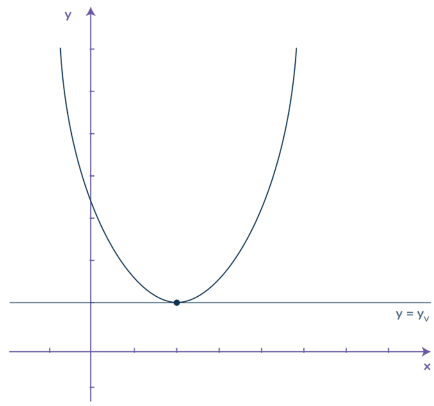
VÉRTICE DA PARÁBOLA

Para continuar nosso estudo das funções de segundo grau, precisamos analisar algumas propriedades a seu respeito. Com o objetivo de estudar o comportamento dessas funções, vamos definir o **vértice** de uma parábola.

Dada uma função quadrática $f(x)$, o vértice da parábola corresponde ao ponto no qual o gráfico de $f(x)$ muda de sentido.

O vértice da parábola nos traz informações muito úteis a respeito do comportamento da função $f(x)$, como veremos mais a frente. Por este motivo, é importante conhecermos as coordenadas do vértice da parábola. Para encontrar essas coordenadas, vamos chamá-las de (x_V, y_V) e considerar a reta $y = y_V$, que tangencia a parábola no vértice:



Assim, as coordenadas do vértice da parábola serão dadas pela interseção entre a parábola e a reta $y = y_V$. Assim como fizemos para as funções afins, podemos encontrar as coordenadas de tal interseção resolvendo o sistema a seguir:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = y_V \end{cases}$$

Substituindo a segunda linha do sistema acima na primeira, temos:

$$ax^2 + bx + c = y_V \Rightarrow ax^2 + bx + (c - y_V) = 0$$

Agora, queremos que a equação acima tenha apenas uma solução (já que a parábola possui apenas um vértice). Então, iremos impor que o discriminante seja nulo, ou seja, $\Delta = 0$. Logo, devemos ter:

$$b^2 - 4a(c - y_V) = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac + 4ay_V = 0 \Rightarrow y_V = \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-\Delta}{4a}$$

Assim, a ordenada do vértice da parábola é $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$. Agora, substituindo o valor de y_V na equação da parábola, encontramos a abscissa do vértice:

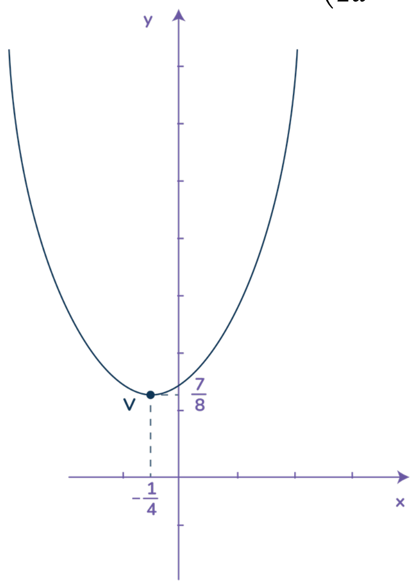
$$ax^2 + bx + c = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + \Delta = 0 \Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 0 \Rightarrow (2ax + b)^2 = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

Logo, a abscissa do vértice é dada por $x_V = \frac{-b}{2a}$.

Portanto, o vértice de uma parábola de equação $f(x) = ax^2+bx+c$ é o ponto $V = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Exemplo: Encontre o vértice da parábola associada à função quadrática $f(x)=2x^2+x+1$.



Neste caso, temos $a = 2$, $b = 1$ e $c = 1$. Logo, $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7$. Assim, $x_V = \frac{-1}{4}$ e $y_V = \frac{-(-7)}{8} = \frac{7}{8}$. Logo, $V = \left(\frac{-1}{4}, \frac{7}{8}\right)$.

Observação

- O x_V também pode ser calculado através da **média aritmética das raízes** e o y_V também pode ser calculado **substituindo** o x_V na lei de formação.

MÁXIMOS E MÍNIMOS

Dada uma parábola, dependendo da sua concavidade, o vértice é o ponto de máximo ou ponto de mínimo.

Valor máximo de uma função quadrática

Vamos nos dedicar agora ao estudo do **valor máximo** de uma função quadrática. De maneira geral, o máximo de uma função é dado por um ponto x pertencente ao domínio de f de forma que $f(x) \geq f(z)$, para qualquer z no domínio de f .

No caso específico das funções quadráticas, nem sempre podemos encontrar um ponto de máximo: imagine uma função $f = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$. Neste caso, a função cresce infinitamente, e não podemos encontrar um valor de máximo. Vamos então estudar apenas funções polinomiais de segundo grau tais que $a < 0$.

Já vimos que o vértice de uma função quadrática é o ponto no qual o gráfico da função muda de sentido. Por este motivo, é razoável pensarmos que encontrar o máximo de uma função quadrática é equivalente a encontrar as coordenadas de seu vértice. E é exatamente isso que acontece! Observe a definição abaixo:

Se V é o vértice da parábola que representa graficamente a função polinomial do segundo grau $f(x) = ax^2+bx+c$, com $a < 0$, então V é chamado de **ponto máximo da função**, sendo sua ordenada o **valor máximo de** f .

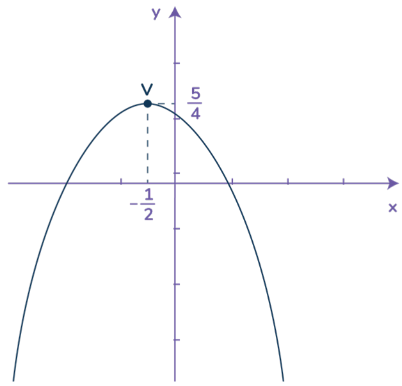
Exemplo: Encontre o valor máximo e o ponto máximo da função $f(x) = -x^2 - x + 1$.

Novamente, vamos encontrar as coordenadas do vértice da parábola correspondente a f:

$$x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_V = \frac{1}{-2} \Rightarrow x_V = \frac{-1}{2} \quad \text{e}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{(-5)}{(-4)} \Rightarrow y_V = \frac{5}{4}$$

Logo, o ponto máximo da função é $V = \left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ e seu valor máximo é $\frac{5}{4}$.



Valor mínimo de uma função quadrática

Assim como fizemos para o caso de valor máximo, podemos definir de forma geral o mínimo de uma função: o valor mínimo de uma função é dado por um ponto x pertencente ao domínio de f de forma que $f(x) \leq f(z)$, para qualquer z no domínio de f .

Se nos voltarmos ao caso específico das funções de segundo grau, iremos perceber novamente que em alguns casos não será possível encontrar um valor mínmo para f: imagine uma função $f = ax^2 + bx + c$ com $a < 0$. Neste caso, a função decresce infinitamente, e não podemos encontrar um valor mínimo. Vamos então estudar apenas funções polinomiais de segundo grau tais que $a > 0$.

Analogamente ao que vimos no estudo do valor máximo, temos que encontrar o valor mínimo de f é equivalente à encontrar as coordenadas do vértice da parábola correspondente. Observe a definição a seguir:

Se V é o vértice da parábola que representa graficamente a função polinomial do segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, então V é chamado de **ponto mínimo da função**, sendo sua ordenada o **valor mínimo de** f .

Exemplo: Encontre o valor mínimo e o ponto mínimo da função $f(x) = 5x^2 + 2x + 4$.

Conforme a definição acima, basta encontrarmos as coordenadas do vértice de f :

$$x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_V = \frac{-2}{10} \Rightarrow x_V = \frac{-1}{5} \quad \text{e}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-(-76)}{20} \Rightarrow y_V = \frac{19}{5} \quad .$$

Logo, o ponto mínimo da função é $V = \left(\frac{-1}{5}, \frac{19}{5}\right)$ e seu valor mínimo é $\frac{19}{5}$.