Determinante

1. (Uepg 2014) Considerando as matrizes abaixo, sendo $\det A = 5$, $\det B = -1$ e $\det C = 2$, assinale o que for correto.

$$A = \begin{pmatrix} x & z \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2x & y-x \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} x+z & y \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

01) $x+y+z=0$

02) $A - C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

04) $B \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

08) $y = 2x$

16) $A + B = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$

2. (Udesc 2014) Se A^T e A^{-1} representam, respectivamente, a transposta e a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, então o determinante da matriz $B = A^T - 2A^{-1}$ é igual a:

a) $\frac{-111}{2}$
b) $\frac{-83}{2}$
c) -166
d) $\frac{97}{2}$
e) 62

3. (G1 - ifce 2014) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 2 & \operatorname{sen}\theta \\ 3 & 1 & 3 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}.$$ Sabendo-se que

$\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$, em que $0 \le \theta \le 2\pi$, o determinante da matriz inversa de A, indicado por Det A^{-1}, vale

a) – 1.
b) 0.
c) 1.
d) 2.
e) – 5.

4. (Uepb 2014) Se x e y são números reais não nulos e $\begin{vmatrix} x & y & x^2+y^2 \\ x & 0 & x^2 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0$, então o valor de $2x+3y$ é:

a) 10
b) 4
c) 7
d) –5
e) 5

5. (Uece 2014) Se os números reais x, y, z, m, n, p, u, v, w formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão q, então o valor do determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ u & v & w \end{bmatrix}$ é

a) 1.
b) 0.
c) xnw.
d) q^3.

6. (Espm 2014) Se a matriz $\begin{bmatrix} 3 & x \\ 4 & x+1 \end{bmatrix}$ for multiplicada pelo valor do seu determinante, este ficará multiplicado por 49. Um dos possíveis valores de x é:

a) 5
b) –3
c) 1
d) –4
e) 2

7. (Pucrs 2014) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, o determinante $\det(A \cdot B)$ é igual a

a) 18
b) 21
c) 32
d) 126
e) 720

8. (Uece 2014) Uma matriz quadrada $P = (aij)$ é simétrica quando $aij = aji$. Por exemplo, a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica.

Se a matriz $M = \begin{bmatrix} x+y & x-y & xy \\ 1 & y-x & 2y \\ 6 & x+1 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, pode-se afirmar corretamente que o determinante de M é igual a

a) – 1.
b) – 2.
c) 1.
d) 2.

9. (Uem 2013) Sejam *A* uma matriz 2×2 e *B* e *C* matrizes 2×1, de modo que $AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $A(B+C) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Assinale o que for **correto**.

01) $AC = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

02) Necessariamente $\det A \neq 0$.

04) Se $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, então $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

08) Se *A* for a matriz identidade, então $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

16) Se $C^t AB = 0$, os dois elementos de C são iguais.

10. (Mackenzie 2013) Sendo $A = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen}x \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} \log_2 256 & \log_2 0{,}25 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$ números reais, o valor da expressão $-A \cdot B^{-1}$ é

a) -3
b) $-\frac{1}{3}$
c) $-\frac{1}{5}$
d) 1
e) 5

11. (Epcar (Afa) 2013) Considere as matrizes A e B, inversíveis e de ordem **n**, bem como a matriz identidade I.

Sabendo que $\det(A) = 5$ e $\det\left(I.B^{-1}.A\right) = \frac{1}{3}$, então o $\det\left[3.\left(B^{-1}.A^{-1}\right)^t\right]$ é igual a

a) $5 \cdot 3^n$
b) $\frac{3^{n-1}}{5^2}$
c) $\frac{3^n}{15}$
d) 3^{n-1}

12. (Uepb 2013) A equação
$$\begin{vmatrix} \log(x-1) & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \log(x-1) & 1 & \log(x-1) \end{vmatrix} = 0$$ tem como solução real os valores de x:

a) 2 e 10
b) 0 e 2
c) 3 e 11
d) 4 e 11
e) 2 e 11

13. (Udesc 2013) Seja X o conjunto formado por todas as matrizes diagonais de ordem 2×2. Analise as proposições:

I. A multiplicação de matrizes pertencentes a X satisfaz a propriedade comutativa.
II. Todas as matrizes pertencentes ao conjunto X possuem inversa.
III. A matriz identidade de ordem 2×2 pertence ao conjunto X.
IV. Se A e B são dois elementos pertencentes a X, então $A + B$ também pertence a X.

Assinale a alternativa **correta**.
a) Somente a afirmativa II é verdadeira.
b) Somente as afirmativas I, III e IV são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas I e IV são verdadeiras.
d) Somente a afirmativa III é verdadeira.
e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

14. (Ufpr 2012) Considere o polinômio
$$p(x) = \begin{bmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule as raízes de p(x). Justifique sua resposta, deixando claro se utilizou propriedades de determinantes ou algum método para obter as raízes do polinômio.

15. (Ufes 2012) Seja $A = \begin{bmatrix} b & a_{12} & a_{13} \\ 2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & c \end{bmatrix}$ uma matriz real 3x3 invertível.

a) Determine os elementos a_{12} e a_{13} da matriz A, sabendo que existe um número real x tal que $a_{12} = \cos(2x) + 2\operatorname{sen}^2$ e que $a_{13} = \sec(9\pi) + \operatorname{tg}(-3\pi)\operatorname{sen}(3x)$.
b) Calcule os elementos da segunda linha da matriz A, sabendo que 2, a_{22} e a_{23} formam, nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma é 3.
c) Determine os elementos b e c da matriz A de modo que b = c = det(A), sabendo que os elementos a_{31} e a_{32}, ambos positivos, são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de uma das raízes complexas da equação $z^3 - 4z^2 + 5z = 0$.

16. (Uepb 2012) Se a matriz com $\det(A) = 1$ e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & 0 \end{pmatrix}$, o valor de m é

a) -1
b) 1
c) 0
d) 2
e) -2

17. (Fgv 2012) Seja a matriz identidade de ordem três $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *A* a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Considere a equação polinomial na variável real *x* dada por $\det(A - xI) = 0$ em que o símbolo

$\det(A - xI)$ indica o determinante da matriz $A - xI$. O produto das raízes da equação polinomial é:
a) 3
b) 2
c) 1
d) 0
e) -1

18. (Feevale 2012) Sendo $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6,$ o valor de

$\begin{vmatrix} 3x+1 & 8 \\ 3y+1 & 8 \end{vmatrix}$ é:
a) 6
b) 8
c) 24
d) 128
e) 144

19. (Uern 2012) Sejam as matrizes
$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ x & 4 & 1 \\ -1 & 6 & y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & y & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ x & -1 & 1 \end{bmatrix}$, cujos determinantes são, respectivamente, iguais a 63 e 49. Sendo y = x + 3, então a soma dos valores de x e y é
a) 7.
b) 8.
c) 10.
d) 12.

20. (Ime 2012) Calcule as raízes de f(*x*) em função de a,b e c, sendo a,b,c e $x \in \mathbb{R}$ (real) e
$f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$.

Resolução das Questões

Resposta da questão 1:
01 + 02 + 04 = 07.

Desde que

$$\begin{vmatrix} x & z \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \Leftrightarrow 4x + z = 5,$$

$$\begin{vmatrix} 2x & y-x \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Leftrightarrow 2x + 5y - 5x = -1$$

$$\Leftrightarrow -3x + 5y = -1$$

e

$$\begin{vmatrix} x+z & y \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Leftrightarrow x + 3y + z = 2,$$

temos $x = 2, y = 1$ e $z = -3.$

Portanto, vem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

[01] Correto. Temos $x + y + z = 2 + 1 + (-3) = 0.$

[02] Correto. De fato, somando a matriz A com a oposta de C, vem

$$A - C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

[04] Correto. Com efeito, efetuando o produto, encontramos

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

[08] Incorreto. Tem-se que $x = 2y.$

[16] Incorreto. Efetuando a adição, obtemos

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Resposta da questão 2:
[B]

O determinante de A é igual a

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 3 = 4. \text{ Logo,}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{4}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \text{ Daí, } 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{11}{2} \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

O resultado pedido é

$$\begin{vmatrix} -2 & \frac{11}{2} \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 - 5 \cdot \frac{11}{2} = -\frac{83}{2}.$$

Resposta da questão 3:
[C]

Calculando o determinante de A, temos:
$\det(A) = \cos^2\theta - 6 \cdot \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta - 6 \cdot \cos\theta$
Considerando que $\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$, temos det(A) = 1 e
$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = 1$

Resposta da questão 4:
[E]

Desenvolvendo o determinante da equação, temos:
$-3x^3 - 5xy + 3x \cdot (x^2 + y^2) + 2x^2y = 0$
$-3x^3 - 5xy + 3x^3 + 3xy^2 + 2x^2y = 0$
$-5xy + 3xy^2 + 2x^2y = 0$
$xy(-5 + 3y + 2x) = 0$

Como o produto $(x \cdot y)$ é não nulo, temos:
$3y + 2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 5$

Resposta da questão 5:
[B]

$$M = \begin{bmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x & xq & xq^2 \\ xq^3 & xq^4 & xq^5 \\ xq^6 & xq^7 & xq^8 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois as duas}$$

primeiras colunas são proporcionais.

$$\frac{x \cdot q}{x} = \frac{x \cdot q^4}{x \cdot q^3} = \frac{x \cdot q^7}{x \cdot q^6} = q.$$

Resposta da questão 6:

[D]

Seja k o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 3 & x \\ 4 & x+1 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$, com λ sendo um número real e n a ordem da matriz quadrada A, vem

$$49 \cdot k = k^2 \cdot k \Leftrightarrow k \cdot (k^2 - 49) = 0$$
$$\Leftrightarrow k = 0 \text{ ou } k = -7 \text{ ou } k = 7.$$

Desse modo, se $k = 0$, então

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ 4 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x + 3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Se $k = -7$, então

$$-x + 3 = -7 \Leftrightarrow x = 10.$$

Se $k = 7$, então

$$-x + 3 = 7 \Leftrightarrow x = -4.$$

Por conseguinte, um dos possíveis valores de x é -4.

Resposta da questão 7:
[C]

$$A \cdot B = [1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6] = [32] \text{ e } \det(A \cdot B) = 32$$

Resposta da questão 8:
[B]

$$M = \begin{bmatrix} x+y & x-y & xy \\ 1 & y-x & 2y \\ 6 & x+1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 1 & 6 \\ x-y & y-x & x+1 \\ xy & 2y & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x \cdot y = 6 \\ x+1 = 2y \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: x = 3 e y = 2.

$$\text{Portanto, } \det(M) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Resposta da questão 9:
02 + 04 + 08 + 16 = 30.

Sejam $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$.

Logo,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx + ny = 1 \\ mz + nw = -1 \end{cases}$$

e

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m+p \\ n+q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+p)x + (n+q)y = 2 \\ (m+p)z + (n+q)w = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (mx+ny) + px + qy = 2 \\ (mz+nw) + pz + qw = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} px + qy = 1 \\ pz + qw = 2 \end{cases}.$$

[01] **Incorreto**. Temos

$$AC = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} px+qy \\ pz+qw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[02] **Correto**. De fato,

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}A(B+C) = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow B + C = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para que a soma $B + C$ esteja definida, a matriz A deve ser invertível. Desse modo, necessariamente, $\det A \neq 0$.

[04] **Correto**. Se $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, então $m = 1, n = 0, p = 0$ e $q = 1$. Logo, $x = 1, z = -1, y = 1$ e $w = 2$.

[08] **Correto**. Se $A = I_2$, então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

[16] **Correto**. Se $C^t AB = 0$, então

$$\begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow p - q = 0$$
$$\Rightarrow p = q.$$

Resposta da questão 10:
[B]

$$A = sen^2x - \left(-cos^2x\right) = sen^2x + cos^2x = 1$$
$$B = \left(\frac{1}{4}\right)\cdot \log_2 256 - \left(\frac{1}{2}\right)\cdot \log_2 0{,}25 = \left(\frac{1}{4}\right)\cdot 8 - \left(\frac{1}{2}\right)\cdot(-2) = 2 + 1 = 3$$
Então, $-A \cdot B^{-1} = -1 \cdot 3^{-1} = \frac{-1}{3}.$

Resposta da questão 11:
[B]

$$\det\left(I \cdot B^{-1} \cdot A\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \det\left(B^{-1}A\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \det\left(B^{-1}\right)\cdot \det(A) = \frac{1}{3} \Rightarrow \det\left(B^{-1}\right)\cdot 5 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$
$$\det B^{-1} = \frac{1}{15}$$

$$\det\left[3\cdot\left(B^{-1}\cdot A^{-1}\right)^t\right] = \det\left[3\cdot(A^{-1}\cdot B^{-1}\right] = 3^n \cdot \det\left(A^{-1}\cdot B^{-1}\right) = 3^n \cdot \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{15} =$$
$$= \frac{3^n}{3\cdot 5^2} = \frac{3^{n-1}}{5^2}$$

Resposta da questão 12:
[E]

Temos

$$\begin{vmatrix} \log(x-1) & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \log(x-1) & 1 & \log(x-1) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \log(x-1)[\log(x-1)-1] = 0$$
$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} \log(x-1) = 0 \\ \text{ou} \\ \log(x-1) - 1 = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 11.$$

Resposta da questão 13:
[B]

[I] **Correto**. Sejam $A, B \in X$, com $A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$

Temos

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} mp & 0 \\ 0 & nq \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \\ &= B \cdot A. \end{aligned}$$

Portanto, a multiplicação de matrizes pertencentes a X possui a propriedade comutativa.

Observação: Não é correto dizer que "a multiplicação satisfaz a propriedade". Para saber mais, consulte **A matemática do ensino médio**, vol. 1, Elon Lages Lima et al, SBM.

[II] **Incorreto**. Seja $C \in X,$ tal que $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$ Como $\det C = 0,$ segue que C não é invertível.

[III] **Correto**. Como $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz diagonal de ordem $2,$ é claro que $I_2 \in X.$

[IV] **Correto**. Sejam $A, B \in X,$ com $A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$

Temos

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m+p & 0 \\ 0 & n+q \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que também é uma matriz diagonal de ordem $2.$ Portanto, $A + B \in X.$

Resposta da questão 14:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Aplicando Regra de Sarrus}]{} p(x) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & x & -x & 3 & x \\ 3 & x & -4 & 3 & x \\ x & 3 & -3 & x & 3 \end{array}\right| = x^3 - 4x^2 - 9x + 36$$

Portanto: (fatorando o polinômio)

$$p(x) = x^3 - 4x^2 - 9x + 36$$
$$\Rightarrow p(x) = x^2(x-4) - 9(x-4)$$

$$\Rightarrow p(x) = x^2(x-4) - 9(x-4)$$

$$\Rightarrow p(x) = (x^2-9)(x-4) \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = +4 \end{cases}$$

Resposta da questão 15:

a) $a_{12} = \cos^2 x - \text{sen}^2 x + 2.\text{sen}^2 x = \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$
$a_{13} = -1 + 0.\text{sen}3x = -1$.

b) $(2, a_{22}, a_{23})$ é uma P.A., então $(2, a_{22}, a_{23}) = (2, 2+r, +2+2r)$, ou seja:

$2 + 2+r + 2 + 2r = 3$
$3r = -6$
$r = -1$

Logo, $a_{22} = 2 + (-1) = 1$ e $a_{23} = 2 + 2.(-1) = 0$.

c) As raízes da equação $z^3 - 4z^2 + 5.z = 0$ são 0, 2 + i e 2 – i, portanto, $a_{31} = 2$ e $a_{32} = 1$.

Logo, $A = \begin{pmatrix} b & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix}$ e det(A) = d = b = c, então :

$\det(A) = bc - 2c \Leftrightarrow d = d.d - 2d \Leftrightarrow d^2 - 3d = 0 \Leftrightarrow d = 0$ (não convém, pois A é invertível) n ou d = 3.

Logo, b = c = 3.

Resposta da questão 16:

[B]

Temos

$$\det A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - m\cdot(-1) = m.$$

Logo, pelo Teorema de Binet, segue que

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Leftrightarrow 1\cdot m = 1$$
$$\Leftrightarrow m = 1.$$

Resposta da questão 17:

[E]

$$A - x.I = \begin{bmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante det(A – x.I) temos $x^2(1-x) - (1-x) = (1-x).(x^2-1)$

As raízes do determinante são 1 (dupla) e –1.

Portanto, o produto das raízes será 1.(–1).1 = –1.

Resposta da questão 18:

[E]

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow x - y = 6 \quad (\text{ I })$$

$$\begin{vmatrix} 3x+1 & 8 \\ 3y+1 & 8 \end{vmatrix} = 8.(3x+1) - 8.(3y-1) = 24x - 24y = 24(x-y) \quad (\text{ II })$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$\begin{vmatrix} 3x+1 & 8 \\ 3y+1 & 8 \end{vmatrix} = 24.6 = 144$$

Resposta da questão 19:

[A]

O determinante da matriz A em função de x e de y é dado por

$$\det A = 12y - 1 + 12x + 8 - 18 - xy = 12x + 12y - xy - 11.$$

Mas $\det A = 63$ e $y = x + 3$. Logo,

$$12x + 12(x+3) - x(x+3) - 11 = 63 \Leftrightarrow x^2 - 21x + 38 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 19.$$

Daí, $(x, y) = (2, 5)$ ou $(x, y) = (19, 22)$.

Por outro lado, o determinante da matriz B é dado por

$$\det B = 24 + 3xy - 2 - 8x + 18 - y = -8x - y + 3xy + 40.$$

Assim, dado que detB = 49, concluímos, por inspeção, que $x = 2$ e $y = 5$ e, portanto, $x + y = 2 + 5 = 7$.

Resposta da questão 20:

Temos

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & a & b & c\\ a & x & c & b\\ b & c & x & a\\ c & b & a & x\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c\\ a+x+c+b & x & c & b\\ b+c+x+a & c & x & a\\ c+b+a+x & b & a & x\end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c\\ 1 & x & c & b\\ 1 & c & x & a\\ 1 & b & a & x\end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & c-b & b-c\\ c-a & x-b & a-c\\ b-a & a-b & x-c\end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a+c-b & c-b & b-c\\ c-a+x-b & x-b & a-c\\ b-a+a-b & a-b & x-c\end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a+c-b & c-b & b-c\\ c-a+x-b & x-b & a-c\\ 0 & a-b & x-c\end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)(x-a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & c-b & b-c\\ 1 & x-b & a-c\\ 0 & a-b & x-c\end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)(x-a-b+c)\begin{vmatrix} x-b-c+b & a-c-b+c\\ a-b & x-c\end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)(x-a-b+c)\begin{vmatrix} x-c & a-b\\ a-b & x-c\end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c)(x-a-b+c)[(x-c)^2-(a-b)^2]$$

$$=(x+a+b+c)(x-a-b+c)(x-a+b-c)(x+a-b-c).$$

Portanto, os zeros de f são
$-a-b-c, a+b-c, a-b+c$ e $-a+b+c.$