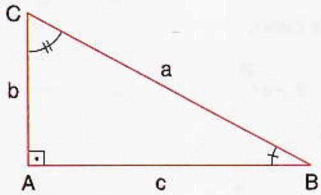
11 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Razões trigonométricas

Seno de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é dado pelo quociente (razão) entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa.



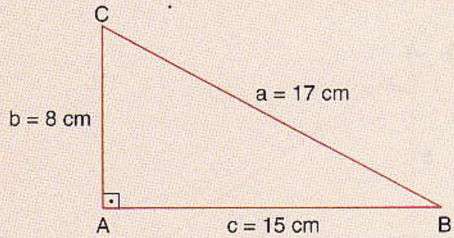
$$\boxed{\text{sen } x = \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{hipotenusa}}}$$

No caso, temos:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a}$$

exemplo 1

Seja o triângulo ABC de hipotenusa 17 cm e catetos 8 cm e 15 cm.



Para determinar o seno de cada ângulo agudo, fazemos:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{B}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} = \frac{8 \text{ cm}}{17 \text{ cm}} \cong 0{,}470$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} = \frac{15 \text{ cm}}{17 \text{ cm}} \cong 0{,}882$$

exemplo 2

Vamos calcular o seno de cada ângulo agudo do triângulo DEF de catetos 6 cm e 8 cm.

Antes precisamos determinar a medida da hipotenusa *d*:

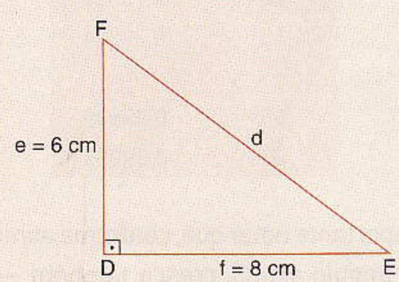
$$d = \sqrt{e^2 + f^2} = \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$d = 10 \text{ cm}$$

Agora temos:

$$\text{sen } \hat{E} = \frac{e}{d} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{sen } \hat{F} = \frac{f}{d} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

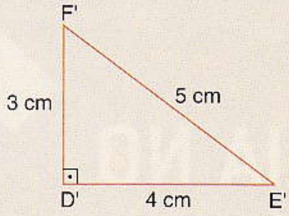


Observe a seguir o triângulo D'E'F', com hipotenusa medindo 5 cm e catetos com medidas 3 cm e 4 cm.

$\triangle DEF \sim \triangle D'E'F'$

$$\operatorname{sen} \hat{E}' = \frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen} \hat{F}' = \frac{4\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{4}{5}$$



Como os triângulos são semelhantes, há congruência entre ângulos que se correspondem:

$$\hat{E} \equiv \hat{E}' \quad \text{e} \quad \hat{F} \equiv \hat{F}'$$

O fato de $\operatorname{sen} \hat{E} = \operatorname{sen} \hat{E}'$ e $\operatorname{sen} \hat{F} = \operatorname{sen} \hat{F}'$ sugere invariância do seno de qualquer ângulo: independentemente do "tamanho" de cada triângulo, o ângulo $\hat{E}$ (que mede aproximadamente 37°) possui o seno valendo 0,6 e o ângulo $\hat{F}$ (que mede aproximadamente 53°) possui o seno valendo 0,8.

Justifica-se, assim, a existência de uma tabela contendo o valor do seno de cada ângulo agudo (tomadas quantidades inteiras de graus).

Veja uma parte da tabela:

Ângulo	Seno
1°	0,01745
2°	0,03490
3°	0,05234
...	...
36°	0,58779
37°	0,60182
38°	0,61566
...	...
52°	0,78801
53°	0,79864
...	...
88°	0,99939
89°	0,99985

É importante notar que, conforme aumenta a medida do ângulo agudo, cresce também — de modo não linear — o valor do seno do ângulo agudo.

Essa tabela apresenta caráter biunívoco: a cada ângulo agudo corresponde um único valor do seno e, reciprocamente, a cada valor de seno associa-se um único ângulo agudo.

observação

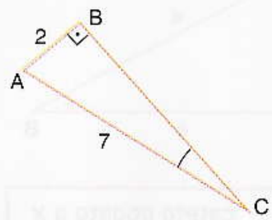
A tabela completa, contendo o seno de cada ângulo agudo (de grau em grau) e as outras razões trigonométricas (que serão vistas a seguir), encontra-se no final do próximo capítulo e deve ser consultada sempre que necessário.

exercícios

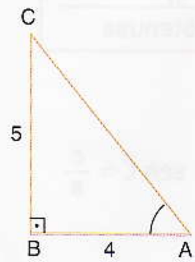
1. Os catetos de um triângulo retângulo medem 5 cm e 12 cm. Calcule o valor do seno de cada ângulo agudo desse triângulo.

2. Determine o seno do ângulo agudo assinalado em cada caso.

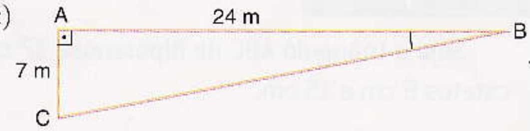
a)



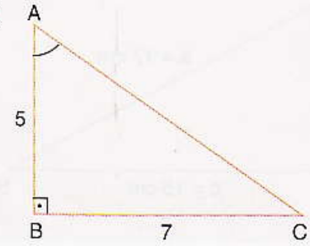
b)



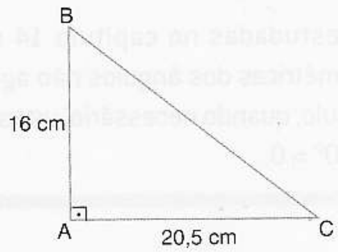
c)



d)



3. A respeito da figura abaixo, determine:



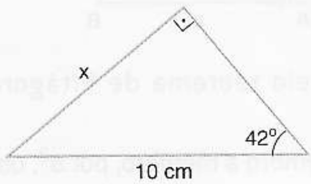
a) o seno de cada ângulo agudo;

b) as medidas aproximadas de $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

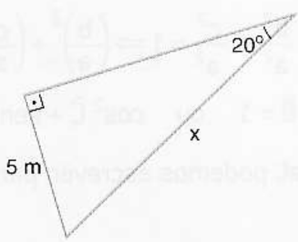
4. Determine as medidas aproximadas dos ângulos agudos do triângulo de catetos de 5 cm e $\frac{7}{3}$ cm.

5. Determine a medida x em cada caso:

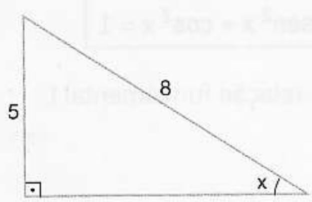
a)



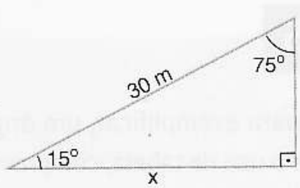
b)



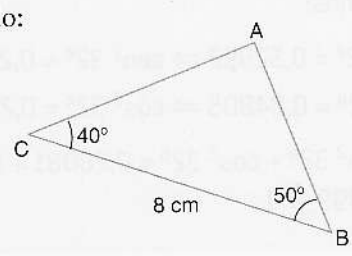
c)



d)



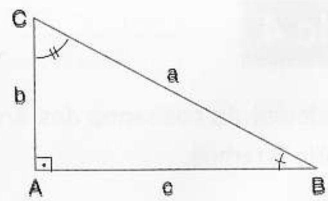
6. Determine a medida do menor lado deste triângulo:



7. Uma escada de pedreiro de 12 m está apoiada numa parede e forma com o solo um ângulo de 60°. Qual é a altura atingida pelo ponto mais alto da escada? Qual é a distância do pé da escada à parede?

Cosseno de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é dado pela razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa.



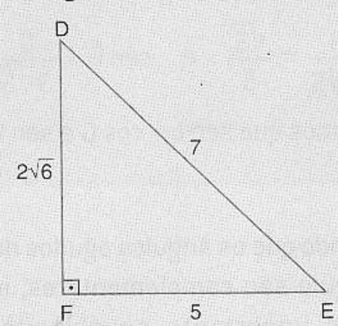
$$\boxed{\cos x = \frac{\text{cateto adjacente a } x}{\text{hipotenusa}}}$$

No caso, temos:

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \cos \hat{C} = \frac{b}{a}$$

exemplo 3

Determinemos o cosseno de cada ângulo agudo do triângulo DEF.



Temos:

$$\cos \hat{D} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{D}}{\text{hipotenusa}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

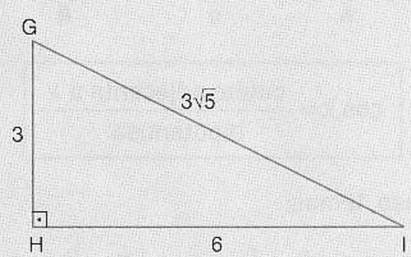
$$\cos \hat{E} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{E}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{7}$$

O cosseno de um determinado ângulo agudo também não depende do particular triângulo retângulo tomado para calculá-lo.

Assim, é possível incluir os valores dos cossenos dos ângulos na tabela citada anteriormente, a qual também mostra caráter biunívoco entre a medida de cada ângulo agudo e o valor do respectivo cosseno. Porém, diferentemente do seno, o cosseno de um ângulo agudo decresce à proporção que aumenta a medida do ângulo. Procure observar esse fato na tabela completa no final do próximo capítulo.

exemplo 4

Para calcular os cossenos dos ângulos do triângulo GHI, fazemos:



$$\cos \hat{I} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \hat{G} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Se, por outro lado, calcularmos os senos dos ângulos agudos do triângulo GHI, obteremos:

$$\text{sen}\,\hat{I} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{e} \quad \text{sen}\,\hat{G} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Observemos que $\text{sen}\,\hat{I} = \cos \hat{G}$ e $\text{sen}\,\hat{G} = \cos \hat{I}$.

Lembrando que os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares, surge uma propriedade importante envolvendo senos e cossenos:

$\boxed{\text{sen}\,x = \cos(90° - x)}$ ou $\boxed{\cos x = \text{sen}\,(90° - x)}$

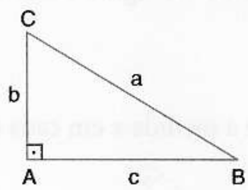
Note esse fato na tabela de razões trigonométricas. Veja, por exemplo, que sen 20° = 0,34202 e que cos (90° – 20°) = cos 70° = 0,34202.

observação

Serão estudadas no capítulo 14 as razões trigonométricas dos ângulos não agudos. Neste capítulo, quando necessário, use sen 90° = 1 e cos 90° = 0.

Relação fundamental I

Seja o triângulo retângulo ABC a seguir.



Sabemos, pelo teorema de Pitágoras, que $b^2 + c^2 = a^2$.

Dividindo, membro a membro, por a^2, obtemos:

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\,\hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1 \quad \text{ou} \quad \cos^2 \hat{C} + \text{sen}^2\,\hat{C} = 1$$

De modo geral, podemos escrever, para um ângulo *x* qualquer:

$$\boxed{\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1}$$

que é a chamada relação fundamental I.

exemplo 5

Tomemos, para exemplificar, um ângulo de 32° e, mediante o uso da tabela, comprovemos a relação fundamental I.

Temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,32° = 0{,}52992 \Rightarrow \text{sen}^2\,32° = 0{,}28081 \\ \cos 32° = 0{,}84805 \Rightarrow \cos^2 32° = 0{,}71918 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\,32° + \cos^2 32° = 0{,}28081 + 0{,}71918 = = 0{,}9999 \cong 1$$

exemplo 6

A relação fundamental I permite que, dada uma das duas razões de um ângulo agudo, determinemos o valor da outra razão trigonométrica do mesmo ângulo.

Dado, por exemplo, cos x = 0,17365, é possível determinar, sem o uso da tabela, o valor de sen x, com $0° < x \leq 90°$. Basta fazer:

$\text{sen}^2\, x + 0{,}17365^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\, x = 1 - 0{,}03015 =$
$= 0{,}96985 \Rightarrow \text{sen}\, x = +\sqrt{0{,}96985} = 0{,}984809$

Verificando na tabela:

80°	0,98481	0,17365
	↑ sen 80°	↑ cos 80°

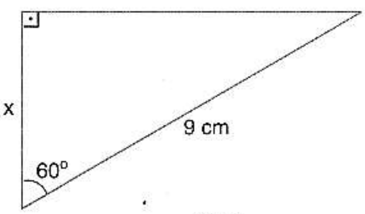
exercícios

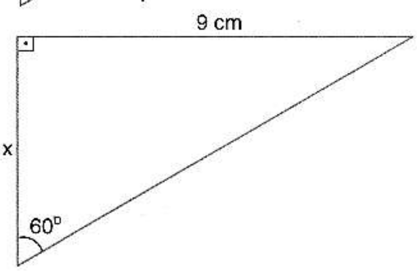
8. Os catetos de um triângulo medem 7 cm e 24 cm. Determine o valor do cosseno de cada ângulo agudo desse triângulo.

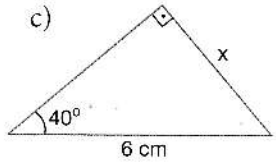
9. Em cada caso são apresentadas medidas dos lados de um triângulo retângulo nos quais *a* representa a hipotenusa e *b* e *c*, os catetos. Determine o cosseno de cada um dos ângulos agudos, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, opostos, respectivamente, a *b* e a *c*.

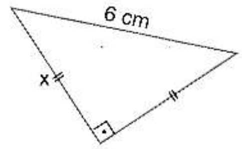
a) b = 3 cm e c = 4 cm
b) a = 12 cm e b = 7 cm
c) a = 25 m e b = 7 m
d) a = 61 m e c = 60 m

10. Determine a medida *x* em cada caso:

a)


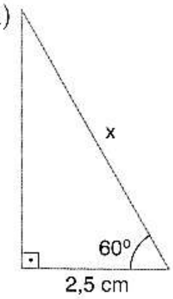
b)


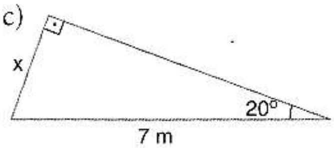
c)


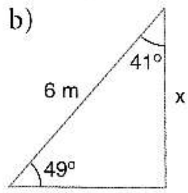
d)


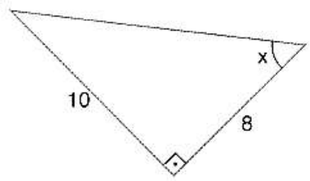
11. Sendo *x* um ângulo agudo, se cos x = a, quanto vale sen x?

12. Determine o valor de *x* em cada caso:

a)


c)


b)


d)


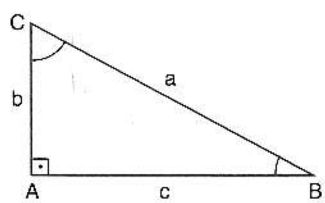
13. Seja o ângulo α tal que $\cos \alpha = \frac{3}{7}$. Determine sen α.

14. Se β é ângulo agudo tal que $\text{sen}\, \beta = \frac{\sqrt{7}}{3}$, quanto vale cos β?

Outra razão trigonométrica

Tangente de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é dada pela razão entre o cateto oposto a esse ângulo e o cateto adjacente a ele.



$$\boxed{\text{tg } x = \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{cateto adjacente a } x}}$$

No caso, temos:

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} \quad \text{e} \quad \text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b}$$

exemplo 7

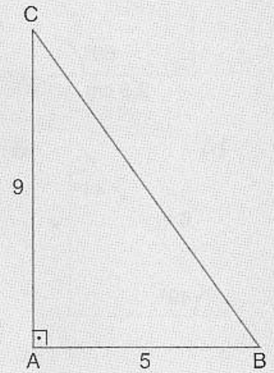
Não é necessário que conheçamos a hipotenusa para achar tg $\hat{B}$ e tg $\hat{C}$.

Veja:

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{9}{5}$$

e

$$\text{tg } \hat{C} = \frac{5}{9}$$



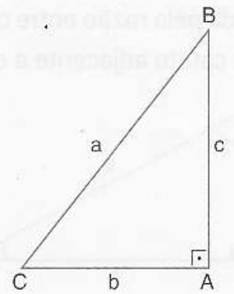
Podemos notar que as tangentes dos ângulos agudos são inversas uma da outra.

Lembrando que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares, podemos escrever, generalizando:

$$\boxed{\text{tg } x \cdot \text{tg } (90° - x) = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\text{tg } (90° - x) = \frac{1}{\text{tg } x}}$$

Relação fundamental II

Observe o triângulo ABC abaixo. Podemos escrever tg $\hat{B} = \frac{b}{c}$.



Dividindo simultaneamente o numerador e o denominador da fração por a (medida da hipotenusa do triângulo), obtemos:

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}, \text{ ou seja, tg } \hat{B} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}}$$

De modo geral, escrevemos:

$$\boxed{\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}}, \text{ para todo ângulo agudo } x.$$

É a chamada relação fundamental II.

exemplo 8

Vamos à tabela completa.

Seja x = 29°. Temos sen 29° = 0,48481 e cos 29° = 0,87462.

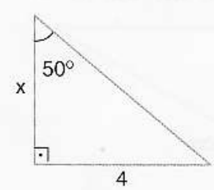
Dividindo 0,48481 por 0,87462, obtemos:

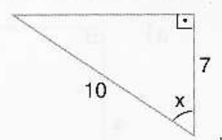
$$0{,}48481 : 0{,}87462 = 0{,}5543 = \text{tg } 29°$$

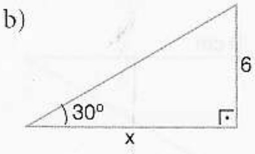
exercícios

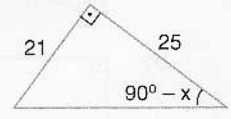
15. Num triângulo retângulo, os catetos medem 6 cm e 5 cm. Determine a medida aproximada do menor ângulo do triângulo.

16. Determine x em cada caso:

a) 

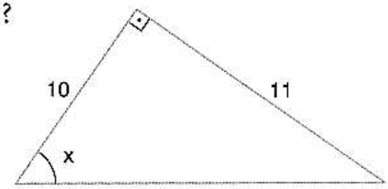
c) 

b) 

d) 

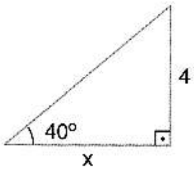
17. Se x é agudo e sen x $= \frac{1}{3}$, quanto vale cos x? E tg x?

18. Na figura abaixo, quanto vale tg x? Quanto vale x?

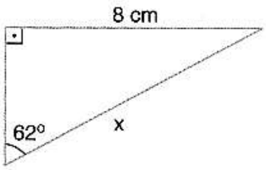


19. Determine a medida x em cada caso:

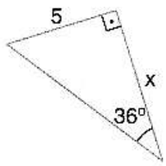
a)



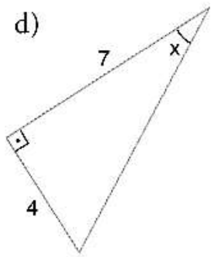
b)



c)



d)



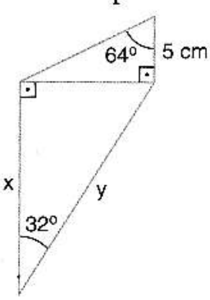
20. Sendo x agudo, se $\text{sen } x = \frac{3}{5}$ e $\text{tg } x = \frac{3}{4}$, quanto vale cos x? Qual é a medida aproximada de x?

21. Um poste de 8 m de altura projeta uma sombra de 5 m. Determine o ângulo que os raios solares formam com o solo nesse instante.

22. Se x é agudo e $\cos x = \frac{1}{4}$, quanto vale tg x?

23. Calcule os valores aproximados dos ângulos de um triângulo retângulo que possui um lado que mede o triplo de outro.

24. Determine as medidas aproximadas de x e y.

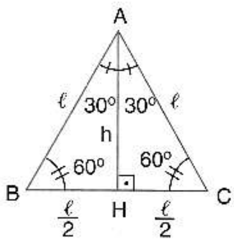


25. Um triângulo possui dois lados medindo 8 cm e um dos ângulos medindo o dobro de outro. Construa as figuras que retratam a situação e, em cada caso, determine a medida do terceiro lado do triângulo.

Ângulos notáveis

Faremos agora algumas considerações importantes com relação aos ângulos de 30°, 45° e 60°, chamados ângulos notáveis.

► Há triângulos retângulos que apresentam um ângulo agudo de 30° (conseqüentemente, o outro ângulo agudo mede 60°). Procuraremos calcular os valores das razões trigonométricas de 30° e 60°. Para tanto, construiremos um triângulo eqüilátero ABC de lado ℓ, traçando sua altura $\overline{AH}$, de medida h.



Temos:

$$BH = CH = \frac{\ell}{2}$$

$$B\hat{A}H = C\hat{A}H = 30°$$

Pelo teorema de Pitágoras, aplicado no $\triangle AHC$, obtemos:

$$h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Podemos, assim, determinar as razões procuradas:

- $\text{sen } 30° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Rightarrow \text{sen } 30° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

- $\cos 30° = \dfrac{h}{\ell} \Rightarrow \cos 30° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} \Rightarrow$

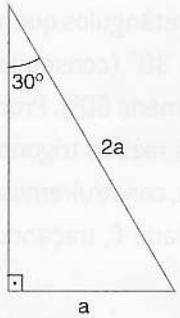
  $\Rightarrow \cos 30° = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- $\text{tg } 60° = \dfrac{h}{\frac{\ell}{2}} = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

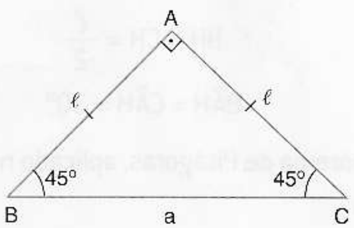
- $\text{tg } 30° = \dfrac{1}{\text{tg } 60°} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

observação

Uma conseqüência importante:
"Se um triângulo retângulo possui um ângulo de 30°, a hipotenusa mede o dobro do cateto oposto a esse ângulo."



► Há triângulos retângulos que apresentam os dois ângulos medindo, cada um, 45°. Vejamos o triângulo retângulo isósceles ABC, de catetos iguais a ℓ e hipotenusa a. Calcularemos os valores das razões trigonométricas de 45°.



Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$a^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2 \Rightarrow a = \ell\sqrt{2}$$

Assim, $\text{sen } 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen } 45° =$

$= \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Temos também $\text{tg } 45° = \dfrac{\text{sen } 45°}{\cos 45°} \Rightarrow \text{tg } 45° = 1$.

Resumindo, temos a seguinte tabela:

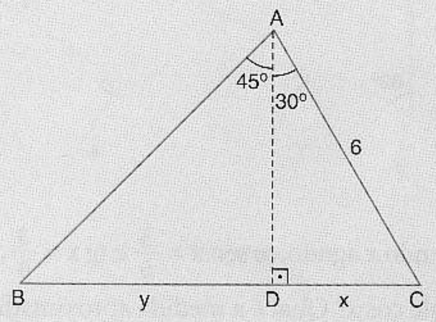
Razão \ Ângulo	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Observe, por exemplo, o valor de sen 45°. Nessa tabela aparece o valor $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, exatamente o mesmo número que consta na tabela completa (sen 45° = = 0,70711).

A alta freqüência com que os ângulos notáveis aparecem justifica a apresentação da tabela anterior. Com ela, os cálculos ficam facilitados.

exemplo 9

Observando a figura abaixo, podemos calcular as medidas dos segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$.



Pela propriedade enunciada, temos:

$$x = \frac{6}{2} = 3 = CD$$

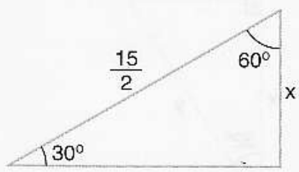
Pelo teorema de Pitágoras:

$$6^2 - 3^2 = AD^2 \Rightarrow AD = 3\sqrt{3} = y = BD$$

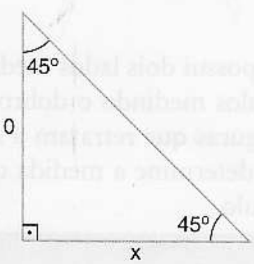
exercícios

26. Encontre o valor de x em cada caso:

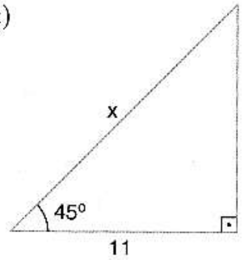
a)



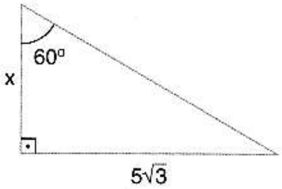
b)



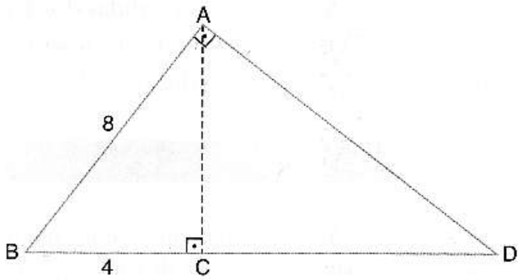
c)



d)



27. Determine:



a) a medida de $\overline{CD}$

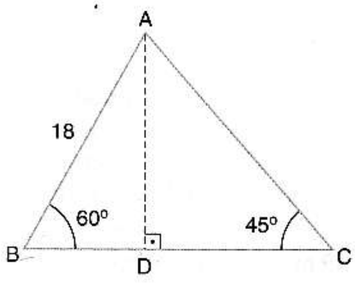
b) cos $B\hat{A}C$

c) $B\hat{D}A$

28. (UF-SC, adaptado) Leia o enunciado a seguir e julgue-o verdadeiro ou falso: Um poste na posição vertical, colocado num plano horizontal, encontra-se a 3 m de uma parede plana e vertical. Em dado instante, o Sol projeta a sombra do poste na parede e esta sombra tem 17 m de altura. Se a altura do poste é de 20 m, então a inclinação dos raios solares, em relação ao plano horizontal, é de 45°.

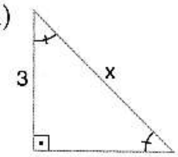
29. Determine os ângulos agudos do triângulo de catetos medindo 3 cm e $3\sqrt{3}$ cm.

30. Determine as medidas dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ da figura abaixo. ABC é triângulo retângulo?

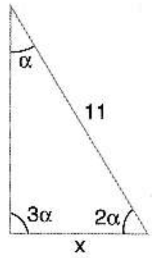


31. Determine a medida x em cada caso:

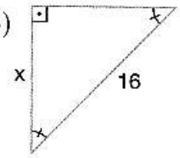
a)



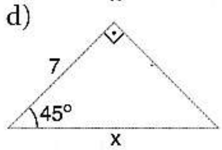
c)



b)

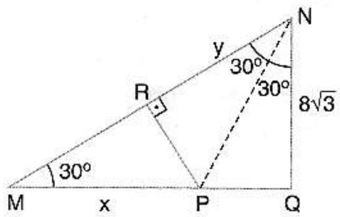


d)

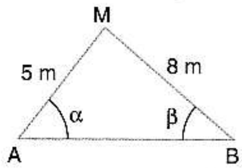


32. Um observador mira, mediante um ângulo de 60°, o topo de uma torre vertical apoiada num plano horizontal. Afastando-se 40 m do pé da torre, passa a mirar seu topo de um ângulo de 30°. Determine a altura da torre.

33. Determine os valores de x e y na figura abaixo.



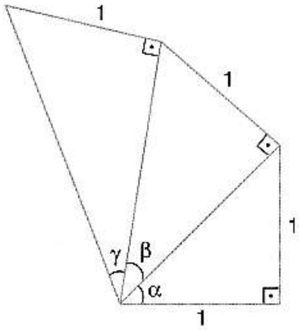
34. Determine α e β, sabendo que a soma deles resulta 90°.



35. A hipotenusa de um triângulo que possui as medidas dos ângulos em progressão aritmética mede 15 cm. Quanto medem os catetos do triângulo?

36. (UF-GO) Uma ducha é fixada diretamente na parede de um banheiro. O direcionamento do jato d'água é feito modificando o ângulo entre a ducha e a parede. Considerando que essa ducha produz um jato d'água retilíneo, uma pessoa em pé, diante da ducha, recebe-o na sua cabeça quando o ângulo entre a ducha e a parede é de 60°. Modificando o ângulo para 44° e mantendo a pessoa na mesma posição, o jato atinge-a 0,70 m abaixo da posição anterior.
Nessas condições, determine a distância dessa pessoa à parede, na qual está instalada a ducha.
(Dados: tg 44° = 0,96 e tg 60° = 1,73.)

37. (UF-RN) A figura a seguir é formada por três triângulos retângulos.



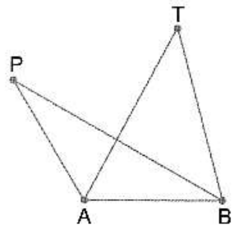
As medidas dos catetos do primeiro triângulo são iguais a 1. Nos demais triângulos, um dos catetos é igual à hipotenusa do triângulo anterior e o outro cateto tem medida igual a 1. Considerando os ângulos α, β e γ, atenda às solicitações seguintes.

a) Calcule tg α, tg β e tg γ.

b) Calcule os valores de α e γ.

c) Justifique por que $105^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 120^\circ$.

38. (UF-AL) Na figura abaixo, os pontos A e B representam a localização de duas pessoas em um terreno plano e a forma como vêem os topos de um poste (P) e de uma antena (T).

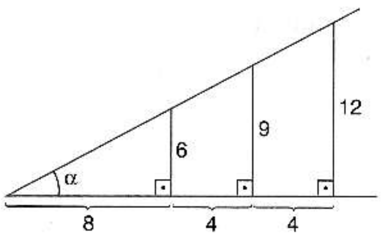


Sabendo que AB = 4 m e as medidas dos ângulos $P\hat{A}B$, $P\hat{B}A$, $T\hat{A}B$ e $T\hat{B}A$ são, respectivamente, 120°, 30°, 60° e 75°, determine a distância de P a T.

testes de vestibulares

1. (Umesp-SP) As razões trigonométricas seno, cosseno, tangente, etc. são razões entre os lados de um triângulo retângulo. Na construção abaixo, podemos escrever que:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \dots = \frac{3}{4}$$



Nessas condições, então, sen α + cos α vale:

a) 1

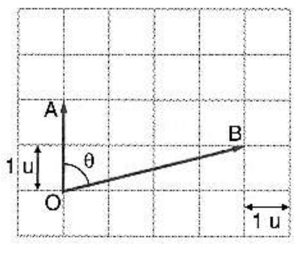
b) $\frac{7}{5}$

c) $\frac{35}{12}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{7}{4}$

2. (U. E. Londrina-PR) Uma cidade planejada foi construída com seu sistema de esgoto obedecendo à esquematização de uma malha linear representada no gráfico a seguir, onde cada vértice dista do adjacente uma unidade.



Os pontos A e B representam duas casas e o ponto O, a origem de uma confluência de canos que necessitam de uma "luva de união". O valor do seno do ângulo θ que a luva de união em O possui é:

a) $\frac{1}{2}$

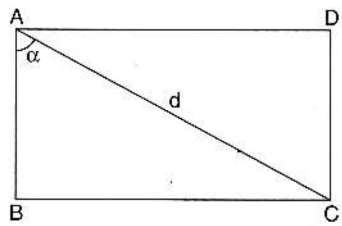
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{4\sqrt{17}}{17}$

e) $\frac{2\sqrt{17}}{17}$

3. (UE-PA) A figura abaixo mostra uma piscina de formato retangular ABCD.



Se a largura ($\overline{AB}$) da piscina mede 15 m e o ângulo (α) formado pela trajetória do nadador com a borda ($\overline{AB}$) da piscina é de 60°, a distância (d) percorrida por uma pessoa que deseja nadar do ponto A até o ponto C em linha reta é:

a) 7,5 m

b) $7{,}5\sqrt{3}$ m

c) $15\sqrt{3}$ m

d) 30 m

e) $30\sqrt{3}$ m

4. (FMU/Fiam/Faam-SP) Considere uma torre, um observador situado a 300 metros dela e o ângulo de 11°, que é formado entre o observador e o ponto mais alto da torre. A altura dessa torre é:

a) 30 m

b) 45 m

c) 58 m

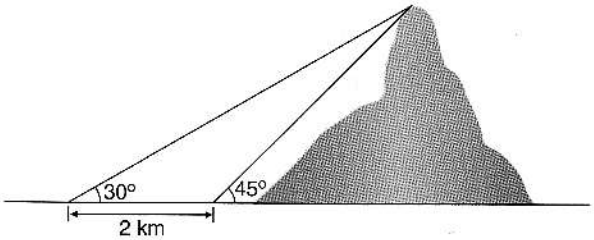
d) 62 m

e) 71 m

5. (UF-PI) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1 000 metros, a altura atingida pelo avião, em metros, é:

a) 500
b) 750
c) 1 000
d) 1 250
e) 1 500

6. (U. F. Juiz de Fora-MG) Ao aproximar-se de uma ilha, o capitão de um navio avistou uma montanha e decidiu medir a sua altura. Ele mediu um ângulo de 30° na direção do seu cume, como indicado na figura. Depois de navegar mais 2 km em direção à montanha, repetiu o procedimento, medindo um novo ângulo de 45°.



Então, usando $\sqrt{3} = 1,73$, o valor que mais se aproxima da altura dessa montanha, em quilômetros, é:

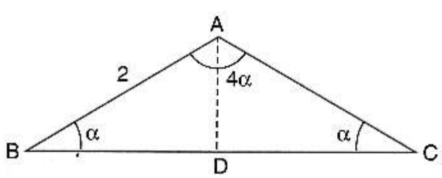
a) 2,1
b) 2,2
c) 2,5
d) 2,7
e) 3,0

7. (UF-AM) Se um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo medem 2a e 4a, respectivamente, então a tangente do ângulo oposto ao menor lado é:

a) $2\sqrt{3}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
d) $\frac{\sqrt{20}}{20}$
e) $3\sqrt{3}$

8. (Mackenzie-SP) Na figura, a medida da bissetriz $\overline{AD}$ é:

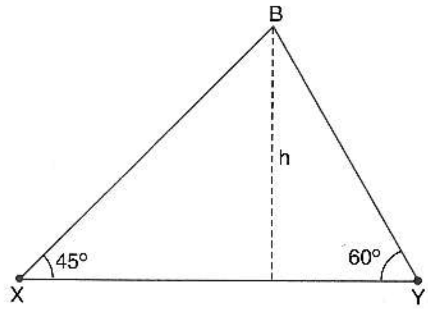
a) 2
b) 1
c) $\frac{5}{3}$
d) $\frac{2}{3}$
e) 3



9. (Cefet-MG) Uma escada que mede 6 m está apoiada em uma parede. Sabendo-se que ela forma com o solo um ângulo α e que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, a distância de seu ponto de apoio na parede até o solo, em metros, é:

a) 4
b) 5
c) $2\sqrt{5}$
d) $3\sqrt{5}$
e) $\sqrt{10}$

10. (Fatec-SP) De dois observatórios, localizados em dois pontos *X* e *Y* da superfície da Terra, é possível enxergar um balão meteorológico *B*, sob ângulos de 45° e 60°, conforme é mostrado na figura abaixo.



Desprezando-se a curvatura da Terra, se 30 km separam *X* e *Y*, a altura *h*, em quilômetros, do balão à superfície da Terra, é:

a) $30 - 15\sqrt{3}$
b) $30 + 15\sqrt{3}$
c) $60 - 30\sqrt{3}$
d) $45 - 15\sqrt{3}$
e) $45 + 15\sqrt{3}$

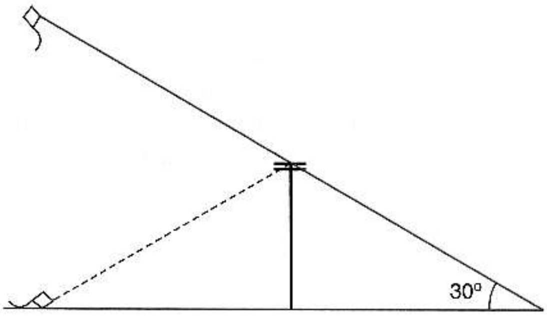
11. (U. F. Viçosa-MG) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos *A*, *B* e *C*. O comandante, quando o navio está em *A*, observa um farol *F* e determina que o ângulo $F\hat{A}C$ mede 30°. Após navegar 6 km até o ponto *B*, ele verifica que o ângulo $F\hat{B}C$ mede 90°. A distância, em km, que separa o farol *F* do navio quando este se encontra no ponto *C*, situado a 2 km do ponto *B*, é:

a) 6
b) $2\sqrt{10}$
c) 4
d) $4\sqrt{7}$
e) 8

12. (U. E. Londrina-PR) Um engenheiro fez um projeto para a construção de um prédio (andar térreo e mais 6 andares), no qual a diferença de altura entre o piso de um andar e o piso do andar imediatamente superior é de 3,5 m. Durante a construção, foi necessária a utilização de rampas para transporte de material do chão do andar térreo até os andares superiores. Uma rampa lisa de 21 m de comprimento, fazendo ângulo de 30° com o plano horizontal, foi utilizada. Uma pessoa que subir essa rampa inteira transportará material, no máximo, até o piso do:

a) 2º andar
b) 3º andar
c) 4º andar
d) 5º andar
e) 6º andar

13. (Cefet-MG) Um menino mantém uma pipa presa a um fio esticado de 90 m de comprimento, que vai perdendo altura, até que fica preso no alto de um poste de 10 m, formando com a horizontal um ângulo de 30°. A pipa atinge o solo ficando com a linha esticada, conforme a figura.



Desprezando-se a altura da criança, a distância final entre ela e a pipa, em metros, é igual a:

a) 90
b) $45\sqrt{3}$
c) $50\sqrt{3}$
d) $10\sqrt{3} + 60$
e) $10\sqrt{3} + 78$

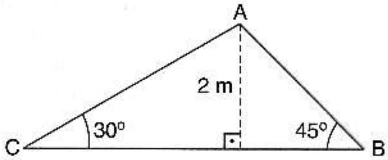
14. (UF-PI) Sejam α e β ângulos internos de um triângulo retângulo, satisfazendo à condição sen $\alpha = 2$ sen β. Se a medida do lado oposto ao ângulo α mede 20 cm, a medida, em centímetros, do lado oposto ao ângulo β é:

a) 10
b) 20
c) 30
d) 40
e) 50

15. (UF-PI) Em um triângulo retângulo, o valor da tangente de um dos ângulos é nove vezes o valor da tangente do outro, e a hipotenusa mede $2\sqrt{10}$ cm. Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira (V) ou falsa (F).

a) A soma das medidas dos catetos é igual a 8 cm.
b) O produto das medidas dos catetos é igual a 12.
c) As medidas dos catetos são iguais.
d) As medidas dos catetos são números racionais, distintos.

16. (Unifor-CE) Deseja-se cercar um jardim de formato triangular e, para isso, é necessário que se conheça o seu perímetro. A figura abaixo apresenta algumas informações sobre o jardim.



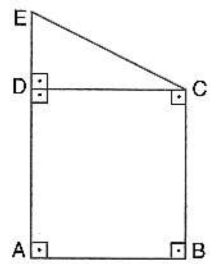
O perímetro do jardim, em metros, é igual a:

a) $6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
b) $\frac{28}{3}\sqrt{5}$
c) $\frac{1}{3} \cdot (6 + 4\sqrt{3})$
d) $\frac{1}{3} \cdot (8\sqrt{3} + 12\sqrt{2})$
e) $6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

17. (UE-RJ) Um foguete é lançado com velocidade igual a 180 m/s, e com um ângulo de inclinação de 60° em relação ao solo. Suponha que sua trajetória seja retilínea e a sua velocidade se mantenha constante ao longo de todo o percurso. Após cinco segundos, o foguete se encontra a uma altura de x metros, exatamente acima de um ponto no solo, a y metros do ponto de lançamento. Os valores de x e y são, respectivamente:

a) 90 e $90\sqrt{3}$
b) $90\sqrt{3}$ e 90
c) 450 e $450\sqrt{3}$
d) $450\sqrt{3}$ e 450

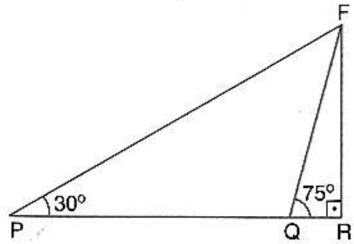
18. (U. F. Uberlândia-MG) O profissional encarregado de projetar um monumento decidiu-se pela figura a seguir, em que AB = 3 m. Para isso, está fazendo algumas simulações, a fim de definir as medidas dos demais lados e ângulos.



Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira (V) ou falsa (F).

a) Se o ângulo $D\hat{E}C$ mede 60°, então, CE = 6 m.
b) Se a tangente do ângulo $D\hat{C}E$ é igual a 1 e a figura toda tem área igual a 25 m², então, AD = 7 m.
c) Se sen $D\hat{E}C = 0{,}2$, então, sen $D\hat{C}E = \sqrt{0{,}96}$.
d) Se a área do triângulo DEC corresponde à metade da área total da figura, então, $2 \cdot AD \cdot \text{tg } D\hat{E}C = 3$.

19. (UCDB-MS) Um barco, ao navegar em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos P, Q e R. Um tripulante, quando está no ponto P, observa um farol sob o ângulo $F\hat{P}R = 30°$, conforme a figura abaixo. Depois de navegar mais 4 km até o ponto Q, verifica o ângulo $F\hat{Q}R = 75°$.

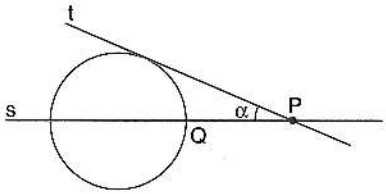


Logo, a distância do farol até o ponto R é:

a) $\sqrt{3}$ km
b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ km
c) $3\sqrt{3}$ km
d) $(\sqrt{3} - 1)$ km
e) $(\sqrt{3} + 1)$ km

Dado: tg 75° = $2 + \sqrt{3}$.

20. (Fuvest-SP) Na figura abaixo, a reta *s* passa pelo ponto *P* e pelo centro da circunferência de raio *R*, interceptando-a no ponto *Q*, entre *P* e o centro. Além disso, a reta *t* passa por *P*, é tangente à circunferência e forma um ângulo α com a reta *s*. Se PQ = 2R, então cos α vale:



a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

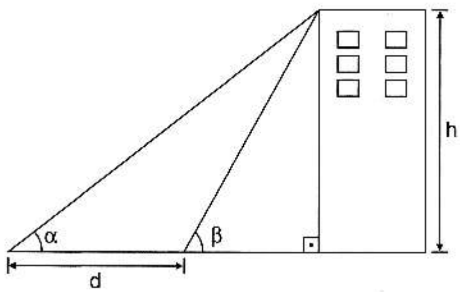
b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

e) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

21. (U. F. Ouro Preto-MG) Um observador vê um prédio segundo um ângulo α. Após caminhar uma distância *d* em direção ao prédio, ele passa a vê-lo segundo um ângulo β.



Podemos afirmar que a altura *h* do prédio é:

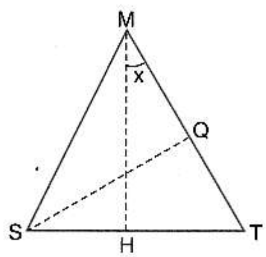
a) $\frac{d \cdot \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha}$

b) $\frac{d \cdot \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}$

c) $\frac{d \cdot \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\alpha}$

d) d

22. (U. F. Ouro Preto-MG) No triângulo STM, os segmentos de reta $\overline{MH}$ e $\overline{SQ}$ são alturas.



Se ST = 2 e TQ = 1, então a medida do ângulo *x* vale:

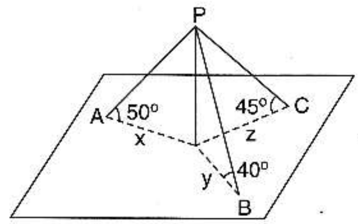
a) 60°

b) 45°

c) 30°

d) 15°

23. (ESPM-SP) Um mastro vertical é mantido nessa posição por 3 cabos esticados que partem da extremidade *P* e são fixados no chão nos pontos *A*, *B* e *C*, conforme a figura abaixo.



Sendo *x*, *y* e *z* as distâncias respectivas desses pontos ao pé do mastro, pode-se afirmar que:

a) $z = \frac{x+y}{2}$

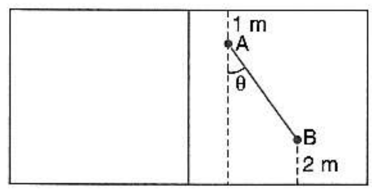
b) $z = \frac{xy}{2}$

c) $z = \sqrt{xy}$

d) $z = \sqrt{x+y}$

e) $z = \frac{xy\sqrt{2}}{2}$

24. (PUC-RS) Um campo de vôlei de praia tem dimensões 16 m por 8 m. Duas jogadoras, *A* e *B*, em um determinado momento de um jogo, estão posicionadas como na figura abaixo.



A distância *x*, percorrida pela jogadora *B* para se deslocar paralelamente à linha lateral, colocando-se à mesma distância da rede em que se encontra a jogadora *A*, é:

a) 5 tg θ

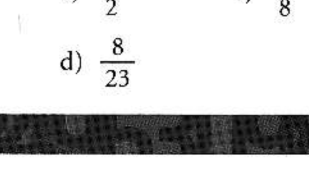
b) 5 sen θ

c) 5 cos θ

d) 2 tg θ

e) 2 cos θ

25. (Vunesp-SP) A figura mostra duas circunferências de raios 8 cm e 3 cm, tangentes entre si e tangentes à reta *r*; *C* e *D* são os centros das circunferências.



Se α é a medida do ângulo $C\hat{O}P$, o valor de sen α é:

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{5}{11}$

c) $\frac{1}{2}$

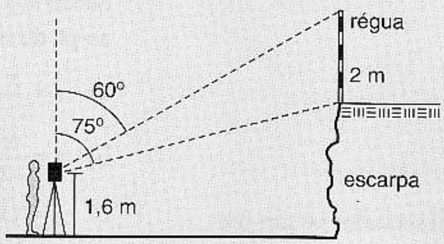
d) $\frac{8}{23}$

e) $\frac{3}{8}$

desafios

1. Monte uma figura em que apareça um triângulo retângulo com as medidas dos ângulos em progressão aritmética. A seguir, determine a razão entre as medidas das hipotenusas dos triângulos que aparecem na figura após ser traçada a bissetriz do maior ângulo agudo do triângulo inicial.

2. (Unicamp-SP) De uma praia, um topógrafo observa uma pequena escarpa sobre a qual foi colocada, na vertical, uma régua de 2 m de comprimento. Usando seu teodolito, o topógrafo constatou que o ângulo formado entre a reta vertical que passa pelo teodolito e o segmento de reta que une o teodolito ao topo da régua é de 60°, enquanto o ângulo formado entre a mesma reta vertical e o segmento que une o teodolito à base da régua é de 75°.



Sabendo que o teodolito está a uma altura de 1,6 m do nível da base da escarpa, responda às questões abaixo:

a) Qual a distância horizontal entre a reta vertical que passa pelo teodolito e a régua sobre a escarpa?

b) Qual a altura da escarpa?

$\left(\text{Para facilitar os cálculos, use tg } 15° = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}.\right)$