrow 2x - 4 = -x^2 + 2x \rightarrow h(x) = x^2 - 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 4 = 0$$

$$x_1 = 2;\ x_2 = -2$$

Como os pontos obtidos foram $x_1 = 2;\ x_2 = -2$, a distância de 0 a A é de dois.

Analogamente à distância de C até E, temos que a distância de B até 0 também é 2. Logo:

$$A = (2; 0)$$

$$B = (-2; 0)$$

Para obter o ponto C, basta substituirmos o valor x = –2 na função g(x):

$$g(x) = -x^2 + 2x \rightarrow g(-2) = -(-2)^2 + 2(-2) = -8 \rightarrow$$

$$\rightarrow C = (-2; -8)$$

Calculando a distância BC que corresponde à altura do triângulo, temos:

$$D(BC) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$\sqrt{(-2+2)^2 + (0+8)^2} = \sqrt{64} = 8$$

Note que a distância entre AB será de 4, pois equivale à soma das distâncias de 0 a A e de B até 0.

Calculando a área A_1, temos:

Agora precisamos obter a distância entre D e E. Para isso, temos que calcular o valor da função f(x) quando o valor de x = 0, pois não há deslocamento no eixo das abscissas.

$$f(x) = 2x - 4 \rightarrow f(0) = -4 \rightarrow D = (0;\ -4)$$

Sabendo que o ponto E é projeção de C, sua coordenada é de:

E = (0; –8). Então, a distância será de 4.

Calculando a área A_2, temos:

$$A_2 = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$$

Finalmente obtemos a razão desejada:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{16}{4} = 4$$

16. A

$$S_\Delta = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \rightarrow \text{metade de } S_\Delta \text{ será } 2.$$

$$\text{Reta r} \rightarrow a = \frac{0-4}{2-0} = -2 \rightarrow y = -2x + 4$$

$$\text{Ponto } D = (x_0,\ y) \rightarrow y = 2_{x0} + 4 \text{ com } x_0 < 2$$

$$S_{\text{trapézio}} = \frac{(4 - 2x_0 + 4) \cdot x_0}{2} = 2 \rightarrow -2x_0^2 + 8x_0 - 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_0^2 - 4x_0 + 2 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \rightarrow \Delta = 8$$

$$x_0 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_0 = 2 + \sqrt{2} \rightarrow 2 + \sqrt{2} > 2 \text{ (não convém)}$$

$$x_0 = 2 - \sqrt{2}$$

17. Como a área do triângulo A′B′C′ será dada por $\frac{|D|}{2}$, podemos primeiro encontrar o valor de D. Logo:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2k & 4k & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 \end{bmatrix} = 0 + 6k^2 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6k^2$$

Portanto, $A_{A'B'C'} = \frac{|D|}{2} = \frac{|6k^2|}{2} = 3k^2$.

Estudo para o Enem

18. B

A interseção das retas r e s resulta no ponto D, cujas coordenadas correspondem a:

$$x + 3 = -3x + 27$$

$$x = 6$$

$$y = 9$$

D = (6, 9)

Escrevendo as coordenadas dos outros pontos, temos:

A = (0, 0)

B = (0, 3)

D = (6, 9)

C = (9, 0)

Pela regra do agrimensor, obtemos o valor de **A**.

$$\begin{array}{ccccc} & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & 0 \\ & + & + & + & + \end{array}$$

$\Delta p = +0 + 0 + 0 + 0 - 0 - 18 - 81 = -99$

Assim, o valor da área será:

$$A = \frac{|\Delta p|}{2} = \frac{99}{2}$$

Portanto, A = 49,5.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. A

Por meio da regra do agrimensor, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 12 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 40 + 120 + 48 - 24 + 40 = 224$$

Logo, $A = \frac{|D|}{2} = \frac{224}{2} = 112\ m^2$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

20. B

Temos:

$y_A = f(0) = 1 \leftrightarrow A = (0,\ 1),\ y_B = g(1) = 2 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow B = (1,\ 2),\ y_C = g(2) = 4$

$\leftrightarrow C = (2,\ 4)$ e $y_D = f(2) = 5 \leftrightarrow D = (2,\ 5)$.

Portanto, a área do quadrilátero ABCD é dada por:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \text{ e}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |4 + 10 + 2 - 1 - 4 - 8| = 1{,}5$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

47 ESTUDO DA RETA - EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA

Comentários sobre o módulo

Neste módulo iniciamos os estudos sobre as retas. Trabalhamos as diferentes inclinações que as retas podem ter em um plano cartesiano. Além disso, deduzimos a fórmula para o cálculo da medida do coeficiente angular de uma reta e analisamos as condições em que esse coeficiente é positivo, negativo, nulo ou inexistente. Por fim, apresentamos a primeira forma de se escrever a equação da reta, a equação fundamental da reta.

Para ir além

- O artigo "Aprendizagem significativa em Geometria analítica" apresenta uma visão teórica sobre o quão fundamental é o estudo dessa área da Matemática no ensino médio. Disponível em:

  http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uepg_mat_artigo_glaucia_marise_scortegagna.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

- O artigo "Como introduzir geometria analítica de uma forma diferenciada" aborda o uso do laboratório de Matemática enquanto ambiente de ensino e aprendizagem para o ensino significativo de Geometria analítica no ensino médio. Disponível em:

  http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/RE/RE_2_Guimaraes_Charles.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. C

Calculando o coeficiente angular, temos:

$\Delta y = y_B - y_A = 8 - 1 = 7$

$\Delta x = x_B - x_A = 6 - 0 = 6$

Assim,

$$\Delta tg = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow m = \frac{7}{6}$$

Através da equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

I. Pelo ponto A(0, 1)

$$y - 1 = \frac{7}{6}(x - 0) \rightarrow y - 1 = \frac{7}{6}x \rightarrow y - \frac{7}{6}x - 1 = 0$$

ou

II. Pelo ponto B(6, 8)

$$y - 8 = \frac{7}{6}(x - 6) \rightarrow y - 8 = \frac{7}{6}x \rightarrow y - \frac{7}{6}x - \frac{7}{6}\cdot 6 \rightarrow$$

$$\rightarrow y - 8 = \frac{7}{6}x - 7 \rightarrow y - \frac{7}{6}x - 8 + 7 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y - \frac{7}{6}x - 1 = 0$$

Logo, a equação fundamental da reta é $y - \frac{7}{6}x - 1 = 0$.

8. C

É fácil observar que a declividade da reta u é negativa. Além disso, é evidente que se tem $a_r < a_t < a_s$. Em decorrência, podemos constatar que $a_u < a_r < a_t < a_s$.

9. D

Podemos definir o ponto de interseção entre as duas retas pela solução do sistema formado por elas:

$$\begin{cases} x - 2y - 10 = 0 \\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

Sendo assim, o ponto de interseção é P(4, –3), cuja abscissa é x = 4.

10. Devemos, inicialmente, igualar as duas funções.

f(x) = g(x)

$$4x - x^2 = x^2 + 8x - 6 \rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_Q = 1 \\ x_P = -3 \end{cases}$$

$f(x) = 4 - 1 = 3 \rightarrow Q(1, 3)$

$f(-3) = 4 \cdot (-3) - (-3)^2 = -12 - 9 = -21 \rightarrow$

$\rightarrow P(-3, -21)$

Com as coordenadas dos pontos, podemos calcular a distância entre eles.

$$d_{\overline{PQ}} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-21-3)^2} = \sqrt{16 + 576} = \sqrt{592}$$

Portanto, $d_{\overline{PQ}} \cong 24{,}33$.

11. D

Do enunciado, temos:

Quando três pontos são colineares, $\Delta = 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$0 - 3 + k - 6 - 0 + 1 = 0$

$k - 8 = 0$

Portanto, $k = 8$.

12. a) A reta passa pelos pontos A(0, 6) e B(12, 0). Sendo assim, seu coeficiente angular será obtido por:

$$m = \frac{0-6}{12-0} = -\frac{1}{2}$$

Então, a equação da reta será obtida por:

$$y - 6 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 0) \rightarrow 2y - 12 = -x$$

Portanto, $x + 2y - 12 = 0$.

b) Constatando o valor de y na equação da reta, temos:

$$y = \frac{-x+12}{2}$$

Calculando a área do retângulo, temos:

$$A = x \cdot y \rightarrow A(x) = \frac{x \cdot (-x+12)}{2} \rightarrow A(x) = -\frac{x^2}{2} + 6x$$

c) O valor maior para a área do retângulo será obtido pela ordenada do vértice da parábola de equação:

$$A(x) = -\frac{x^2}{2} + 6x$$

Logo:

$$A_{max} = -\frac{\Delta}{4 \cdot a} = -\frac{36}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 18$$

13. C

Calculando, temos:

$$\text{Reta r} \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = 5x - 4$$

Interseção da reta r e eixos $\rightarrow$ A(0, –4) e $B\left(\frac{4}{5}, 0\right)$.

Com as coordenadas dos vértices, calculamos a área do triângulo AOB:

$$A_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} = \frac{16}{10}$$

Portanto, $A_{OAB} = 1{,}6$.

Verificando as opções dadas, temos:

a) Falsa, pois a reta (r) intercepta o eixo das ordenadas no ponto de corte -4.

b) Falsa, pois o coeficiente angular da reta (r) é 5.

c) Verdadeira, pois a reta (r) estabelece com os eixos cartesianos um triângulo de área 1,6.

d) Falsa, pois, se $x = -\frac{1}{2} > -\frac{4}{5} \rightarrow$

$$\rightarrow y = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 \rightarrow y = -\frac{13}{2}.$$

e) Falsa, pois a reta (r) intercepta o eixo das ordenadas no ponto de corte $\frac{4}{5}$.

14. A

Temos que o coeficiente angular do segmento AB é igual a $\frac{1}{2}$.

Sendo assim, o coeficiente angular do segmento BC é igual a $\frac{1}{4}$.

Podemos equacionar ainda:

$$\frac{1}{4} = \frac{y_C - 7}{14 - 6} \rightarrow y_C = 9$$

Portanto, a ordenada do ponto D será:

$$y_D = \frac{2}{3} y_C \rightarrow y_D = 6$$

Sabendo que o coeficiente angular de CD é igual a -1, vamos escrever:

$$-1 = \frac{6-9}{x_D - 14} \rightarrow x_D = 17$$

15. D

Isolando o termo independente das equações, obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$y = 2 - 4x \rightarrow 4x + y = 2$

$x + 4y - 3 = 0 \rightarrow x + 4y = 3$

$y = 2b - 3x \rightarrow 3x + y - 2b = 0$

$$\begin{cases} 4x + y = 2 & \text{(I)} \\ x + 4y = 3 & \text{(II)} \\ 3x + y - 2b = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Pelo método da substituição, obtemos os valores de x e y:

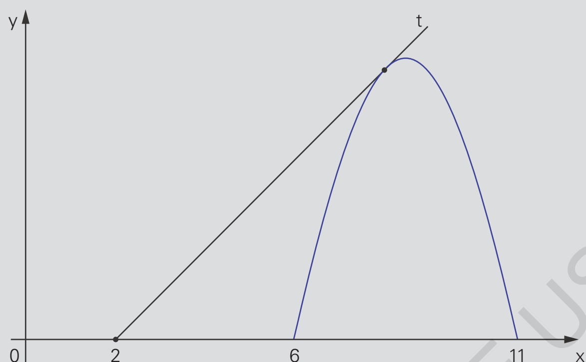
(I) $y = 2 - 4x$

(II) $x + 4 \cdot (2 - 4x) = 3 \rightarrow -15x = -5 \rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

$y = 2 - 4 \cdot \dfrac{1}{3} \rightarrow y = \dfrac{2}{3}$

(III) $3 \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} - 2b = 0 \rightarrow 2b = \dfrac{5}{3} \rightarrow b = \dfrac{5}{6}$

16. Temos:



A equação da reta t é obtida por:

$y = mx + n$

O ponto (2, 0) é um ponto da reta t. Portanto:

$0 = 2m + n$

$N = -2n$

Então:

(t) $y = mx - 2m$

O ponto de tangência entre a reta t e a parábola é obtido por:

$mx - 2m = -x^2 + 17x - 66$

$x^2 + x(m - 17) + 66 - 2m = 0$

$\Delta = 0$

$(m - 17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (66 - 2m) = 0$

$m^2 - 34m + 289 - 264 + 8m = 0$

$m^2 - 26m + 25 = 0$

$m = 25$ ou $m = 1$

Se $m = 1$

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x^2 + 17x - 66 \end{cases}$$

$x - 2 = -x^2 + 17x - 66$

$x^2 - 16x + 64 = 0$

$(x - 8)^2 = 0$

$x = 8$

Trocando $x = 8$ na equação $y = x - 2$, temos:

$y = 6$

Se $m = 25$

$$\begin{cases} y = 25x - 50 \\ y = -x^2 + 17x - 66 \end{cases}$$

$25x - 50 = -x^2 + 17x - 66$

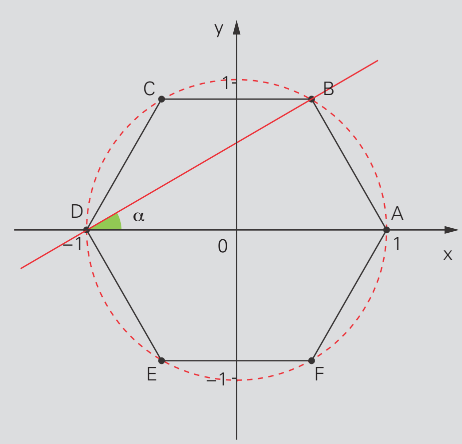
$x^2 + 8x + 16 = 0$

$(x + 4)^2 = 0$

$x = 4$

Portanto, o ponto que salvaguarda a segurança do coelho está no primeiro quadrante. Tal ponto é (8, 6).

17. B



Observando a circunferência circunscrita no hexágono regular, vamos escrever que a medida α do ângulo ADB será obtida por:

$$\alpha = \frac{60^o}{2} = 30^o$$

Sendo assim, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos B e D será obtido por:

$m = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

A reta solicitada passa pelo ponto D(− 1, 0) e tem coeficiente angular $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Logo, sua equação será obtida por:

$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - (-1))$

Portanto, $y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Estudo para o Enem

18. B

Os pares ordenados atendem às condições $0 \leq x \leq 10$, $y \geq 0$ e $y \leq x$.

Ou seja, $0 \leq y \leq x \leq 10$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

19. C

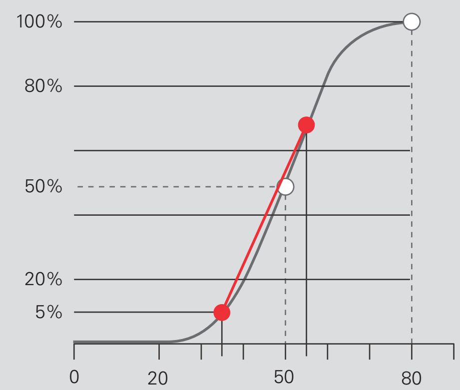
O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (0, 0) e (6, 12) é $\frac{12}{6} = 2$. Logo, sendo $\frac{16}{4} = 4$ o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (0, 0) e (4, 16), concluiremos que o coeficiente angular deverá aumentar em $4 - 2 = 2$ unidades.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. A

Desenhando no gráfico o intervalo [35; 55], conseguimos analisar mais tranquilamente o que está acontecendo.



O trecho destacado é retilíneo. Logo, podemos obter o coeficiente angular da reta:

$m = \frac{50-5}{55-35} = \frac{45}{15} \rightarrow m = 3$

$y - 5 = 3 \cdot (x - 35) \rightarrow y = 3x - 100$

Para $x = 55$, temos:

$y = 3 \cdot 55 - 100 \rightarrow y = 65\%$

Para diminuir esse risco pela metade, podemos escrever:

$y = \frac{65\%}{2} = 32{,}5\%$

$32{,}5 = 3x - 100 \rightarrow x \approx 44{,}2$

Logo, a redução percentual de sua velocidade deve ser:

$\frac{55 - 44{,}2}{55} \approx 0{,}20$

Portanto, 20% de diminuição.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico--científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

48 ESTUDO DA RETA - OUTRAS EQUAÇÕES DA RETA

Comentários sobre o módulo

Neste módulo continuamos os estudos sobre as retas. Deduzimos a equação geral e trabalhamos as equações reduzida e segmentária delas. Além disso, abordamos a equação paramétrica da reta.

Para ir além

- O artigo "O jogo das retas no projeto Educação semiótica em perspectivas interdisciplinares e interculturais" aborda, com base nas competências e habilidades exigidas pelo Enem, o uso de jogos no processo ensino-aprendizagem. Disponível em:

http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uepg_mat_artigo_glaucia_marise_scortegagna.pdf

http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5125_2783_ID.pdf

Acessos em: abr. 2019.

- A reportagem "O jeito certo de ensinar a função afim" apresenta o trabalho de Rosilene Fagundes, ganhadora do prêmio Victor Civita – Educador nota 10. Disponível em:

https://novaescola.org.br/conteudo/2713/o-jeito-certo-de-ensinar-a-funcao-afim

Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. C

Para saber em que ponto as retas AE e BC se interceptam, devemos primeiro escrever a equação da reta de cada uma delas.

Equação da reta AE:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 4x + y - 6 - 4 - 3x + 2y = 0$$

Logo, $x + 3y - 10 = 0$.

Equação da reta BC:

$x = 5$

Resolvendo o sistema, determinamos o ponto P de interseção das retas:

$$\begin{cases} x + 3y - 10 = 0 \\ = 5 \end{cases} \rightarrow 5 + 3y - 10 \rightarrow y = \frac{5}{3}$$

Portanto, $P\left(5, \frac{5}{3}\right)$.

8. C

Como a reta r passa pelo ponto (1, 5), temos:

$r: y = m_r x + 4 \rightarrow r: 5 = m_r \cdot 1 + 4 \rightarrow m_r = 1$

Logo, $y = x + 5$ ou $-x + y = 4$.

Já a reta s passa pelo ponto (1, 5). Logo, temos:

$s: y = m_s x + 6$

Assim, $5 = m_s + 6 \rightarrow m_s = -1$.

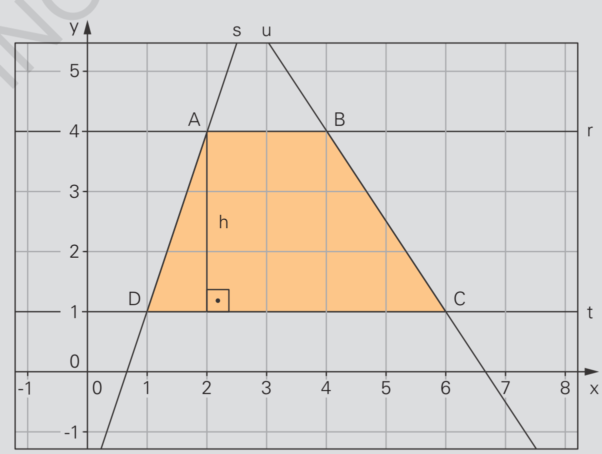
$y = -x + 6$ ou $x + y = 6$.

Contudo, o sistema que representa as equações r e s corresponde a:

$$\begin{cases} -x + y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

9. C

Por meio das interseções das retas s e r; u e r; u e t; s e t, obtemos, respectivamente, os pontos A, B, C, D, representados na figura a seguir:



A = (2, 4); B = (4, 4); C = (6, 1); e D = (1, 1).

Portanto, a área A do quadrilátero (trapézio) será dada por:

$$A = \frac{[(4-2)+(6-1)]}{2} \cdot (4-1) = \frac{2+5}{2} \cdot 3$$

$A = 10{,}5$ u.a.

10. a) A reta r passa pela origem (0, 0) e tem coeficiente angular igual a:

$\alpha = \frac{7}{3{,}5} = 2$. Logo, a equação da reta r corresponde a: $y = 2x$.

A reta s tem coeficiente angular igual a:

$$\alpha = \frac{7-3{,}5}{8-3{,}5} = \frac{7}{9}$$

Sua equação pode ser obtida por meio da relação fundamental:

$$y-7 = \frac{7}{9}\cdot(x-8) \quad \rightarrow \quad 7x-9y+7=0$$

O ponto de interseção dessas retas será igual à resolução do sistema formado pelas duas equações de reta. Reorganizando as equações, podemos escrever:

$$\begin{cases} -2x+y=0 \\ 7x-9y=-7 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $x=\frac{7}{11}$ e $y=\frac{14}{11}$.

Logo, o ponto de interseção será $\left(\frac{7}{11}, \frac{14}{11}\right)$.

b) Como t é paralela a s e passa pela origem, sua equação será:

$$y=\frac{7}{9}\cdot x$$

O ponto S pertence à reta t e tem ordenada $y = 3{,}5$. Com isso, obtemos sua abscissa:

$$3{,}5=\frac{7}{9}x \quad \rightarrow \quad x=\frac{9}{2}$$

Logo, $x = 4{,}5$.

Desse modo, o segmento RS mede $4{,}5 - 3{,}5 = 1$.

O ponto P pertence à reta t e tem abscissa $x = 8$. Sua ordenada y será:

$$y=\frac{7}{9}\cdot 8 \quad \rightarrow \quad y=\frac{56}{9}$$

Logo, o segmento PQ mede: $7 - \frac{56}{9} = \frac{63}{9} - \frac{56}{9}$.

Portanto, como o segmento RS ≠ PQ, o trapézio não é isósceles.

11. D

Para analisar a função modular, vamos supor $x, y \in \mathbb{R}$.

Devemos lembrar que:

Para $x - y \geq 0 \quad \rightarrow \quad |x - y| = x - y$

Para $x - y \leq 0 \quad \rightarrow \quad |x - y| = -x + y$

Para $x + y \geq 0 \quad \rightarrow \quad |x + y| = x + y$

Para $x + y \leq 0 \quad \rightarrow \quad |x + y| = -x - y$

Assim, temos:

$|x - y| = |x + y| \quad \rightarrow \quad x - y = x + y$ ou $x - y = -x - y$

$\rightarrow x \in \mathbb{R}$ e $y = 0$ ou $x = 0$ e $y \in \mathbb{R}$.

Logo, a equação corresponde aos eixos cartesianos, cuja interseção é a origem.

12. D

Para obter os pontos de interseção das retas com o eixo x, fazemos $y = 0$ nas equações:

$3x + y + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x + 0 + 4 = 0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad 3x = -4 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{4}{3}$

Logo, $B = \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$.

$2x - 5y + 14 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x - 5 \cdot 0 + 14 = 0 \quad \rightarrow$
$\rightarrow 2x = -14 \quad \rightarrow \quad x = -7$

Logo, $C = (-7, 0)$.

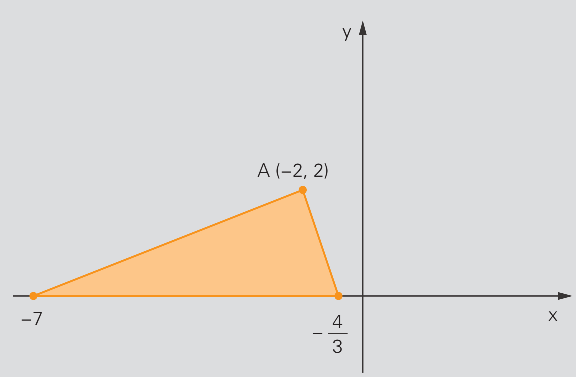
Obtemos a abscissa e a ordenada do ponto de interseção entre as retas resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 3x+y+4=0 \\ 2x-5y+14=0 \end{cases}$$

Assim, $x = -2$ e $y = 2$.

Logo, $A = (-2, 2)$.

Temos então o triângulo ABC representado a seguir:



Finalmente obtemos a área do triângulo:

$$A=\frac{\left(-\frac{4}{3}-(-7)\right)}{2}\cdot 2$$

Portanto, $A = \frac{17}{3}$.

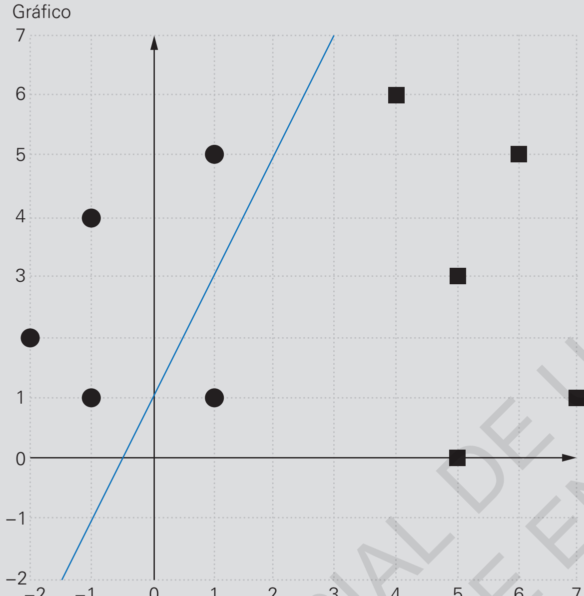
13. D

Por ser simétrica em relação aos quadrantes ímpares, A e B também são simétricos em relação à reta de equação que passa pelos quadrantes pares: $x - y = 0$, sendo esta a mediatriz da reta AB.

Multiplicando $x - y = 0$ por 3, obtemos a resposta do exercício sem alterar a reta.

14. a) A equação da reta $y = 2x + 1$, conforme representada no gráfico, não separa os pontos C e Q, pois o ponto (1, 1) está à direita da reta, com os demais pontos do conjunto Q.

Gráfico



b) Para garantir que os pontos dos conjuntos P e Q estejam separados, a reta deve passar pelos pontos (4, 6) e (1, 1). Assim, obtemos:

$y = ax - 3$

Para o ponto (1, 1), temos:

$1 = 1a - 3 \rightarrow 1a = 1 + 3 \rightarrow a = 4$

Para o ponto (4, 6), temos:

$6 = 4a - 3 \rightarrow 4a = 6 + 3 \rightarrow a = \frac{9}{4}$

Portanto, o coeficiente angular da reta pode variar entre:

$V = \{a \leq \mathbb{R} \mid \frac{9}{4} \leq a \leq 4\}$

15. C

A reta com inclinação $\frac{1}{2}$ passa pelo ponto (0, 2).

Logo, sua equação é:

$y = \frac{1}{2}x + 2$.

Quando $y = 0$, temos: $0 = \frac{1}{2}x + 2 \quad \rightarrow \quad x = 4$.

Logo, os vértices do triângulo maior são (0, 0), (0, 2) e (−4, 0).

Sua área será:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |8| \cdot = 4$$

Já a reta com inclinação −3 passa pelo ponto (1, 0). Logo, sua equação é $y = -3x + 3$.

Quando $x = 0$, temos: $y = -3 \cdot 0 + 3 \rightarrow y = 3$. Logo, esse é o ponto (0, 3).

O último ponto do triângulo menor é obtido pela interseção das duas retas:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -3x + 3 \end{cases} \rightarrow \quad x = \frac{2}{7} \text{ e } y = \frac{15}{7}$$. Logo, esse é o ponto $\left(\frac{2}{7}, \frac{15}{7}\right)$.

Sua área será:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 2 & 3 & \frac{15}{7} & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{7} - \frac{6}{7} = -\frac{2}{7}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{2}{7}\right| = \frac{1}{7}$$

Por fim, a área total hachurada será:

$$A = 4 + \frac{1}{7} = \frac{29}{7} \text{ u.a.}$$

16. D

Tanto $y = \frac{1}{2}x$ quanto $y = ax$ passam pela origem. Logo, a interseção entre essas duas retas corresponde ao ponto $A = (0, 0)$.

Fazendo a interseção das retas $y = \frac{1}{2}x$ e $y = -x + 3$, obtemos o ponto B:

$$\frac{1}{2}x = -x + 3 \qquad 1{,}5x = 3 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

$$y = -x + 3 = -2 + 3 \quad \rightarrow \quad y = 1$$

Assim, B = (2, 1).

Finalmente, com a interseção das retas $y = -x + 3$ e $y = ax$, com $a \neq 0$ e com o cálculo da área do triângulo, obtemos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & x & 0 \\ 0 & 1 & 3-x & 0 \end{vmatrix} = 6 - 3x$$

$$\frac{1}{2} \cdot |D| \cdot 8 = 12 \quad \rightarrow \quad |6 - 3x| = 3$$

Logo:

$6 - 3x = 3 \quad \rightarrow \quad x = 1$

Ou:

$-6 + 3x = 3 \rightarrow \quad x = 3$

Sendo $x = 1$, a abscissa de C é:

$y = -x + 3 = -1 + 3 = 2$

Assim, C = (1, 2).

Portanto, a soma das abscissas dos vértices do triângulo ABC corresponde a:

$0 + 2 + 1 = 3$

17. a) A abscissa do ponto D corresponde a $x_D = 5$, enquanto o coeficiente angular da reta $y = \alpha x$ equivale a tg $A\hat{C}D = \alpha$. Contudo, utilizando a relação da equação fundamental da reta BC, obtemos:

$$y - 0 = -\frac{5}{3}(x - 8) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{5}{3}(x - 8)$$

Como o segmento DE é paralelo ao segmento AB, temos:

$$5\alpha = -\frac{5}{3}(x_E - 8) \ \rightarrow \ 15\alpha = -5x_E + 40 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow -3\alpha + 8$$

Por conseguinte:

$DE = x_E - x_D = -3\alpha + 8 - 5$

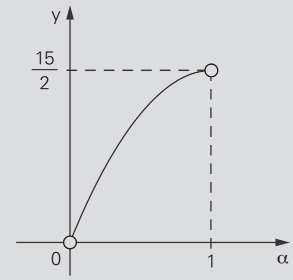
Portanto, $DE = -3\alpha + 3$.

b) Para a função $f(\alpha)$, obtemos:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\overline{DE} + \overline{AB}\right) \cdot \overline{AD} = -\frac{15}{2}\alpha \cdot (\alpha - 2) = -\frac{15}{2}\alpha^2 + 15$$

com $0 < \alpha < 1$

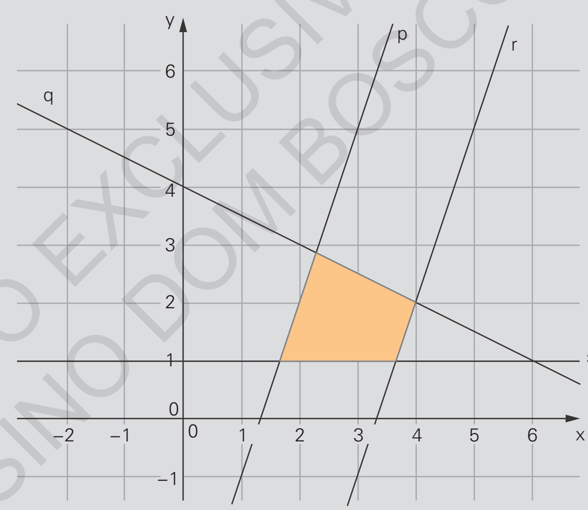
Logo, o gráfico de f é um arco de parábola, cujas interseções com o eixo x são os pontos de abscissa zero e 2, e vértice em $\left(1, \frac{15}{2}\right)$.



Estudo para o Enem

18. B

Analisando as equações, notamos que as retas p e r são paralelas, pois têm o mesmo coeficiente angular (3).



Traçando as retas r, s, p e q, notamos que se trata de um quadrilátero com um único par de lados paralelos. Logo, é um trapézio.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

19. C

A reta de crescimento dos casos registrados de dengue tem coeficiente angular m igual a:

$$m = \frac{560 - 400}{2013 - 2005} = \frac{160}{8} \quad \rightarrow \quad a = 20$$

Assim, obtemos a equação da reta:

$y = 20x$

Sendo x o número de anos passados, temos:

$y = 20x = 20 \cdot (2015 - 2013) = 40$

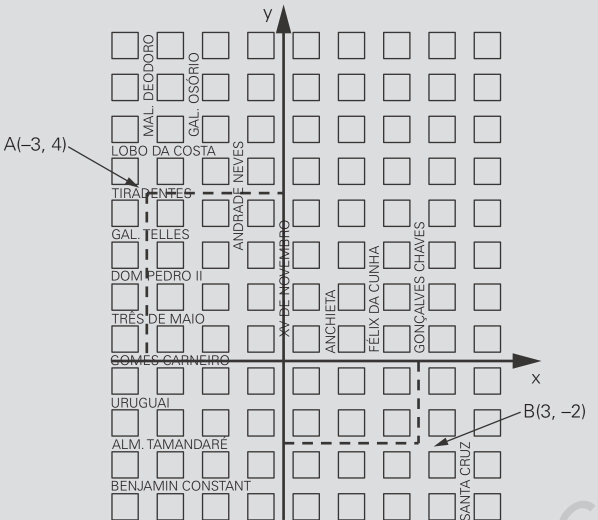
Logo, em 2 anos (2013 a 2015), houve aumento de 40 casos de dengue. Ou seja, $560 + 40 = 600$ casos em 2015.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. B

Descrevendo os eixos conforme descrito no texto, temos:



O ponto A tem coordenadas (–3, 4) e o ponto B, coordenadas (3, –2).

O coeficiente angular m da reta é:

$$m = \frac{-2-4}{3-(-3)} = -1$$

Com o coeficiente angular e apenas um ponto, podemos obter a equação fundamental da reta:

$$y - 4 = -1[x - (-3)] \rightarrow y - 4 = -x + 3 \rightarrow$$
$$\rightarrow x + y - 1 = 0$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

49 ESTUDO DA RETA - POSIÇÃO RELATIVA ENTRE RETAS

Comentários sobre o módulo

Neste módulo continuamos os estudos sobre as retas, sendo deduzidas as posições relativas entre duas delas: quando são retas paralelas distintas, retas paralelas coincidentes, retas concorrentes e retas perpendiculares entre si.

Para ir além

- O material "Geometria analítica" é um guia completo sobre o tema para professores de Matemática. Disponível em:

http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/geometria-analitica-ufma.pdf

http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uepg_mat_artigo_glaucia_marise_scortegagna.pdf

Acessos em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. D

$m_r \cdot m_s = -1 \rightarrow m_r \cdot \dfrac{2}{3} = -1 \rightarrow$

$\rightarrow m_r = -\dfrac{3}{2}$

P(1, 6)

Logo:

$y - 6 = -\dfrac{3}{2} \cdot (x - 1) \rightarrow y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2} + 6$

Portanto, $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{15}{2}$.

8. C

Como não há interseção entre as retas, é sinal de que são paralelas.

Assim, $y = \dfrac{x}{2} - 5 \rightarrow m_r = \dfrac{1}{2}$. Como a reta passa pelo ponto (16, 11), basta substituir os valores na equação reduzida:

$y = mx + q \rightarrow 11 = \dfrac{1}{2} \cdot 16 + q \rightarrow q = 3$

Contudo, $y = \dfrac{1}{2}x + 3$.

9. E

As retas têm coeficientes angulares diferentes. Logo, não são paralelas.

Igualando as equações, temos:

$$\begin{cases} y = 5x + 8 \\ y = -5x + 8 \end{cases}$$

$5x + 8 = -5x + 8 \rightarrow 10x = 0 \rightarrow x = 0$

$y = 5 \cdot 0 + 8 \rightarrow y = 8$

Logo, no ponto (0, 8), as retas se intersectam, tendo um único ponto em comum.

10. r: $2y = x - 3 \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

Logo, $m_r = \dfrac{1}{2}$.

$m_r \cdot m_t = -1 \rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot m_t = -1 \rightarrow m_t = -2$

As retas r e t se intersectam no ponto A, cujas coordenadas são:

$y = 0 \rightarrow 2y = x - 3 \rightarrow 2 \cdot 0 = x - 3 \rightarrow x = 3$

Assim, A = (3, 0).

Logo, a equação da reta t será:

$y - 0 = -2 \cdot (x - 3)$

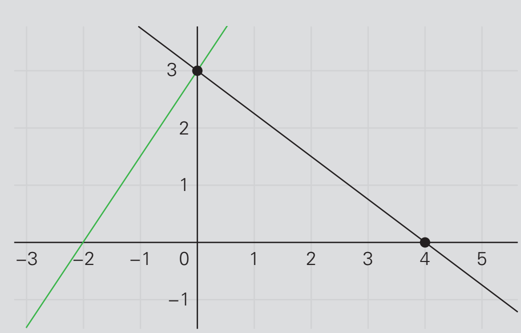
Portanto, $y = -2x + 6$.

11. A

A reta $3x - 2y + 6 = 0$ intersecta o eixo x (abscissas) no ponto (–2, 0) e o eixo y (ordenadas) no ponto (0, 3).

Já a reta $3x + 4y - 12 = 0$ intersecta o eixo x (abscissas) no ponto (4, 0) e o eixo y no ponto (0, 3).

Desse modo, a região cuja área queremos calcular corresponde ao triângulo de vértices (–2, 0), (0, 3) e (4, 0), conforme o gráfico:



Logo, a área será:

$$A = \frac{[4-(-2)] \cdot 3}{2} = 9$$

Portanto, A = 9 u.a.

12. A

r: $3x + my = n \rightarrow my = n - 3x$

$$y = -\frac{3x}{m} + \frac{n}{m} \rightarrow m_r = -\frac{3}{m} \quad e \quad q_r = \frac{n}{m}$$

s: $x + 2y = 1 \rightarrow 2y = 1 - x$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow m_s = -\frac{1}{2} \quad e \quad q_s = +\frac{1}{2}$$

Para as retas serem concorrentes:

$$m_r \neq m_s \rightarrow -\frac{3}{m} \neq -\frac{1}{2} \rightarrow m \neq 6$$

Para as retas serem paralelas:

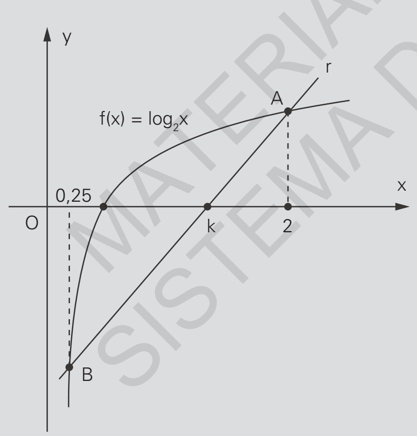
$$q_r \neq q_s \rightarrow \frac{n}{m} \neq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{n}{6} \neq \frac{1}{2} \rightarrow n \neq 3$$

Para as retas serem coincidentes:

$$m_r = m_s \rightarrow m = 6$$

$$q_r = q_s \rightarrow n = 3$$

13.



$x = 2 \rightarrow f(2) = \log_2 2 = 1 \rightarrow A(2;1)$

$x = 0,25 \rightarrow f(0,25) = \log_2 0,25 =$

$= -2 \rightarrow B(0,25; -2)$

$$\begin{bmatrix} 2 & k & 0,25 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

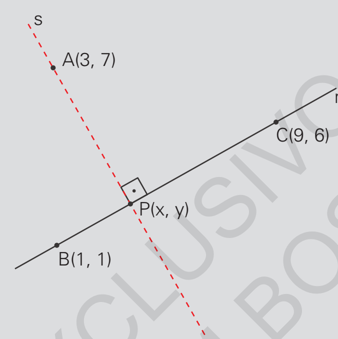
$-k + 4 + 0 - 0 + 0,25 - 2k = 0$

$$-3k + 4,25 = 0 \rightarrow k = \frac{4,25}{3}$$

Portanto, $k = \frac{17}{3}$.

14. D

Do enunciado, temos:



Com as coordenadas dos pontos B e C, encontramos o coeficiente angular e a equação da reta r.

$$m_r = \frac{6-1}{9-1} = \frac{5}{8}$$

$$y - 1 = \frac{5}{8} \cdot (x - 1) \rightarrow y = \frac{5}{8}x + \frac{3}{8}$$

Para a obtenção da reta s, temos:

$$m_r \cdot m_s = -1$$

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\frac{5}{8}} \rightarrow m_s = -\frac{8}{5}$$

$$y - 7 = -\frac{8}{5} \cdot (x - 3) \rightarrow y = -\frac{8}{5}x + \frac{59}{5}$$

Para obter o ponto P, resolvemos o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{8}x + \frac{3}{8} \\ y = -\frac{8}{5}x + \frac{59}{5} \end{cases}$$

Como resultado, temos: $x = \frac{457}{89}$ e $y = \frac{319}{89}$.

Logo, as coordenadas da projeção do ponto A são $\left(\frac{457}{89}, \frac{319}{89}\right)$.

15. E

$$m = \frac{40-0}{10-0} = 4$$

$$y = 4x$$

$$h = \frac{(x+2)\cdot(40-4x)}{80} \rightarrow h = \frac{1}{20} \cdot (-x^2 + 8x + 20)$$

Pela análise do x_v da função quadrática, obtemos:

$$x_v = x_{máx} = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-2 \cdot 1} = 4$$

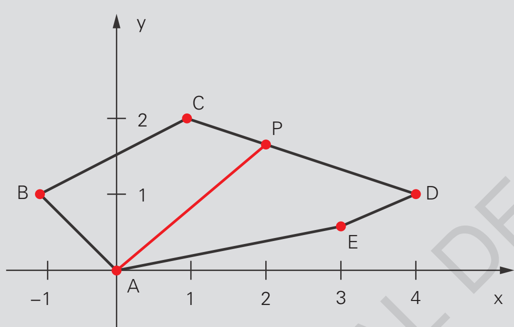
Assim, a altura máxima ($h_{máx}$) será:

$$h_{máx} = \frac{1}{20} \cdot (-4^2 + 8 \cdot 4 + 20) = \frac{1}{20} \cdot 36$$

Portanto, $h_{máx} = 1{,}80$ m.

16. C

Segundo o enunciado:



Contudo, podemos escrever:

$$A_{APDE} = A_{ABCP}$$

$$D_{APDE} = \begin{vmatrix} 0 & x & 4 & 3 & 0 \\ 0 & y & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -2x + y - 3$$

$$D_{ABCP} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 2 & y & 0 \end{vmatrix} = x - 4y - 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot |-2x + y - 3| = \frac{1}{2} \cdot |x - 4y - 1| \rightarrow |-2x + y - 3| =$$

$$= |x - 4y - 1|$$

Como o ponto $P \in 1^{\underline{o}}$ quadrante, $P \in r$ e $P \in \overline{CD}$, temos:

$$-2x + y - 3 = x - 4y - 1 \quad \rightarrow \quad 3x - 5y + 2 = 0$$

Sendo C, D e P colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 4 & 1 \\ 2 & y & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y + x + 8 - 2x - 4y - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -x - 3y + 7 = 0 \quad \rightarrow \quad x + 3y = 7$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos:

$$\begin{cases} 3x - 5y = -2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \rightarrow x = \frac{29}{14} \quad e \quad y = \frac{23}{14}$$

Logo, $x + y = \frac{29}{14} + \frac{23}{14} = \frac{52}{14} = \frac{26}{7}$.

17. a) Se a abscissa do ponto P é igual a 1, $f(1) = \frac{1}{1} = 1$.

Logo, P terá coordenadas (1, 1).

Se a = 2, então pela função $f(a) = \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$.

Logo, Q terá coordenadas $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Assim, a área do quadrilátero T será:

$$A_T = \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{2} \cdot (2-1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \rightarrow A_T = \frac{5}{4}$$

Calculando o quadrado da distância entre P e Q, temos:

$$d_{PQ} = \sqrt{(2-1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

Portanto, $(d_{PQ})^2 = \frac{5}{4}$.

b) Sendo A o ponto de interseção entre a reta r e a função f(x).

Para a coordenada y do ponto A igual a $\frac{a}{2}$, a coordenada x será $\frac{2}{a}$.

Logo, $A = \left(\frac{2}{a}, \frac{a}{2}\right)$.

$P = (1, 1)$ e $Q = \left(a, \frac{1}{a}\right)$. Assim, o coeficiente angular da reta s que passa pelos pontos P e Q será:

$$m_s = \frac{\frac{1}{a} - 1}{a - 1} = -\frac{1}{a}$$

Logo:

$$m_r \cdot m_s = -1 \to m_r = -\frac{1}{-\frac{1}{a}} \to m_r = a$$

Assim, a equação da reta r pode ser escrita como:

r: $y - 0 = a \cdot (x - 0)$

r: $y = ax$

Como $A = \left(\frac{2}{a}, \frac{a}{2}\right)$ e pertence à reta r, temos:

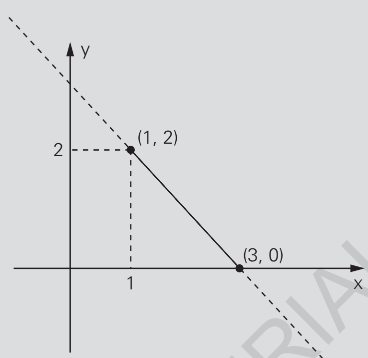
$$y = ax \to \frac{a}{2} = a \cdot \frac{2}{a}$$

Portanto, $a = 4$.

Estudo para o Enem

18. B

Considerando a reta r representada na sequência, temos:



$$m_r = \frac{0-2}{3-1} = -\frac{2}{2} = -1$$

r: $y - 0 = -1 \cdot (x - 3) \to y = -x + 3$

Portanto, $x + y - 3 = 0$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. B

Apenas a alternativa B apresenta dois pontos que pertencem à reta.

Calculando a distância entre cada um dos pontos ao ponto T, sabemos que a única opção que tem os dois pontos pertencentes à reta é a [B].

Calculando a distância de cada um desses pontos ao ponto T, obtemos 200 m:

$$d' = \sqrt{(160-0)^2 + (115+(-5))^2} = \sqrt{160^2 + 120^2} =$$

$$= \sqrt{25\,600 + 14\,400} = \sqrt{40\,000} = 200 \text{ m}$$

$$d'' = \sqrt{(320-160)^2 + (235-115)^2} = \sqrt{160^2 + 120^2} =$$

$$= \sqrt{25\,600 + 14\,400} = \sqrt{40\,000} = 200 \text{ m}$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

20. C

Considerando a definição de simetria e o contorno da letra R, a alternativa C é a correta.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

50 DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

Comentários sobre o módulo

Neste módulo continuamos os estudos da Geometria analítica com a abordagem da distância do ponto à reta e as inequações do 1º grau no plano cartesiano. Apresentamos a fórmula que relaciona a distância do ponto à reta, o caso geral e os casos particulares dos estudos das inequações no plano, com a análise dos semiplanos aberto e fechado.

Para ir além

- O artigo "Caminhos e percursos da Geometria analítica: estudo histórico e epistemológico" aborda o contexto histórico do estudo dessa área da Matemática. Disponível em:

http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/137-440-1-DR-C.pdf

Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. r: $x + y + 2 = 0 \rightarrow a = 1;\ b = 1;\ c = +2$

P(6, 8) $\rightarrow x_P = 6;\ y_P = 8$

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a+b}} = \frac{|1 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{16}{\sqrt{2}} \rightarrow d = 8\sqrt{2}$$

8. A

Interseção com o eixo x (y = 0):

$4x - 3 \cdot 0 + 12 = 0 \rightarrow 4x = -12 \rightarrow x = -3 \therefore A(-3,\ 0)$

Interseção com o eixo y (x = 0):

$4 \cdot 0 - 3y + 12 = 0 \rightarrow 3y = -12 \rightarrow y = 4 \ \therefore\ B(0,\ 4)$

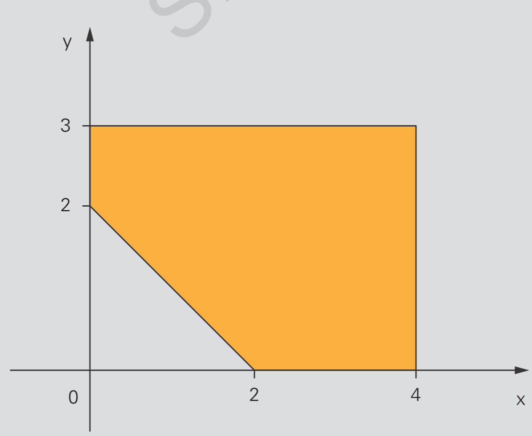
Logo, a distância entre os pontos A e B será dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{[0-(-3)]^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} \rightarrow d_{AB} = 5$$

9. D

Vamos considerar a figura, em que está representada a região do plano que satisfaz:

$0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3 \ \text{e} \ y \geq -x + 2$



A área da região é dada por:

$$A = 4 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 10 \text{ u.a.}$$

10. A

Pelas condições de existência dos logaritmos, devemos ter:

$x - y > 0 \leftrightarrow y < x$

Ademais, segue que:

$\log_3 (x-y) < (\log_3 12) - 1 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \log_3 (x-y) < (\log_3 12) - \log_3 3$

$\log_3 (x-y) < \log_3 4$

$x - y < 4$

$y > x - 4$

Portanto, o subconjunto H do plano é a região definida por $x - 4 < y < x$.

11. E

Os vértices (2, 2) e (3, 3) pertencem à reta $y = x$, que é paralela à família de retas $y = x + m$.

As retas dessa família devem estar acima do ponto (2, 3), isto é, $3 < 2 + m$, implicando em $m > 1$ ou abaixo do ponto (3, 2), ou seja, $2 > 3 + m$, implicando em $m < -1$.

12. Soma: 02 + 04 + 08 = 14.

01. Incorreta. O ponto P tem coordenada 3, portanto dista três unidades da abcissa x. Quando x é igual a π, o valor do cosseno é igual a -1. Portanto, a distância do ponto P ao gráfico da função $f(x) = \cos x$ é 4.

02. Correta. Calculando, temos:

$$\text{reta r: } m_r = \frac{3-0}{0+1} = 3 \rightarrow y - 3 = 3 \cdot (x - 0) \rightarrow y = 3x + 3$$

$$\text{reta t}: x + 3y = \pi + 9 \rightarrow x + 3y = \frac{-x}{3} + \frac{\pi + 9}{3}$$

$$m_t = -\frac{1}{m_r} \rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \rightarrow \text{são perpendiculares}$$

04. Correta. A distância do ponto P ao gráfico da função $f(x) = \cos x$ é 4.

08. Correta. Calculando, temos:

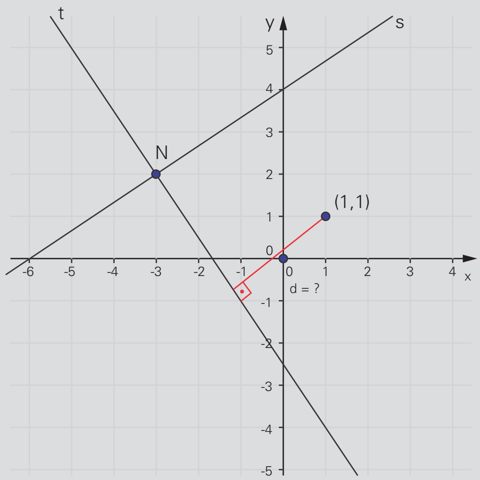
$$\text{reta r: } m_r = \frac{3-0}{0+1} = 3$$

16. Incorreta. Calculando, temos:

$$d_{p-f(x)} = 3 + 1 = 4$$

$$\left. d_{pr} = \frac{|3\pi - 3 + 3|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{3\pi}{\sqrt{10}} \approx 3 \right\} \rightarrow \approx 4 + 3 \approx 7$$

13.



Interseção da reta s com o eixo x (y = 0):

$2x + 12 = 0 \rightarrow x = -6 \rightarrow P(-6,\ 0)$

Interseção da reta s com o eixo y (x = 0):

$-3y + 12 = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow Q\ (0,\ 4)$

Considerando que N é o ponto médio de PQ, temos:

$$x_N = \frac{-6+0}{2} = -3$$

$$y_N = \frac{0+4}{2} = 2$$

Portanto, N = (−3, 2).

A reta s tem coeficiente angular $\frac{2}{3}$. Logo, a reta t terá coeficiente angular $-\frac{3}{2}$, pois são perpendiculares.

Determinando agora a equação da reta t, que passa pelo ponto N e é perpendicular à reta s, temos:

$$t:\ y - 2 = -\frac{3}{2}(x - (-3)) \rightarrow t:\ 3x + 2y + 5 = 0$$

Calculando a distância do ponto M(1, 1) à reta (t) 3x + 2y + 5 = 0, temos:

$$d = \frac{|3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

14. A

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

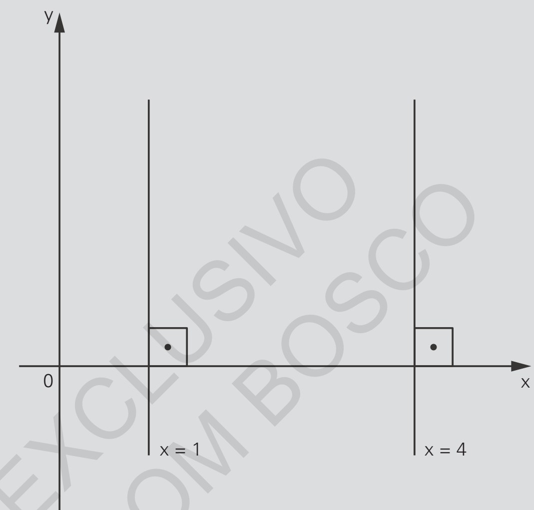
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = 1 \text{ ou } x = 4$$

Note que x = 1 e x = 4 são duas retas paralelas, pois o exercício pede quais pontos satisfazem à equação, e não à função f(x), como estamos acostumados a resolver. Neste caso, os valores de y no plano cartesiano são variáveis, enquanto os de x são fixos.

Observe a figura:



15. B

A distância do segmento $\overline{PQ}$ será:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-6)^2} =$$

$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \rightarrow d = 5$$

Para encontrar a equação da reta a qual pertence o segmento $\overline{PQ}$, sabemos que variações de x e y serão iguais (pois pertencem à mesma reta, com o mesmo coeficiente angular). Logo:

$$\frac{y - y_Q}{x - x_Q} = \frac{y_p - y_Q}{x_p - x_Q} \rightarrow \frac{y-6}{x-4} = \frac{2-6}{1-4} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3\cdot(y-6) = -4\cdot(x-4)$$

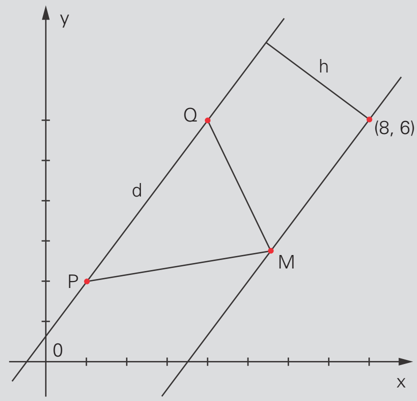
$$r: 4x - 3y = 2$$

Assim, para calcular a área do triângulo formado pelos pontos PQM, é preciso saber a distância da base do triângulo, ou seja, d = 5, e a altura h do triângulo. Nesse caso, a altura h será igual à distância perpendicular entre um ponto qualquer da reta r_1 e o ponto dado (8, 6). Logo:

$$h = \left|\frac{4\cdot 8 - 3\cdot 6 + 2}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}}\right| = \frac{16}{5}$$

Assim, a área do triângulo PQM será:

$$A = \frac{d\cdot h}{2} = \frac{5\cdot\frac{16}{5}}{2} = \frac{16}{2} \rightarrow A = 8 \text{ u.a.}$$



16. D

Determinamos o ponto de interseção das retas resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y = ax \\ y = -x + b \end{cases} \rightarrow ax = -x + b$$

Considerando que $x < 0$ e $y < 0$, podemos escrever:

$$\frac{y}{x} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{a \cdot b}{a+1}}{\frac{b}{a+1}} > 0 \quad \rightarrow \quad a > 0$$

Se $a > 0$ e $x = \dfrac{b}{a+1} < 0$ concluímos que $b < 0$.

Portanto, a opção correta é $a > 0$ e $b < 0$.

17. a) De acordo com as restrições, obtemos:

$$\begin{cases} 4x + y \geq 20 \\ x + 2y \geq 10 \\ x \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq -4x + 20 \\ y \geq -\dfrac{x}{2} + 5 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Com $x, y \in \mathbb{Z}_+^*$.

Assim, os pares (2, 12), (3, 8) e (4, 4) atendem simultaneamente a todas as restrições do problema.

Por outro lado, sendo C(x, y) o custo total do produto fabricado, em reais, temos:

$C(x, y) = 30x + 20y$.

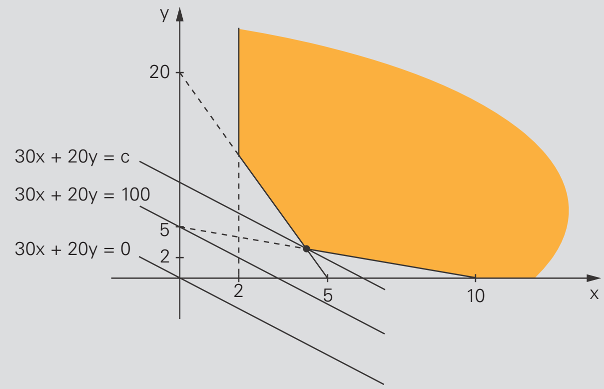
Em consequência:

$C(2, 12) = 30 \cdot 2 + 20 \cdot 12 =$ R\$ 300,00

$C(3, 8) = 30 \cdot 3 + 20 \cdot 8 =$ R\$ 250,00

$C(4, 4) = 30 \cdot 4 + 20 \cdot 4 =$ R\$ 200,00

b) Vamos considerar a figura, obtida conforme o item (a):



Queremos determinar o ponto (x, y), com x e y racionais, que pertence simultaneamente ao gráfico de uma das retas da família $30x + 20y = c$ e à região do plano indicada, de modo que c seja mínimo.

Tal ponto corresponde ao ponto de interseção das retas $4x + y = 20$ e $x + 2y = 10$, que é $\left(\dfrac{30}{7}, \dfrac{20}{7}\right)$.

Logo, $c = 30 \cdot \dfrac{30}{7} + 20 \cdot \dfrac{20}{7} = \dfrac{1300}{7} \cong$ R\$ 185,71.

Estudo para o Enem

18. C

Apenas na alternativa C a região do plano é definida por:

$x \geq 0{,}9$, $y \geq 0{,}8$ e $x + y \geq 2 \leftrightarrow y \geq -x + 2$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

19. A

Determinamos a equação da reta suporte do lado C do paralelogramo.

O cálculo do coeficiente angular é:

$$m = \frac{\frac{5}{3} - \frac{4}{3}}{2 - 1} = \frac{1}{3}$$

A equação da reta suporte do lado C é:

$$y - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}(x - 1) \rightarrow x - 3y + 3 = 0$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

20. E

A equação da reta que passa pelos pontos (0, 0) e (4, 9) é:

$$y \leq \frac{9}{4}x \leftrightarrow 4y - 9x \leq 0$$

Já a equação da reta que passa pelos pontos (0, 0) e (8, 3) é:

$$y \geq \frac{3}{8}x \leftrightarrow 8y - 3x \geq 0$$

Portanto, a região S é limitada pelas seguintes desigualdades:

$4y - 9x \leq 0,\ 8y - 3x \geq 0,\ x \leq 8$ e $y \leq 9$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

51 EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA - EQUAÇÃO REDUZIDA

Comentários sobre o módulo

Neste módulo iniciamos os estudos das circunferências em Geometria analítica. Demonstramos a equação reduzida da circunferência e trabalhamos exercícios diversos que envolvem a equação reduzida com outros conceitos já vistos em módulos anteriores.

Para ir além

- O artigo "Estudo da circunferência no ensino médio: sugestão de atividades com a utilização do *software* GeoGebra" aborda o estudo da circunferência com a utilização de *software* dinâmico. Disponível em:

  https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:z1WPUgaPWCAJ:https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/14252/pdf+&cd=16&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br

  Acesso em: abr. 2019.

- O artigo "Construindo a equação da circunferência e da superfície esférica por meio do *software* Geogebra 3D: uma experiência com alunos do ensino médio" trabalha a construção da equação reduzida da circunferência com o uso de *software 3D*. Disponível em:

  http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1098/pdf_218

  Acesso em: abr. 2019.

- A reportagem "O que foi o Coliseu de Roma?" explica o contexto histórico envolvendo esse monumento histórico. Disponível em:

  https://super.abril.com.br/mundo-estranho/o-que-foi-o-coliseu-de-roma/

  Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. A

Apenas o ponto da alternativa A, quando tem suas coordenadas substituídas na equação da circunferência, faz a sentença ser verdadeira:

$$\beta : (5-3)^2 + (6-6)^2 = 4$$

8. A

A distância de A até B corresponde ao diâmetro da circunferência. Logo:

$$d_{AB} = \sqrt{[3-(-1)]^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

raio: $r = \dfrac{\sqrt{80}}{2}$

Dessa forma, o centro é obtido pela metade da soma das entradas das coordenadas:

$$C = \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-1+3}{2}; \frac{3-5}{2}\right) = (1; -1)$$

Empregando a equação das circunferências ao ponto do centro, temos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + [y-(-1)]^2 = \left(\frac{\sqrt{80}}{2}\right)^2$$

Logo, a equação da circunferência é dada por

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20.$$

9. A

Sendo A e B, respectivamente, os centros de λ_1 e λ_2, temos:

$A = (-2, -1)$ e $B = (4, 3)$

Calculando o determinante, obtemos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & 3 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = -6 + 10 + 5 + 4 = 13$$

Assim, a área do triângulo ABP é obtida por:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |13| = \frac{1}{2} \cdot 13 = \frac{13}{2}$$

Portanto, $A_\Delta = \dfrac{13}{2}$.

10. a) Calculando o determinante, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 - 12 = -28$$

O resultado da área é obtido por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |-28| = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14$$

Logo, a área do triângulo é 14 cm².

b) Sendo C = (a, b) o centro do prato. Contando que as distâncias dos pontos dados ao centro do prato são idênticas, temos:

$(0-a)^2 + (0-b)^2 = (-4-a)^2 + (2-b)^2 =$

$= (6-a)^2 + (4-b)^2$

Logo,

$$\begin{cases} 4a - 2b = -10 \\ 3a + 2b = 13 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} 4a - 2b = -10 \\ 3a + 2b = 13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{7} \\ b = \dfrac{41}{7} \end{cases}$$

Sendo assim, $C = \left(\frac{3}{7}, \frac{41}{7}\right)$.

11. C

Primeiramente, encontramos a distância entre os pontos:

$$d_{A,B} = \sqrt{(-1+4)^2 + (-2-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$d_{A,B} = 2 + 4 = 6 \text{ e } d_{B,C} = \sqrt{(2+1)^2 + (1+2)^2} =$$

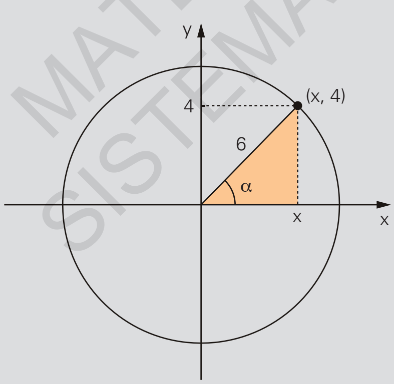
$$= 3\sqrt{2}$$

Portanto, o triângulo ABC é retângulo e de hipotenusa 6. Em decorrência, a circunferência circunscrita ao triângulo ABC tem diâmetro igual a 6 e raio r = 3.

Assim, a razão pedida será $\frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r^2}{2r} = \frac{r}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

12. E

De acordo com o enunciado, temos a seguinte circunferência:



Executando y = 4, obtemos a seguinte equação:

$$x^2 + 4^2 = 36 \rightarrow x^2 = 20 \rightarrow x = \pm 2\sqrt{5}$$

Estando P no primeiro quadrante, temos:

$$x = 2\sqrt{5}$$

Logo:

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ e } \cos(180° - \alpha) =$$

$$= -\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

13. Soma: 04 + 08 + 16 = 28

01. Falso, pois, traçando o gráfico, podemos ver que a interseção entre as duas não é vazia.

02. Falso, pois a reta e a circunferência dadas não terão pontos em comum. Calculando, obtemos:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 6 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + (2x+5)^2 = 6 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 + 20x + 25 - 6 = 0$$

$$5x^2 + 16x + 23 = 0$$

$$\Delta = 162 - 4 \cdot 5 \cdot 23 = -204$$

04. Verdadeiro, pois:

$$(x-3)^2 + (x-1)^2 = 4$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y = -6$$

08. Verdadeiro, pois:

$$P = (1, 3) \rightarrow (1-1)^2 + (3-2)^2 = 1 \rightarrow 1 = 1$$

16. Verdadeiro, pois:

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 \rightarrow m_1 = -\frac{3}{2}$$

Condição para ser perpendicular:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \rightarrow \frac{2}{3} = -\frac{1}{-\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x \rightarrow m_2 = \frac{2}{3}.$$

14. a) Calculando, temos:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$4 - 0 = m_{PQ} \cdot (2+1) \rightarrow 4 = 3m_{PQ} \rightarrow m_{PQ} = \frac{4}{3}$$

Reta contendo o

$\overline{PQ}$: $y - 0 = \frac{4}{3} \cdot (x+1) \rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$

$$4 - 3 = m_{PS} \cdot (2+5) \rightarrow 1 = 7m_{PS} \rightarrow m_{PS} = \frac{1}{7}$$

Reta contendo o $\overline{PS}$:

$$y - 4 = \frac{1}{7} \cdot (x-2) \rightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{26}{7}$$

b) Sim, pois as retas $\overline{PQ}$ e $\overline{QS}$ são perpendiculares.

$$m_{PQ} \cdot m_{QS} = -1 \quad \rightarrow \quad \overline{PQ} \perp \overline{QS}$$

c) Se o triângulo PQS é retângulo no ponto Q, então o segmento PS é idêntico ao diâmetro e o ponto Q faz parte da circunferência. Portanto, podemos escrever:

$$2r = d_{PS} = \sqrt{(2+5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

O centro da circunferência será:

$$C \rightarrow \frac{\overline{PS}}{2} \rightarrow \left(\frac{2-5}{2}, \frac{4+3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Logo, a equação da circunferência será dada por:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$$

15. a) Sendo P = (a, b), com a > 0. Assim a equação da órbita é:

$$\lambda: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 5$$

Portanto, como A = (0, 1) e B = (1, 2) pertencem a λ, temos:

$$\begin{cases} a^2 + (1-b)^2 = 5 \\ (1-a)^2 + (2-b)^2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2b + 1 = 5 \\ a^2 + b^2 - 2a - 4b + 5 = 5 \end{cases}$$

Consequentemente, a = 2 − b.

Logo:

$$(2-b)^2 + b^2 - 2b + 1 = 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow b^2 - 3b = 0 \rightarrow b = 0$$

Em decorrência, a resposta será

$$(x-2)^2 + y^2 = 5.$$

b) Calculando o determinante, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 4 = -3$$

O resultado da área é obtido por:

$$A\Delta_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot |-3| = \frac{3}{2}\,(u.a.)^2$$

Como 1 u.a. = $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, obtemos:

$$A = \frac{3}{2} \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11})^2 \rightarrow A = 3{,}375 \cdot 10^{22}\ m^2$$

Logo, a área é igual a $3{,}375 \cdot 10^{22}$ m².

16. B

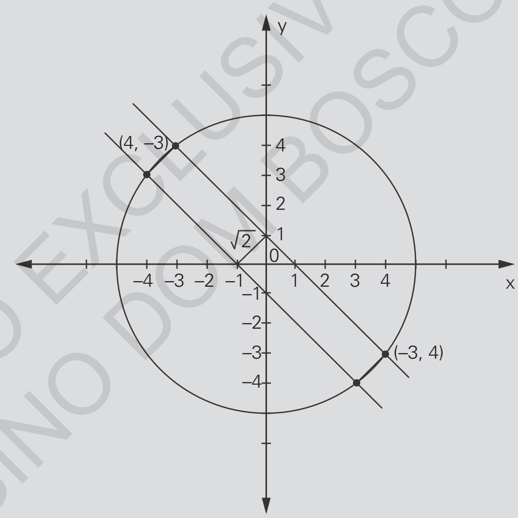
Do enunciado, compreende-se que:

$r_1 \rightarrow y = -x + 1$

$r_2 \rightarrow y = -x - 1$

$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow r = 5$ (raio da circunferência)

Essas retas são paralelas e distam $\sqrt{2}$ entre si, o que conota a largura do quadrilátero, conforme a figura a seguir.



Para determinar a área do quadrilátero composto pelos pontos de interseção, é necessário determinar tais pontos. Para isso, basta alternarmos o valor de y na equação da circunferência. Nesse caso, como as retas são paralelas e distanciam igualmente do centro da circunferência, usou-se o valor de y dado na reta 1. Contudo, havia a possibilidade de ter sido utilizado o valor da reta 2, obtendo-se os mesmos resultados:

$$x^2 + (-x+1)^2 - 25 = 0$$

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 - 25 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos:

$x_1 = 4 \rightarrow y = -3 \rightarrow (4, 3)$

$x_2 = -3 \rightarrow y = 4 \rightarrow (-3, 4)$

O comprimento do quadrilátero se dá pela distância entre as duas interseções da reta 1.

Logo, podemos usar a fórmula da distância entre dois pontos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{[(-3) - 4]^2 + [4 - (-3)]^2}$$

$$d = \sqrt{(-7)^2 + (7)^2}$$

$$d = \sqrt{98}$$

Contudo, a área do quadrilátero será:

$$A = \sqrt{98} \cdot \sqrt{2}$$

$$A = \sqrt{196}$$

$$A = 14 \ (u.c.)^2$$

17. A

Considerando que O é o centro da circunferência, temos que determinar os pontos P e Q pela resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 2 \cdot (1 - x) \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtemos:

$$x^2 + [2 \cdot (1 - x)]^2 = 4 \rightarrow x^2 + 4 \cdot (1 - 2x + x^2) =$$

$$= 4 \rightarrow 5x^2 - 8x = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos:

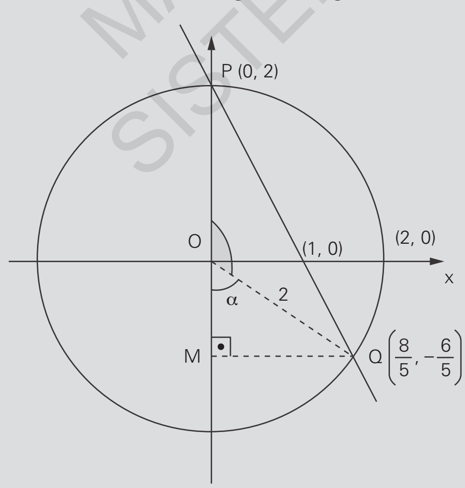
$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{8}{5}$$

Se $x = 0$, $y = 2$

Se $x = \frac{8}{5}$, $y = -\frac{6}{5}$

Sendo assim, os pontos solicitados são P(0, 2) e $Q\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$.

Temos, então, a seguinte figura:



No triângulo OQM, temos:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{6}{5}}{2} = \frac{3}{5}$$

Portanto, $\cos(180° - \alpha) = -\frac{3}{5}$.

Estudo para o Enem

18. B

Tomando como base a maior circunferência de comprimento 70 cm, temos:

$$2r = 70 \rightarrow r = \frac{70}{2\pi} = \frac{35}{\pi}$$

Como o centro da circunferência tem coordenadas (0, 0), obtemos:

$$x^2 + y^2 = r \rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{35}{\pi}\right)^2$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

19. D

A trajetória especificada pelo assento do balanço é parte da circunferência:

$x^2 + y^2 = 2^2$

Assim, sabendo que $y < 0$, temos:

$$x^2 + y^2 = 2^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4 \rightarrow y = -\sqrt{4 - x^2}.$$

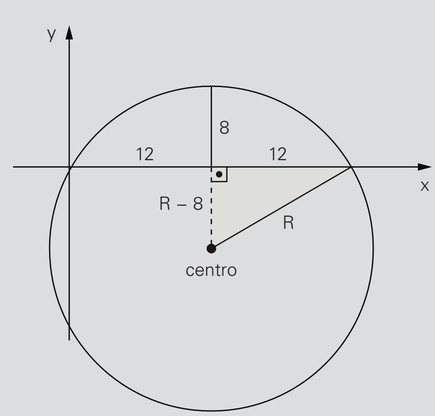
Logo, $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$, com $-2 < x < 2$.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. A

De acordo com o enunciado, temos:



Utilizando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$(r-8)^2 + 12^2 = r^2 \rightarrow r^2 - 16r + 64 + 144 = r^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16r = 208 \rightarrow r = 13$$

Logo, o centro da circunferência é o ponto C (12, − 5).

A equação da circunferência será:

$$(x - 12)^2 + (y + 5)^2 = 13^2$$

$$(x - 12)^2 + (y + 5)^2 = 169$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

52 EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA - EQUAÇÃO GERAL

Comentários sobre o módulo

Neste módulo continuamos os estudos sobre as circunferências em Geometria analítica. Demonstramos a equação geral da circunferência e trabalhamos exercícios diversos que envolvem a equação geral com outros conceitos já vistos em módulos anteriores.

Para ir além

- O artigo "Aprendizagem dos conceitos sobre circunferência na perspectiva da teoria das situações didáticas" aborda o ensino dos conceitos envolvendo circunferências por meio do uso de paródias musicais como recurso didático na aprendizagem de conteúdos matemáticos. Disponível em:

https://webcache.googleusercontent.com/search?q5cache:1sYsrNnU3isJ:https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/download/162/1081&cd529&hl5pt-BR&ct5clnk&gl5br

Acesso em: abr. 2019.

- No *link* a seguir, é apresentada a expansão da equação reduzida da circunferência para a equação geral da circunferência. Disponível em:

https://matika.com.br/geometria-analitica/equacao-geral-da--circunferencia

Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. D

Temos:

$d = 4;\ f = -6;\ g = -3$

$$a = -\frac{d}{2} \to a = -\frac{4}{2} \to a = -2$$

$$b = -\frac{f}{2} \to b = -\frac{-6}{2} \to b = 3$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - g} \to r = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 - (-3)} \to$$

$$\to r = \sqrt{4 + 9 + 3} \to r = \sqrt{16} \to r = 4$$

Logo, raio é igual a 4.

8. B

Concluindo o quadrado, temos:

$$x^2 - 4x + (y+1)^2 = 0 \to$$
$$\to x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

$d = -4;\ f = -2;\ g = 1$

$$a = -\frac{d}{2} \to a = -\frac{-4}{2} \to a = 2$$

$$b = -\frac{b}{2} \to b = -\frac{+2}{2} \to b = -1$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - g} \to r = \sqrt{2^2 + (-1)^2 - 1} \to$$
$$\to r = \sqrt{4} \to r = 2$$

As coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência são C(2, –1) e r = 2, respectivamente.

9. a) A distância do ponto P à origem O do sistema cartesiano de eixos é obtida por:

$$d_{P,O} = \sqrt{16^2 + (-3)^2} = \sqrt{265}$$

b) Como o segmento $\overline{PQ}$ é tangente à circunferência em Q, o triângulo OPQ é retângulo em Q. então, entendendo que $\overline{PQ} = 12$ u.c. e, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OP}^2 \to 265 = \overline{OP}^2 + 144 \to \overline{OQ} = 11 \text{ u.c.}$$

Logo, $r = \overline{OQ} = 11$ u.c.

10. C

Como CA e CB são raios da circunferência λ e os pontos A e B fazem parte da reta x = 0, o triângulo CAB é isósceles de base AB. Portanto, a coordenada y do ponto C, deverá ser igual a do ponto médio entre A e B.

Assim, C(–2, y) = C(–2, 0).

Logo:

$$\overline{CA}^2 = (-2-0)^2 + (0-1)^2 = 5$$

Contudo, podemos escrever a equação reduzida da circunferência:

$$[x-(-2)]^2 + (y-0)^2 = 5$$

Assim, obtemos o resultado esperado, desenvolvendo os produtos notáveis:

$$(x+2)^2 + y^2 = 5 \to x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$$

11. B

Estabelecendo o centro C da circunferência fornecida e o raio, obtemos:

$d = 4;\ f = 10;\ g = 25$

$a = -\dfrac{d}{2} \rightarrow a = -\dfrac{4}{2} \rightarrow a = -2$

$b = -\dfrac{f}{2} \rightarrow b = -\dfrac{10}{2} \rightarrow b = -5$

$r = \sqrt{a^2 + b^2 - g} \rightarrow r = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 - 25} \rightarrow$
$\rightarrow r = \sqrt{4} \rightarrow r = 2$

Logo, C(– 2, –5) e r = 2.

O ponto P simétrico do ponto (–1, 1) em relação ao eixo x é P(–1, –1).

Portanto, o raio R da circunferência solicitada será a distância entre os pontos P e C. Temos, então:

$R^2 = [-1-(-2)]^2 + [-1-(-5)]^2 = 17$

Portanto, a equação da circunferência solicitada será obtida por:

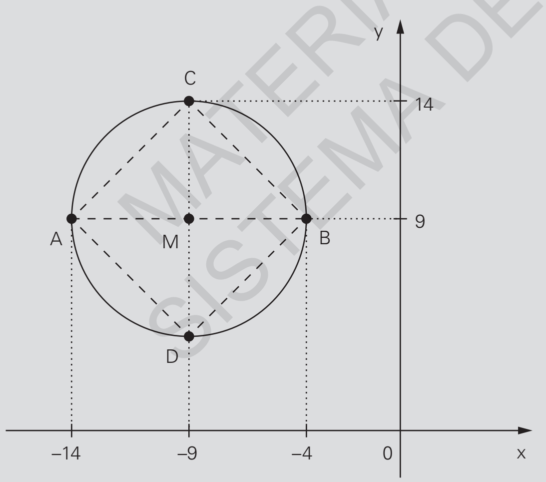
$(x+2)^2 + (y+5)^2 = 17$

Desenvolvendo-a, obtemos:

$x^2 + y^2 2 + 4x + 10y + 29 - 17 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0$

12. a) Vamos considerar a figura:



b) Compreendido que AB é diâmetro, o centro da circunferência será chamado de M, que corresponde ao ponto médio de AB.

$M = \left(\dfrac{-14-4}{2}, \dfrac{9+9}{2}\right) = (-9, 9)$

Já o raio r da circunferência é obtido por:

$r = \dfrac{d_{AB}}{2} \rightarrow r = \dfrac{10}{2} \rightarrow r = 5\text{ m}$

Consequentemente, a equação solicitada será:
$(x+9)^2 + (y-9)^2 = 5^2 \rightarrow (x+9)^2 + (y-9)^2 = 25$

c) Como as abscissas dos pontos C e M são idênticas, AB é paralelo ao eixo OX e é compreendido que o triângulo ABC é isósceles e retângulo em C. Assim, sendo D o simétrico de C em associação a AB, teremos que o quadrilátero ABCD é um quadrado de diagonal 10 m. Logo, a área solicitada é:

$A = \dfrac{10 \cdot 10}{2} \rightarrow A = 50\text{ m}^2$

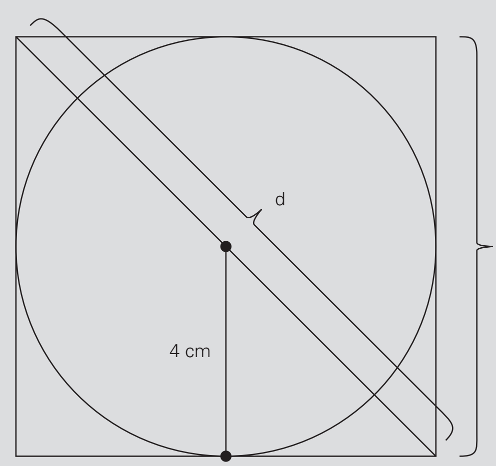
13. E

Temos:

$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 6 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 6 + 1 + 9 \rightarrow$
$\rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$

Logo: C (3, – 1) e $r = \sqrt{16} = 4$.

Observando o quadrado a seguir, circunscrito na circunferência de raio 4 cm, temos:



$l = 2 \cdot 4 = 8 \rightarrow l = 8\text{ cm}$

A diagonal d do quadrado é obtida por:

$d = a \cdot \sqrt{2} \rightarrow d = 8\sqrt{2}$

Logo, a medida da diagonal desse quadrado é $8\sqrt{2}$.

14. D

A equação reduzida de C é:

$x^2 + y^2 + 6x - 2y = -6 \leftrightarrow (x+3)^2 - 9 +$

$+ (y-1)^2 - 1 = -6 \rightarrow$

$\rightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 - 1 = -6$

Em consequência, a equação de C é:

$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 22 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y = -6$

15. O baricentro G do triângulo ABC é obtido por:

$$G = \left(\frac{-3+1+5}{3}, \frac{0+4+(-4)}{3}\right) = (1, 0).$$

Assim, como o raio do círculo é idêntico a 1, a equação solicitada será:

$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 12 \leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

16. D

Compreendendo que (4, 0) faz parte da circunferência, temos:

$4^2 + 0^2 + m \cdot 0 + n = 0 \rightarrow n = -16$

Considerando o ponto (0, 8), temos:

$0^2 + 8^2\ m \cdot 8 - 16 = 0 \rightarrow m = 6$

Sendo assim, a resposta é $6^2 + (-16) = 36 - 16 = 20$.

17. A

Concluindo os quadrados, temos:

$$x^2 + 2x + y^2 + my = n \rightarrow (x+1)^2 + \left(y + \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + n + 1$$

Portanto, o centro $C = \left(-1, -\frac{m}{2}\right)$ pertence à reta $y = -x + 1$.

No entanto, $-\frac{m}{2} = -(-1) + 1 \rightarrow m = -4$.

Consequentemente, como a reta intersecta a circunferência em (–3, 4), obtemos:

$n = x^2 + 2x + y^2 + my \rightarrow n = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 42 +$

$+ (-4) \cdot 4 \rightarrow n = 3.$

Estudo para o Enem

18. B

Adotando-se as coordenadas de A e B com A = (0, 0) e B = (30, 0), e P = (x, y) sendo a posição de um bombeiro, temos:

$$d_{A,P} = 2 \cdot d_{B,P} \leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-30)^2 + y^2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x^2 + y^2 = 4(x-30)^2 + 4y^2 \leftrightarrow (x-40)^2 + y^2 = 20^2$$

Logo, um bombeiro aleatório tem de estar sobre uma circunferência de centro em (40, 0) e raio 20 m.

A maior distância entre dois bombeiros acontece na situação em que ambos se encontram em extremidades distintas do mesmo diâmetro. Sendo assim, 40 m.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

19. D

Analisando o gráfico, as coordenadas dos estabelecimentos são:

A(5, 4)

B(–3, 1)

C(4, 2)

D(–4, –3)

Logo, para determinar se o estabelecimento está dentro da área de cobertura do sinal, basta trocarmos suas coordenadas na equação:

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leq 0$

A: $5^2 + 42 - 2 \cdot 5 - 4 \cdot 4 - 31 \leq 0 \rightarrow -16 \leq 0$
(Adequado)

B: $(-3)^2 + 12 - 2 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 - 31 \leq 0 \rightarrow -19 \leq 0$
(Adequado)

C: $4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 31 \leq 0 \rightarrow -27 \leq 0$
(Adequado)

D: $(-4)^2 + (-3)^2 - 2 \cdot (-4) - 4 \cdot (-3) - 31 \leq 0 \rightarrow 14 \leq 0$
(Falso. Inadequado)

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

20. A

Concluindo os quadrados, temos:

$$x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0 \leftrightarrow (x + 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 3y + 1 = 0 \leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Assim, $C_1 = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $r_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ e $r_2 = \frac{3}{2}$.

O resultado solicitado é relacionado à distância entre os centros das circunferências subtraída da soma dos raios. Portanto:

$$\sqrt{(1-(-1))^2 + \left(\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 2\sqrt{2} - 2 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

53 CIRCUNFERÊNCIA - POSIÇÕES RELATIVAS

Comentários sobre o módulo

Neste módulo continuamos os estudos sobre as circunferências em Geometria analítica. Vimos as classificações de um ponto em relação à circunferência (interno, externo ou pertencente à circunferência), as classificações de uma reta em relação à circunferência (tangente, secante ou externa) e, por fim, as denominações de uma circunferência em relação a outra (externa, interna, secante ou concêntrica).

Para ir além

- "Brincando com a circunferência"

Artigo que aborda o ensino das posições relativas entre as circunferência através do uso de materiais de baixo custo e muita criatividade.

http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6900_2764_ID.pdf

Acesso em: abr. 2019.

- "Estudo da circunferência no ensino médio: sugestões de atividades com a utilização do *software* Geogebra".

Artigo que aborda de maneira bem completa o estudo das circunferências, utilizando o *software* Geogebra como plataforma de apoio.

https://webcache.googleusercontent.com/search?q5cache:z1WPUgaPWCAJ:https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/14252/pdf1&cd523&hl5pt-BR&ct5clnk&gl5br

Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. A

λ_1: $a = 0$; $b = 0$; $r_1 = 2$

$$\lambda_2: a = -\frac{d}{2} = -\frac{-2}{2} = 1;\ b = -\frac{2}{2} = -1;\ g = -12$$

$$r_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - g} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 - (-12)} = \sqrt{14} \cong 3{,}74$$

$$|r_1 - r_2| \cong |2 - 3{,}74| \cong 1{,}74$$

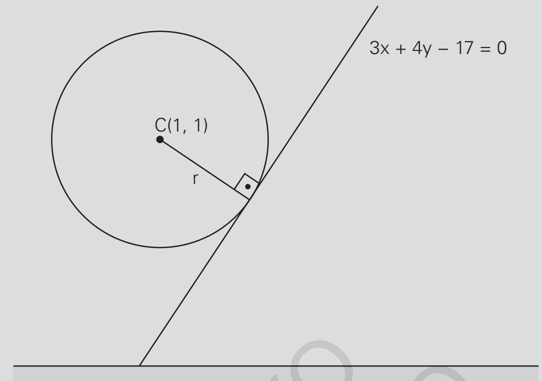
$$d = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2} \cong 1{,}41$$

Como:

$d < |r_1 - r_2| \cong 1{,}74$, a circunferência menor é interna à circunferência maior.

8. B

Do enunciado, teremos:



$$r = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 17|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \rightarrow r = \frac{|-10|}{\sqrt{25}} \rightarrow r = \frac{10}{5} \rightarrow r = 2$$

Logo, a equação da circunferência será:

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 4$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

9. C

Os centros das circunferências maior e menor são, respectivamente:

$C_{maior} = (4, 4)$ e $C_{menor} = (1, 1)$. O raio da circunferência maior corresponde à distância entre os centros das circunferências, logo:

$$d(C_{maior}, C_{menor}) = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{18}$$

A equação da circunferência maior será:

$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{18})^2 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 8y + 14 = 0$

10. Escrevendo a equação para a reta t que passa por P (0, 0), obtemos:

t: $y - 0 = m(x - 0) \rightarrow y = mx \therefore$ t: $mx - y = 0$

Para o cálculo do centro da circunferência, temos:

$$a = -\frac{-8}{2} = 4;\ b = -\frac{0}{2} = 0;\ r = \sqrt{4^2 + 0^2 - 8} = \sqrt{8} =$$

$= 2\sqrt{2}$

A circunferência possui centro C(4, 0) e raio $r = 2\sqrt{2}$. Então, utilizando a relação entre a distância de um ponto à reta, obtemos:

$$\frac{|m(4) - 1(0) - 0|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

$|4m| = 2\sqrt{2}\sqrt{m^2 + 1}$

$16m^2 = 8(m^2 + 1) \rightarrow 16m^2 = 8m^2 + 8$

Logo, $m' = 1$ e $m'' = -1$.

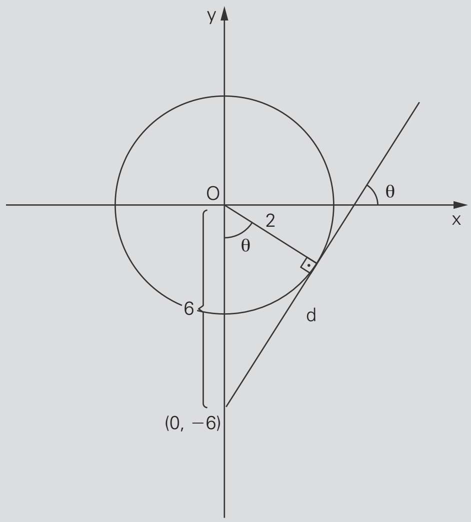
Logo, as equações serão:

$t': mx - y = 0 \quad \rightarrow \quad 1 \cdot x - y = 0 \quad \rightarrow \quad x - y = 0$

$t'': mx - y = 0 \quad \rightarrow -1 \cdot x - y = 0 \quad \rightarrow \quad x + y = 0$

11. B

Através do gráfico, obtemos:



$d^2 + 2^2 = 6^2 \rightarrow d = \sqrt{32} \rightarrow d = 4\sqrt{2}$

$\text{tg } \theta = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{tg } \theta = 2\sqrt{2}$ (inclinação da reta)

Sendo assim, a equação da reta tangente à circunferência será:

$y - (-6) = 2\sqrt{2} \cdot (x - 0)$

Portanto, $y = 2\sqrt{2} \cdot x - 6$.

12. a) $O(0, 0) \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4$

Para $x = 1$:

$1^2 + y^2 = 4 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

Para $x = -1$:

$(-1)^2 + y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{3}$

Logo, os pontos A, B, C e D possuem as seguintes coordenadas:

$A(1, \sqrt{3})$; $B(1, -\sqrt{3})$; $C(-1, \sqrt{3})$; $D(-1, -\sqrt{3})$

b) Calculando:

Área do setor AOD = Área do setor COB =

$= \pi \cdot 2^2 \cdot \dfrac{60}{360} = \dfrac{2\pi}{3}$

Área do triângulo AOB = área do triângulo DOC =

$= \dfrac{1 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\text{Área}_{\text{total}} = 2 \cdot \dfrac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3} = \dfrac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

13. A

Sendo (a, b) o centro da circunferência, temos:

$(a + 1)^2 + (b + 1)^2 = (a - 1)^2 + (b - 5)^2 =$
$= (a - 3)^2 + (b - 1)^2$

Resultando no seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 3b = 6 \\ -6a - 3b = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

Logo, $x^2 + (y - 2)^2 = 10$ corresponde à equação da circunferência λ.

De outra forma, sendo a reta $x = 6 - 3y$ secante à circunferência λ, teremos:

$(6 - 3y)^2 + (y - 2)^2 = 10 \rightarrow (y - 2)^2 = 1 \rightarrow y = 1$ ou $y = 3$

E, finalizando, os pontos de interseção são (3, 1) e (−3, 3).

Logo, para calcular a área solicitada, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 + 3 = 12$$

$A = \dfrac{1}{2} \cdot |12| = 6$ u.a.

14. C

Escrevendo a equação para a reta t que passa por P(0, 0), obtemos:

$t: y - 0 = m(x - 0) \quad \rightarrow \quad y = mx \quad \rightarrow$
$\rightarrow t: mx - y = 0$

Para o cálculo do centro da circunferência, temos:

$a = -\dfrac{0}{2} = 0$; $b = -\dfrac{-10}{2} = 5$;

$r = \sqrt{0^2 + 5^2 - 16} = \sqrt{9} = 3$

A circunferência possui centro C (0, 5) e raio r = 3. Então, utilizando a relação entre a distância de um ponto à reta, obtemos:

$$\frac{|m(0) - 1(5) - 0|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3$$

$5 = 3\sqrt{m^2 + 1}$

$25 = 9m^2 + 9 \quad \rightarrow \quad m^2 = \dfrac{16}{9} \quad \therefore \quad m' = \dfrac{4}{3}$ e $m'' = -\dfrac{4}{3}$

Logo, as equações serão:

$t': mx - y = 0 \rightarrow \frac{4}{3}x - y = 0 \rightarrow 4x - 3y = 0$

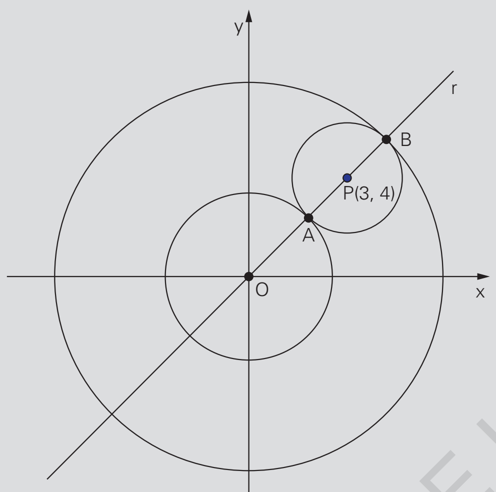
$t'': mx - y = 0 \rightarrow -\frac{4}{3}x - y = 0 \rightarrow 4x + 3y = 0$

15. a) Sabendo o raio e o centro da circunferência, temos:

$C(3, 4)$; $r = 2$.

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2 \rightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$

b) O menor valor de ρ será obtido pelo raio $\overline{OA}$ da menor circunferência centrada no início, e o maior valor de ρ será fornecido pelo raio $\overline{OB}$ da circunferência maior centrada no início.



$OA = OP - 2 = \sqrt{3^2 + 4^2} - 2 = 3$

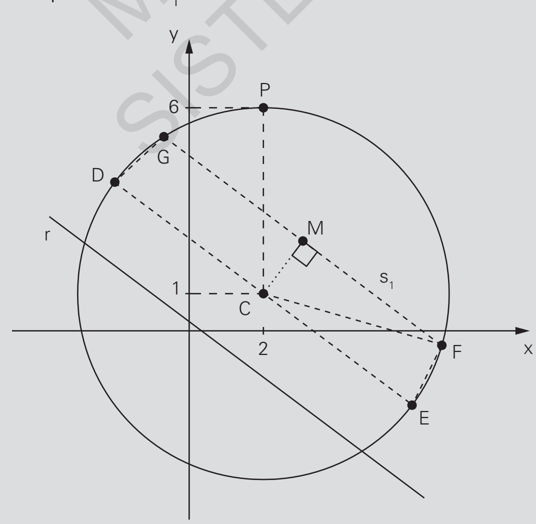
$OB = OP + 2 = 5 + 2 = 7$

Logo,

$3 \leqslant p \leqslant 7.$

16. B

Observe a figura, compreendendo que $\overline{DE}$ é um diâmetro de λ paralelo à reta r e $\overline{FG}$ é a corda que faz parte de s_1.



O raio da circunferência λ mede 5 u.c.

Portanto, se M é o ponto médio de FG, FM = 4 u.c.

Assim: CM = 3 u.c., pois CF = 5 u.c.

Logo, analisando a distância do ponto C = (2, 1) à reta s_1, teremos:

$$3 = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + c'|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \leftrightarrow |10 + c'| = 15 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow c' = = -25 \text{ ou } c' = 5$$

Percebendo que s_1 e s_2 são inevitavelmente simétricas em relação à reta DE, é factual que a resposta seja: $-25 + 5 = -20$.

17. C

Se as circunferências que tangenciam os dois eixos coordenados se encontram no primeiro quadrante, as coordenadas de seus centros são idênticas ao comprimento de seu raio. Logo, podemos equacionar:

$\lambda_1 \rightarrow r_1 = 1; C_1(1, 1)$

$\lambda_2 \rightarrow r_2 = 2; C_2(2, 2)$

$$\begin{cases} \lambda_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ \lambda_2: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Subtraindo as equações de λ_1 e λ_2, teremos a equação de uma reta r que corresponde àquela que passa pelos pontos de encontro das circunferências. Como os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) fazem parte dessa reta, teremos:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = r \rightarrow r: 2x + 2y - 3 = 0 \rightarrow x + y = \frac{3}{2}$$

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \frac{3}{2}$$

$$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

Estudo para o Enem

18. A

Calculando a distância entre reta e ponto:

$C(5, 3)$

$r: x + y - 5 = 0 \rightarrow a = 1; b = 1; c = -5$

$$d_{r,B} = \frac{|1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}13 \text{ km}$$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

19. B

$x^2 + y^2 + dx + fy + g = 0$

$M(-3,3) \rightarrow 9 + 9 - 3d + 3f + g = 0 \rightarrow$
$\rightarrow -3d + 3f + g = -18$

$N(2, 8) \rightarrow 4 + 64 + 2d + 8f + g = 0 \rightarrow$
$\rightarrow 2d + 8f + g = -68$

$O(6, 0) \rightarrow 36 + d + g = 0 \rightarrow g = -36 - 6d$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} -9d + 3f = 18 \\ -4d + 8f = -32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 72d - 24f = -144 \\ -12d + 24f = -96 \end{cases} \rightarrow 60d = -240 \rightarrow d = -4$$

$\rightarrow g = -12 \rightarrow f = -6$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

$$a = -\frac{d}{2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$b = -\frac{f}{2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

C (2, 3)

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2 - (-12)}$$

Portanto, r = 5.

Assim, o perímetro procurado será:

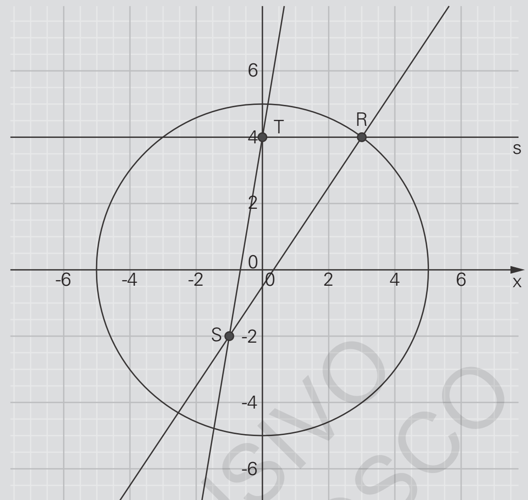
Perímetro $= 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$ cm.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. A

Pelo gráfico, obtemos:



$r \cap s = \{T\}$

$$\begin{cases} y = 6x + 4 \\ y = 4 \end{cases} \rightarrow T = (0,4) \rightarrow d_{T,O} = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$$

$r \cap t = \{S\}$

$$\begin{cases} y = 6x + 4 \\ 2y - 3x + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow S = (-1, -2) \rightarrow d_{S,O} =$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$s \cap t = \{R\}$

$$\begin{cases} y = 4 \\ 2y - 3x + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow R = (3, 4) \rightarrow d_{R,O} = \sqrt{3^2 + 4^2} =$$

= 5 (raio da circunferência)

Portanto, a inequação que equivale ao círculo será obtida através de:

$(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leqslant 25$

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

54 CÔNICAS - ELIPSE

Comentários sobre o módulo

Neste módulo iniciamos os estudos das cônicas, sendo a elipse a primeira das três a ser trabalhada. Abordamos os elementos constituintes de uma elipse e apresentamos a demonstração matemática da equação dela. Analisamos também a relação fundamental e o significado da excentricidade de uma elipse.

Para ir além

- O material "As cônicas desde os gregos até a Geometria analítica" aborda de maneira bem completa o estudo das elipses. Disponível em:

  https://www.ime.unicamp.br/~marcio/hpteia/secon01/secon01.htm.

  Acesso em: abr. 2019.

- O material complementar "Como calcular a área e o perímetro da elipse?", apesar de ter um desenvolvimento matemático que vai além do nosso objetivo, serve como base para despertar o interesse dos alunos com maior aptidão por exatas. Disponível em:

  http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/v3n1/v3n1_art1.pdf.

  Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. Inicialmente é necessário determinar os eixos. O eixo maior (2a) está localizado no eixo das abscissas; o menor, no eixo das ordenadas (2b). Identificando os elementos, temos:

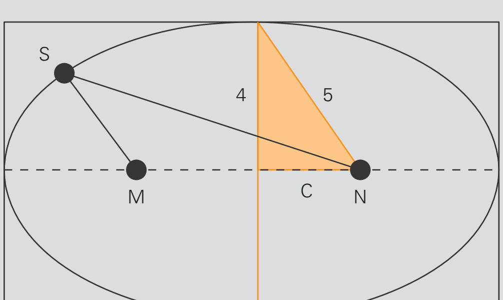
$$\begin{cases} 2a = 4-(-4) = 8 \rightarrow a = 4 \\ 2b = 2-(-2) = 4 \rightarrow b = 2 \end{cases}$$

Substituindo os valores de a e b na equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, temos:

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

8. D

A figura a seguir representa uma elipse com semieixo maior medindo 5 m e semieixo menor medindo 4 m.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo assinalado, temos:

$c^2 + 4^2 = 5^2 \rightarrow c^2 = 25 - 16 \rightarrow c^2 = 9 \rightarrow c = 3$

Como MN é o dobro de c, concluímos que:

$MN = 2\ c = \rightarrow MN = \ 2\ 3 \rightarrow MN = 6$ m

9. Soma: 01 + 02 + 04 + 16 = 23

01. Correto. Reestruturando a equação, temos:

$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$ (equação de uma elipse centrada na origem (0, 0) com a = 3 e $b=\frac{3}{2}$.

02. Correto. A elipse corta o eixo das abscissas nos pontos (a, 0) = (3, 0) e (–a, 0) = (–3, 0).

04. Correto. Pelo sentido de elipse, teremos. Sendo assim, DE é o lado comum e também o resultado.

08. Incorreta, pois de 01 compreendemos que a elipse corta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada $y=\frac{3}{2}$. De outra forma, a circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt{2}$ corta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada $\sqrt{2}$. Portanto, como $\sqrt{2} \cong 1{,}4 < 1{,}5 = \frac{3}{2}$, a elipse e a circunferência não se cortam.

16. Correto, pois $\left(2\sqrt{2}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=8+1=9$.

10. C

$$(x-2)^2 + 4(y+5)^2 = 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{4(y+5)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-2)^2}{6^2} + \frac{(y+5)^2}{3^2} = 1$$

Elipse centrada em (2, –5).

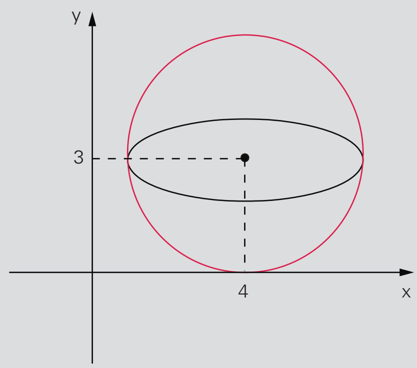
Com o semieixo maior paralelo ao eixo das abscissas, a = 6 e b = 3, temos:

m = 2 + 6 = 8 e n = –5 + 3 = –2

Assim, m + n = 8 + (–2) = 6.

11. B

De acordo com o enunciado, temos a figura:



$x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 88 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 16 -$
$- 9y^2 - 54y + 81 = -88 + 16 + 81$

$x^2 - 8x + 16 + 9 \cdot (y^2 - 6y + 9) = -88 + 16 + 81$

$(x - 4)^2 + 9\,(y - 3)^2 = 9$

$$\frac{(x-4)}{3^2} + \frac{(y-3)^2}{1} = 1$$

Como o eixo maior da elipse mede 6 (3 + 3), compreendemos que a circunferência de menor raio executável que circunscreve a elipse tem centro de coordenadas (4, 3) e raio 3. Logo, tangente ao eixo x.

12. C

Fechando os quadrados das duas elipses descritas, teremos:

$25x^2 + 16y^2 + 150x + 256y - 351 = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 25(x + 3)^2 + 16(y + 8)^2 = 1600 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y+8)^2}{100} = 1$$

$16x^2 + 25y^2 - 96x - 200y + 144 = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 16(x + 3)^2 + 25(y - 4)^2 = 400 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$$

Contudo, concluímos que:

A. Falsa. Os centros das elipses vão ser os pontos (–3, –8) e (–3, 4).

B. Falsa. Analisando a elipse $\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y+8)^2}{100} = 1$, observamos que a = 10 e b = 8. Assim, pela relação fundamental, c = 6. Desse modo, 2c = 12.

Já a elipse terá a′ = 5 e b′ = 4. Portanto, c′ = 3. Finalizando, temos 2c′ = 6.

C. Verdadeira, pois $e = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = e'$.

D. Falsa, pois apenas compreendendo que o eixo maior da elipse $\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y+8)^2}{100} = 1$ é paralelo ao eixo das ordenadas.

E. Falsa. O eixo maior da elipse $\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y+8)^2}{100} = 1$ mede 2a′ = 20, ao passo que o eixo menor da elipse mede 2b′ = 8

13. B

Sendo a curva λ uma elipse com eixo maior paralelo ao eixo das abscissas, com o centro em O (1, –2) e semieixos de dimensões a = 5 e b = 3, a distância do centro aos focos será:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

Em decorrência, temos:

$F_1 = (1 - 4, -2) = (-3, -2)$ e $F_2 = (1 + 4, -2) = (5, -2)$

A. Verdadeira, pois $d_{P,F_1} + d_{P,F_2} = 2 \cdot a = 2 \cdot 5 = 10$.

B. Falsa, pois, fechando os quadrados, temos:

$x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0 \leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

Assim, como essa curva é uma circunferência centrada em (–3, 2), constatamos que a afirmação é falsa.

C. Verdadeira, pois a distância de F_2 ao centro de $x^2 + y^2 = 25$ é:

$\sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$ (esta é maior que o raio da circunferência)

D. Verdadeira, pois o ponto de abscissa máxima de λ é:

$A_2 = (1 + 5, -2) = (6, -2)$ e $-2 = 6 - 8$

14. a) Sendo P = 1,99 · 365, temos:

$$1{,}99 \cdot 365 = 0{,}199 \cdot \alpha^{\frac{3}{2}} \rightarrow \alpha^{\frac{3}{2}} = \frac{726{,}35}{0{,}199} \rightarrow \alpha^{\frac{3}{2}} = 3\,650$$

b) Sendo $= \frac{32}{2} = 16$, ou seja, 16 milhões de quilômetros. Assim:

$$P = 0{,}199 \cdot 16^{\frac{3}{2}} = 0{,}199 \cdot (24)^{\frac{3}{2}} = 0{,}199 \cdot 2^6 = 12{,}736 \text{ dias.}$$

15. Solucionando, originalmente, um sistema com as equações da reta e da elipse, temos:

Substituindo a segunda equação na primeira, encontramos:

$$2x^2 + 3\cdot(x+n)^2 = 6 \rightarrow 5x^2 + 6nx + 3n^2 - 6 = 0$$

Fazendo $\Delta = 0$, para que a equação tenha duas raízes reais e idênticas e seja tangente à elipse, temos:

$$\Delta = (6n)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (3n^2 - 6) = 0$$

$$-24n^2 + 120 = 0$$

$$24n^2 = 120$$

$$n^2 = 5$$

$$n = \sqrt{5}$$

Portanto, os valores reais de n são $\pm\sqrt{5}$.

16. C

Isolando x^2 e reescrevendo as equações, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 = \dfrac{y+2}{4} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 4(y^2-4)+y+2=0 \\ x^2 = \dfrac{y+2}{4} \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 4(y^2-4)+y+2=0 \\ x^2 = \dfrac{y+2}{4} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \text{ ou } y = \dfrac{7}{4} \\ x^2 = \dfrac{y+2}{4} \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ e } y = -2 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4} \text{ e } y = \dfrac{7}{4} \\ x = \dfrac{\sqrt{15}}{4} \text{ e } y = \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Portanto, a resposta será $\dfrac{\sqrt{15}}{4} - \left(-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

17. E

Temos:

$F_1\ (-c,\ 0);\ F_2(c,\ 0)$ e $P(x,\ y)$

Logo:

$$\overline{PF_1} = (x+c, y) \text{ e } \overline{PF_2} = (x-c, y)$$

O produto escalar das distâncias $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2}$ é obtido por:

$$\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = (x+c)\cdot(x-c) + y \cdot y$$

$$\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = x^2 + xc - xc - c^2 + y^2$$

$$\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = x^2 - c^2 + y^2$$

Da equação da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, temos:

$$\frac{x^2b^2 + y^2a^2}{a^2b^2} = 1 \rightarrow y^2a^2 = a^2b^2 - x^2b^2 \rightarrow$$

$$y^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2} \quad \text{(I)}$$

Por meio da elipse, aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{(II)}$$

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow c = e \cdot a \quad \text{(III)}$$

De (II) e (III), temos:

$$a^2 = b^2 + e^2a^2$$

$$b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2)$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \quad \text{(IV)}$$

Juntando as equações (I) e (IV), encontramos:

$$y^2\ (1-e^2)\cdot(a^2 - x^2)$$

$$y^2 = a^2 - x^2 - e^2a^2 + e^2x^2 \quad \text{(V)}$$

Substituindo (III) e (V) em $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = x^2 - c^2 + y^2$, obtemos:

$$\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = x^2 - e^2a^2 + a^2 - x^2 - e^2a^2 + e^2x^2$$

$$\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = a^2 - 2e^2a^2 + e^2x^2$$

$$\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = e^2x^2 + a^2(1 - 2e^2)$$

Portanto, $\overline{PF_1} \cdot \overline{PF_2} = e^2x^2 + a^2(1 - 2e^2)$.

Estudo para o Enem

18. C

Sendo:

Perímetro = 300 m

Área = 5 000 m²

Temos:

$2(x + y) = 300 \rightarrow x + y = 150$

$x \cdot y = 5\,000$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$x = 50$ e $y = 100$

ou

$x = 100$ e $y = 50$

No entanto, sendo $x > y$. Logo, $x = 100$ e $y = 50$.

Assim, utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(OF_2\right)^2 \rightarrow 50^2 = 25^2 + \left(OF_2\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow OF_2 = \sqrt{25^2 \cdot 3} = 25\sqrt{3}$$

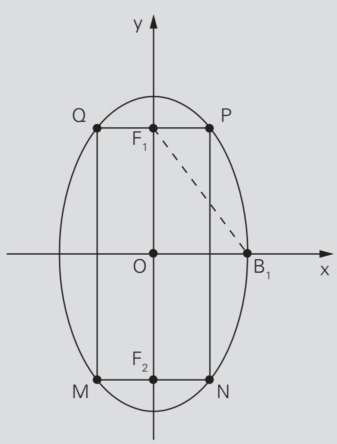
Logo, seu resultado será $20F_2 = 2 \cdot 25\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$.

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

19. E

Segundo a ilustração, temos:



F_1 e F_2 são os focos da elipse.

Necessitamos calcular $\overline{F_1F_2} = 2 \cdot OF_1$.

Compreendendo que $\overline{F_1F_2}^2 = 60^2$ e $\overline{OB_1}^2 = 36^2$ obtidos pela relação fundamental, temos:

$$\overline{F_1F_2}^2 = \overline{OB_1}^2 + \overline{OF_1}^2 \rightarrow \overline{OF_1}^2 \rightarrow = 60^2 - 36^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{OF_1}^2 = 2304 \rightarrow \overline{OF_1} = 48$$

Ou seja, 48 m.

Logo:

$$2 \cdot \overline{OF_1} = 2 \cdot 48 \rightarrow \overline{OF_1} = 96$$

Portanto, a distância entre as retas MN e PQ é de 96 m.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

20. C

Verificando que $a > b$, constatamos que o eixo maior da elipse está sobre o eixo x.

Como a excentricidade da elipse é igual 0,96, temos:

$$0{,}96 = \frac{c}{a} \leftrightarrow c = 0{,}96 \cdot a.$$

c = distância focal

A distância mínima desse cometa ao Sol corresponde a 0,58 u.a.

Logo:

$a - c = 0{,}58.$

$a - 0{,}96a = 0{,}58 \rightarrow 0{,}04\ a = 0{,}58$ u.a. $\rightarrow$
$\rightarrow a = 14{,}5$ u.a.

Portanto, a distância máxima do cometa ao Sol é obtida por:

$a + c = 1{,}96\ a = 1{,}96 \cdot 14{,}5 \cdot 150 \cdot 10^6$ km $=$
$= 4\,263 \cdot 10^6$ km

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

55 CÔNICAS - HIPÉRBOLE

Comentários sobre o módulo

Neste módulo continuamos os estudos das cônicas, sendo a hipérbole a segunda das três cônicas a ser trabalhada. Vimos os elementos constituintes de uma hipérbole; além disso, foi apresentada a demonstração matemática da equação da hipérbole, sendo abordados a relação fundamental e o significado da excentricidade de uma hipérbole.

Para ir além

- Material que aborda atividades diversas para o ensino da cônica hipérbole.

  http://repositorio.ufla.br/bitstream/1/880/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O%20Abordagem%20e%20atividades%20para%20a%20c%C3%B4nica%20hip%C3%A9rbole.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

- Breve relato sobre a Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida.

  https://catedral.org.br/historia

  Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. D

Completando os quadrados da equação a seguir, obtemos:

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

Logo, trata-se de uma circunferência com centro (1, 2).

8. a) Sim, pois ter assíntotas perpendiculares entre si é justamente a definição de hipérbole equilátera.

b) Não, pois, ao reescrever a equação, obtemos:

$2x^2 - 4x + 2 + y^2 - 4y + 4 = 2 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{2(x-1)^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$

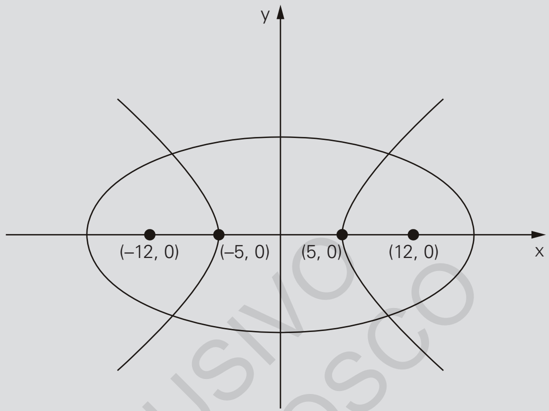
Notamos que o semieixo maior é $a = \sqrt{2}$ e o semieixo menor é $b = 1$, sendo o centro da elipse o ponto (1, 2).

Sabendo que $a^2 = b^2 + c^2$, então $c = 1$.

Logo, os focos da elipse serão (1, 3) e (1, 1).

9. Soma: 02 + 04 + 08 + 16 = 30

Representando graficamente o descrito no texto, temos:



Elipse (excentricidade $0 < e < 1$)

$e = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{12}{a} = 0{,}8 \rightarrow a = 15$ (semieixo maior)

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 15^2 - 12^2 = 8 \rightarrow b = 9$ (semieixo menor)

$\frac{12}{a} = 2{,}4 \rightarrow a = 5$ (semieixo real)

Logo, podemos concluir que:

01. Falsa, pois a cônica que possui excentricidade entre 0 e 1 é a elipse.

02. Verdadeira, pois (5, 0) é um dos vértices da elipse, conforme gráfico.

04. Verdadeira, conforme gráfico.

08. Verdadeira, pois

$$\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{9^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1$$

16. Verdadeira, pois o semieixo menor da elipse mede 9.

10. E

Completando os quadrados, obtemos

$9x^2 - y^2 = 36x + 8y - 11$

$9x^2 - 36x + 36 - y^2 - 8y - 16 = +36 - 16 - 11$

$9(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 8y + 16) = 9$

$9\ (x - 2)^2 - (y + 4)^2 = 9$

$$\frac{9(x-2)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(y+4)^2}{3} = 1$$

Logo, trata-se de uma hipérbole.

11. a) Sim, pois, completando os quadrados, obtemos:

$x^2 + ay^2 + 2x - 2ay = 0$

$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1 + 1 \rightarrow$

$\rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

Logo, para $a = 1$, a equação representa uma circunferência.

b) Para $a = 0$, temos:

$x^2 + ay^2 + 2x - 2ay = 0$

$x^2 + 0 \cdot y^2 + 2x - 2 \cdot 0 \cdot y = 0 \rightarrow x^2 + 2x = 0$ $(x = 0$ e $x = -2)$, assim a equação representa duas retas.

c) Para $a = 3$, temos:

$x^2 + ay^2 + 2x - 2ay = 0$

$x^2 + 3y^2 + 2x - 2 \cdot 3y = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 3y^2 - - 6y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{\frac{4}{3}} = 1$ representa uma elipse, não uma hipérbole.

d) Para $a = -2$, temos:

$\dfrac{(y-1)^2}{\frac{1}{2}} - \dfrac{(x+1)^2}{1} = 1$, logo, uma hipérbole.

e) Para $a = -1$, temos:

$x^2 + ay^2 + 2x - 2ay = 0$

$x^2 + (-1y^2) + 2x - 2(-1y) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 2x - y^2 + 2y = 0$

Completando os quadrados, obtemos:

$x^2 + 2x + 1 - y^2 + 2y - 1 = 1 - 1 \rightarrow$

$\rightarrow (x + 1)^2 - (y - 1)^2 = 0$

Logo, duas retas $(y = -x$ e $y = x + 2)$.

12. B

I. Verdadeira, pois, resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} 9x^2 + 4x = 36 \\ x - 4y = 4 \end{cases} \rightarrow (-2, 0) \text{ e } (2, 0)$$

$x^2 - 4y = 4 \rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{4y^2}{4} = \dfrac{4}{4} \rightarrow \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = 2.$

Logo, os pontos são $A_1(-2, 0)$ e $A_2(2, 0)$.

II. Falsa

$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \rightarrow a^2 = 9$ e $b^2 = 4 \rightarrow A_1A_2$ está contido no seguimento Oy e B_1B_2 está contido no seguimento Ox.

$\dfrac{x^2}{4} - y = 1 \rightarrow a^2 = 4$ e $b^2 = 1 \rightarrow A'_1A'_2$ está contido no seguimento Ox.

Portanto, A_1A_2 e $A'_1A'_2$ são perpendiculares entre si.

13. Soma: 02 + 04 + 08 = 14

01. Falsa, pois a elipse é o conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos chamados focos é uma constante positiva; essa soma deve ser maior que a distância entre os focos.

02. Verdadeira, pois $4x^2 - 9y^2 - 25 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = 1$

Essa é a forma canônica da equação de uma hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo das abscissas.

04. Verdadeira, pois, se $a = 3$ e $c = 1$, então $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 3^2 = b^2 + 1^2 \rightarrow b^2 = 8$.

Logo, a equação da elipse será: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1.$

08. Verdadeira, pois, se $a^2 = 49$, $a = 7$. Sendo assim, a elipse possui eixo focal de extremidades $(-7, 0)$ e $(7, 0)$.

14. Soma: 01 + 04 + 16 = 21

01. Verdadeira, pois, se $c^2 = 225 + 400$, vem que $c = 25$.

Assim, $d = 2 \cdot 25 + 10 = 60$ m.

02. Falsa, pois, sendo $c^2 = 25 - 4 \rightarrow c = \sqrt{21}$.

Logo, a excentricidade corresponde a $\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

04. Verdadeira, pois, se $A^{-1} = A^1$, então:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, para que ocorra a igualdade, deve-se ter $k = 0$.

08. Falsa. Uma vez que a ordem de A é 2×3 e a ordem de B^t é 3×2, temos a matriz $A \cdot B^t$. Logo, seu determinante existe, pois se trata de uma matriz quadrada 2×2.

16. Verdadeira. Supondo a, b, c respectivamente, os preços de um sapato, de uma calça e de uma camisa, temos: $a + b + c = 280$.

Montando o sistema:

$$\begin{cases} a+2b+c=520 \\ a+3b+5z=760 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+2b+3c=520 \\ (a+2b+3c)+b+2c=760 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow a+b+c+(b+2c)=520,$$

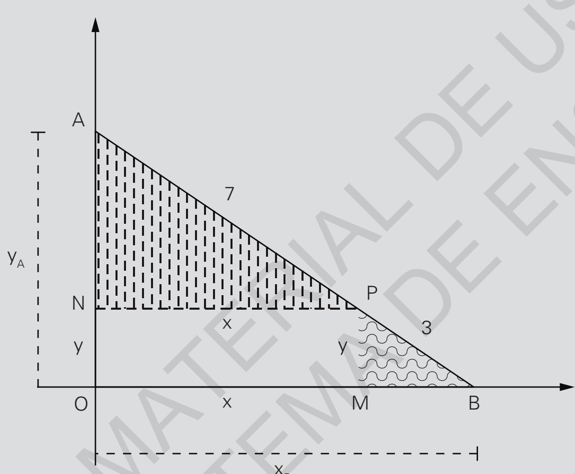
como: $a + b + c = 280$, temos:

$$a+b+c+(b+2c)=520 \rightarrow 280+(b+2c)=540 \rightarrow$$

$$\rightarrow (b+2c)=540-280 \rightarrow b+2c=240.$$

15. C

De acordo com o enunciado, temos o seguinte gráfico:



Como os triângulos ANP e AOB são semelhantes, temos:

$$\frac{x}{x_B}=\frac{7}{10} \rightarrow x_B=\frac{10x}{7}$$

$$\frac{y}{y_A}=\frac{3}{10} \rightarrow y_A=\frac{10x}{3}$$

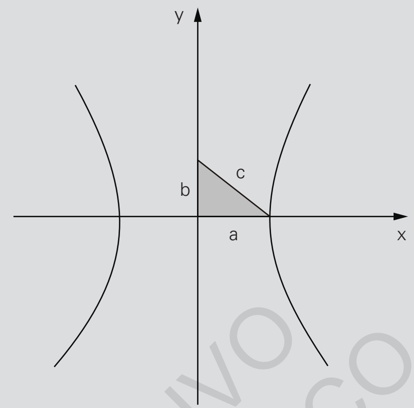
Assim,

$$x_B^2 + y_A^2 = 10^2 \rightarrow \left(\frac{10x}{7}\right)^2+\left(\frac{10y}{3}\right)^2=10^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x}{49}+\frac{y}{9}=1 \rightarrow 9x^2 + 49y^2 - 441 = 0$$

16. A

De acordo com o enunciado, temos o seguinte gráfico:



$$e=\frac{c}{a} \rightarrow \sqrt{2}=\frac{c}{a} \rightarrow c = a\sqrt{2} \quad \text{(I)}$$

$c^2 = a^2 + b^2$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 2a - a = b \rightarrow a = b \rightarrow a = b$$

Assim, a equação da hipérbole será:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b}=1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \rightarrow x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{(III)}$$

Substituindo o ponto $(\sqrt{5}, 1)$ em (III), obtemos:

$$\sqrt{5}^2 - 1 = a \rightarrow 5 - 1 = a^2 \rightarrow a^2 = 4$$

A equação da hipérbole será:

$x^2 - y^2 = 4$

A equação da reta pedida é da forma $y = 2x + k$, já que é paralela à reta $y = 2x$.

Portanto, resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ y=2x+k \end{cases} \rightarrow 3x^2+4kx+k^2-4=0$$

Como a reta é tangente à circunferência, o discriminante da equação deve ser igual a zero.

$$(4k)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (k^2 - 4) = 0$$

$$16k^2 - 12k^2 - 48 = 0$$

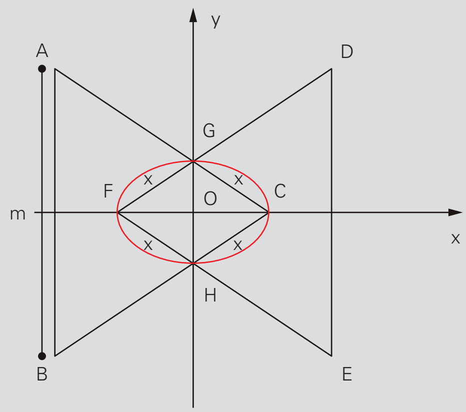
$$k = +2\sqrt{3} \text{ ou } -2\sqrt{3}$$

Considerando $k > 0$, temos:

$$y = 2x + k \rightarrow y = 2x + 2\sqrt{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 6$$

17. Conforme o gráfico, temos:



$$A_{\Delta GFH} + A_{POLIG \cdot ABHFG} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$$

Logo:

$$\frac{2x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{4x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow 6x^2\sqrt{3} = m^2\sqrt{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{m}{\sqrt{6}}$$

$$\text{Logo, } GO = \frac{m}{2\sqrt{6}} \text{ e } FO = \frac{m}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{2\sqrt{2}}$$

Assim, temos:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{m}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{m}{2\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

Desenvolvendo a equação, obtemos:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{m}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{m}{2\sqrt{6}}\right)^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{m^2}{8}} + \frac{y^2}{\frac{m^2}{24}} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{8x^2}{m^2} + \frac{24y^2}{m^2} = 1 \rightarrow 8x^2 + 24y^2 = m^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8x^2 + 24y^2 - m^2 = 0$$

Estudo para o Enem

18. D

Como a linha tracejada intersecta o eixo das ordenadas no ponto A e x = 0, calculamos a ordenada do ponto A.

$$y_A = 1 + \frac{0^2}{4} = 1$$

Já o ponto B possui abscissa igual a 4 e sua ordenada será:

$$y_B = 1 + \frac{4^2}{4} = 5$$

Com as coordenadas dos pontos A e B, obtemos o coeficiente angular da reta que passa por eles.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{4-0} = \frac{4}{4} = 1$$

E obtemos a equação da reta:

$y = mx + 1 \rightarrow y = 1 \cdot x + 1 \rightarrow y = x + 1$

Calculando as ordenadas para x = 6 nas duas funções, obtemos dy:

$$dy = \left(1 + \frac{6^2}{4}\right) - (6 + 1) = 10 - 7 = 3$$

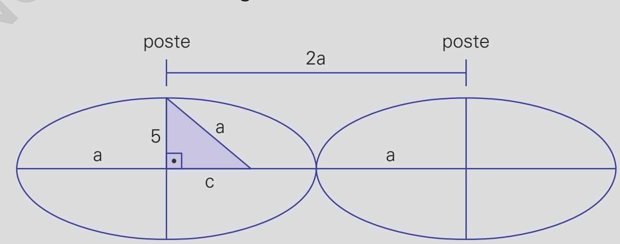
Logo, dy = 3.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

19. B

Observando a figura do enunciado, temos:



Sendo e = 0,943, temos:

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow 0{,}943 = \frac{c}{a} \rightarrow c = 0{,}943 \cdot a$$

Substituindo o valor de c e usando o teorema de Pitágoras, obteremos:

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 5^2 + c^2 \rightarrow$

$\rightarrow a^2 = 25 + (0{,}943a)^2 \rightarrow a^2 = 25 + 0{,}889a^2 \rightarrow$

$\rightarrow 0{,}111a^2 = 25 \rightarrow \sqrt{0{,}111}a = \sqrt{25} \rightarrow$

$\rightarrow 0{,}333a = 5 \rightarrow \frac{1}{3}a = 5 \rightarrow a = 15.$

A distância será 2 · a, logo:

2 · a = 2 · 15 = 30 m.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

20. E

A alternativa E demonstra a equação canônica da elipse e da hipérbole, respectivamente.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

56 CÔNICAS – PARÁBOLA

Comentários sobre o módulo

Neste módulo continuamos os estudos das cônicas, sendo a parábola a última das três a ser trabalhada. Vimos os elementos constituintes dela; além disso, foi apresentada a demonstração matemática da equação da parábola, sendo abordados a relação fundamental e os significados de cada elemento.

Para ir além

- "Parábolas – As curvas preciosas"

  Artigo que aborda de maneira bem completa o ensino das parábolas e traz diferentes objetos educacionais para a assimilação dos conceitos.

  http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/673-4.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

- "A parábola"

  Artigo que aborda diferentes práticas educacionais para a aprendizagem dos conceitos sobre parábola em Geometria analítica.

  http://professor.luzerna.ifc.edu.br/daniel-ecco/wp-content/uploads/sites/42/2017/10/Aula-5-Geo.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

- "De parabólicas ligadas"

  Artigo que traz o contexto histórico do uso de antenas parabólicas.

  https://super.abril.com.br/tecnologia/de-parbolicas-ligadas/

  Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. Resolvendo um sistema de equações com as funções, determinamos os pontos de interseção de seus gráficos:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 4 \\ y = 2x \end{cases} \rightarrow x^2 - 3x + 4 = 2x \rightarrow$$

$\rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = 1$ ou $x = 4$

Para $x = 1 \rightarrow y = 2 \cdot 1 = 2$

Para $x = 4 \rightarrow y = 2 \cdot 4 = 8$

Logo, os pontos de interseção são (1, 2) e (4, 8).

8. V – F – F – F – V

Solucionando o sistema composto pelas equações das parábolas, teremos:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 8x - 13 \\ y = x^2 - 4x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ e } y -6 \\ x = 5 \text{ e } y = 2 \end{cases}$$

Sendo assim, os pontos de interseção das parábolas são (1, −6) e (5, 2).

Já a equação da reta será:

$$y - 2 = \frac{-6-2}{1-5} \cdot (x - 5) \rightarrow y = 2x - 8 \neq 2x - 6$$

E, completando o quadrado, teremos:

$$y_A = -x^2 + 8x - 13 = -(x-4)^2 + 3$$

Logo, o vértice da parábola A é o ponto (4, 3) ≠ (4, 2).

Completando o quadrado da segunda parábola, temos:

$$y_B = x^2 - 4x - 3 = (x-2)^2 - 7$$

Portanto, o vértice da parábola B é o ponto (2, − 7).

A distância entre os vértices das parábolas A e B é obtida por:

$$\sqrt{(4-2)^2 + [3-(-7)]^2} = \sqrt{104} \neq \sqrt{102}$$

A parábola B intersecta o eixo das ordenadas no ponto em que $x = 0$.

Logo, (0, −3).

9. V – F – V – V – F

Se a reta r_m percorre o ponto (0, 1) e tem declividade m, logo sua equação é obtida por: $y - 1 = m \cdot (x - 0) \rightarrow y = mx + 1$.

A reta r_m intersecta a parábola em um único ponto se a equação $x^2 - mx + 4 = 0$ tem apenas uma única raiz real, logo $(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \rightarrow m^2 = 16 \rightarrow m = \pm 4$.

A reta r_m não intersecta a parábola se, e apenas se, a equação $x^2 - mx + 4 = 0$ não tiver solução real; sendo assim, $(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0 \rightarrow m^2 < 16 \rightarrow -4 < m < 4$.

A reta r_m intersecta a parábola em dois pontos únicos se, e apenas se, a equação $x^2 - mx + 4 = 0$ tiver duas raízes reais. Logo, $\Delta > 0$.

$$(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 > 0 \rightarrow m^2 > 16 \rightarrow m < -4 \text{ ou } m > 4$$

10. C

Analisando cada alternativa, temos:

I. Verdadeira, pois $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Considerando os focos (c, 0) e (− c, 0), vamos ter:

$a = 4$ e $c = 3$

$b^2+3^2=42^2 \rightarrow\ b^2=16-9=7\rightarrow\ b=\sqrt{7}$

Sendo assim, a equação da elipse será:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$$

II. Verdadeira, pois $c=10\rightarrow\frac{5}{3}=\frac{10}{a}\rightarrow a=6$

$10^2 = 6^2 + b^2 \rightarrow b = 8$

Logo, a equação da hipérbole será obtida por:

$$\frac{x^2}{6^2}-\frac{y^2}{8^2}=1\rightarrow 16x^2-9y^2=576$$

III. Falsa, pois $8x = -y^2 + 6y - 9$

$$x=-\frac{(y-3)^2}{8}$$

Assim, o vértice corresponde ao ponto (0, 3).

11. Soma: 02 + 04 + 16 = 22

01. Falso.

$y^2 = px = 2x \rightarrow p = 1$

$F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)\rightarrow F\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

02. Verdadeiro.

$a = 1;\ b=\frac{1}{2}$

$12=\left(\frac{1}{2}\right)^2+c^2\rightarrow c\ =\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\rightarrow\frac{x^2}{1^2}\ +\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1\rightarrow x^2+4y^2=1$$

04. Verdadeiro.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\rightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\ \rightarrow a = 5;\ b = 4$$

$5^2 = 4^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 25 - 16 \rightarrow c^2 = 9 \rightarrow c = 3 \rightarrow$
$\rightarrow F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$

08. Falso. Observando a equação fornecida da hipérbole, entende-se que seus focos estão sobre o eixo x.

16. Verdadeiro.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\rightarrow\frac{x^2}{25}\ +\frac{y^2}{4}=1\ \rightarrow a = 5;\ b = 2$$

$5^2=2^2+c^2\rightarrow c^2=25-4\rightarrow c^2=21\rightarrow c=\sqrt{21}$

$$e=\frac{c}{a}\ =\frac{\sqrt{21}}{5}$$

12. Temos:

$V = (-2, 2)$ e $p = 2$.

Logo, a equação da parábola será:

$(y-2)^2 = 2\cdot 2(x-(-2)) \rightarrow (y - 2)^2 = 4(x + 2)$

Para $x = -1$, obtemos:

$(y-2)^2=4(-1+2)\rightarrow\ y-2=\pm\sqrt{4}$

$y' = 2 + 2\ \rightarrow y' = 4$

$y'' = -2 + 2 \rightarrow y'' = 0$

Sendo assim, (− 1, 0) e (− 1, 4) são pontos da parábola.

Para $y_p > 0$, temos:

$(y_p-2)^2=4(0+2)\rightarrow\ y_p-2=\sqrt{8}\rightarrow\ y_p=\ 2\left(1+\sqrt{2}\right)$

13. E

Sendo t a reta tangente à parábola de equação $x = 3y^2$.

t: $y = mx + n$, sendo o ponto $A(-3, 0)$ parte da reta t. Entendemos que:

$n = 3m$ é a equação da reta t, que passa a ser representada por $y = mx + 3m$

Trocando $y = mx + 3m$ na equação da parábola, teremos:

$x = 3\cdot(mx + 3m)^2$

$x = 3\cdot(m^2x^2 + 6m^2x + 9m^2)$

$x = 3m^2x^2 + 18m^2 + 27m^2$

$3m^2x^2 + 18m^2x - x + 27m^2 = 0$

$3m^2x^2 + (18m^2 - 1)x + 27m^2 = 0$

Para que a reta seja tangente à parábola, o discriminante (Δ) deve ser igual a zero.

$\Delta = 0$

$(18m^2-1)^2-4\cdot(3m^2)\cdot(27m^2)=0$

$324m^4 - 36m^2 + 1 - 324m^4 = 0$

$-36m^2 + 1 = 0 \rightarrow m = \frac{1}{6}$ ou $m = -\frac{1}{6}$.

Se $m = \frac{1}{6}$, teremos: $x - 6y + 3 = 0$

Se $m = -\frac{1}{6}$, teremos: $x + 6y + 3 = 0$

Com $m = -\frac{1}{6}$, teremos:

$x^2 - 6x - 9 = 0, x = 3$ e $y = -1$

Logo, P(3, −1).

14. B

Resolvendo um sistema com as equações da parábola e da circunferência, obtemos

$$\begin{cases} y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ x^2 - 4x + y^2 - 4y = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ x^2 - 4x + \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{x^2}{4}\right) \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 64x = 0$$

Com a equação anterior, por fatoração, temos:

$x^4 - 64x = 0 \rightarrow x \cdot (x^3 - 64) = 0$

Logo, suas soluções reais são x = 0 e x = 4.

Sendo assim, seus resultados reais serão: x = 0 ou x = 4.

$x^2 = 0 \rightarrow y = \frac{0^2}{4} \rightarrow y = 0$

$X^2 = 4 \rightarrow y = \frac{4^2}{4} \rightarrow y = 4$

Sendo assim, o ponto P será P(4, 4).

Encontrando, agora, o coeficiente angular da reta PC, teremos:

$m_{PC} = \frac{4-2}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$

Como a reta s é perpendicular a PC, concluímos que $m_s = -1$.

Portanto, a equação da reta s será obtida por:

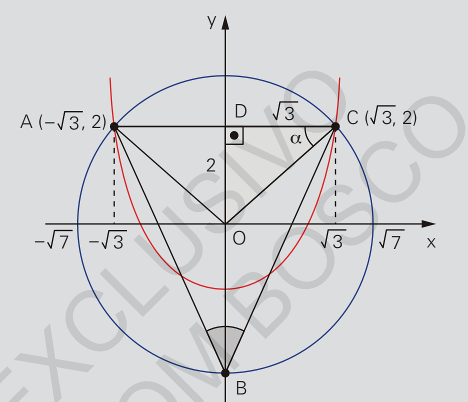
$y - 4 = -1 \cdot (x - 4) \rightarrow y = -x + 8$

15. Os pontos A e C são obtidos através da resolução do sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \text{ e } y = 2 \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{3} \text{ e } y = 2 \end{cases}$$

Logo, os pontos A e C são:

$A(\sqrt{3}, 2)$ e $C(-\sqrt{3}, 2)$, representados na figura a seguir.



Observando o triângulo CDO:

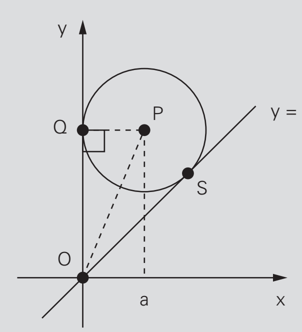
$\text{tg}\ \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 49° \rightarrow C\hat{O}D = 41° \rightarrow$

$A\hat{O}C = 82°$

$A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{82°}{2} = 41°$ (ângulo inscrito)

16. B

Observando a ilustração, em que PQ = a e $OQ = b = a^2$:



Compreendendo que y = x é bissetriz dos quadrantes ímpares e OP é bissetriz de SÔQ, teremos PÔQ = 22°30'. Ainda do triângulo OPQ, obtemos:

$\text{tg}\ P\hat{O}Q = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{a^2}{a} = a \rightarrow a = \text{cotg}\ 22°30'$.

Desenvolvendo a cotangente do ângulo, obtemos:

$$\text{cotg } 22°30' = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{1-\cos 45°}} = \sqrt{2} + 1$$

Contudo, $a = \sqrt{2} + 1$.

Assim, $b = a^2 = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$.

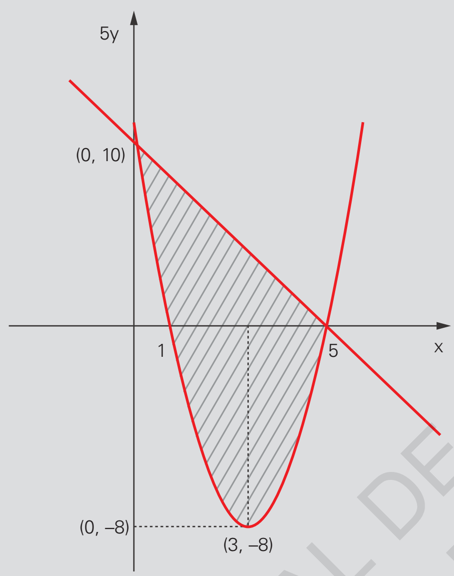
17. A

Vamos ter duas regiões para considerar.

$5y \geq 2x^2 - 12x + 10$ (parábola)

$5y \leq 10 - 2x$ (reta)

A região que atende as duas inequações ao mesmo tempo está demonstrada no gráfico a seguir.



Sendo assim, $-8 \leq 5x \leq 10 \rightarrow -1{,}6 \leq y \leq 2$.

Já o resultado do produto entre os valores máximo e mínimo de y será: $(-1{,}6) \cdot (2) = -3{,}2$.

Estudo para o Enem

18. B

Temos r como o raio da bola.

A equação da circunferência de centro (0, 3) tangente à parábola $y = x^2$ é obtida por:

$$x^2 + (y-3)^2 = r^2 \rightarrow x^2 + \left(x^2-3\right)^2 = r^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + x^4 - 6x^2 + 9 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^4 - 5x^2 + 9 - r^2 = 0$$

Resolvendo a equação biquadrada, com $x^2 = t$, teremos

$t^2 - 5t + 9 - r^2 = 0$. Como o discriminante da equação deve ser igual a zero, temos:

$$\Delta = 0 \rightarrow (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9 - r^2) = 0 \rightarrow r^2 = \frac{11}{4} \rightarrow r = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Competência: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

19. E

Temos:

Circunferência: $x^2 + y^2 = 9$, com centro no ponto (0, 0) e raio 3.

Parábola: $y = -x^2 - 1$, com x mudando de -1 a 1, concavidade definida para baixo e vértice no ponto $(0, -1)$.

Sendo assim, as funções correspondem à alternativa E.

Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

20. A

De acordo com o enunciado, temos:

O raio de luz refletido no ponto (1, 1) tem a direção da reta $4y - 3x = 1$. Já o raio refletido no ponto (2, 4) tem a direção da reta $8y - 15x = 2$. Dessa forma, o ponto procurado da solução do sistema é:

$$\begin{cases} 4y - 3x = 1 \\ 8y - 15x = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8y - 6x = 2 \\ 8y - 15x = 2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8y - 6x = 2 \\ 0 + 9x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8y - 6x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Substituindo o valor de x na equação $4y - 3x = 1$, temos:

$4y - 3 \cdot 0 = 1 \rightarrow 4y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{4}$. Logo, $x = 0$ e $y = \frac{1}{4}$.

Sendo assim, o ponto em que os raios de luz verticais refletidos se encontrarão é $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

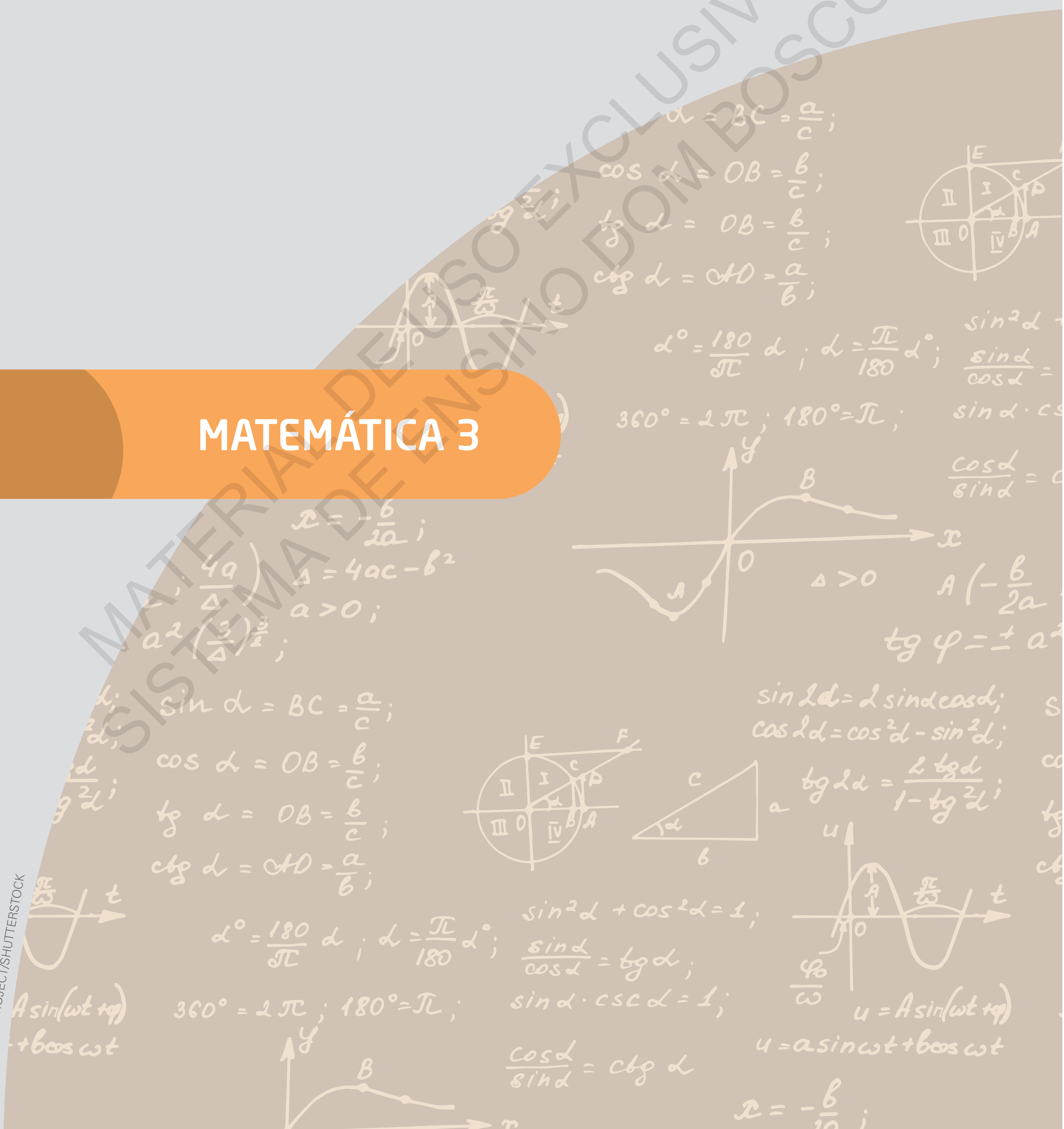
Competência: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

MATERIAL DO PROFESSOR

RESPOSTAS E COMENTÁRIOS

MATEMÁTICA 3



DR PROJECT/SHUTTERSTOCK

23 INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE I

Comentário sobre o módulo

Professor, neste módulo, abordamos os conceitos de probabilidade e os significados de evento aleatório, espaço amostral e evento. Também trabalhamos a diferença entre probabilidade estatística e probabilidade teórica, além de calcularmos a probabilidade de um evento simples.

Para ir além

- O artigo "O desenvolvimento da probabilidade e estatística" aborda o conceito histórico da probabilidade. Disponível em:

  https://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

- O artigo "O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e na formação de professores" trata da relevância e dos objetivos para se ensinar e aprender estatística e probabilidade na Educação Básica. Disponível em:

  http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v28n74/v28n74a05.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. A

No conjunto {1, 2, 3, 4, ..., 98, 99, 100}, existem os quadrados perfeitos 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

Portanto, sendo P a probabilidade pedida, temos:

$P = \frac{10}{100}$

$P = \frac{1}{10}$.

8. B

Das cartas, temos apenas três com números superiores a 1:

$\frac{99}{100}$ $\boxed{0{,}99}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\boxed{1{,}1}$
$2\cos 60°$ $\boxed{1}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\boxed{0{,}57}$
π $\boxed{3{,}14}$	log 13 $\boxed{\begin{array}{l}\log 13 > \log 10\\ \log 13 > 1\end{array}}$
$-\frac{5}{3}$ $\boxed{\text{negativo}}$	$\frac{3}{5}$ $\boxed{0{,}6}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{0{,}7}$	$\lvert\cos 180°\rvert$ $\boxed{1}$

Portanto, a probabilidade solicitada é $p = \frac{3}{10}$.

9. B

A palavra "servo" no poema pode ser alternada por cativo ou prisioneiro. Assim, a probabilidade solicitada é $P = \frac{2}{5}$

10. Acham-se 50 números entre 101 e 150. Deles, 2 são quadrados perfeitos (121 e 144). Os outros 11 são divisíveis por 4 (104, 108, 112, 116, 120, 124, 128, 132, 136, 140 e 148).

Separados os elementos do evento pedido, temos:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{13}{50} = 0{,}24$

Logo, P(A) = 24%

11. A

Sejam p (gols do time perdedor) e g (gols do time vencedor). O número de casos prováveis representa o número de permutações de cinco objetos, nem todos distintos, com duas e três repetições. Isto é:

$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$

Desse modo, como há apenas um caso favorável, a resposta é:

$\frac{1}{10} \cdot 100\% = 10\%$

12. B

$n(U) = P_{10}^{4} = \frac{10!}{4!}$ corresponde ao número de anagramas possíveis. Assim:

$n(EEEE) = P_7 = 7!$

Logo, a probabilidade solicitada é:

$$P(EEEE)=\frac{n(U)}{n(E)}=\frac{7!}{\frac{10!}{4!}}=\frac{7!\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}=\frac{1}{30}$$

13. D

Os poliedros de Platão são tetraedro regular; hexaedro regular (cubo); octaedro regular; dodecaedro regular; e icosaedro regular.

O tetraedro regular contém 4 vértices, 4 faces e 6 arestas.

O hexaedro regular contém 8 vértices, 6 faces e 12 arestas.

O octaedro regular contém 6 vértices, 8 faces e 12 arestas.

O dodecaedro contém 20 vértices, 12 faces e 30 arestas.

O icosaedro regular contém 12 vértices, 20 faces e 30 arestas.

Compreendendo a informação, temos:

- Total de vértices (V) = 4 + 8 + 6 + 20 + 12 = 50.
- Total de faces (F) = 4 + 6 + 8 + 12 + 20 = 50.
- Total de arestas (A) = 6 + 12 + 12 + 30 + 30 = 90.

Assim, serão necessários 50 + 50 + 90 = 190 números. Destes, 50 serão utilizados para os vértices.

Portanto, a probabilidade p(V) de sortear um vértice é:

$$p(V)=\frac{50}{190}$$

$$p(V)=\frac{5}{19}$$

14. Sabe-se que a quantidade de resultados executáveis do lançamento do dado duas vezes é 6 · 6 = = 36. Para que a equação tenha ao menos uma raiz, é preciso que seu discriminante seja maior que ou igual a zero. Ou seja:

$$\Delta \geq 0 \;\rightarrow\; 16 - 4ac \geq 0 \rightarrow ac \leq 4$$

Portanto, os resultados favoráveis são (1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (3, 1) e (4, 1).

Desse modo, a probabilidade solicitada é $P=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$.

15. B

Sejam x (a quantidade de cédulas de 20 reais), y (a quantidade de cédulas de 50 reais) e n (o número total de cédulas), isto é, n = x + y. Assim, para um saque de 400 reais, temos:

$$\begin{cases} 20x+50y=400 \\ n=x+y \\ 0\leq x\leq 20 \\ 0\leq y\leq 8 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 5n=40+3x \\ 0\leq x\leq 20 \\ 0\leq y\leq 8 \end{cases}$$

Sendo 40 + 3x um múltiplo de 5, por análise vamos encontrar:

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(x,\ y)\ \in \mathbb{R}^2;(0,\ 8),\ (5,\ 6), \\ (10,\ 4),\ (15,\ 2),\ (20,\ 0)\end{Bmatrix}$$

Portanto, os únicos casos adequados são (5, 6) e (15, 2). Logo, a probabilidade solicitada é igual a $\frac{2}{5}$.

16. O número de elementos do espaço amostral é n(U) = 6 · 6 = 36.

Representando as situações em que o jogador fará oito ou mais pontos, temos:

(2, 2), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5) e (6, 6)

Logo, o número de elementos de o evento resultar em 8 ou mais pontos (A) é:

n(A) = 17

Com isso, podemos calcular a probabilidade pedida:

$$P(A)=\frac{17}{36}.$$

17. C

Sendo a (a quantidade de bolas amarelas), b (a quantidade de bolas brancas) e v (a quantidade de bolas vermelhas), do item I concluímos que $v = 2^a$.

No item II, observamos que a urna, que antes tinha um total de (v + b + a) bolas, passou a ter (v + b + a – 4) bolas. Assim, montamos a relação:

$$\frac{v}{a-4+b+v}=\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{2a}{3a+b-4}=\frac{1}{2} \rightarrow a=b-4$$

No item III, se forem retiradas as 12 bolas vermelhas, a urna ficará com:

(a + b + v – 12) bolas

Com isso, temos:

$$\frac{b}{a+b+v-12}=\frac{1}{2}$$

Substituindo a = b – 4 e v = 2a, temos:

$$\frac{b}{b-4+b+2(b-4)-12}=\frac{1}{2} \rightarrow b = 12$$

Estudo para o Enem

18. D

Possibilidades que concedem a vitória a José: {(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)}.

Possibilidades que concedem a vitória a Paulo: {(1, 3), (2, 2), (3, 1)}.

Possibilidades que concedem a vitória a Antônio: {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)}.

A resposta é José, já que há 6 possibilidades para criar sua soma. Antônio tem 5 possibilidades para criar sua soma. Paulo tem apenas 3 possibilidades para criar sua soma.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

19. E

A sensibilidade é obtida por $\frac{95}{95+5} \cdot 100\% = 95\%$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

20. D

Não opinaram: 21%.

Opinaram: 100% – 21% = 79%.

Entrevistados que classificaram o livro como chato: 12% dos 79% que opinaram. Assim, temos:

$P(\text{Chato}) = \frac{12\%}{79\%} = 0{,}152$

Portanto, $P(\text{Chato}) \cong 0{,}15$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

24 INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE II

Comentário sobre o módulo

Neste módulo abordamos as propriedades das probabilidades, com o estudo de eventos impossível e certo. Além disso, analisamos a probabilidade de determinado evento ocorrer e o cálculo da probabilidade de ocorrência de uma situação, com base na análise dos eventos que não podem acontecer na situação estudada, ou seja, por meio do evento complementar.

Para ir além

- Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade podem ser vistas neste artigo. Disponível em:

http://euler.mat.ufrgs.br/~viali/estatistica/mat2006/material/textos/Hist_Prob.pdf

Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. D

$n(U) = 6 \cdot 6 = 36$

Analisando os números complementares ao pedido, ou seja, os números cuja soma é menor ou igual a 4 e diferente de 3, temos:

$\bar{A}=\{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2)\} \rightarrow n(\bar{A}) = 4.$

Assim, a probabilidade pedida é:

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \dfrac{4}{36} = \dfrac{8}{9}$

8. E

O resultado solicitado é idêntico a $1,00 - (0,65 + 0,15) = 0,20$.

Portanto, P = 20%.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

9. C

Glorinha tem uma ficha cujo número pertence ao conjunto:

$U = \{2, 3, 5, 7, 11, 12, 14, 16, 20, 21, 23\}$

Logo, a probabilidade solicitada é:

$\dfrac{n(A)}{n(U)} = \dfrac{1}{11} \cdot 100\%$

Portanto, $P \cong 9\%$.

10. a) Temos:

$n(U) = C_{12,3} = \dfrac{12!}{(12-3)!3!} = 220$

$n(A) = 1$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)} = \dfrac{1}{220}$

Logo, a probabilidade de acerto é $\dfrac{1}{220}$.

b) Haverá combinação de 5 números de 3 em 3:

$C_{5,3} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$

Logo, serão 10 apostas de 3 números. Em decorrência, uma aposta em 5 números custaria $2 \cdot 10 =$ R$ 20,00.

11. A

Considerando as 2 mulheres, existem $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$ formas de selecionar o último membro do grupo. De outra maneira, é possível escolher 3 pessoas aleatórias de $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ modos.

A resposta solicitada é $\dfrac{3}{10}$.

12. Temos ao todo 10 formações possíveis para a sequência. Sendo (P) um aluno paranaense, (C) um aluno carioca e (A) um aluno alagoano:

PCPAPC

PCPACP

PCPCPA

PCPCAP

PCAPCP

PACPCP

PAPCPC

CPCPAP

CPAPCP

APCPCP

Para cada sequência possível, serão $3! \cdot 2 \cdot 1 = 12$ possibilidades. Assim, $12 \cdot 10 = 120$, ou seja, 120 filas possíveis.

Logo, a probabilidade solicitada é obtida por:

$$P = \frac{120}{6!} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$$

13. A

Há 4 formas de escolher um presidente, 3 de selecionar um tesoureiro e $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ de escolher 2 revisores. Assim, pelo princípio multiplicativo, a eleição terá:

$n(\cup) = 4 \cdot 3 \cdot 15 = 180$ resultados possíveis.

Vamos considerar P_1, P_2, P_3, P_4 os candidatos a presidente; T_1, T_2, T_3 os candidatos a tesoureiro; R_1, R_2,..., R_6 os candidatos a revisor. Acreditando que, sem perda de generalidade, o voto de determinado eleitor tenha sido (P_1, T_3, R_4), é fácil perceber que o número de casos favoráveis para esse voto é igual a 5, pois existem 6 revisores. Assim, a probabilidade solicitada é igual a $\frac{5}{180} = \frac{1}{36}$.

14. A

Diagonais que passam pelo centro do decágono:

$$d = \frac{10}{2} = 5.$$

Diagonais do dodecágono: $D = \frac{10 \cdot (10-3)}{2} = 35.$

Portanto, a probabilidade P(d) é:

$$P(d) = \frac{35-5}{35} = \frac{6}{7}$$

15. A

Se a probabilidade de pegar uma bola preta é idêntica nas duas urnas, então:

$$\frac{x}{x+20} = \frac{3x}{x+70} \rightarrow 3x^2 + 60x = x^2 + 70x \rightarrow$$
$$\rightarrow 3x + 60 = x + 70 \rightarrow x = 5$$

Assim:

$$P = \frac{5}{5+20} \cdot 100\%$$

Logo, $P = 20\%$

16. a) A soma dos volumes das 25 esferas representa 10% do volume do cubo:

$$V_{esfera} = 25 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = \frac{10}{100} \cdot a^3$$

$$V_{esfera} = 25 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 1^3 = \frac{10}{100} \cdot a^3$$

$a^3 = 1\,000\ cm^3$

$a = 10$ cm

b) Com base em um conjunto de 9 elementos, selecionamos um subconjunto com 7 elementos.

$$\binom{9}{7} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = 36$$

c) Observando que o corpo de jurados será composto de todas as mulheres, precisamos de 3 homens, selecionados entre os 5 homens do grupo. Assim, a probabilidade P pedida é obtida por:

$$P = \frac{\binom{5}{3}}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

17. C

Sendo o espaço amostral U e posicionando as 8 moedas em fila, obtemos:

$$n(U) = P_8^{4,4} \rightarrow n(U) = \frac{8!}{4! \cdot 4!}$$

Para o evento A ocorrer, posicionando-se as 8 moedas em fila, de modo que a primeira e a última sejam de 50 centavos:

$$n(A) = P_6^{2,4} \rightarrow n(A) = \frac{6!}{2! \cdot 4!}$$

Portanto, sendo P(A) a probabilidade de acontecer o evento A, temos:

$$P(A) = \frac{\frac{6!}{2! \cdot 4!}}{\frac{8!}{4! \cdot 4!}} \rightarrow P(A) = \frac{6!}{2! \cdot 4} \cdot \frac{4! \cdot 4!}{8!} \rightarrow$$

$$P(A) = \frac{6! \cdot 4!}{2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!} \rightarrow P(A) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 8 \cdot 7} \rightarrow$$

$$P(A) = \frac{3}{14}$$

Estudo para o Enem

18. C

Precisamos calcular a probabilidade relativa de a peça defeituosa pertencer à máquina (M), ou seja:

$$P(\text{Defeituosa}) = \frac{60}{120+60} = \frac{1}{3}$$

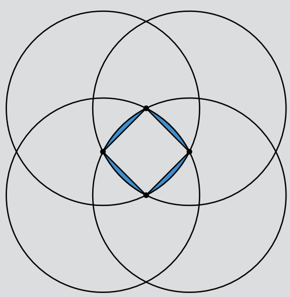
Logo, a probabilidade de a peça defeituosa escolhida ter sido produzida pela máquina M é de $\frac{1}{3}$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

19. D

Analise a figura.



João tem menos probabilidade de acertar a região ilustrada, e nela ele ganha 4 prêmios se acertar.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

20. A

O número total de assentos é igual a $(9 + 12 + 13) \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 220$. Contudo, o número de assentos em que o passageiro se sente desconfortável é:

$$(9 + 12 + 13) \cdot 2 = 68$$

Assim, a probabilidade de o passageiro ser sorteado com uma poltrona entre duas pessoas é equivalente a $\frac{68}{220} \cdot 100\% \cong 31\%$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

25 PROBABILIDADE

Comentário sobre o módulo

Neste módulo, continuamos os estudos sobre probabilidades. Abordamos o cálculo da probabilidade do evento união e a probabilidade de um espaço amostral não equiprovável, analisando as probabilidades isoladas de cada evento ocorrer.

Para ir além

- A dissertação *Probabilidade no ensino médio e suas aplicações no cotidiano* aborda a aprendizagem da probabilidade no Ensino Médio. O estudo foi motivado pelo baixo índice de rendimento escolar das escolas públicas do estado do Amapá em provas como Enem e OBMEP. Disponível em:

  http://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/PROBABILIDADE-NO-ENSINO-M%C3%89DIO-E-SUAS-APLICA%C3%87%C3%95ES-NO-COTIDIANO.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

- O trabalho de conclusão de curso *Propostas ao estudo da probabilidade no ensino médio* analisa diferentes estratégias de ensino do tema nesse segmento. Disponível em:

  http://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/1260.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. Evento A (a carta é uma dama):

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

Evento B (a carta é de copas): $P(B) = \frac{13}{52}$

Evento $A \cap B$ (a carta é uma dama de copas):

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

Evento $A \cup B$ (a carta ou é um rei ou é de ouros):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Logo:

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{16}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{13}$$

8. C

Há $P_4^3 = P_{4,3} = \frac{4!}{3} = 4$ maneiras de se conseguir exatamente 3 caras em 4 lançamentos.

No entanto, há somente duas maneiras de se obter 3 caras sucessivamente: CCCK e KCCC.

Assim, $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

9. A

O número de combinações possíveis é:

$$C_{20,3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140$$

Logo, a probabilidade de ocorrer a trinca apostada é:

$$P(4, 7, 18) = \frac{1}{1140}$$

Assim, o ganho é de

$$100\,000 \cdot \frac{1}{1\,140} = 87{,}72 \approx 88 \text{ reais.}$$

10. A

Número de provas possíveis: $n(U) = C_{10,5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!}$.

Número de provas possíveis com as 7 questões corretas: $C_{7,5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!}$.

Logo, a probabilidade é:

$$P = \frac{C_{7,5}}{C_{10,5}} = \frac{\frac{7!}{5! \cdot 2!}}{\frac{10!}{5! \cdot 5!}} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot \frac{5! \cdot 5!}{10!} = \frac{1}{12} = \frac{7}{84}$$

11. C

Para cada posição, há 5 possibilidades. Assim, pelo princípio multiplicativo, são geradas $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$ senhas. Então:

1ª posição: 5 possibilidades

2ª posição: 4 possibilidades

3ª posição: 4 possibilidades

4ª posição: 4 possibilidades

5ª posição: 4 possibilidades

$5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1\,280$ senhas seguras.

Assim, a probabilidade de o programa produzir uma senha insegura é:

$$P(A) = 1 - \frac{1280}{3125} = 1 - \frac{256}{625} = \frac{369}{625}$$

12. D

Temos que:

$$P = \frac{1}{17} = \frac{6}{102}$$

Assim, as duas novas doações devem ser de doadores do grupo AB. Contudo, a probabilidade é de:

$$\frac{C_{4,2}}{C_{100,2}} = \frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}}{\frac{100!}{2!\cdot 98!}} = \frac{1}{825}$$

13. a) $A_{12,6} = \frac{12!}{6!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

Logo, há 665 280 maneiras de montar o time.

b) Existem 3 formas de selecionar a posição do líbero; 2 de selecionar o levantador; 5 de selecionar a posição do levantador; e $A_{9,4} = \frac{9!}{5!} = 3\,024$ de posicionar os 4 jogadores restantes.

Logo, há $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 90\,720$ maneiras diferentes de iniciar a partida.

c) Temos que:

$n(U) = 665\,280$

$n(A) = 90\,720$

$$P = \frac{90\,720}{665\,280} = \frac{3}{22}$$

14. C

Quantidade de diagonais de um hexágono (d):

$$d = \frac{6 \cdot (6-3)}{2} = 9$$

Quantidade de maneiras de se selecionarem dois dos vértices do hexágono:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15$$

Assim, a probabilidade solicitada é obtida por:

$$P = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

15. a) Analisando os gráficos, temos:

- São Paulo: 24 pessoas entrevistadas.
- Santos: 20 pessoas entrevistadas.
- Total: 44 pessoas.
- A marca F foi selecionada por 5 pessoas em São Paulo e por 5 pessoas em Santos.
- A marca D foi selecionada apenas por 1 pessoa em São Paulo (nenhuma em Santos).

Portanto, ao todo, 11 pessoas selecionaram as marcas D ou F.

Contudo, a probabilidade de as pessoas terem selecionado a marca D ou F é:

$$P(D \text{ ou } F) = \frac{11}{44}$$

Logo, $P(D \text{ ou } F) = \frac{1}{4} = 25\%$.

b) Do enunciado, temos:

- O total de pessoas entrevistadas em Campinas é igual a 17.
- A marca F obteve 6 escolhas, e a marca C não teve nenhuma escolha.

Logo, as marcas A, B, D e E, juntas, somam 11 votos. Compreendendo que o mínimo de votos que cada uma dessas marcas recebeu foi 2 (pois nenhuma recebeu 1 voto, apenas), conclui-se que o máximo de votos que as marcas A, B, D e E receberam foi 5 votos. Portanto, as escolhas de distribuição são permutações das seguintes possibilidades:

- Possibilidade 1: 5 – 2 – 2 – 2.
- Possibilidade 2: 4 – 3 – 2 – 2.
- Possibilidade 3: 3 – 3 – 3 – 2.

Como há repetição de elementos em todos os casos, o total de modos de distribuir os 11 votos das marcas A, B, D e E é:

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} = 4 + 12 + 4 = 20$$

16. B

Temos que:

- x: número de bolas vermelhas;
- $C_{6,2}$: casos pertinentes;
- $C_{n+6,2}$: casos executáveis.

Assim:

$$\frac{1}{3} = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{n+6}{2}} \rightarrow \frac{1}{3}\,\frac{\frac{6!}{2!\cdot 4!}}{\frac{(n+6)!}{2!\cdot (n+4)!}} \rightarrow n^2 + 11n - 60 = 0$$

Calculando a função do 2º grau, n = 4.

17. C

Do enunciado, temos:

- 11 peças de dominó contêm o 10;
- 10 peças do dominó contêm o 9 (pois o dominó [9, 10] já foi contado);
- 9 peças do dominó contêm o 8 (pois os dominós [9, 8] e [9, 10] já foram contados). E assim por diante...

- Total de peças = 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66.
- 21 peças do dominó contêm o 6 ou o 9: 11 + + 11 – 1.

Logo:

$$P = \frac{21}{66} = \frac{7}{22}$$

Estudo para o Enem

18. A

Do enunciado, temos:

- U (conjunto universo);
- I (conjunto dos alunos que falam inglês);
- E (conjunto dos alunos que falam espanhol).

Assim:

$P(E \mid \bar{I})$: probabilidade dos alunos que falam espanhol e não falam inglês.

$n(U) = 1\,200$

$n(I) = 600$

$n(E) = 500$

$n\left(\bar{I} \cup \bar{E}\right) = 300$

$n(I \cup E) = n(U) - n\left(\bar{I} \cup \bar{E}\right) = 1\,200 - 300 = 900$

Logo:

$n(I \cup E) = n(I) + n(E) - n(I \cap E) \rightarrow 900 = 600 + + 500 - n(I \cap E)$

Assim, $n(I \cap E) = 200$.

Portanto:

$$P\left(E|\bar{I}\right) = \frac{n\left(E \cap \bar{I}\right)}{n\left(\bar{I}\right)} =$$

$$\frac{n(E - I)}{n(E - I) + n\left(\bar{I} \cup \bar{E}\right)} = \frac{300}{300 + 300} = \frac{1}{2}$$

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

19. D

Vamos considerar que as pessoas que não sabem ou não responderam não têm banda larga acima de 1 Mbps. Assim:

$n(A) = 15 + 5 + 1 + 1 = 22$

$n(U) = 34 + 20 + 15 + 5 + 1 + 1 + 24 = 100$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{22}{100}$$

Logo, $P(A) = 22\%$.

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

20. E

Regiões possíveis: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano.

Logo, $n(U) = 4$.

Regiões com temperaturas inferiores a 31 °C: Rural, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano.

Assim, $n(A) = 3$.

Portanto, $P = \frac{3}{4}$.

Logo, a probabilidade de ele escolher uma região adequada às recomendações médicas é de $\frac{3}{4}$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

26 PROBABILIDADE CONDICIONAL E DA INTERSECÇÃO DE EVENTOS

Comentário sobre o módulo

Neste módulo continuamos os estudos das probabilidades, agora com a análise de problemas com maior grau de dificuldade, uma vez que vimos a probabilidade condicional e a probabilidade do evento interseção.

Para ir além

- O material "Jogando com probabilidade e estatística", apresentado no 2º Simpósio de Formação de Professor de Matemática da Região Norte, ressalta a importância do jogo como instrumento didático na assimilação dos conceitos de probabilidade. Disponível em:
  https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2018/04/Jogando-com-Probabilidade-e-Estatistica.pdf
  Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. B

Teremos que calcular a probabilidade condicional P(A | aluna).

- Turma A: 28 alunas
- Total de alunas: 28 + 24 + 32 = 84

$$P(A\,|\,\text{aluna}) = \frac{28}{84} = \frac{1}{3}$$

8. A

O índice solicitado é obtido por:

$$10 \cdot \frac{20}{200} + 20 \cdot \frac{30}{200} + 40 \cdot \frac{40}{200} + 80 \cdot \frac{50}{200} + $$
$$+ 160 \cdot \frac{40}{200} + 320 \cdot \frac{20}{200} = 96$$

9. E

De acordo com o enunciado, temos:

- P(X): a probabilidade de ganhar ao menos em um bilhete.
- $P(\overline{X})$: a probabilidade adicional que corresponde à probabilidade de não ganhar em nenhum bilhete.

Logo:

$$P(X) + P(\overline{X}) = 1 \rightarrow P(X) = 1 - P(\overline{X})$$

$$P(\overline{X}) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} = \frac{8930}{9900}$$

$$P(X) = 1 - \frac{8930}{9900} = \frac{9900 - 8930}{9900} =$$

$$= \frac{970}{9900} = \frac{97}{990}$$

10. O espaço amostral do experimento corresponde a: U = {1, 2, 3, ..., 30}.

- O evento A corresponde a: A = {1, 2, 3, ..., 20}.
- O evento B corresponde a: B = {k + 1, k + 2, ..., 30}.

Assim, teremos:

$n(A \cap B) = 20 - k$.

Logo:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{20-k}{30} = \frac{1}{6} \rightarrow 30 = 120 - 6k$$

$$6k = 90 \rightarrow k = \frac{90}{6} \rightarrow k = 15$$

11. C

Para que a soma seja par, é necessário pegarmos um número ímpar de A e um número ímpar de B, ou um número par de A e um número par de B.

- Probabilidade de escolher um número ímpar de A: $\frac{3}{5}$.
- Probabilidade de escolher um número ímpar de B: $\frac{2}{5}$.
- Probabilidade de escolher um número par de A: $\frac{2}{5}$.
- Probabilidade de escolher um número par de B: $\frac{3}{5}$.

Logo, a soma dos 2 números escolhidos que resulte em número par é dada por:

$$P = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$$

12. C

De acordo com o enunciado, temos:

- P(X/B): Probabilidade de nascer menino e o quarto ser branco.
- P(Y/B): Probabilidade de nascer menina e o quarto ser branco.

$$P(X/B) = \frac{50}{100} \cdot \frac{30}{100} = \frac{15}{100}$$

$$P(Y/B) = \frac{50}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{20}{100}$$

Logo, a probabilidade de Renata pintar o quarto do bebê de branco é dada por:

$$P = \frac{15}{100} + \frac{20}{100} = \frac{35}{100} = 35\%$$

13. E

I. Falsa, pois a probabilidade informada é obtida por $P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

II. Falsa, pois a probabilidade informada é $P = \frac{C_{4,2} + C_{2,2}}{C_{15,2}} = \frac{6+1}{105} = \frac{1}{15}$.

III. Falsa, pois a probabilidade solicitada será obtida por $P = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{2}{13} = \frac{8}{455}$.

Sendo assim, todas as afirmações são falsas.

14. a) Maria deve lançar o icosaedro, pois é o único sólido com valores superiores a 12, já que tem 20 faces. Ela, então, lançará apenas uma vez o dado. Portanto, a probabilidade de o número lançado ser superior a 12 é:

$$P(\text{número} > 12) = \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{20} = \frac{8}{100} = 8\%$$

b) Já para obter um número inferior a 5, Maria pode sortear qualquer um dos dados.

- Tetraedro: $P(\text{número} < 5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{5}$.
- Cubo: $P(\text{número} < 5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.
- Octaedro: $P(\text{número} < 5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{40} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.
- Dodecaedro: $P(\text{número} < 5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{12} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$.
- Icosaedro: $P(\text{número} < 5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{20} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$.

Logo, a probabilidade solicitada será:

$$P_{Total}(\text{número} < 5) = \frac{3}{15} + \frac{3}{10} + \frac{1}{25} =$$

$$= \frac{30 + 45 + 6}{150} = \frac{81}{150} = 54\%$$

c) João deve sortear o dodecaedro e o icosaedro, pois apenas com esses dois dados a soma dos números das faces seria maior que 30.

As somas possíveis do dodecaedro e do icosaedro superiores a 30 serão:

$(11 + 20 = 31)$; $(12 + 19 = 31)$; e $(12 + 20 = 32)$.

Logo, $n(A) = 3$.

Assim, a probabilidade será:

- Escolha de dados:

$$P(x) = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

- Soma de faces:

$$P(\text{número}) = 3 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{240} = \frac{1}{80}.$$

$$P(\text{número} > 30) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{80} = \frac{1}{800} = 0{,}125\%$$

15. C

Se N é o total de pessoas da população, teremos:

- Pessoas saudáveis consideradas doentes:

$$\frac{1}{100} \cdot \frac{98{,}5}{100} \cdot N.$$

- Pessoas doentes consideradas doentes:

$$\frac{90}{100} \cdot \frac{1{,}5}{100} \cdot N.$$

Portanto, a probabilidade de uma pessoa ter a doença, dado que o exame indicou positivo, é:

$$P(\text{Positivo}) = \frac{\frac{90}{100} \cdot \frac{1{,}5}{100} \cdot N}{\frac{1}{100} \cdot \frac{98{,}5}{100} \cdot N + \frac{90}{100} \cdot \frac{1{,}5}{100} \cdot P} =$$

$$= \frac{270}{467}$$

16. B

Há 2 formas de posicionar Renato e Alice.

Conseguimos dispor (m) pessoas entre os dois de $A_{6,m} = \frac{6!}{(6-m)!}$ formas.

Ainda, considerando agora as $8 - (m + 2) = 6$ outras pessoas, temos:

$P_{(6-m)+1} = P_{7-m} = (7 - m)!$ possibilidades.

Contudo, podemos organizar o grupo em fila de P8 = 8! maneiras, sem qualquer redução.

Sendo assim, a probabilidade solicitada é obtida por:

$$P(m) = \frac{2 \cdot \frac{6!}{(6-m)} \cdot (7-m)!}{8!} = \frac{7-m}{28}$$

Assim, se $m = 4$, teremos:

$$P(4) = \frac{7-4}{28} = \frac{3}{28}$$

17. a) Região Norte tem 7 unidades; Nordeste tem 9 unidades; Centro-Oeste tem 4 unidades; Sudeste tem 4 unidades; Sul tem 3 unidades.

b) Como as regiões Nordeste e Sudeste são as mais populosas, temos:

- $C_{9,2} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = 36$ formas de selecionar duas unidades da Região Nordeste;
- $C_{4,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ formas de selecionar duas unidades da Região Sudeste.
- 7 maneiras de selecionar uma unidade da Região Norte.
- 4 maneiras de selecionar uma unidade da Região Centro-Oeste.

- 3 formas de selecionar uma unidade da Região Sul.

Como cada unidade da Federação é representada por três senadores; pelo princípio fundamental da contagem, teremos:

$N = 36 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3^7 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3^7 =$

$= 2^5 \cdot 3^{11} \cdot 7$

c) Como há 27 · 3 = 81 senadores, conseguiremos escolher 7 senadores quaisquer de

$$C_{81,\,7} = \frac{81!}{74! \cdot 7!} =$$

$$= \frac{81 \cdot 80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot 76 \cdot 75}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$= 50 \cdot 22 \cdot 34 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 79$ formas.

Logo:

$$P = \frac{2^5 \cdot 3^{11} \cdot 7}{50 \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 79} =$$

$$= \frac{1}{50} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{63}{79} \cdot \frac{108}{143} < \frac{1}{50}$$

Estudo para o Enem

18. C

De acordo com o gráfico, temos:

- Número total de compradores masculinos: 1 000.
- Número total de compradores femininos: 1 200.

O sorteio poderá ser feito de dois modos:

1. Probabilidade de sortearem um comprador masculino no primeiro dia e um comprador feminino no último dia:

$$P_1 = \frac{150}{1\,000} \cdot \frac{600}{1\,200} = \frac{3}{40}$$

2. Probabilidade de sortearem um comprador feminino no primeiro dia e um comprador masculino no último dia:

$$P_2 = \frac{50}{1\,200} \cdot \frac{300}{1\,000} = \frac{1}{80}$$

Sendo assim, a probabilidade (P) solicitada será obtida por:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{3}{40} + \frac{1}{80} = \frac{7}{80}$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

19. E

Verde (3 ou 4) e vermelha (4) são as cores com chance de ficar com o maior número de bolas, após o procedimento de retirada e depósito.

Portanto, a probabilidade de retirar uma bola verde da urna 2 é:

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{3}{11} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{11} = \frac{31}{110}$$

E a probabilidade de retirar uma bola vermelha da urna 2 é:

$$\frac{10}{10} \cdot \frac{4}{11} = \frac{40}{110}$$

Desse modo, o jogador deve selecionar a cor vermelha.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

20. B

A probabilidade de um parafuso decidido ao acaso ser defeituoso é obtida por:

$P = P(A \cap \text{defeituoso}) + P(B \cap \text{defeituoso})$

$$P = \frac{54}{100} \cdot \frac{25}{1\,000} + \left(1 - \frac{54}{100}\right) \cdot \frac{38}{1\,000} =$$

$$= \frac{1350}{100\,000} + \frac{1748}{100\,000} = \frac{3\,098}{100\,000} = \frac{3{,}098}{100}$$

Como $\frac{2}{100} \leqslant \frac{3{,}098}{100} < \frac{4}{100}$, o desempenho do conjunto dessas máquinas pode ser classificado como “bom”.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade, utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

27 PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPENDENTES

Comentário sobre o módulo

Neste último módulo dedicado aos estudos das probabilidades, estudamos a probabilidade de eventos independentes, com a comparação entre eles e os eventos dependentes. Além disso, tivemos a oportunidade de reforçar os conceitos vistos em probabilidades nos exercícios propostos.

Para ir além

- O artigo "Uma proposta para o estudo de conceitos básicos de probabilidade" relata os resultados obtidos em duas turmas do 2º ano do ensino médio considerando o uso de jogos com a metodologia de resolução de problemas relacionados à probabilidade. Disponível em:

  http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxxii_cnmac/pdf/203.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

- O artigo "Atividades sugeridas para o ensino de probabilidade geométrica no ensino médio" apresenta algumas atividades dinâmicas e criativas que podem ser utilizadas no processo ensino-aprendizagem de probabilidade nos ensinos fundamental e médio. Disponível em:

  http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/1314.pdf>

  Acesso em: abr. 2019.

- O artigo "Uma proposta pedagógica para ensinar probabilidade no ensino fundamental" aborda o ensino de probabilidade de forma qualitativa, contextualizada e dinâmica. Disponível em:

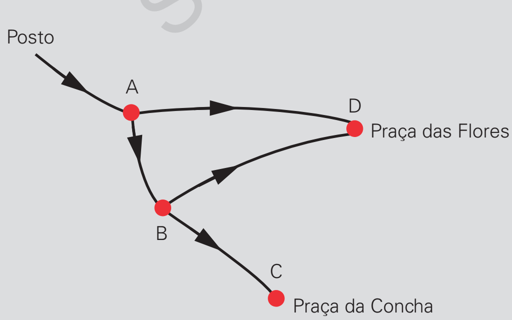
  http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:pwINQo3Eju8J:revistas.unifoa.edu.br/index.php/praxis/article/download/652/586+&cd=11&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>

  Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. C

Observando a imagem, temos:



Temos:

$$\left.\begin{array}{l} P(AD) = \frac{1}{2} = 50\% \quad (\text{Posto – Praça das Flores}) \\ P(ABD) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\% \rightarrow \left(\begin{array}{l}\text{Posto – Praça} \\ \text{das Flores}\end{array}\right) \end{array}\right\} P =$$

$$= 75\% = \frac{3}{4}$$

$P(ABC) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 25\% \rightarrow$ Não chega à Praça das Flores

8. Teremos, portanto, 4 bolas com vogais e 6 bolas com consoantes.

a) $P = \frac{1}{10}$

b) $P = \frac{4}{10}$

c) $P = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{1}{30}$

9. C

De acordo com o enunciado, temos:

$$P(A\,|\,\text{Menina}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{24} = \frac{10}{48}$$

$$P(B\,|\,\text{Menina}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{30} = \frac{16}{60}$$

$$P(\text{Menina}) = \frac{10}{48} + \frac{16}{60} = \frac{114}{240} = \frac{57}{120} = \frac{19}{40}$$

10. C

De acordo com o enunciado, temos a probabilidade de atraso com e sem chuva:

$P(\text{chuva}) = 30\% \cdot 50\% = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}150$

$P(\text{sem chuva}) = 70\% \cdot 25\% = 0{,}7 \cdot 0{,}25 = 0{,}175$

Assim:

$P(\text{atraso}) = P(\text{chuva}) + P(\text{sem chuva})$

$P(\text{atraso}) = 0{,}15 + 0{,}175 = 0{,}325$

Logo, $P(\text{atraso}) = 0{,}325$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

11. a) Temos $P = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Logo, a probabilidade de que os dois dados mostrem o mesmo número é de $\frac{1}{6}$.

b) Verificando as possibilidades, temos:

$1 + (2, 3, 4, 5 \text{ ou } 6) \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

$2 + (3, 4, 5 \text{ ou } 6) \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{36}$

$3 + (4, 5 \text{ ou } 6) \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{36}$

$4 + (5 \text{ ou } 6) \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{36}$

$5 + (6) \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Somando todas as probabilidades possíveis, temos:

$$P = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Logo, a probabilidade de que o dado azul mostre um número maior que o dado vermelho é de $\frac{5}{12}$.

12. Soma: 04 + 16 = 20

Analisando os itens, temos:

01. Incorreta, pois a probabilidade será de $\frac{1}{16}$.

02. Incorreta, pois o número de possibilidades é igual a $C_{16,2} = 120$.

04. Correta, pois o campeonato inicia com 8 jogos (16 times). Na segunda rodada, serão 4 jogos (8 times). Na terceira rodada, serão 2 jogos (4 times). Por fim, temos o jogo final, em um total de 15 jogos.

08. Incorreta, pois há $4! \cdot C_{16,4} = 43\,680$ possibilidades.

16. Correta, pois $P(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125 =$

$= 12{,}5\%$.

13. A

Como não há três bolas pretas, as duas situações possíveis são as de se retirarem três bolas brancas ou verdes.

$$P(B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{60}{720} = \frac{1}{12} = 8{,}33\%$$

$$P(V) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{6}{720} = \frac{1}{120} = 0{,}833\%$$

Assim:

$P = P(B) + P(V)$

$P = 0{,}833\% + 8{,}33\%$

Logo, $P = 9{,}17\%$

14. C

O gasto anual é de R$ 900.000,00. A cada evento deve pagar R$ 1.000.000,00. Logo, nenhum evento pode ocorrer.

P(X): corresponde à probabilidade de não ocorrer o evento em 10 empresas.

$P(X) = (1 - p)^{10}$.

$P(\overline{X})$: probabilidade de ocorrer em ao menos 1.

Logo, a probabilidade de a seguradora ter prejuízo nessa modalidade de seguro em um ano é $P(\overline{X}) = 1 - (1 - p)^{10}$.

15. a) Há $C_{8,4}$ camundongos que não têm a característica C_1. Assim, obtemos:

$$P = 1 - \frac{C_{8,4}}{C_{10,4}}$$

$$P = 1 - \frac{70}{210} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Logo, a probabilidade de que ao menos um dos camundongos com a característica C_1 esteja no grupo sorteado é de $\frac{2}{3}$.

b) $P = \frac{C_{5,1} \cdot C_{5,2} \cdot C_{3,1}}{C_{10,4}} + \frac{C_{2,1} \cdot C_{5,3}}{C_{10,4}} =$

$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 3}{210} + \frac{2 \cdot 10}{210} = \frac{6}{21} + \frac{2}{21} = \frac{8}{21}$

Logo, a probabilidade de que o grupo sorteado tenha apenas 1 camundongo com a característica C_1 e ao menos 2 com a característica C_2 é de $\frac{8}{21}$.

16. E

Além do atleta que fez uso da substância, precisamos escolher 2 atletas entre os 199 que não fizeram uso. Logo, temos:

$$P(I) = \frac{C_{199,2}}{C_{200,3}} = \frac{\frac{199!}{2!\cdot 197!}}{\frac{200!}{3!\cdot 197!}} = \frac{3}{200}$$

No segundo modo, sorteada a equipe, precisamos escolher 2 atletas entre os 9 que não a utilizaram. Assim:

$$P(II) = \frac{1}{20}\cdot\frac{C_{9,2}}{C_{10,3}} = \frac{1}{20}\cdot\frac{\frac{9!}{2!\cdot 7!}}{\frac{10!}{3!\cdot 7!}} = \frac{3}{200}$$

Já no terceiro modo, precisamos escolher 2 equipes em que não atua o jogador dopado e só então sortear o jogador. Sendo assim:

$$P(III) = \frac{C_{19,2}}{C_{20,3}}\cdot\frac{1}{10} = \frac{\frac{19!}{2!\cdot 17!}}{\frac{20!}{3!\cdot 17!}}\cdot\frac{1}{10} = \frac{3}{200}$$

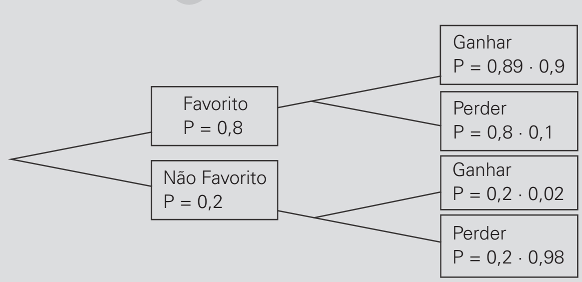
Portanto, existe a mesma probabilidade nos três modos distintos.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

17. C

Elaborando a árvore de probabilidades de acordo com as informações do enunciado, teremos:



Portanto, a probabilidade de o time X ser o favorito, dado que ele ganhou a partida, é obtida por:

$$P(x) = \frac{P(\text{ganhar como favorito})}{P\ (\text{ganhar})} =$$

$$= \frac{0{,}8\cdot 0{,}9}{0{,}8\cdot 0{,}9 + 0{,}2\cdot 0{,}02} = \frac{0{,}72}{0{,}724}$$

$$P(x) = \frac{0{,}72}{0{,}724}\cdot 1000 = \frac{720}{724}$$

Logo, $P(x) = \frac{180}{181}$.

Estudo para o Enem

18. A

Analisando o gráfico, obtemos:

- Compradores do produto A: $n(A) = 10 + 30 + 60 = 100$.
- Compradores do produto B: $n(B) = 20 + 20 + 80 = 120$.
- Consumidores do produto A em fevereiro: $n(A|Fev) = 30$.
- Consumidores do produto B em fevereiro: $n(B|Fev) = 20$.

Logo:

$$P = \frac{n(A|Fev)}{n(A)}\cdot\frac{n(B|Fev)}{n(B)} = \frac{30}{100}\cdot\frac{20}{120} = \frac{1}{20}$$

Competência: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

19. B

De acordo com o texto, sabemos que, para o teste terminar na quinta questão, o candidato precisa errar exatamente uma pergunta entre as quatro primeiras e errar a quinta. Então:

$$P = C_{4,1}\cdot(1-0{,}2)^3\cdot 0{,}2 = 4\cdot 0{,}512\cdot 0{,}04$$

Logo, $P = 0{,}08192$.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

20. A

p: percentual da população vacinada

A vacina é ineficiente em 2% e ainda há 50% de probabilidade de infecção. Contudo, teremos:

$$\frac{2}{100} \cdot \frac{50}{100} \cdot p + \frac{50}{100} \cdot (1-p) \leq \frac{5,9}{100}$$

$$0,02 \cdot 0,5 \cdot p + 0,5 \cdot (1-p) \leq 0,059$$

$$0,049p \geq 0,441$$

$$p \geq 0,9$$

Logo, $p \geq 90\%$.

Assim, deve-se implementar a proposta de número I.

Competência: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

28 BINÔMIO DE NEWTON

Comentário sobre o módulo

Finalizamos o material com o estudo do binômio de Newton. Abordamos, antes, o produto de Stevin, com a dedução teórica. Pôde-se fazer uma breve revisão do número binomial e do triângulo de Pascal, pois são dois requisitos fundamentais para a compreensão e o desenvolvimento do conteúdo.

Para ir além

- O artigo "O binômio de Newton" aborda de maneira completa o estudo desse tema. Disponível em:

  http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/fevereiro2016/matematica_dissertacoes/dissertacao_jose_osvaldo_tognato.pdf

  Acesso em: abr. 2019.

- O artigo "Usos do binômio de Newton em diferentes contextos" aborda o contexto histórico e o desenvolvimento teórico da elaboração de Newton e discute a aplicação do binômio em áreas como genética e informática. Disponível em:

  https://repositorio.unesp.br/bitstream/ handle/11449/155330/000881835.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

  Acesso em: abr. 2019.

Exercícios propostos

7. B

Termo geral:

$$T_{p+1} = \binom{10}{p}(x^3)^p\left(\frac{1}{x^2}\right)^{10-p} \to T_{p+1} = \binom{10}{p} x^{3p}x^{2p-20} \to$$

$$\to T_{p+1} = \binom{10}{p} x^{5p-20}$$

Para que o termo de **x** seja independente, o expoente de **x** deve ser igual a zero.

Assim, temos:

$5p - 20 = 0 \to 5p = 20 \to p = 4$

Logo:

$$T_{4+1} = \binom{10}{4} x^{5 \cdot 4 - 20} = \binom{10}{4} x^0$$

Portanto, $T_5 = 210$.

8. C

A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^n$ é 2^n.

Logo, a soma dos coeficientes de $(x + 1)^5 = 2^5 = 32$.

9. O desenvolvimento de um binômio de grau **n** tem **n + 1** termos. Logo:

$3n + 1 = 16 \to 3n = 15$

Portanto, $n = 5$.

10. E

Termo geral:

$$T_{p+1} = \binom{5}{p}(2x)^p\left(-\frac{3}{x^3}\right)^{5-p} \to T_{p+1} =$$

$$= \binom{5}{p} 2^p x^{2p}(-3)^{5-p}x^{-15+3p} \to$$

$$\to T_{p+1} = \binom{5}{p} 2^p(-3)^{5-p} \cdot x^{5p-15}$$

Para que o termo de x seja independente, o expoente de x deve ser igual a zero.

Assim, temos:

$5p - 15 = 0 \to 5p = 15 \to p = 3$

Logo:

$$T_{3+1} = \binom{5}{3} 2^3(-3)^{5-3} \cdot x^{5 \cdot 3 - 15}$$

$T_4 = 10 \cdot 8 \cdot 9 \cdot x^0$

Portanto, $T_4 = 720$.

11.
$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)^4\frac{1}{\sqrt{x}} +$$

$$+\binom{5}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{x^2}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 +$$

$$+\binom{5}{4}\left(\frac{1}{x^2}\right)^1\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$$

$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 = \frac{1}{x^{10}} + \frac{5}{x^8\sqrt{x}} + \frac{10}{x^7} + \frac{10}{x^5\sqrt{x}} + \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

b) Para o cálculo do oitavo termo, k = 7. Assim, obtemos:

$$T_{7+1} = \binom{12}{7}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{12-7}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$$

$$T_8 = 792 \cdot \frac{1}{x^{10}} \cdot \frac{1}{x^3\sqrt{x}}$$

Logo, $T_8 = \dfrac{792}{x^{13}\sqrt{x}}$

12. B

Termo geral:

$$T_{p+1} = \binom{8}{p}(2x^{-1})^{p}\,(x)^{8-p} \rightarrow T_{p+1} = \binom{8}{p} 2^{p}x^{-p}x^{8-p}$$

$$\rightarrow T_{p+1} = \binom{8}{p} 2^{p}x^{8-2p}$$

Para que o termo de **x** seja independente, o expoente de **x** deve ser igual a zero.

Assim, temos:

$$8 - 2p = 0 \rightarrow 2p = 8 \rightarrow p = 4$$

Logo:

$$T_{4+1} = \binom{8}{4} 2^{4}x^{8-2\cdot 4} \rightarrow T_5 = 70 \cdot 16 \rightarrow$$

$$\rightarrow T_5 = 1\,120$$

Portanto, a soma dos algarismos do termo independente será:

$$1 + 1 + 2 + 0 = 4$$

13. D

O termo geral será:

$$T_{p+1} = x \cdot \binom{10}{p} \cdot (2x)^{p} \cdot 1^{10-p} = \binom{10}{p} \cdot 2^{p} \cdot x^{p+1}$$

Para se ter x^3, **p** corresponde a:

$$p + 1 = 3 \rightarrow p = 2$$

Assim, temos:

$$\binom{10}{2} \cdot 2^2 \cdot x^{2+1} = 45 \cdot 4 \cdot x^3 = 180x^3$$

14. Soma: 01 + 04 + 16 = 21

01. Verdadeira, pois $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x + 1)^4$ e admite – 1 como raiz.

02. Falsa, pois, para $n = 2$, $p(x) = x^2 + 2x + 1$, tem duas raízes reais e iguais.

04. Verdadeira, pois $p(x) = (x + 1)^n$.

08. Falsa, pois $p(x) = (x + 1)^n$. Logo, $a = b = -1$.

16. Verdadeira, pois a soma dos coeficientes de $(x + 1)^n = 2^n$.

15. A

Fazendo $\cos x = y$, obtemos:

$$y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1 = 0$$

Encontramos, assim, o desenvolvimento do polinômio $(y - 1)^4$.

Como $(y - 1)^4 = (y - 1) \cdot (y - 1) \cdot (y - 1) \cdot (y - 1) = 0$.

A raiz do polinômio é igual a 1. Ou seja:

$\cos x = 1$

Logo, $x = 360° = 2\pi$

Sendo a função cosseno periódica, a cada 360°, obtemos uma nova raiz da função. Ou seja, a cada $2k\pi$, em que k é um número inteiro qualquer.

16. O termo geral será:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}(x^2)^{n-p}\left(\frac{1}{2x}\right)^{p} \rightarrow T_{p+1} =$$

$$= \binom{n}{p} x^{2n-2p} \cdot x^{-p} \cdot \frac{1}{2^p} = \binom{n}{p} x^{2n-3p} \cdot \frac{1}{2^p}$$

$$T_1: \binom{n}{0} x^{2n-3\cdot 0} \cdot \frac{1}{2^0} = 1 \cdot x^{2n}$$

$$T_2: \binom{n}{1} x^{2n-3\cdot 1} \cdot \frac{1}{2^1} = \frac{n}{2}$$

$$T_3: \binom{n}{2} x^{2n-3\cdot 2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{n(n-1)}{8}$$

Assim, os coeficientes dos três primeiros termos são 1, $\frac{n}{2}$ e $\frac{n(n-1)}{8}$.

Portanto, segue que:

$$1 + \frac{n(n-1)}{8} = 2 \cdot \frac{n}{2} \rightarrow n^2 - 9n + 8 = 0$$

Portanto, $n = 8$.

17. B

O termo geral de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3$ será:

$$T_{p+1} = \left[\binom{3}{p} \cdot (2x)^{3-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{p}\right]$$

$$T_{p+1} = \binom{3}{p} \cdot 2^{3-p} \cdot x^{3-3p}$$

O termo geral de $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^3$ será:

$$T_{q+1} = \left[\binom{3}{q} \cdot (x)^{3-q} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^{q}\right]$$

$$T_{q+1} = \binom{3}{q} \cdot x^{6-3p} \cdot 2^{-q}$$

$$T_{p+1} \cdot T_{q+1} = \binom{3}{q}\binom{3}{q} \cdot 2^{3-(p+q)} \cdot x^{9-3(p+q)}$$

Para ter x^6, $p + q = 1$, o que implica em $(p, q) = (0, 1)$ ou $(1, 0)$.

$$\binom{3}{0}\cdot\binom{3}{1}\cdot 2^{3-(0+1)}\cdot x^{9-3(0+1)}+\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{0}\cdot$$
$$\cdot\, 2^{3-(1+0)}\cdot x^{9-3(1+0)}$$

$1\cdot 3\cdot 2^2\cdot x^6+3\cdot 1\cdot 2^2\cdot x^6$

$12x^6+12x^6=24x^6$

Portanto, o coeficiente procurado corresponde ao número 24.

Estudo para o Enem

18. C

$E=(999)^5+5\cdot(999)^4+10\cdot(999)^3+10\cdot(999)^2+5\cdot(999)+1$

Fazendo $999=x$, obtemos:

$E=(x+1)^5=(999+1)^5$

$E=1\,000^5=(10^3)^5=10^{15}$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

19. D

Os alunos podem se dividir em $C_{n,p}$ subgrupos distintos A e B. Como não há restrição de quantos alunos deve ter em cada subgrupo, obtemos as seguintes quantidades de combinações possíveis:

$$\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}$$

$$2^8-\binom{8}{0}-\binom{8}{8}=256-1-1=254$$

Logo, há 254 maneiras de se realizar a divisão.

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

20. C

$$C_8=C\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)^8\quad\rightarrow\quad\frac{C_8}{C}=\left(1+\frac{x}{100}\right)^8$$

Para o termo x^5, obtemos:

$$\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{x}{100}\right)^{8-3}\cdot 1^8=56\cdot\frac{x^5}{10^{10}}=56\cdot 10^{-10}\cdot x^5$$

Competência: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

Exercícios interdisciplinares

21. D

Analisando as afirmações, temos:

I) A quantidade de indivíduos de cada espécie é obtida resolvendo o sistema:

$$\begin{cases}A+B+C=550\\ A=2B=\dfrac{1}{4}C\end{cases}$$

$2B+B+8B=550$

$11B=550\rightarrow B=50\rightarrow A=100\rightarrow C=400$

Logo, a cada 15 anos, 40 indivíduos de C, que representa 10% do total, podem ser legalmente extraídos. Portanto, incorreta.

II) A cada 15 anos, 5 indivíduos de B, o que corresponde a 10% do total de 50 indivíduos, podem ser legalmente extraídos. Portanto, correta.

III) A reserva tem 100 km² e existem 100 indivíduos da espécie A. Logo, existe uma média de 1 indivíduo de A por km². Portanto, correta.

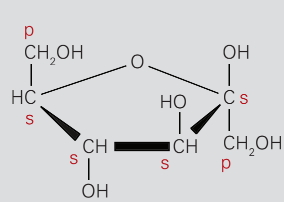
IV) A exploração controlada de ambientes naturais que permita às espécies tempo hábil para sua reprodução não causa o desmatamento ou a extinção das espécies. Portanto, incorreta.

V) Correto, pois xilema é o tecido vascular das plantas pelo qual água e sais minerais são transportados da raiz para a planta. Nos anéis de crescimento, as áreas mais claras correspondem ao xilema desenvolvido durante épocas do ano mais úmidas, enquanto as mais escuras são o xilema compactado desenvolvido nos períodos mais secos.

22. Soma: 02 + 08 + 16 = 26

Química:

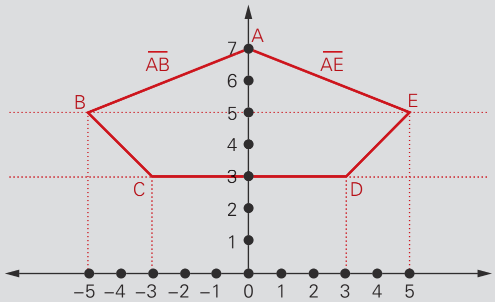
01. Incorreta, pois existem carbonos primários e secundários na frutose.



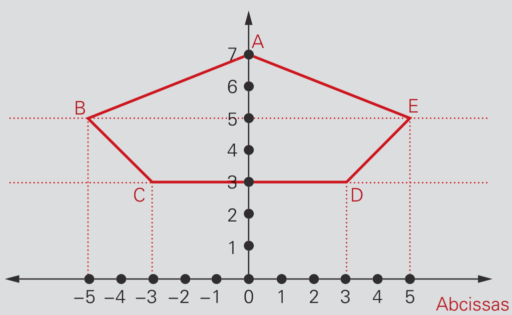
p: primário; s: secundário

02. Correta, pois os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AE}$, dessa representação, são simétricos em

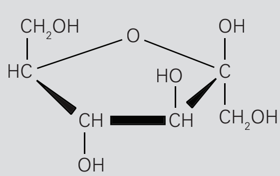
relação ao eixo das ordenadas, conforme observamos no gráfico:



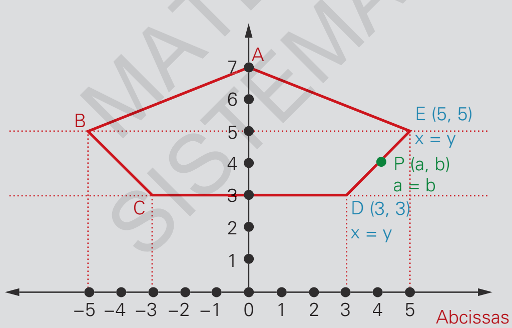
04. Incorreta, pois nessa representação a reta definida pelos pontos C e D é paralela ao eixo das abscissas.



08. Correta, pois, por não se desdobrar em açúcares mais simples, a frutose é um monossacarídeo.



16. Correta, pois se a = b, então o ponto P (a, b) está alinhado com os pontos D e E.



Matemática:

02. Correta, pois o ponto médio do segmento AB é $\left(-\frac{5}{2}, 6\right)$, enquanto o ponto médio do segmento AE é $\left(\frac{5}{2}, 6\right)$. Assim, as abscissas são opostas e as ordenadas dos pontos médios são iguais. Conclui-se que os pontos são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

04. Falsa, pois, como as ordenadas dos pontos C e D são iguais, segue que a reta $\overleftrightarrow{CD}$ é paralela ao eixo das abscissas.

16. Correta, pois os pontos D e E pertencem à bissetriz dos quadrantes ímpares. Contudo, se a = b, então o ponto P(a, b) está alinhado com os pontos D e E.

23. C

Biologia:

Artrópodes pertencentes à classe dos insetos: abelha, barata, besouro, formiga e gafanhoto. Portanto, 5 animais. Já os artrópodes não insetos são ácaro, aranha, carrapato e escorpião (aracnídeos), além de lagosta, camarão e caranguejo (crustáceos). Logo, 7 animais.

Matemática:

Obtemos o espaço amostral escolhendo dois animais aleatoriamente entre os doze possíveis.

$$C_{12,2} = \frac{12!}{(12-2)!2!} = 66$$

Há 7 artrópodes que não são insetos que podem se combinar de dois em dois. Assim, temos:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!2!} = 21$$

Logo, a probabilidade de os animais escolhidos não serem insetos é:

$$P = \frac{C_{7,2}}{C_{12,2}} = \frac{21}{66} = \frac{7}{22}$$

Pearson

PRÉ-VESTIBULAR
EXTENSIVO
4

Pearson

www.dombosco.com.br

701625342