

# Estática

*E dinâmica do corpo extenso*

Prof. João Maldonado

*Aula 15*

*ITA 2020*

## SUMÁRIO

Introdução .....	3
1. Estática .....	4
1.1. Forças aplicadas ao ponto material e equilíbrio .....	4
1.2. Momento ou torque de uma força .....	8
1.3. O centro de gravidade.....	11
1.4. Binário .....	14
1.5. Equilíbrio do corpo extenso .....	17
1.5.1. Teorema das três forças .....	18
1.6. Alguns exemplos de equilíbrio estático.....	21
1.6.1. Caminhando na prancha .....	21
1.6.2. Levantando uma roda .....	23
1.6.3. Uma escada apoiada.....	25
1.7. Equilíbrio estático em um referencial acelerado.....	27
2. Rotação.....	29
2.1. Cinemática rotacional .....	29
2.2. Energia cinética rotacional.....	31
2.3. Cálculo do momento de inércia .....	33
2.4. Teorema dos eixos paralelos .....	36
2.5. Segunda lei de Newton para a rotação .....	37
2.5.1. Condições de não-deslizamento .....	41
2.6. Potência.....	42
2.7. Rolamento de corpos com ou sem deslizamento .....	44
2.7.1. Rolamento sem deslizamento .....	44
2.7.2. Rolamento com deslizamento .....	46
2.8. Quantidade de movimento angular ou momento angular.....	47
3. Lista de exercícios .....	51
4. Gabarito sem comentários .....	90
5. Lista de exercícios comentada .....	92
6. Considerações finais.....	212
7. Referências bibliográficas .....	213
8. Versão de aula .....	214



## Introdução

Nesta aula vamos trabalhar os conceitos de estática de uma partícula e de um corpo extenso. Para isso, apresentaremos o conceito de momento (ou torque) de uma força e as condições para que um corpo permaneça em equilíbrio. Esses temas iniciais são muito cobrados no vestibular do ITA.

Além disso, trabalharemos os conceitos de momento de inércia, lei de Newton para a rotação e exercícios envolvendo condição de rolamento e energia. Esses temas são pouco cobrados, mas eventualmente aparece algo relacionado à teoria.

Estude com calma os temas novos, já que eles não são abordados no ensino médio comum. Procuramos exemplificar esses assuntos com questões que podem aparecer na sua prova. Como é um assunto que pode não ser cobrado na sua prova, não perca muito tempo querendo saber tudo e todos os detalhes. A nossa teoria já está bem encaixada para tudo aquilo que o vestibular pode cobrar.

O conceito de momento angular é muitas vezes trabalhado em Gravitação. Por isso, peço que fique bem atento quando estiver nesse capítulo.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @prof.maldonado





## 1. Estática

A Estática é o ramo da Mecânica que estuda as condições de equilíbrio do ponto material (ou partícula) e do corpo extenso. Por razões didáticas, vamos iniciar nossos estudos de estática com as circunstâncias que levam ao equilíbrio do ponto material.

### 1.1. Forças aplicadas ao ponto material e equilíbrio

Considere um ponto material sujeito à  $n$  forças, conforme figura abaixo:

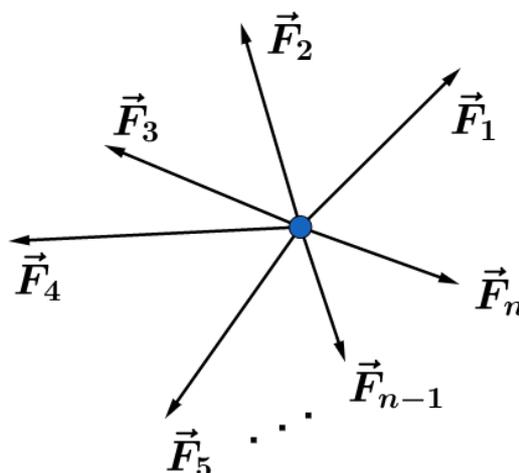


Figura 1: Sistema de forças aplicadas ao ponto material.

Denotando por  $\vec{F}_{res}$  a resultante da soma vetorial das forças da figura 1, podemos escrever matematicamente que:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n$$

Dessa forma, para que o ponto material esteja em equilíbrio, a resultante das forças que agem nele deve ser nula, isto é:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n = \vec{0}$$

A equação logo acima é vetorial. Dessa forma, para trabalhar com as equações escalares, devemos fazer a condição de equilíbrio para cada eixo:

- Se o problema estiver em uma dimensão:  
Você deverá escrever as equações escolhendo um eixo de referência. Com isso, poderá escrever a condição de equilíbrio  $\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n = \vec{0}$  de acordo com o eixo adotado.
- Se o problema estiver em duas dimensões:  
Você deverá escrever as equações escolhendo um sistema de eixo ortogonais e fazer a soma algébrica de cada projeção nos respectivos eixos:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \text{Em } x: F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{nx} = 0 \\ \text{Em } y: F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny} = 0 \end{cases}$$



- Se o problema estiver em três dimensões:  
Você deverá escrever as equações escolhendo um sistema de eixo triortogonal e fazer a soma algébrica de cada projeção nos respectivos eixos:

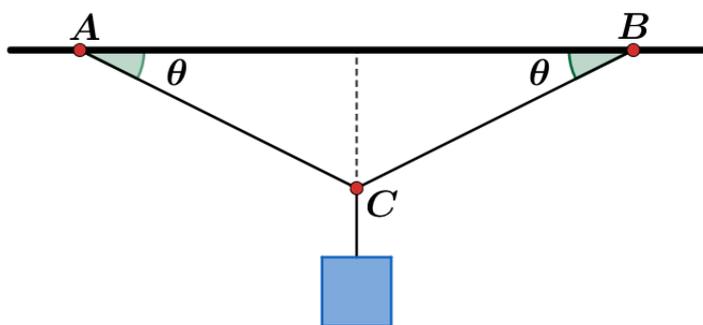
$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \text{Em } x: F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{nx} = 0 \\ \text{Em } y: F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{ny} = 0 \\ \text{Em } z: F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots + F_{nz} = 0 \end{cases}$$

ATENÇÃO  
DECORE!



### 1) (ITA – SP)

Uma luminária cujo peso é  $P$  está suspensa por duas cordas  $AC$  e  $BC$  que (conforme a figura) formam com a horizontal ângulos iguais a  $\theta$ . Determine a força de tensão  $T$  em cada corda.



a)  $T = \frac{P}{2 \cos \theta}$

b)  $T = \frac{P}{2 \sin \theta}$

c)  $T = \frac{P}{2 \tan \theta}$

d)  $T = P \cos \frac{\theta}{2}$

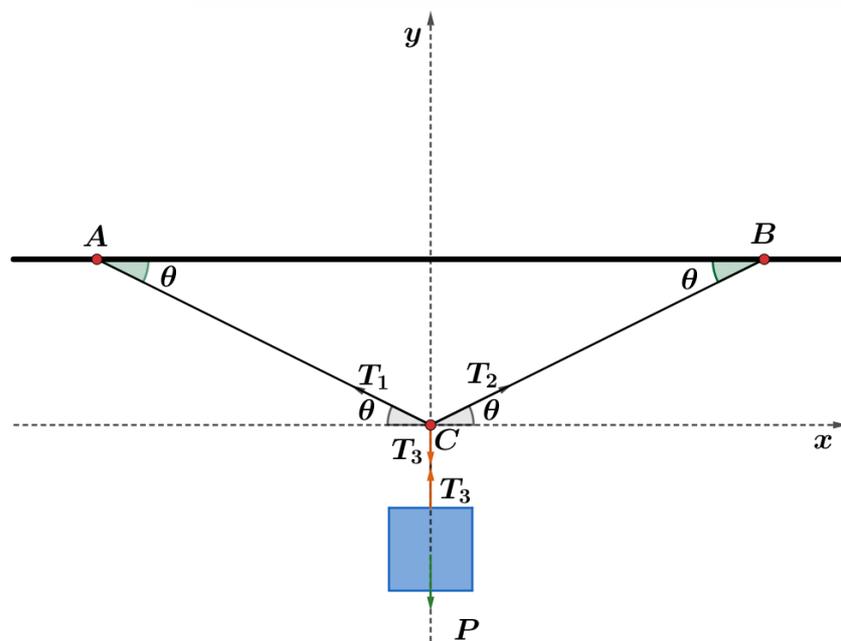
e) nenhuma das anteriores

#### Comentários:

Vamos adotar o nosso eixo de coordenadas ortogonal com origem no ponto C. Escolhemos o ponto C pois nele podemos relacionar o maior número de forças do nosso sistema.

Escrevendo as forças que agem no ponto C, temos:





Escrevendo a condição de equilíbrio para o ponto C, de acordo com sistema de coordenadas adotado, temos:

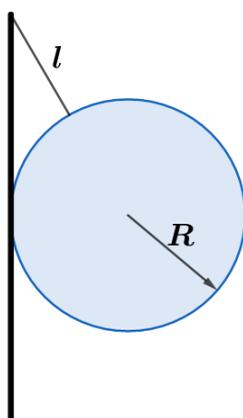
$$\begin{cases} \text{Em } x: T_2 \cdot \cos \theta - T_1 \cdot \cos \theta = 0 \\ \text{Em } y: T_1 \cdot \sin \theta + T_2 \cdot \sin \theta - T_3 = 0 \end{cases}$$

Como o sistema está em equilíbrio, podemos afirmar que  $T_3 = P$ . Assim, na direção  $x$  vemos que  $T_1 = T_2$  e passaremos a chamar apenas de  $T$ . Pela equação em  $y$  podemos determinar  $T$ :

$$T \cdot \sin \theta + T \cdot \sin \theta - P = 0 \Rightarrow 2T \cdot \sin \theta = P \Rightarrow \boxed{T = \frac{P}{2 \sin \theta}}$$

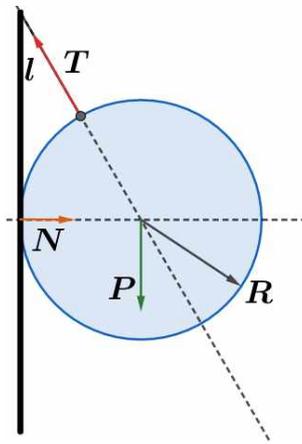
## 2) (FEI – SP)

Uma esfera, de peso  $P = 10\sqrt{3} \text{ N}$  e raio  $R$ , está suspensa por meio de um fio inextensível, de comprimento  $l = R$ , e apoia-se em uma parede vertical sem atrito. Determine a força de tração no fio e a força que a parede aplica na esfera



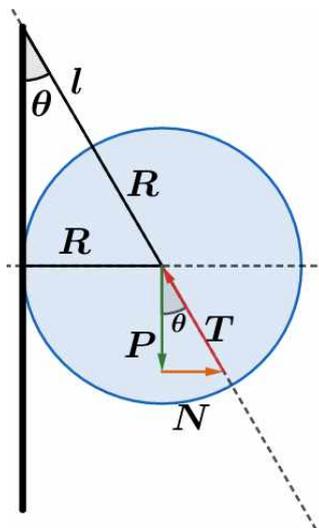
### Comentários:

Inicialmente, vamos colocar as forças que agem em nosso sistema e adotar nosso sistema de eixos ortogonais:



Como não há atrito entre a parede e a esfera, a força de contato que a parede exerce na esfera está na direção do centro da esfera. Caso existisse atrito, a força de contato da parede sobre a esfera seria dada pela soma da normal com a força de atrito.

Dessa forma, temos a seguinte configuração das forças na esfera:



$$\text{sen } \theta = \frac{N}{T} \text{ e } \cos \theta = \frac{P}{T}$$

Em que:

$$\text{sen } \theta = \frac{R}{l + R} = \frac{R}{R + R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

Portanto:

$$T = \frac{P}{\cos \theta} \Rightarrow T = \frac{2\sqrt{3}}{3} P$$

$$N = T \cdot \text{sen } \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3} P \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow N = \frac{\sqrt{3}}{3} P$$



## 1.2. Momento ou torque de uma força

Neste tópico, vamos introduzir um conceito da Física que é capaz de medir a eficiência de uma força em girar um determinado corpo.

Para isso, vamos considerar uma situação simples do nosso cotidiano: o fechamento de uma porta. Não é por acaso que a maçaneta fica o mais longe possível das dobradiças. Você já deve ter notado que fazer força para abrir uma porta não é o suficiente para abrir ou fechar uma porta pesada. É necessário considerar o ponto de atuação e a direção da força.

Vamos considerar que você abriu a porta da sua casa para uma visita e quando ela foi embora, você fez uma força  $\vec{F}$  para fechar a porta, conforme na figura abaixo:

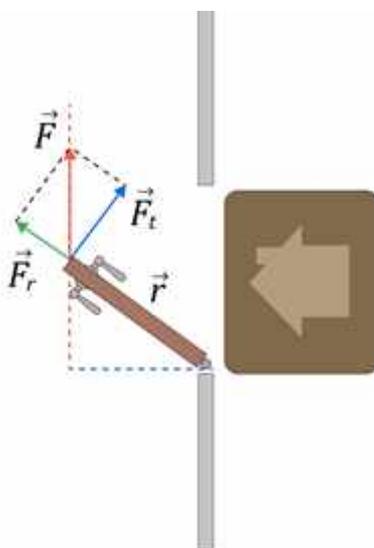


Figura 2: Força aplicada para fechar uma porta.

Como já mencionamos na mostramos na figura 2, a força  $\vec{F}$  que você aplicou pode ser decomposta em duas direções: direção radial  $\vec{F}_r$ , que tem direção de  $\vec{r}$  e direção tangencial  $\vec{F}_t$ , que tem direção perpendicular a  $\vec{r}$ .

Note que a força  $\vec{F}_r$  não é capaz de girar a porta, pois ela atua na direção de  $\vec{r}$ . Ela serve apenas para puxar a porta na direção de  $\vec{r}$ .

Por outro lado, a componente  $\vec{F}_t$  tem direção tangencial e módulo dado por  $F_t = F \cdot \text{sen } \phi$ . Esta componente provoca rotações. Entretanto, a capacidade de  $\vec{F}$  girar um corpo não depende apenas de  $\vec{F}_t$ , mas também da distância entre o ponto de aplicação de  $\vec{F}$  e o ponto  $O$ . Levando em contas os dois fatores que acabamos de mencionar, podemos definir uma **grandeza vetorial** chamada de **torque** ou **momento** de uma força como sendo:

$$\vec{M}_{\vec{F}O} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{M}_{\vec{F}O}$  é o momento da força  $\vec{F}$  em relação ao eixo  $O$ .

Em módulo, temos:

$$|\vec{M}_{\vec{F}O}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen } \phi$$

Em que  $\phi$  é o ângulo formado entre os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ . Você pode ser levado a acreditar que a unidade de torque (ou momento) é joule, já que ele é o produto do deslocamento pela força, como é o trabalho de uma força. Entretanto, as definições de trabalho de uma força e momento de uma força são completamente diferentes. Trabalho é uma grandeza escalar e momento é uma grandeza vetorial.

Por isso, no Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade de momento é o **newton metro** (símbolo:  $\text{N} \cdot \text{m}$ ). Não confunda isso na prova!

Note que ao trabalhar com o módulo do momento da força  $\vec{F}$  em relação ao eixo  $O$ , podemos decompor a força na direção radial e na direção tangencial, como já fizemos. Mas podemos também prolongar a linha de ação da força  $\vec{F}$  e determinar o **braço de alavanca** de  $\vec{F}$ .

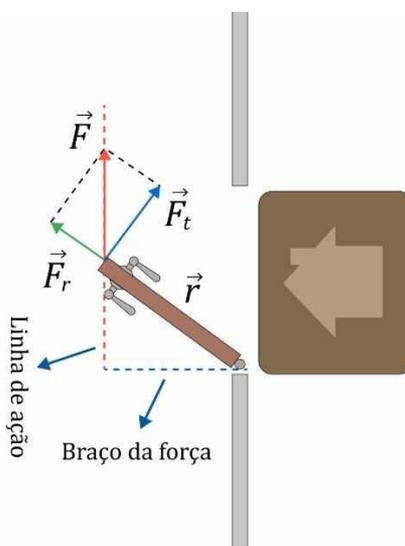


Figura 3: Linha de ação da força e o braço da força.

Note que pelo braço de alavanca de  $\vec{F}$  o torque é dado, em módulo, por:

$$|\vec{M}_{\vec{F}O}| = |\vec{r}| \cdot \text{sen } \phi \cdot |\vec{F}|$$

Mas se o torque (ou momento) da força  $\vec{F}$  é uma grandeza vetorial, devemos lembrar que o seu sentido é dado pela regra da mão direita. Podemos relembrar a regra da mão direita, estudada na aula 00, pela seguinte figura:



Figura 4: Regra da mão direita no produto vetorial.

Podemos utilizar a regra da mão direita para determinar o produto vetorial entre os versores  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ .



Figura 5: Regra da mão direita aplicada para os versores dos eixos  $(x, y, z)$ . Note que ao definir dois eixos, o terceiro já está definido por essa regra.

Diante disso, vemos que para nosso exemplo, o momento da força  $\vec{F}$  em relação ao eixo  $O$ , que contém as dobradiças da porta, tem direção “entrando” na folha.

A palavra torque vem do latim e significa “torcer”. Podemos entender o torque como o ato de girar ou torcer de uma força  $\vec{F}$ .

Se um sistema de forças atua em um corpo, podemos calcular o momento resultante em relação a um eixo fazendo a soma vetorial dos momentos das forças constituintes do sistema, em relação ao mesmo eixo. Isto é:

$$\vec{M}_{res} = \left( \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \right) \text{ em relação a um eixo escolhido}$$

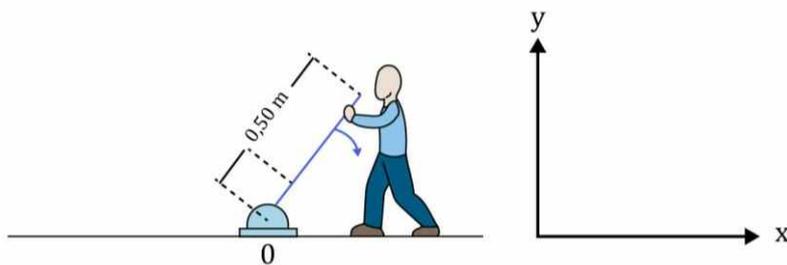
ATENÇÃO  
DECORE!



### 3)

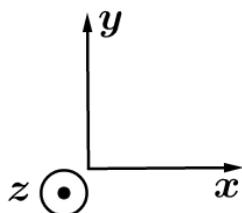
Um homem aplica uma força de intensidade  $4,0 \text{ N}$  a  $0,50 \text{ m}$  do ponto de rotação de uma barra e, em seguida, aplica a mesma força, mas a  $0,30 \text{ m}$  do ponto de giração da barra. Calcule o momento da força em relação ao ponto de rotação nos dois casos.





Comentários:

De acordo com o enunciado, o momento da força está na direção  $z$  e orientado para  $-z$ . Note que ao fixar os eixos  $x$  e  $y$ , a questão já define o eixo  $z$ , segundo a regra da mão direita:



Dessa forma, podemos primeiramente calcular o módulo de cada torque e, em seguida, determinar completamente o vetor:

$$|\vec{M}_{\vec{F}_1 O}| = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{F}_1| \cdot \text{sen } \phi_1$$

Note que na questão, o operador sempre faz força tangencial na barra. Portanto,  $\phi_1 = 90^\circ$ . Logo:

$$|\vec{M}_{\vec{F}_1 O}| = 0,50 \cdot 4,0 \cdot 1,0 = 2,0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

O mesmo resultado vale para a segunda situação:

$$|\vec{M}_{\vec{F}_2 O}| = |\vec{r}_2| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \text{sen } \phi_2 \Rightarrow |\vec{M}_{\vec{F}_2 O}| = 0,30 \cdot 4,0 \cdot 1,0 = 1,2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Observe que devido ao fato do braço na segunda situação ser menor que na primeira, o módulo do torque gerado foi menor. Vetorialmente, pela regra da mão direita, os vetores nas duas situações são:

$$\vec{M}_{\vec{F}_1 O} = -2,0 \hat{z} \text{ (N} \cdot \text{m)} \text{ e } \vec{M}_{\vec{F}_2 O} = -1,2 \hat{z} \text{ (N} \cdot \text{m)}$$



### 1.3. O centro de gravidade

Considere um corpo extenso em equilíbrio estático e um ponto  $O$ , conforme a figura abaixo. Vamos tomar pequenos elementos de massa que compõem o corpo. Dessa forma, a força da gravidade sobre o  $i$ -ésimo pequeno elemento de massa é de  $\vec{F}_{g,i}$ , e a força total da gravidade sobre

o corpo é dada por  $\vec{F}_g = \sum \vec{F}_{g,i}$ . Se  $\vec{r}_i$  representa o vetor posição do  $i$ -ésimo elemento de massa em relação a  $O$ , tal que  $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_{g,i}$ , em que  $\vec{M}_i$  é o momento da força  $\vec{F}_{g,i}$  em relação a  $O$ .

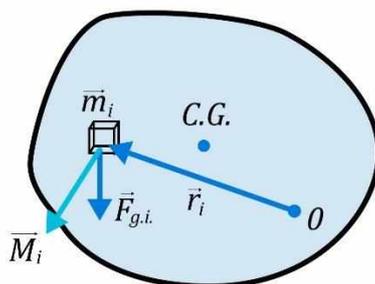


Figura 6: Corpo extenso qualquer e o torque produzido pela força gravitacional  $\vec{F}_{g,i}$ , em relação a  $O$ , sobre o  $i$ -ésimo elemento de massa ( $m_i$ ).

Diante disso, o torque resultante da gravidade em relação a  $O$  é expresso por:

$$\vec{M}_{res} = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_{g,i})$$

Apropriadamente, podemos calcular o torque gravitacional resultante em relação a um ponto como se toda a força da gravidade  $\vec{F}_g$  estivesse aplicada em um único ponto denominado de **centro de gravidade**, como na figura abaixo:

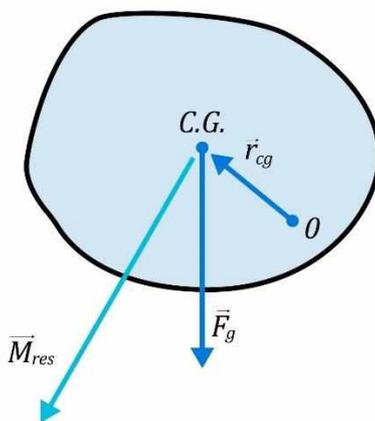


Figura 7: Torque gravitacional resultante  $\vec{M}_{res}$  em relação a  $O$ , pode ser calculado considerando a força gravitacional total  $\vec{F}_g$  aplicada em um ponto denominado de centro de gravidade.

Então, podemos escrever que:

$$\boxed{\vec{M}_{res} = \vec{r}_{CG} \times \vec{F}_g}$$

Em que  $\vec{r}_{CG}$  é o vetor posição do centro de gravidade em relação a  $O$ .

Quando o campo gravitacional  $\vec{g}$  é uniforme na região do corpo (como sempre fazemos para corpos de tamanho não-astronômico), podemos escrever que  $\vec{F}_{g,i} = m_i \cdot \vec{g}$ . Portanto:

$$\vec{F}_g = \sum \vec{F}_{g,i} = \sum m_i \cdot \vec{g} = \left( \sum m_i \right) \cdot \vec{g} = M \cdot \vec{g}$$

Em que  $M$  é a massa total do corpo. Como o torque resultante é a soma dos torques individuais, temos:

$$\vec{M}_{res} = \sum \vec{M}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_{g,i}) = \sum (\vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{g}) = \sum m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{g}$$

Se  $\vec{g}$  é uniforme, então:

$$\vec{M}_{res} = \left( \sum m_i \cdot \vec{r}_i \right) \times \vec{g}$$

Pela definição de centro de massa, temos que:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{M} \Rightarrow \boxed{M \cdot \vec{r}_{cm} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i}$$

Portanto, a expressão do torque resultante é dada por:

$$\vec{M}_{res} = M \cdot \vec{r}_{cm} \times \vec{g}$$

$$\vec{M}_{res} = \vec{r}_{cm} \times M \cdot \vec{g}$$

$$\boxed{\vec{M}_{res} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_g}$$

Diante desse resultado, vemos que  $\vec{r}_{cm} = \vec{r}_{CG}$ , isto é, o centro de gravidade e o centro de massa coincidem somente se o corpo está em um campo gravitacional uniforme.

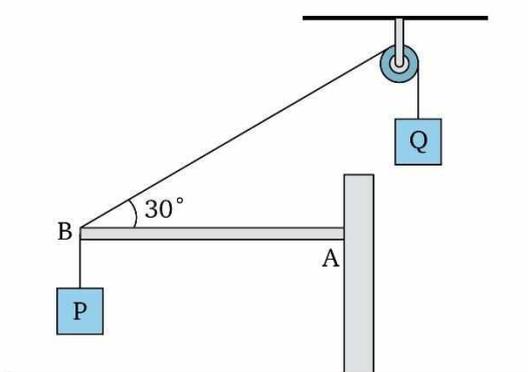
Além disso, se o ponto  $O$  está diretamente acima do centro de gravidade, então  $\vec{r}_{CG}$  e  $\vec{F}_g$  possuem a mesma orientação (para baixo), de forma que  $\vec{r}_{CG} \times \vec{F}_g = \vec{0}$ . Por exemplo, se penduramos um enfeite com o seu centro de gravidade diretamente abaixo de seu ponto de suspensão, então o torque resultante sobre o objeto, em relação ao ponto de suspensão, é nulo, e o corpo está em equilíbrio estático.

ATENÇÃO  
DECORE!



4)

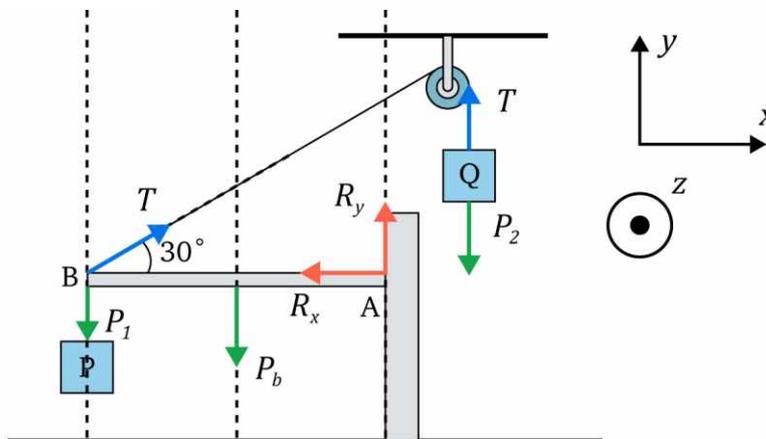
O conjunto da figura abaixo está em equilíbrio. Considere a barra  $AB$  homogênea, articulada em  $A$  e pesa  $40\text{ N}$ . Um corpo  $P_1$  pesa  $25\text{ N}$  e está fixado em  $B$ . Calcule o peso do corpo  $P_2$  e as componentes horizontal e vertical da reação no ponto  $A$ .



**Comentários:**

Podemos representar o diagrama de forças na barra  $AB$ , conforme a figura abaixo:





Aplicando a condição de equilíbrio para o corpo  $P_2$ , podemos encontrar a tração no fio:

$$\boxed{T = P_2}$$

Para determinar  $P_2$ , que é igual a tração, é interessante fazer o equilíbrio rotacional da barra em relação ao ponto A, pois as reações em A (forças desconhecidas) não geram momento em relação ao próprio ponto A, já que os braços dessas forças são nulos. Então:

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0}$$

$$-T \cdot \text{sen}(30^\circ) \cdot AB + P_1 \cdot AB + P_b \cdot \frac{AB}{2} = 0$$

Note que a projeção da tração na horizontal não gera momento em relação ao ponto A, já que a linha de ação dessa componente passa por A. Resolvendo a equação, vem:

$$-T \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 25 \cdot 1 + 40 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\boxed{T = 90 \text{ N} = P_2}$$

Pelo equilíbrio translacional da barra, podemos dizer que:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \cdot \cos 30^\circ - R_x = 0 \\ T \cdot \text{sen} 30^\circ - P_1 - P_b + R_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 45 \cdot \sqrt{3} \text{ N} \\ R_y = 20 \text{ N} \end{cases}$$



## 1.4. Binário

Chamamos de binário ou conjugado um sistema constituído por duas forças de **intensidades iguais**, de **mesma direção** e de **sentido opostos**, mas as linhas de ação estão separadas por uma distância  $x$  não nula, denotada por braço do binário, como na figura logo abaixo:

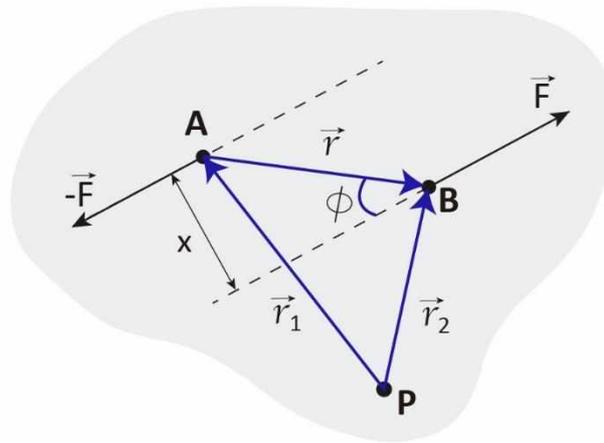


Figura 8: Binário de uma força.

Portanto, o momento resultante em relação ao eixo do ponto  $P$  é de:

$$\begin{aligned}\vec{M}_{resp} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \\ \vec{M}_{resp} &= \vec{r}_1 \times (-\vec{F}) + \vec{r}_2 \times \vec{F} \\ \vec{M}_{resp} &= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F} \\ \boxed{\vec{M}_{resp} = \vec{r} \times \vec{F}}\end{aligned}$$

Em módulo, temos:

$$|\vec{M}_{resp}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen } \phi$$

Mas note que da geometria, temos que:

$$x = |\vec{r}| \cdot \text{sen } \phi$$

Portanto, o módulo do momento resultante do binário, em relação ao eixo que passa por  $P$  é dado por:

$$\boxed{|\vec{M}_{resp}| = x \cdot |\vec{F}|}$$

Note que a resultante das forças no binário é nula, já que as forças possuem mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos. Dessa forma, podemos dizer que um corpo extenso rígido não sofrerá translação se submetido à ação de um binário, mas haverá um movimento rotacional não uniforme, pois o momento resultante é não nulo.

Além disso, perceba que no binário, o torque resultante não depende do eixo escolhido para o seu cálculo. Ele depende apenas da intensidade da força e da distância entre as linhas de ação das forças.

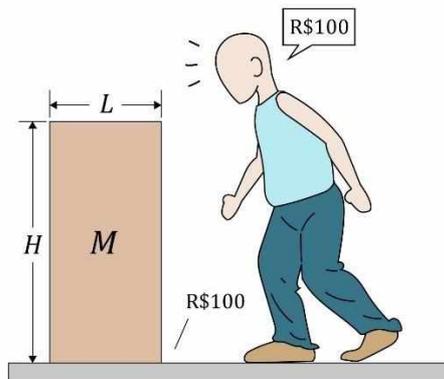
ATENÇÃO  
DECORE!



## 5) Força para apenas inclinar um corpo

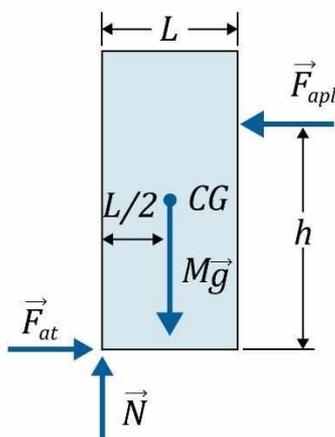


Você está limpando sua casa e de repente se depara com uma nota de 100 reais saindo de sob um baú antigo de massa  $M$ , altura  $H$  e de seção reta quadrada de lado  $L$ . Você até tenta puxar a nota, mas percebe que ela está presa. Então, para liberá-la você empurra o bloco com uma força horizontal a uma distância  $h$  acima do chão. Qual deve ser a intensidade da força para que ela incline o baú apenas o suficiente para você retirar a nota de 100 reais? Admita que o atrito é suficiente para evitar o escorregamento.



### Comentários:

Vamos fazer um diagrama das forças no baú quando ele estiver prestes a ser inclinado:



Aplicando a segunda lei de Newton na direção horizontal e na vertical, temos que:

$$\sum F_x = M \cdot a_x = 0$$

$$F_{apl} = F_{at}$$

$$\sum F_y = M \cdot a_y = 0$$

$$M \cdot g = N$$

Agora, note que  $\vec{F}_{apl}$  e  $\vec{F}_{at}$  formam um binário, e que  $M\vec{g}$  e  $\vec{N}$  formam outro binário.

Portanto, o momento de cada binário, em módulo, é dado por:

$$M_1 = F_{apl} \cdot h$$

$$M_2 = M \cdot g \cdot \frac{L}{2}$$



Note que  $M_1$  gira no sentido anti-horário e que  $M_2$  gira no sentido horário.

Se escolhermos o sentido anti-horário como positivo, para a condição de mínima força aplicada, o momento resultante é praticamente nulo, isto é:

$$M_1 + M_2 = 0$$
$$+F_{apl} \cdot h + \left(-M \cdot g \cdot \frac{L}{2}\right) = 0$$

$$F_{apl} = M \cdot g \cdot \left(\frac{L}{2h}\right)$$

Observe o resultado encontrado e perceba a sua coerência, pois quanto mais afastada do chão estiver a força aplicada sobre o baú, menos intensa ela deve ser para o baú comece a girar. Em outras palavras, se  $h$  aumenta, então  $F_{apl}$  diminui.

Além disso, a força normal é uniformemente distribuída na base do baú antes de você começar a empurrá-lo. Quando você empurra o corpo, quanto maior a intensidade da força que você aplica, mais rapidamente o centroide (centro efetivo) da distribuição da força normal se desloca para a esquerda.

Assim, se você empurra o baú de tal maneira que ele fica prestes a se inclinar, o centroide da força normal passa a se localizar na aresta da esquerda da base do bloco.



## 1.5. Equilíbrio do corpo extenso

Para que um corpo extenso esteja em equilíbrio, não basta que a resultante das forças que agem sobre ele seja nula. Vimos no item anterior que para o caso do binário de forças a resultante é nula, mas o momento resultante é diferente do vetor nulo e isso produz um movimento rotacional não uniforme.

Portanto, dizemos que um corpo extenso está em equilíbrio, em relação a um referencial escolhido, quando estiver em repouso (equilíbrio estático) ou quando realiza um movimento de translação uniforme ou de rotação uniforme ou, ainda, ambos combinados (equilíbrio dinâmico).

Diante disso, as duas condições para que haja equilíbrio de um corpo extenso são:

1. A resultante das forças que agem no corpo deve ser nula, isto é, a soma das forças atuantes deve ser igual ao vetor nulo:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0}$$

2. A soma dos momentos das forças que agem sobre o corpo de ser nula, em relação a qualquer ponto:

$$\vec{M}_{res} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots + \vec{M}_n = \vec{0}$$





### 1.5.1. Teorema das três forças

“Se um corpo extenso está em equilíbrio sob a ação de três forças não paralelas, elas são coplanares e suas linhas de ação concorrem necessariamente num mesmo ponto”

Demonstração:

Definimos a linha de ação de uma força como a reta que é paralela à força e passa pelo ponto de aplicação dela. Dado que a linha de ação é uma reta, então duas linhas de ação não paralelas se cruzam em um ponto definido.

Sabemos que se um sistema está em equilíbrio, então o equilíbrio rotacional implica torque realizado sobre ele, em relação a um dado ponto, igual a zero.

Por outro lado, se o sistema estiver em equilíbrio translacional, então:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$$

Em que  $\vec{F}_i$  são as forças que atuam no sistema e  $\vec{F}_{res}$  é a soma destas forças.

Pela definição de momento, temos que o momento realizado sobre o sistema em relação a um certo ponto  $P$  é de:

$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Em que  $\vec{r}_i$  é o vetor distância do ponto de aplicação da respectiva força  $\vec{F}_i$  ao ponto  $P$ . Dessa forma, o momento em relação a um outro ponto  $Q$ , tal que o vetor distância de  $P$  e  $Q$  é  $\Delta\vec{r}$ , é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{M}_Q &= \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \Delta\vec{r}) \times \vec{F}_i \\ \vec{M}_Q &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \sum_{i=1}^n \Delta\vec{r} \times \vec{F}_i \\ \vec{M}_Q &= \vec{M}_P - \sum_{i=1}^n \Delta\vec{r} \times \vec{F}_i\end{aligned}$$

Como o vetor  $\Delta\vec{r}$  é o mesmo para todas as forças  $\vec{F}_i$  do sistema, então:

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_P - \Delta\vec{r} \times \left( \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right)$$

Mas, para o equilíbrio translacional do sistema é válido que:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$$

Portanto:

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_P$$

Dessa forma, se o sistema tiver equilíbrio rotacional, então o momento em relação a um ponto é nulo. Portanto, podemos pegar um ponto qualquer e impor o equilíbrio rotacional, se o sistema estiver em equilíbrio.

Para um sistema equilíbrio, podemos escolher o ponto de encontro das linhas de ação de duas forças ( $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ ) quaisquer do sistema (ponto  $A$ , por exemplo), sendo elas não paralelas e dizer que o momento em relação ao ponto  $A$  é nulo, já que a distância entre essas forças e o ponto  $A$  é nula.

Para uma terceira força que atua no nosso sistema, o torque resultante deve ser nulo, pois o sistema encontra-se em equilíbrio:

$$\begin{aligned}\vec{M}_A &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \vec{0} \\ \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 &= \vec{0} \\ \therefore \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 &= \vec{0}\end{aligned}$$

Como o modulo do produto vetorial vale:

$$|\vec{r}_3| \cdot |\vec{F}_3| \cdot \text{sen } \theta = 0$$

Em que  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{r}_3$  e  $\vec{F}_3$ .

Para que o produto vetorial  $\vec{r}_3 \times \vec{F}_3$  seja nulo, ao menos uma das grandezas deve ser nula. Se  $|\vec{r}_3| = 0$ , isto é, a força  $\vec{F}_3$  é aplicada ao ponto  $A$  e isso garante, trivialmente, que a linha da terceira força passa pelo ponto  $A$ , validando nosso teorema.

Como a terceira força deve existir, já que o teorema se aplica para três forças, então não faz sentido analisar o caso de  $|\vec{F}_3| = 0$ .

Então, o último caso seria  $\text{sen } \theta = 0$ . Da trigonometria, sabemos que o seno de um ângulo é zero quando ele for da forma  $k \cdot \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Em outras palavras, o ângulo entre os vetores for zero ou  $180^\circ$ . Assim, o vetor  $\vec{F}_3$  deve ser paralelo ao vetor  $\vec{r}_3$ . Mas  $\vec{r}_3$  é definido como o vetor que representa a distância entre o ponto escolhido de atuação da força  $\vec{F}_3$  e o ponto  $A$ . Portanto, a linha de atuação da força  $\vec{F}_3$  deve passar por  $A$ . Portanto, as linhas de ação das três forças são concorrentes em um mesmo ponto.



Por exemplo, se uma escada apoiada entre o solo e a parede, em que as duas superfícies são perfeitamente lisas, isto é, não tem atrito, então não é possível o equilíbrio do sistema, pois as forças não concorrem em um mesmo ponto:

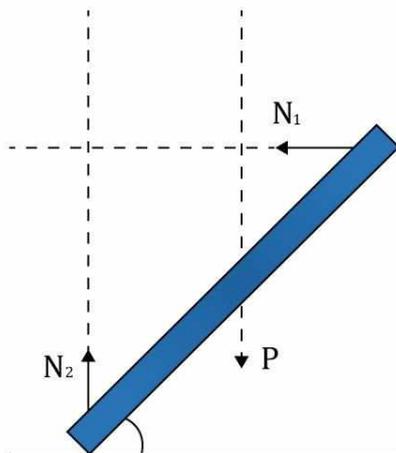


Figura 9: Escada encostada em superfícies perfeitamente lisa.

Por outro lado, se dissermos que existe atrito entre a escada e o solo, então, pelo teorema das três forças, é possível dizer que o sistema pode ficar em equilíbrio, já que as forças podem concorrer a um certo ponto  $A$ :

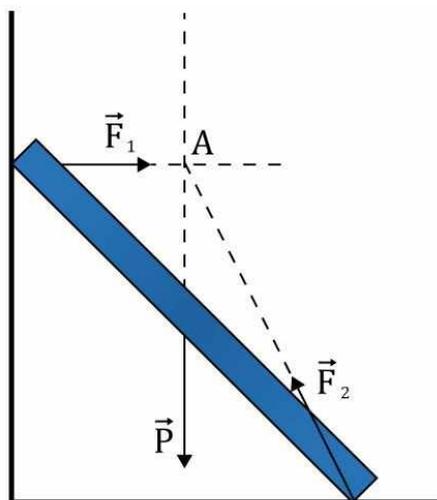


Figura 10: Escada encostada em duas superfícies sendo uma delas áspera (horizontal). Pelo teorema das três forças, podemos determinar o ponto onde as linhas de ações de cada uma das três forças se encontram.

Observe que esse teorema é bem útil para determinar a direção da terceira força de um sistema em equilíbrio, pois, se sabemos as direções de duas forças atuantes, com a aplicação desse teorema, a direção da terceira força já está determinada.



## 1.6. Alguns exemplos de equilíbrio estático

Neste tópico, vamos resolver uma série de exercícios clássicos de estática e utilizaremos a seguinte estratégia para solução de problemas:

### *Estratégia para solução de problemas*

1) Escolha os eixos.

2) **Faça o diagrama de forças:** represente as forças que agem nos corpos do sistema em questão, lembrando de colocar a força devido ao campo gravitacional no *C. G.* (centro de gravidade) do corpo extenso e, em caso de campo gravitacional uniforme (fato que acontece em quase todos os exercícios), o *C. G.* coincidirá com o centro de massa (*C. M.*).

2) Lembre-se das condições de equilíbrio:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \text{ e } \sum \vec{M} = \vec{0}$$

3) Solução:

a) para obter a solução algébrica simples, escolha um eixo que coincida com a linha de ação da força sobre a qual você possui menos informações.

b) Então, iguale a zero a soma dos torques em relação a este eixo.

4) **Checagem:** tente encontrar meios alternativos de resolver o problema, para checar a plausibilidade de sua solução.

### 1.6.1. Caminhando na prancha

Uma prancha homogênea, de comprimento  $L$  e de massa  $M$ , está apoiada sobre balanças de mola distantes  $d$  de suas extremidades, como na figura abaixo:

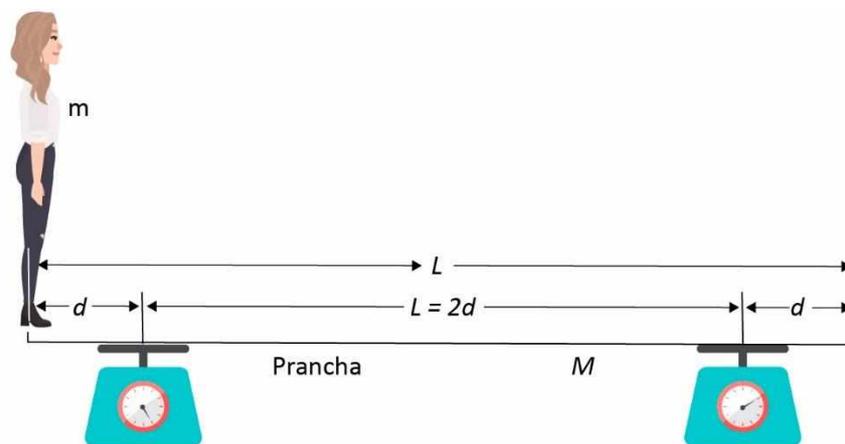


Figura 11: Carol na extremidade esquerda da prancha.

Qual a leitura das escalas quando Carol, de massa  $m_C$ , está de pé na extremidade esquerda da prancha?



Como mencionado no nosso esquema, inicialmente devemos desenhar um diagrama das forças que atuam no sistema constituído por Carol e prancha. Denotaremos por  $\vec{F}_E$  e  $\vec{F}_D$  são as forças exercidas pelas balanças da esquerda e da direita, respectivamente.

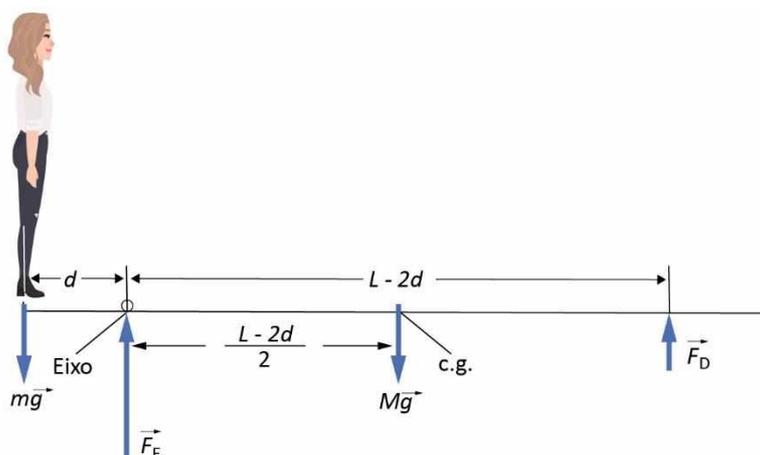


Figura 12: Diagrama de forças na prancha.

Vamos tomar os eixos da seguinte forma:

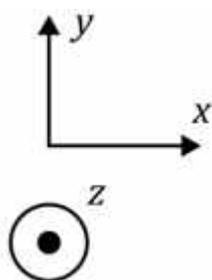


Figura 13: Eixos  $(x, y, z)$  em que o eixo  $z$  está saindo do plano da folha.

Então, pela condição de equilíbrio, temos que a força resultante é igual a zero:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_E + F_D - M \cdot g - m_c \cdot g = 0 \text{ (eq. 1)}$$

Note que temos duas incógnitas na equação 1, ou seja, precisamos de mais uma equação para resolver nosso problema. Essa segunda equação vem do fato do momento (ou torque) resultante do nosso sistema, em relação a um ponto escolhido, ser nulo. Devemos escolher um eixo onde temos mais forças desconhecidas (em outras palavras, eixo que sabemos menos informações).

No nosso caso, não faz diferença escolher o eixo onde  $\vec{F}_E$  ou  $\vec{F}_D$  passa, pois em cada eixo temos apenas uma força desconhecida. Então, escolhendo o eixo da esquerda, temos:

$$\sum M_{\vec{F}_E} = F_E \cdot 0 + F_D \cdot (L - 2d) - M \cdot g \cdot \left(\frac{L - 2d}{2}\right) - m_c \cdot g \cdot d = 0$$

$$F_D = \left[ \frac{1}{2} \cdot M - \left(\frac{d}{L - 2d}\right) \cdot m_c \right] \cdot g$$

Substituindo  $F_D$  na equação 1, temos que:

$$F_E = \left[ \frac{1}{2} \cdot M - \left(\frac{L - d}{L - 2d}\right) \cdot m_c \right] \cdot g$$

Bruna, amiga de Carol, sobe na prancha e caminha ao encontro de Carol, que salta fora quando a prancha começa a se inclinar. Então, Bruna continua caminhando até a extremidade esquerda da prancha e, quando chega lá, a escala da balança da direita marca zero. Qual deve ser a massa de Bruna.

Se não houve movimentação da prancha no eixo  $x$ , então temos as mesmas configurações que antes. Portanto, para não indicar força na balança da direita, temos que:

$$F_D = 0$$
$$\left[ \frac{1}{2} \cdot M - \left( \frac{d}{L - 2d} \right) \cdot m_B \right] \cdot g = 0$$
$$\frac{1}{2} \cdot M - \left( \frac{d}{L - 2d} \right) \cdot m_B = 0$$
$$m_B = \left( \frac{L - 2d}{2d} \right) \cdot M$$

### 1.6.2. Levantando uma roda

Uma roda, de massa  $M$  e raio  $R$ , como na figura abaixo, está sobre uma superfície horizontal e encostada em um degrau de altura  $h$  ( $h < R$ ). O objetivo é levantar a roda até o degrau, por intermédio de uma força horizontal  $\vec{F}$  aplicada sobre seu eixo.

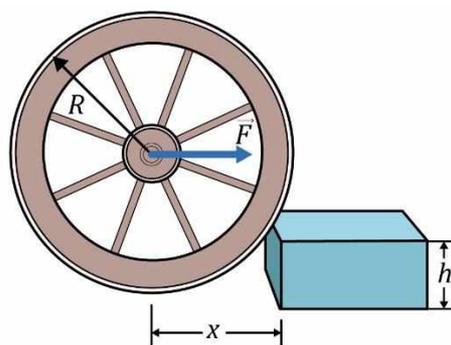


Figura 14: Roda a ser erguida.

Qual deve ser a força mínima  $F_{\min}$  necessária para levantar a roda?

Note que se a intensidade de  $F$  for menor que  $F_{\min}$ , então a superfície da base da roda exerce uma força normal, para cima, sobre a roda. Quando  $F$  aumenta, esta força normal diminui. Então, devemos aplicar a condição de equilíbrio estático para determinar o valor de  $F$  que manterá a roda no lugar quando a força normal for zero.

Nesse caso, o diagrama de forças é:

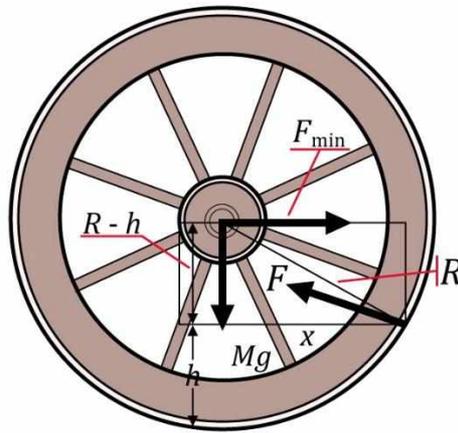


Figura 15: Diagrama de forças na roda.

Podemos aplicar a condição de equilíbrio, fazendo que  $\sum \vec{M} = \vec{0}$  na roda. Como a força de contato entre a roda e a quina do degrau é conhecida, então, de acordo com o bizu que passamos, vamos calcular o torque em relação a esse ponto.

$$\sum \vec{M} = \vec{0}$$

$$M \cdot g \cdot x - F_{min} \cdot (R - h) = 0$$

$$F_{min} = \frac{x}{R - h} \cdot M \cdot g$$

Pela geometria do problema, temos que:

$$R^2 = (R - h)^2 + x^2$$

$$x^2 = R^2 - (R - h)^2$$

$$x^2 = [R - (R - h)][R + R - h]$$

$$x = \sqrt{h(2R + h)}$$

Portanto:

$$F_{min} = \left( \frac{\sqrt{h(2R + h)}}{R - h} \right) \cdot M \cdot g$$

Note que quando  $h = 0$ , não existe obstáculo e, portanto, esperamos que  $F_{min}$  é igual a zero. Para  $h = R$ , esperamos que nenhuma força seja suficientemente intensa para elevar a roda até o degrau, como podemos ver com o resultado que encontramos.

Observe ainda que não colocamos a direção de  $\vec{F}'$  para salientar que não precisamos conhecer nada a seu respeito, mas, pelo teorema das três forças, devemos ter que a linha da força  $\vec{F}'$  passando pelo centro (ponto de encontro das linhas de ação das outras duas forças) para que o sistema esteja em equilíbrio. Caso contrário, haveria um torque resultante não-nulo em relação ao eixo.

### 1.6.3. Uma escada apoiada

Uma escada uniforme de 5,0 m, pesando 80 N, está apoiada sobre uma parede sem atrito, como a figura abaixo:

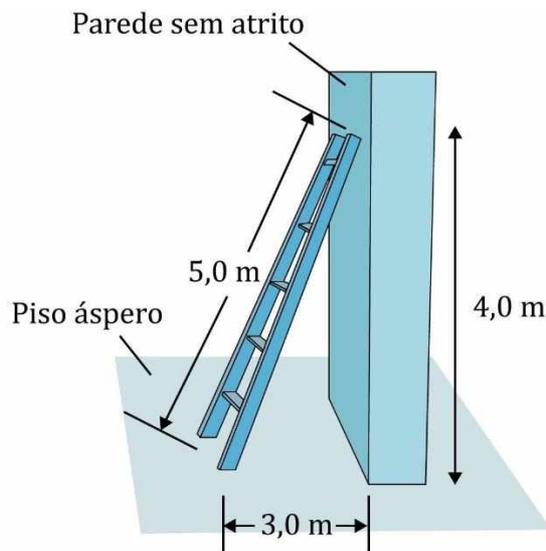


Figura 16: Escada bi apoiada.

A base da escada está a 3,0 m da parede. Qual é o menor coeficiente de atrito estático necessário entre a escada e o piso para que a escada não deslize?

Para a condição de menor coeficiente de atrito estático devemos impor que:

$$F_{at} \leq \mu_e \cdot N$$

Em que  $F_{at}$  é a componente do atrito. Fazendo o diagrama de corpo livre para a escada, temos:

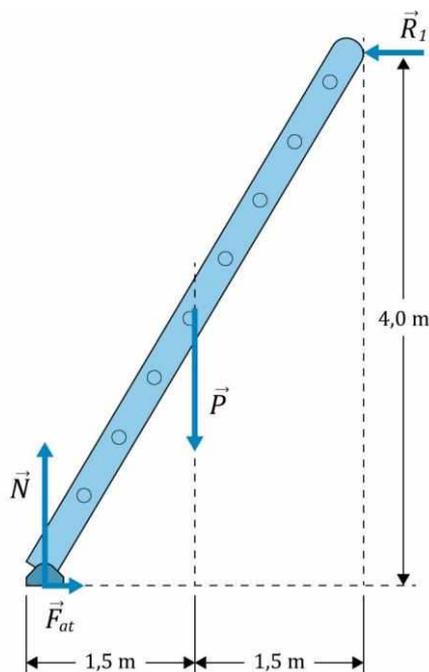


Figura 17: Diagrama de forças e relações métricas na escada bi apoiada.

Pela condição imposta, temos que:

$$F_{at} \leq \mu_e \cdot N \Rightarrow \mu_e \geq \frac{F_{at}}{N}$$

Pela condição de equilíbrio, temos que:

$$\begin{cases} N - P = 0 \\ F_{at} - R_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 80 \text{ N} \\ F_{at} = R_x \end{cases}$$

Aplicando que o momento resultante da escada deve ser nulo e escolhendo o ponto de apoio da base da escada, temos:

$$R_x \cdot 4,0 - P \cdot 1,5 = 0$$

$$R_x = \frac{80 \cdot 1,5}{4,0} = 30 \text{ N}$$

Portanto:

$$F_{at} = R_x = 30 \text{ N}$$

Logo, o coeficiente de atrito mínimo é de:

$$\mu_e \geq \frac{F_{at}}{N} \Rightarrow \mu_{e,min} = \frac{30}{80} \Rightarrow \boxed{\mu_{e,min} = 0,375 = 0,38}$$

Lembre-se que, pelo teorema das três forças, podemos determinar a direção da reação no ponto de apoio da base da escada:

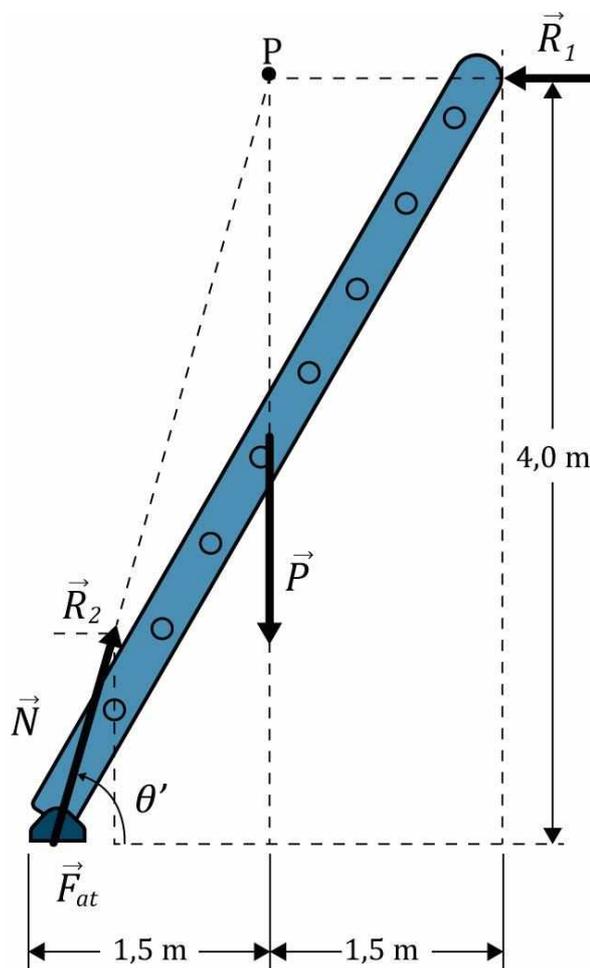


Figura 18: Aplicação do teorema das três forças na escada bi apoiada.



## 1.7. Equilíbrio estático em um referencial acelerado

Chamamos de referencial acelerado aquele que, estando acelerado, não está girando em relação a um referencial inercial.

Dessa forma, a força resultante sobre um corpo que permanece em repouso em relação a um referencial acelerado não é igual a zero.

Um corpo em repouso em relação a um referencial acelerado possui a mesma aceleração que o referencial. Dessa forma, as duas condições para que um corpo esteja em equilíbrio estático em um referencial acelerado são:

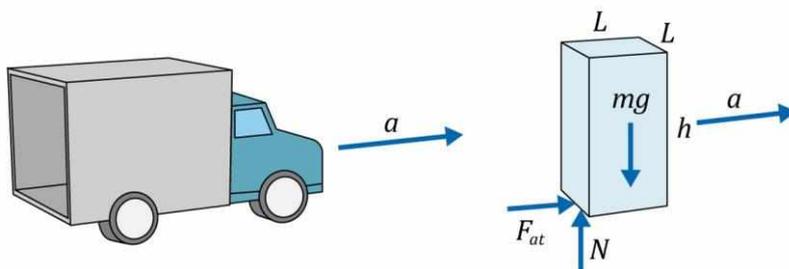
- i.  $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_{cm}$   
Em que  $\vec{a}_{cm}$  é a aceleração do centro de massa, que também é a aceleração do referencial.
- ii.  $\sum \vec{M}_{cm} = \vec{0}$   
A soma dos torques em relação ao centro de massa deve ser nula.

A segunda condição vem da segunda lei de Newton para a rotação,  $\sum_{cm} \vec{M} = I_{cm} \cdot \vec{\alpha}$  (trabalharemos esse assunto no próximo capítulo). Como o corpo não está girando em relação a um referencial inercial, portanto,  $\vec{\alpha} = \vec{0}$ , impondo a segunda condição para o equilíbrio estático de um corpo em um referencial acelerado.



### 6) Transporte de um bloco

O caminhão da figura abaixo transporta um bloco de madeira, de massa  $m$ , altura  $h$  e seção reta quadrada de lado  $L$ . Qual é a maior aceleração que o caminhão pode ter sem que o bloco comece a se inclinar? Suponha que, antes de deslizar, o bloco se incline.



Comentários:

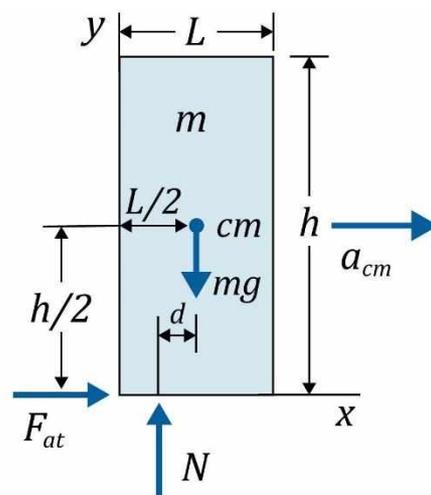


Note que há três forças atuando sobre o bloco: força gravitacional, força de atrito estático e a força normal. Note que a aceleração do bloco é devida à força de atrito. Esta força realiza um torque anti-horário em relação ao centro de massa do bloco.

Além disso, a única outra força a exercer um torque em relação ao centro de massa do bloco é a normal. Caso o caminhão e o bloco não estivessem acelerados, a força normal estaria distribuída uniformemente sobre a base do bloco. À medida que aumentamos a magnitude da aceleração, esta distribuição da normal se desloca e o ponto de aplicação efetivo da força normal se move para a esquerda, produzindo um torque oposto equilibrador em relação ao centro de massa.

Dessa forma, o maior torque equilibrador que esta força pode gerar ocorre quando a força normal efetiva está aplicada sobre a aresta da base.

O diagrama do corpo livre para o bloco é:



Para a primeira condição de equilíbrio, temos:

$$\sum F_y = m \cdot a_{cm,y} = 0 \Rightarrow N - m \cdot g = 0 \Rightarrow \boxed{N = m \cdot g}$$

$$\sum F_x = m \cdot a_{cm,x} \Rightarrow \boxed{F_{at} = m \cdot a}$$

Para a segunda condição de equilíbrio, temos:

$$\sum \vec{M}_{cm} = \vec{0} \Rightarrow F_{at} \cdot \frac{h}{2} - N \cdot d = 0, \text{ em que } d \leq \frac{L}{2}$$

Para o caso da aceleração máxima, devemos ter  $d = L/2$ . Substituindo os termos na equação logo acima, vem:

$$(m \cdot a_{m\acute{a}x}) \cdot \frac{h}{2} - (m \cdot g) \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\boxed{a_{m\acute{a}x} = \frac{L}{h} \cdot g}$$



## 2. Rotação

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos não vistos em ensino médio comum. Daremos algumas noções da dinâmica da rotação para corpos extenso e resolveremos alguns exemplos. O ITA e o IME já colocaram algumas questões que envolvem este assunto, principalmente o conceito de energia mecânica para corpos que rolam.

Não fique muito tempo neste capítulo, pois sua incidência no vestibular é baixa. Apenas guarde alguns conceitos e tenha uma boa noção para a prova.

Para isso, vamos utilizar alguns conceitos já vistos na cinemática do movimento circular para a partícula e expandir os conceitos para um corpo extenso.

### 2.1. Cinemática rotacional

Considere um corpo rígido, como por exemplo um disco, girando em torno de um eixo. Todo ponto do disco gira em torno do eixo fixo em um círculo cujo centro está no eixo e cujo raio é a distância radial do ponto ao eixo de rotação, como mostra a figura abaixo:

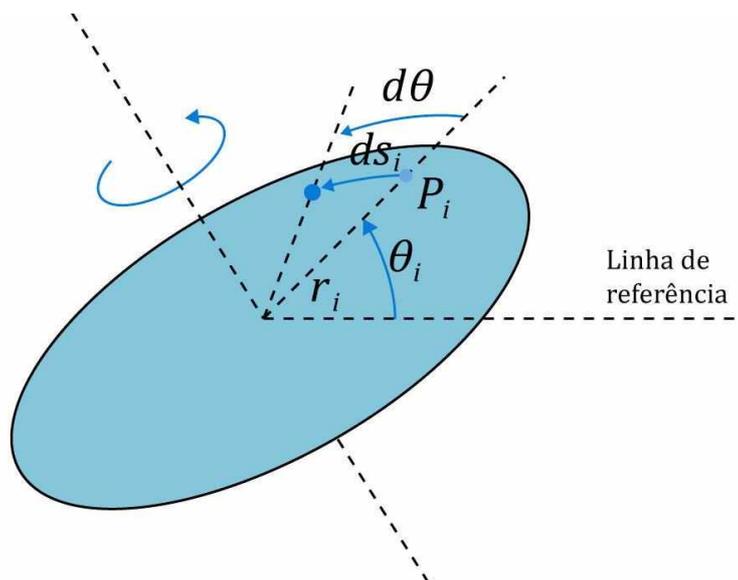


Figura 19: Disco girando em torno de um eixo.

Para a  $i$ -ésima partícula  $P_i$  do disco, a uma distância  $r_i$  do centro, temos o seguinte vínculo geométrico:

$$ds_i = r_i \cdot d\theta$$

Em que  $d\theta$  é o deslocamento angular. Lembre-se que os ângulos sempre são medidos em radianos. Além disso, convencionamos o sentido anti-horário como o positivo, então  $d\theta$ ,  $\theta_i$  e  $ds_i$  são todos positivos.

Como vimos em cinemática do movimento circular da partícula, a taxa temporal de variação do ângulo é a mesma para todas as partículas do disco, isto é, como o disco é um corpo rígido, todas as partículas varrem ângulos iguais em um mesmo intervalo de tempo.

Chamamos essa taxa temporal de variação de ângulo de velocidade angular do disco. Por definição, a velocidade angular instantânea  $\omega$  é:

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

Lembrando que radiano é adimensional, a dimensão da velocidade angular é a do inverso do tempo,  $T^{-1}$ .

Além disso, vimos o conceito de aceleração angular, que é a taxa de variação da velocidade angular. A aceleração angular média é definida como:

$$\alpha_{méd} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

A taxa instantânea de variação da velocidade angular é a aceleração angular instantânea  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Em que a unidade no SI é  $rad/s^2$ . Relembrando, temos as equações horárias para velocidade angular e para deslocamento angular:

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\alpha \cdot t^2}{2} \end{cases}$$

Além disso, vale a equação de Torricelli para a cinemática da rotação:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot (\theta - \theta_0)$$

Podemos definir a velocidade linear  $v_t$  de uma partícula do disco é tangente à sua trajetória circular e tem a magnitude  $ds_i/dt$ . Sendo assim, existe uma relação entre a velocidade tangencial e a velocidade angular do disco:

$$v_t = \frac{ds_i}{dt} = r_i \cdot \frac{d\theta}{dt}$$
$$\boxed{v_t = r_i \cdot \omega}$$

De forma análoga, podemos relacionar a aceleração tangencial  $a_t$  de uma partícula do disco e a aceleração angular:

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = r_i \cdot \frac{d\omega}{dt}$$
$$\boxed{a_t = r_i \cdot \alpha}$$

Cada elemento de massa do disco tem uma aceleração centrípeta, que aponta radialmente para dentro, e possui a magnitude dada por:

$$a_c = \frac{v_t^2}{r_i} = \frac{(r_i \cdot \omega)^2}{r_i}$$



$$a_c = r_i \cdot \omega^2$$

Até aqui, não introduzimos nenhum conceito novo, caso não esteja familiarizado com alguma dessas equações, sugiro que volte as respectivas aulas que tratam desses temas.



## 2.2. Energia cinética rotacional

A energia cinética total de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é a soma das energias cinéticas de cada partícula que constitui o corpo. A energia cinética da  $i$ -ésima partícula, de massa  $m_i$ , é dada por:

$$E_{C_i} = \frac{m_i \cdot v_i^2}{2}$$

Somando sobre todas as partículas do corpo e usando a relação  $v_i = r_i \cdot \omega$ , temos:

$$E_C = \sum_i E_{C_i} = \sum_i \frac{m_i \cdot v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2}{2} = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \omega^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \omega^2$$

Chamamos de **momento de inércia**  $I$  do corpo em relação ao eixo de rotação o termo:

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2$$

Dessa forma, a energia cinética de rotação de um corpo rígido que está girando em torno de um eixo fixo é dada por:

$$E_C = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

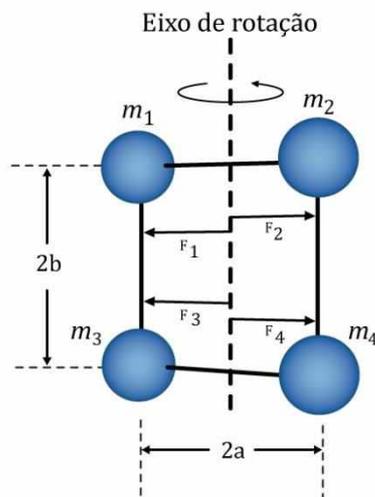
ATENÇÃO  
DECORE!



7)

Um corpo formado por 4 partículas pontuais, cada uma de massa  $m$ , ligadas por hastes bem rígidas e de massas desprezíveis, dispostas nos vértices de um retângulo de lados  $2a$  e  $2b$ , como mostra a figura abaixo:





O conjunto gira com rapidez angular  $\omega$  em torno de um eixo do plano da figura que passa pelo centro do retângulo. Determine a energia cinética do corpo utilizando o conceito de momento de inércia.

Comentários:

De acordo com a definição de momento de inércia, temos:

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + m_4 \cdot r_4^2$$

$$I = m \cdot a^2 + m \cdot a^2 + m \cdot a^2 + m \cdot a^2$$

$$\boxed{I = 4 \cdot m \cdot a^2}$$

Então:

$$E_C = \frac{I \cdot \omega^2}{2} \Rightarrow E_C = \frac{4 \cdot m \cdot a^2 \cdot \omega^2}{2}$$

$$E_C = 2 \cdot m \cdot a^2 \cdot \omega^2$$

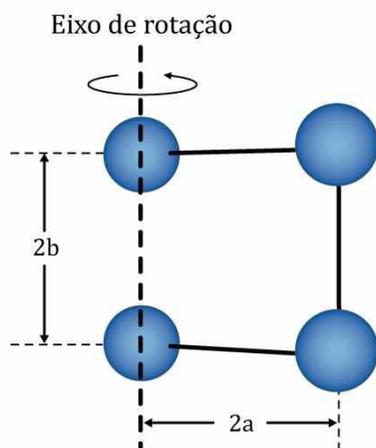
Podemos confirmar o resultado somando a energia cinética de cada partícula:

$$E_C = \sum_i E_{C_i} = \sum_i \frac{m_i \cdot v_i^2}{2} = 4 \cdot \frac{m \cdot v^2}{2} = 2 \cdot m \cdot (a \cdot \omega)^2 = 2 \cdot m \cdot a^2 \cdot \omega^2$$

Observe que  $I$  não depende do comprimento  $b$ . O momento de inércia depende apenas da distância das massas ao eixo, e não de onde as partículas se localizam ao longo do eixo.

Qual será o momento de inércia deste sistema para um eixo de rotação paralelo ao anterior, mas passando por duas das partículas?





Agora, o momento de inércia será dado por:

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 = m \cdot (2a)^2 + m \cdot (2a)^2 = 4 \cdot m \cdot a^2 + 4(m \cdot a^2)$$

$$I = 8 \cdot m \cdot a^2$$

Note que o momento de inércia mudou. Ele foi acrescido de  $4(m \cdot a^2)$ . Mais tarde veremos um teorema que esclarece um pouco esse resultado.



### 2.3. Cálculo do momento de inércia

Do ponto de vista físico, podemos dizer que o momento de inércia em relação a um eixo é uma medida da resistência inercial que o corpo opõe a variações de seu movimento de rotação em torno do eixo. Dizemos que é o análogo rotacional da massa.

Em outras palavras, quanto mais afastado do eixo está um elemento de massa, maior o seu raio de giração ( $r_i$ ), ou seja, maior a sua contribuição para o cálculo do momento de inércia do corpo em relação ao eixo.

Lembre-se que o momento de inércia de um corpo rígido em relação a um eixo escolhido depende tanto da massa quanto da distribuição de massa em relação a este eixo.

Portanto, diferentemente da massa de um corpo, que é uma característica intrínseca do corpo, o momento de inércia depende da localização do eixo, bem como a distribuição de massa do corpo.

Para sistema discreto de partículas, isto é, um sistema que apresenta uma finidade de partículas de massa  $m_i$  e raio de giração  $r_i$ , então o momento de inércia pode ser calculado pela expressão:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2$$

Em corpos contínuos, o momento de inércia é calculado dividindo o corpo em elementos de massa, tão pequenos quanto se queira, e efetuando a soma do elemento de momento de inércia de cada massa pequenina. Matematicamente temos:

$$I = \int r^2 dm$$

Em que  $r$  é a distância radial, ao eixo, do elemento de massa  $dm$ . Antes de calcular a integral, você deve expressar  $dm$  como uma massa específica vezes um comprimento, ou uma área, ou um volume, mas esse não é o foco do nosso curso. Por isso, vamos apenas apresentar alguns resultados.

Apenas como curiosidade, vamos calcular o momento de inércia de uma barra fina homogênea de comprimento  $L$  e massa  $M$  em relação a um eixo que passa perpendicularmente por uma de suas extremidades, conforme a figura abaixo:

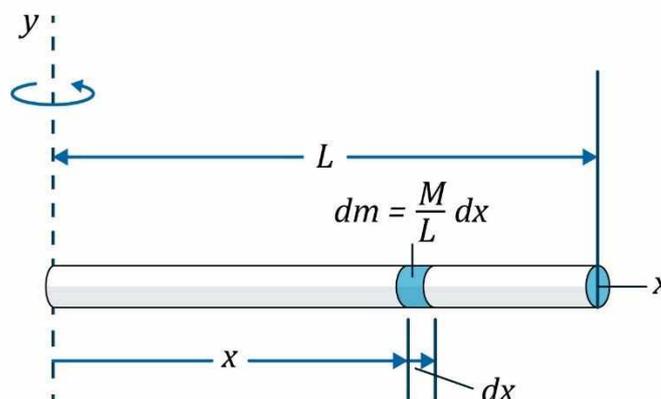


Figura 20: Barra girando em relação ao eixo  $y$ .

Como a barra é homogênea, isto é, para cada um de seus segmentos, a massa por unidade de comprimento  $\lambda$  é constante e igual a  $M/L$ . Então:

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dx}$$

Logo:

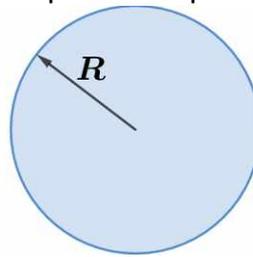
$$I = \int x^2 dm \Rightarrow I = \int_0^L x^2 \lambda dx = \lambda \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L = \lambda \cdot \left( \frac{L^3}{3} - 0 \right) = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3}{3}$$
$$\therefore I = \frac{M \cdot L^2}{3}$$

ATENÇÃO  
DECORE!



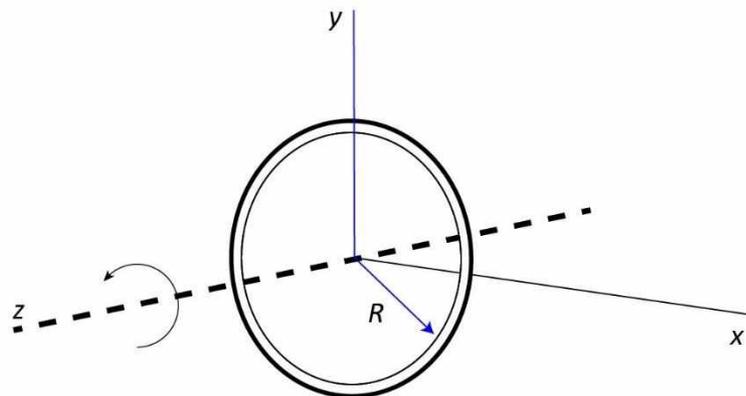
Vamos apresentar alguns resultados importantes:

1. Esfera maciça de massa  $M$  com eixo passando pelo centro:



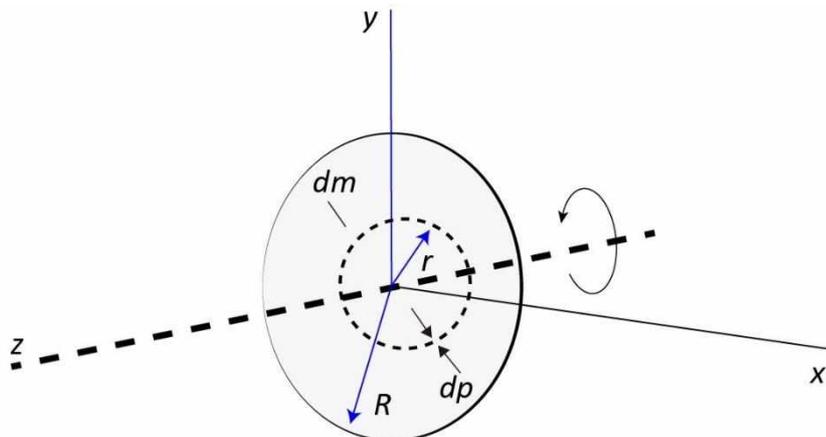
$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

2. Aro de massa  $M$  e raio  $R$  com eixo passando perpendicularmente pelo seu centro:



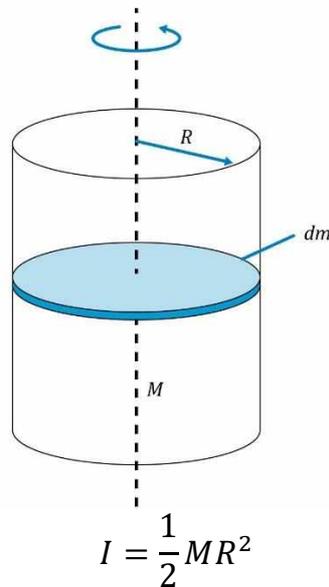
$$I = MR^2$$

3. Disco homogêneo de massa  $M$  e de raio  $R$  com eixo passando perpendicularmente pelo seu centro:



$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

4. Cilindro maciço homogêneo, de massa  $M$ , em relação ao seu eixo:



## 2.4. Teorema dos eixos paralelos

Este teorema é bem útil para simplificar o cálculo do momento de inércia. Considere um corpo extenso cujo momento de inércia em relação a certo eixo é  $I$  e seja  $I_{cm}$  o momento de inércia em relação a um eixo paralelo, que passa pelo centro de massa, conforme figura abaixo:

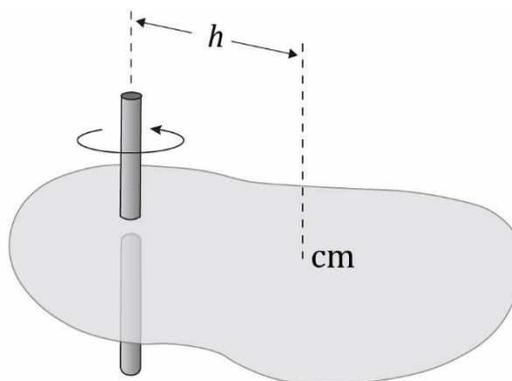


Figura 21: Corpo de formato qualquer girando em torno de um eixo paralelo ao seu centro de massa, onde  $h$  é a distância entre os eixos.

O teorema dos eixos paralelos diz que:

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

Para provar este teorema, vamos utilizar o conceito de energia cinética. Podemos dizer que a energia cinética do corpo é dada por:

$$E_c = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

Em que  $I$  é o momento de inércia em relação ao eixo fixo. Por outro lado, podemos dizer que a energia cinética é a energia cinética de translação  $(M \cdot v_{cm}^2)/2$  mais a energia cinética de rotação  $(I_{cm} \cdot \omega^2)/2$  em relação ao centro de massa.

Dessa forma, temos que:

$$\frac{I \cdot \omega^2}{2} = \frac{M \cdot v_{cm}^2}{2} + \frac{I_{cm} \cdot \omega^2}{2}$$

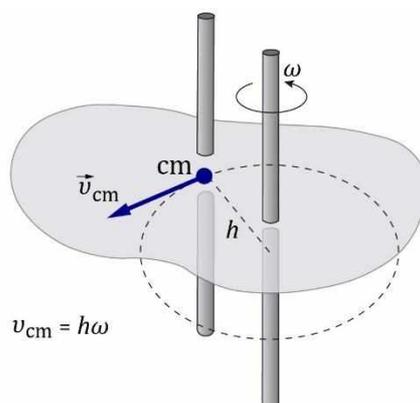


Figura 22: Aplicação do teorema dos eixos paralelos.

Note que o centro de massa se move ao longo de uma trajetória circular de raio  $h$ , de forma que é válido  $v_{cm} = h \cdot \omega$ . Portanto:

$$I \cdot \omega^2 = M \cdot v_{cm}^2 + I_{cm} \cdot \omega^2$$

$$I \cdot \omega^2 = M \cdot (h \cdot \omega)^2 + I_{cm} \cdot \omega^2$$

$$\therefore I = I_{cm} + M \cdot h^2$$



## 2.5. Segunda lei de Newton para a rotação

Para fazer um corpo girar, você deve lhe aplicar uma rotação inicial. Por exemplo, podemos girar um disco aplicando a ele as forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  exercidas tangencialmente nas bordas, como na figura abaixo.

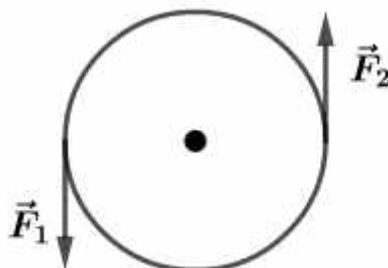


Figura 23: Forças tangenciais girando um disco.

Note que o sentido e a direção das forças são muito importantes para fazer o corpo girar. Se as mesmas forças fossem aplicadas nos mesmos pontos, mas em uma direção radial, o disco não iria girar.

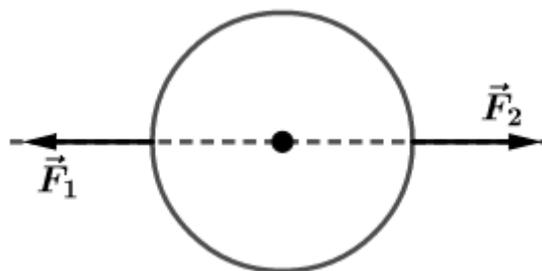


Figura 24: Forças na direção radial não são capazes de rotacionar o disco.

Além disso, note que se aplicarmos as mesmas forças tangencialmente, mas em pontos mais próximos do centro do disco, então o disco gira, mas com uma rapidez angular menor.

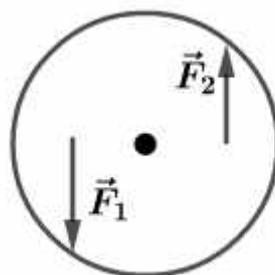


Figura 25: forças com direção tangencial mas próxima do disco.

Considere uma partícula de massa  $m$  presa a uma das extremidades de uma haste rígida, sem massa, de comprimento  $r$ . A haste pode girar livremente em torno de um eixo fixo que passa perpendicularmente por sua extremidade em  $A$ . Por construção, a partícula pode se mover apenas em um círculo de raio  $r$ . Se uma única força  $\vec{F}$  é aplicada sobre a partícula, como mostra a figura abaixo, então podemos aplicar a segunda lei de Newton para a partícula apenas nas componentes tangenciais:

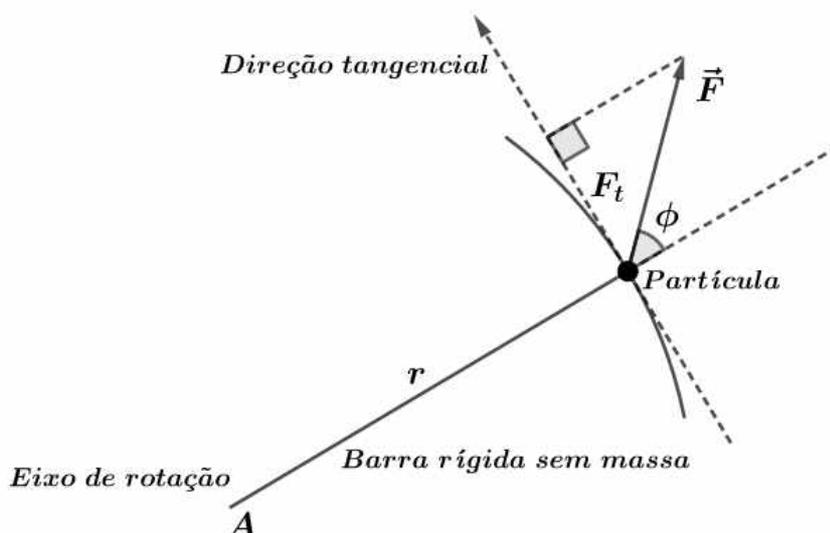


Figura 26: Decomposição da força na direção tangencial gerando torque em relação ao eixo de rotação que passa por A.

$$F_t = m \cdot a_t$$

Em que  $F_t = F \cdot \text{sen } \phi$  é a componente tangencial da força  $\vec{F}$  e  $a_t$  é a componente tangencial da aceleração. Algebricamente, podemos reescrever a segunda lei de Newton na direção tangencial para as grandezas angulares:

$$r \cdot F_t = m \cdot r \cdot a_t$$

$$r \cdot F_t = m \cdot r \cdot r \cdot \alpha$$

$$r \cdot F_t = (m \cdot r^2) \cdot \alpha$$

Note que  $r \cdot F_t$  é o módulo do torque  $\tau$  em relação ao eixo de rotação associado à força. Ou seja:

$$\tau = r \cdot F_t$$

Portanto:

$$\tau = (m \cdot r^2) \cdot \alpha$$

Aplicamos esse conceito a uma partícula que gira em torno de um ponto fixo. Podemos aplicar essa ideia a um corpo extenso. O torque da  $i$ -ésima partícula em relação a um eixo fixo é dado por:

$$(\tau_{res})_i = m_i \cdot r_i^2 \cdot \alpha$$

Em que  $(\tau_{res})_i$  é o torque devido à força resultante sobre a  $i$ -ésima partícula. Somando sobre todas as partículas nos dois lados, temos:

$$\sum (\tau_{res})_i = \sum m_i \cdot r_i^2 \cdot \alpha = \left( \sum m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \alpha = I \cdot \alpha$$

Como já mencionamos anteriormente, a força resultante que atua sobre um sistema de partículas é igual à força externa resultante que age sobre o sistema, já que as forças internas se anulam aos pares.

O efeito dos torques internos exercidos entre as partículas de um sistema conduz a um resultado análogo, ou seja, o torque resultante que atua sobre um sistema é igual ao torque externo resultante que age sobre o sistema. Em outras palavras:

$$\vec{\tau}_{ext\ res} = \sum \vec{\tau}_{ext} = I \cdot \vec{\alpha}$$

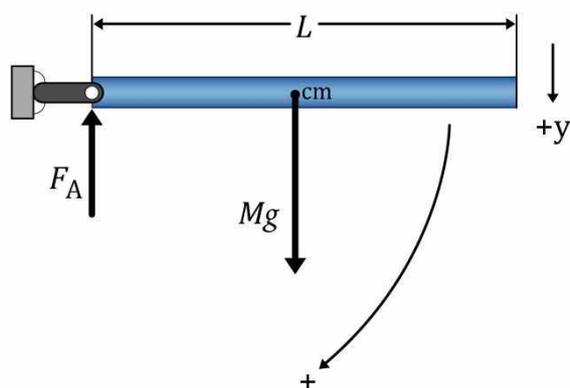
Note que essa equação é o análogo rotacional da segunda lei de Newton para o movimento de translação,  $\vec{F}_{res} = \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$



8)

Considere uma barra fina homogênea de comprimento  $L$  e massa total  $M$ , articulada em uma de suas extremidades. Ela é abandonada da posição horizontal. Desprezando o atrito e a resistência do ar, calcule a aceleração angular da barra imediatamente após ser solta e a intensidade da força  $F_A$  exercida sobre a barra pelo pivô neste instante.





**Comentários:**

Podemos determinar a aceleração angular aplicando a segunda lei de Newton para a rotação:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = I \cdot \vec{\alpha}$$

Diante disso, precisamos conhecer o torque resultante na barra. Note que a única força externa a exercer um torque externo na barra em relação ao eixo que passa por A é a força peso. Como a barra é homogênea, então o seu centro de gravidade está em seu centro, a uma distância  $L/2$  do eixo. Então:

$$\tau_{grav} = M \cdot g \cdot \frac{L}{2}$$

Para uma barra homogênea, o momento de inércia em relação a uma extremidade é dado por:

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

Portanto, em módulo, temos:

$$M \cdot g \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \cdot \alpha$$

$$\boxed{\alpha = \frac{3g}{2L}}$$

Para determinarmos a força em A, devemos utilizar a segunda lei de Newton para a barra:

$$\sum F_{ext_y} = M \cdot a_{cm_y} \Rightarrow M \cdot g - F_A = M \cdot a_{cm_y}$$

Mas:

$$a_{cm_x} = r_{cm} \cdot \omega^2$$

Como logo após o abandono da barra a velocidade angular é zero, então:

$$\Rightarrow a_{cm} = \frac{L}{2} \cdot \omega^2 = 0$$

Pela aceleração tangencial, temos:

$$a_T = r \cdot \alpha \Rightarrow a_{cm_y} = a_{cm_t} = r_{cm} \cdot \alpha = \frac{L}{2} \cdot \frac{3g}{2L} = \frac{3g}{4}$$

Substituindo na segunda lei de Newton, temos:

$$M \cdot g - F_A = M \cdot \frac{3g}{4} \Rightarrow F_A = \frac{M \cdot g}{4}$$



### 2.5.1. Condições de não-deslizamento

Em muitas questões de vestibulares e em situações físicas cotidianas é comum ocasiões em que um fio tensionado está em contato com uma polia que gira. Para que o fio não escorregue sobre a polia, as partes do fio e da polia que estão em contato direto devem possuir a mesma velocidade tangencial, ou seja:

$$v_t = R \cdot \omega$$

Em que  $v_t$  é a velocidade tangencial do fio e  $R \cdot \omega$  é a velocidade tangencial do perímetro da polia. Como  $R$  é o raio da polia e  $\omega$  é a rapidez angular da polia, então, derivando em relação ao tempo a equação logo acima, vem:

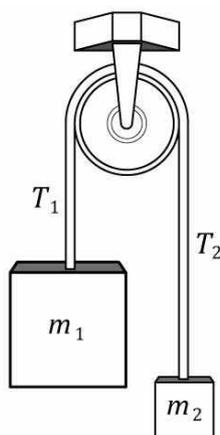
$$a_t = R \cdot \alpha$$

ATENÇÃO  
DECORE!



9)

O sistema da figura abaixo é abandonado do repouso. O atrito no suporte é desprezível, mas a massa da polia não é desprezível. Se o fio não desliza na polia e  $m_1 > m_2$ , qual a ordem de magnitude das trações  $T_1$  e  $T_2$ ?



**Comentários:**

Imediatamente após abandonar o sistema, a massa  $m_1$  acelera para baixo, a massa  $m_2$  acelera para cima e a polia vai girar no sentido anti-horário com certa aceleração angular.



Aplicando a segunda lei de Newton para o bloco de massa  $m_1$  e como  $m_1$  vai para baixo, temos que:

$$m_1 \cdot g > T_1$$

Para o bloco de massa  $m_2$ , temos:

$$T_2 > m_2 \cdot g$$

Devido ao fato de a polia girar no sentido anti-horário, o torque resultante sobre ela deve ser anti-horário. Como os dois braços de alavanca são iguais, torque maior implica tração maior. Então:

$$\begin{aligned} \tau_1 - \tau_2 > 0 &\Rightarrow (m_1 \cdot g - T_1) \cdot R - (m_2 \cdot g - T_2) \cdot R > 0 \\ T_2 - T_1 &< (m_2 - m_1) \cdot g \end{aligned}$$

Como  $m_1 > m_2$ , então:

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &< 0 \\ \therefore T_2 &< T_1 \end{aligned}$$

Portanto:

$$m_1 \cdot g > T_1 > T_2 > m_2 \cdot g$$

## 2.6. Potência

Para colocar um objeto para girar, você deve realizar trabalho sobre ele, aumentando a sua energia cinética, de acordo com o Teorema da Energia Cinética. Se uma força  $\vec{F}$  age sobre um corpo que gira, ao rotacionar um ângulo  $d\theta$ , o ponto de aplicação da força se desloca de uma distância  $ds = r \cdot d\theta$  (de acordo com a geometria plana) e a força realiza um trabalho expresso por:

$$dW = F_t \cdot ds = F_t \cdot r \cdot d\theta = \tau \cdot d\theta$$

Em que  $\tau$  é o torque exercido pela força  $\vec{F}$ ,  $F_t$  é a componente tangencial de  $\vec{F}$  e  $dW$  é o trabalho realizado por um torque  $\tau$  sobre um corpo que gira de um pequeno ângulo  $d\theta$ . Então:

$$dW = \tau \cdot d\theta$$

Pela definição, a potência desenvolvida pelo torque representa a taxa com que o torque realiza trabalho e pode ser calculada como:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Mas, da cinemática da rotação, sabemos que  $d\theta/dt = \omega$ , portanto:

$$P = \tau \cdot \omega$$

Note que  $dW = \tau \cdot d\theta$  e  $P = \tau \cdot \omega$  são os análogos rotacionais das equações lineares  $dW = F_R \cdot dl$  e  $P = F_R \cdot v$ , respectivamente.

ATENÇÃO  
DECORE!



10)

Considere uma roda gigante girando com rapidez angular de  $2,0 \text{ rev/h}$ . Ela possui um raio de  $67,5 \text{ m}$  e sua massa é de  $1600$  toneladas. Se a distância máxima percorrida pelo compartimento que leva os passageiros é de  $10$  metros, determine o torque necessário para parar a roda, enquanto seu perímetro percorre  $10 \text{ m}$ . Além disso, calcule a intensidade força de frenagem aplicada sobre o perímetro.

**Comentários:**

Inicialmente, devemos perceber que o trabalho realizado sobre a roda é igual à sua variação de energia cinética:

$$W = \Delta E_C \Rightarrow W = \tau \cdot \Delta\theta$$

Pela equação da cinemática da rotação, temos:

$$s = r \cdot \Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{s}{r} = \frac{10}{67,5} = 0,148 \text{ rad}$$

O momento de inércia de uma roda gigante pode ser aproximado ao momento de inércia de um anel, isto é:

$$I = m \cdot r^2 \Rightarrow I = 1,6 \cdot 10^6 \cdot (67,5)^2$$
$$I = 7,29 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Pelo Teorema da Energia Cinética, temos:

$$\tau \cdot \Delta\theta = 0 - \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

Lembrando que devemos transformar a unidade da velocidade angular:

$$2,0 \text{ rev/h} = 3,49 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Então:

$$\tau = -\frac{I \cdot \omega^2}{2\Delta\theta} = -\frac{7,29 \cdot 10^9 \cdot (3,49 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 0,148}$$

$$\boxed{|\tau| = 3,0 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

Assim, a força necessária para frear a roda gigante é tangente ao perímetro e deve exercer torque calculado anteriormente:

$$|\tau| = F \cdot R$$

$$F = \frac{|\tau|}{R} \Rightarrow F = \frac{3,0 \cdot 10^5}{67,5} \Rightarrow \boxed{F = 4,4 \cdot 10^3 \text{ N}}$$





## 2.7. Rolamento de corpos com ou sem deslizamento

### 2.7.1. Rolamento sem deslizamento

Quando um corpo rola em um plano sem deslizar, os pontos do corpo em contato com o plano estão instantaneamente em repouso e o carretel gira em torno de um eixo de rotação que passa pelos pontos de contato. Em outras palavras, a velocidade relativa entre o corpo e o plano é nulo.

Considere uma roda de raio  $R$  rolando, sem deslizar, sobre uma superfície plana. O ponto  $P$  da roda se move com rapidez dada por:

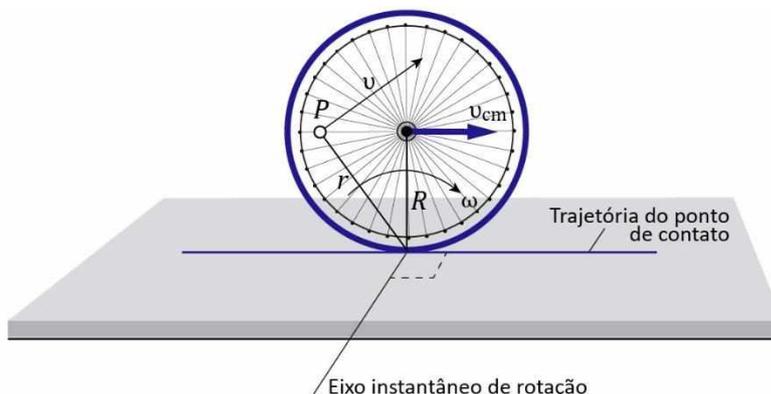


Figura 27: Roda rolando para a direita. O ponto  $P$  se move para cima e para direita. Quando o ponto  $P$  passa acima do centro da roda, ele atinge a altura máxima.

$$v = r \cdot \omega$$

Em que  $r$  é a distância do ponto  $P$  ao eixo instantâneo de rotação. Dessa forma, o centro de massa da roda se move com velocidade de:

$$v_{cm} = R \cdot \omega$$

Para o ponto no topo da roda ( $r = 2R$ ), a velocidade linear do ponto é o dobro da velocidade do centro de massa. Derivando a velocidade do centro de massa em relação ao tempo, temos:

$$a_{cm} = R \cdot \alpha$$

Se uma roda de raio  $R$  rola, sem deslizar, em um percurso reto, então ao girar de um ângulo  $\theta$ , o ponto de contato da roda com a superfície se desloca de uma distância  $s$ , que está relacionada com o deslocamento angular de acordo com a expressão:

$$s = R \cdot \theta$$

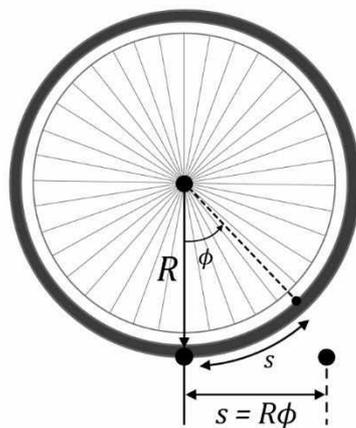


Figura 28: Relação entre o deslocamento angular e deslocamento linear da roda que não derrapa.

Caso a roda esteja rolando sobre uma superfície plana, então o seu centro de massa permanece diretamente acima do ponto de contato entre a roda e a superfície, e percorre a distância  $R \cdot \theta$ .

Para um corpo que rola, a energia cinética é dada pela soma de sua energia cinética de translação ( $M v_{cm}^2/2$ ) com a energia cinética devido a rotação ( $I_{cm} \omega^2/2$ ). Então:

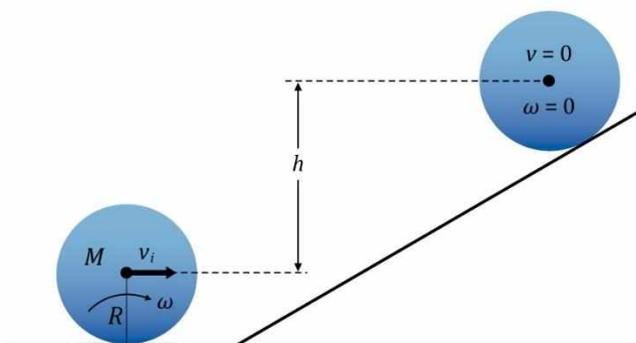
$$E_c = \frac{M \cdot v_{cm}^2}{2} + \frac{I_{cm} \cdot \omega^2}{2}$$

ATENÇÃO  
DECORE!



**11)**

Uma bola de boliche de raio  $r$  e de massa  $m$ , rola sem deslizar com velocidade  $v_0$ , em uma pista horizontal. Determine a altura máxima  $h$  alcançada pela bola no plano inclinado.



**Comentários:**

Se não há deslizamento, não existe dissipação de energia por atrito cinético. Além disso, não há forças externas atuando sobre o sistema *bola + rampa + Terra*, e com isso, não há trabalho externo sobre o sistema. Então, podemos conservar a energia mecânica entre o instante que a bola está na base da rampa e no ponto mais alta da trajetória na rampa.

Então:

$$E_{mec}^{inicial} = E_{mec}^{final}$$

$$m \cdot g \cdot h + 0 = 0 + \frac{m \cdot v_{cm}^2}{2} + \frac{I_{cm} \cdot \omega^2}{2}$$

Lembrando que o momento de inércia de uma esfera em relação ao eixo que passa pelo centro é de  $I = \frac{2}{5}mr^2$ , então:

$$m \cdot g \cdot h + 0 = 0 + \frac{m \cdot v_{cm}^2}{2} + \frac{\frac{2}{5}mr^2 \cdot (v_{cm}/r)^2}{2}$$

$$h = \frac{v_{cm}^2}{2g} + \frac{v_{cm}^2}{5g} = \frac{7v_{cm}^2}{10g}$$

Note que se não houvesse o rolamento, a altura máxima seria dada por:

$$h' = \frac{v_{cm}^2}{2g}$$

Como esperado, existe uma energia relacionada ao rolamento da esfera, fazendo com que a esfera alcance uma altura maior.

A segunda lei de Newton para a rotação,  $\tau = I \cdot \alpha$ , é válida em qualquer referencial inercial. Entretanto, ela também é válida em referenciais acelerados, desde que o momento de inércia e todos os torques sejam calculados em relação a um eixo que passa pelo centro de massa do sistema. Em outras palavras:

$$\boxed{(\tau_{res})_{cm} = I_{cm} \cdot \alpha}$$

Se o centro de massa está acelerado, o referencial do centro de massa é não-inercial, por exemplo uma bola de boliche rolando para baixo em um plano inclinado. Como vimos nas aulas de dinâmica, as equações da segunda lei de Newton não valem em referencial não-inerciais. Entretanto, para a rotação as equações são válidas em referenciais não inercial, aplicando a segunda lei no centro de massa.

### 2.7.2. Rolamento com deslizamento

Se um corpo desliza enquanto rola, a condição de não-deslizamento ( $v_{cm} = R \cdot \omega$ ) não é mais cumprida. Quando jogar lança uma bola sem rotação inicial ( $\omega_0 = 0$ ), se a bola derrapa sobre a pista, então  $v_{cm} > R \cdot \omega$ . Entretanto, devido ao fato de a superfície ser áspera, a força de atrito irá reduzir a velocidade linear do centro de massa ( $v_{cm}$ ).



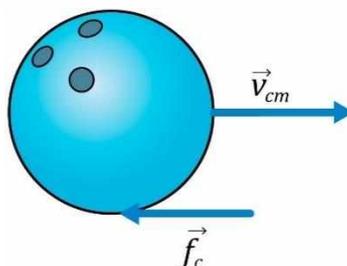


Figura 29: Devido à força de atrito, a velocidade linear do centro de massa  $\vec{v}_{cm}$  diminui e aumenta a rapidez angular  $\omega$  até que a igualdade  $v_{cm} = \omega \cdot R$  seja alcançada.

Dessa forma, à medida que  $v_{cm}$  diminui de intensidade, sua velocidade angular ( $\omega$ ) aumenta, até que a condição de não-deslizamento ( $v_{cm} = R \cdot \omega$ ) seja atingida e, em seguida, a bola rolará sem deslizar.

Note que em pista de boliche, a superfície é bem lisa e quando você lança a bola, ela derrapa em um trecho longo. As pistas são bem cuidadas e possuem uma fina camada de óleo para serem bem escorregadias, isto é,  $\mu$  bem pequeno para aproveitar mais a fase de escorregamento da bola de boliche.

Quando você dá uma tacada em uma bola de bilhar, bem acima do seu centro de massa, ela irá transladar e rotacionar de tal forma que  $\omega > \frac{v_{cm}}{R}$ .

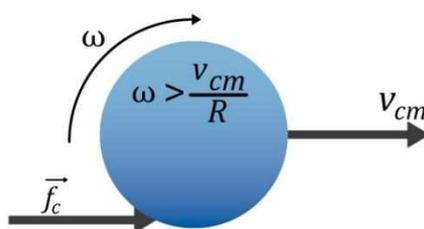


Figura 30: Bola girando com rapidez angular muito alta. A força de atrito acelera a bola no sentido do movimento.

Nesta situação, a força de atrito cinético aumentará  $v_{cm}$  e reduzirá  $\omega$  até que a condição de não deslizamento ( $v_{cm} = \omega \cdot R$ ) seja atingida.



## 2.8. Quantidade de movimento angular ou momento angular

Já vimos a conservação da energia e a conservação da quantidade de movimento linear. Agora, vamos trabalhar os conceitos de quantidade de movimento angular e sua conservação. Por intermédios de experimentos, podemos evidenciar que o momento angular nunca é criado ou destruído, ou seja, ele se conserva.

Vimos também as definições de produto vetorial e vimos que o torque de uma força  $\vec{F}$  em relação a um ponto  $O$  pode ser definido como:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Geometricamente, temos:

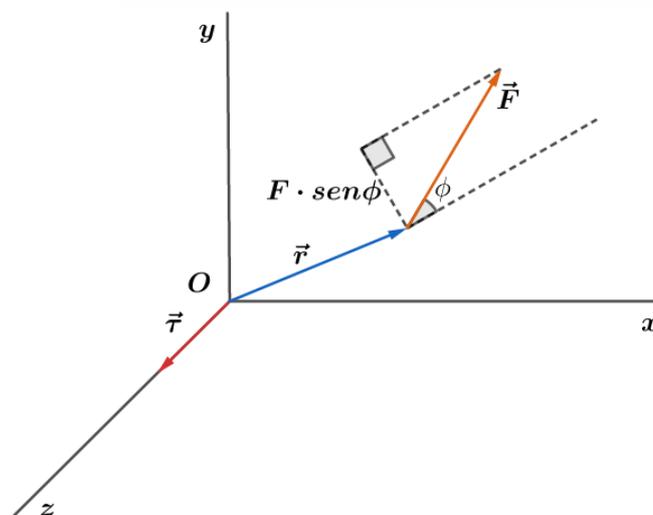


Figura 31: Quando  $\vec{F}$  e  $\vec{r}$  são perpendiculares ao eixo  $z$ , então o torque em relação a  $O$  será paralelo ao eixo  $z$ .

Se você estiver com dúvidas em como trabalhar com o produto vetorial, sugiro que volte a aula 00 e revise este importante conceito matemático amplamente usado na Física.

Considere uma partícula de massa  $m$  se movendo com velocidade  $\vec{v}$  na posição  $\vec{r}$  em relação à origem. Como vimos na aula 14, a quantidade de movimento linear da partícula é de  $\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$ . Definimos a grandeza vetorial  $\vec{L}$ , denominada quantidade de movimento angular ou momento angular como o produto vetorial de  $\vec{r}$  por  $\vec{p}$ :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Geometricamente, temos:

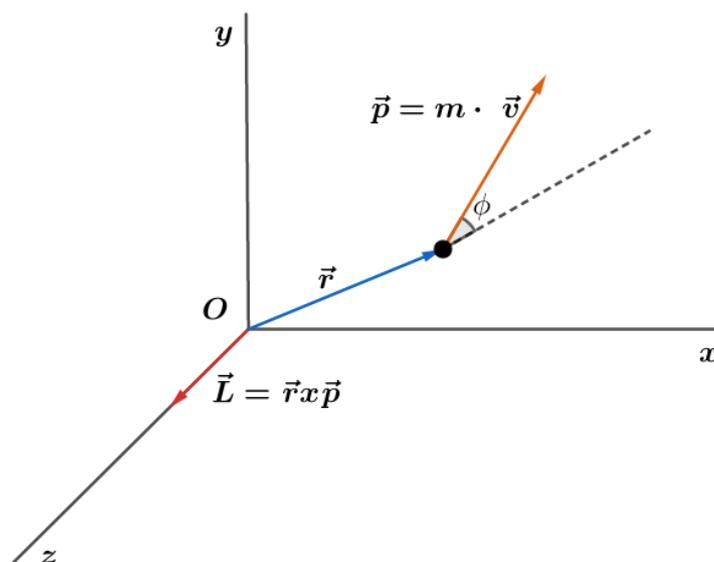


Figura 32: Definição de momento angular.

Note que semelhante ao torque, o momento angular é definido **em relação a um ponto do espaço**.

Considere uma partícula de massa  $m$ , presa a um disco circular de massa desprezível, que se move em um círculo no plano  $xy$ , com centro na origem dos eixos. Se o disco gira em torno de  $z$ , com velocidade angular dada por  $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ , então a quantidade de movimento angular da partícula presa ao disco em relação ao seu centro é de:

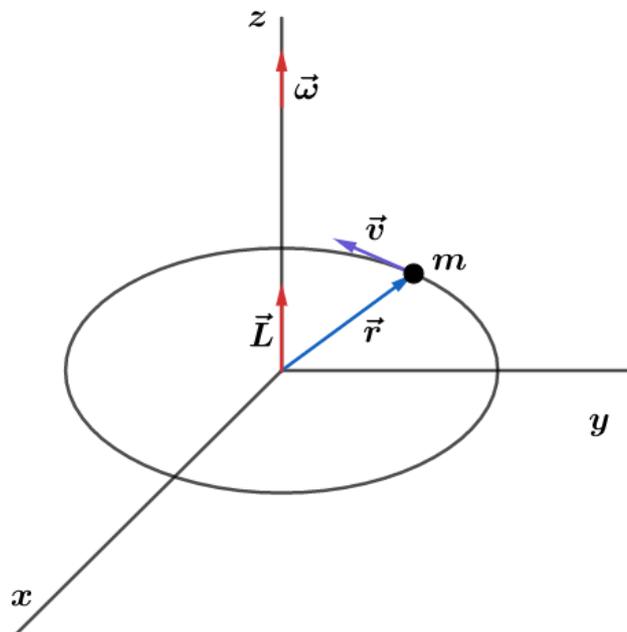


Figura 33: Definição de momento angular e a relação entre os vetores.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v} = r \cdot m \cdot v \cdot \text{sen}(90^\circ) \hat{k} =$$

Mas lembre-se que:

$$v = r \cdot \omega$$

Então:

$$\vec{L} = r \cdot m \cdot (r \cdot \omega) \hat{k} = (m \cdot r^2) \cdot \omega \hat{k} = (m \cdot r^2) \cdot \vec{\omega}$$

Portanto:

$$\vec{L} = (m \cdot r^2) \cdot \vec{\omega}$$

Lembrando que  $m \cdot r^2$  é o momento de inércia de uma partícula em relação ao eixo  $z$  que passa pelo centro do disco, então:

$$\boxed{\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}}$$

Note que calculamos o momento angular em relação ao centro do disco. Se tivéssemos tomado qualquer outro ponto ao longo do eixo  $z$ , o resultado não seria o mesmo, isto é, teríamos outro valor para o momento angular.

Além disso, observe a semelhança entre o momento angular ( $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$ ) e o momento linear ( $\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$ ). Repare que o momento de inércia é o análogo da massa para a rotação.

Existem vários resultados importantes que relacionam torque e momento angular de um sistema de partículas. O primeiro resultado é a segunda lei de Newton para o movimento de rotação:

$$\vec{\tau}_{ext\ res} = \frac{d\vec{L}_{sis}}{dt}$$

Essa equação nos diz que o torque externo resultante sobre um sistema, em relação a um ponto fixo, é igual à taxa de variação do momento angular do sistema em relação ao ponto escolhido em questão.

Além da segunda lei, podemos estabelecer o teorema do impulso angular:

$$\Delta \vec{L}_{sis} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}_{ext\ res} dt$$

Em outras palavras, quando somamos os torques externos resultantes de  $t_1$  a  $t_2$ , podemos variar o momento angular do sistema nesse intervalo de tempo. Note como a equação logo acima é o análogo rotacional de  $\Delta \vec{Q}_{sis} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ext\ res} dt$ .

A partir da segunda lei de Newton para a rotação, se o torque externo resultante é nulo, então  $\frac{d\vec{L}_{sis}}{dt} = \vec{0}$ , isto é,  $\vec{L}_{sis}$  é constante. Esse resultado é muito empregado na gravitação, por exemplo.

Outro exemplo comum é o da patinadora no gelo. Quando ela começa a girar, o torque exercido pelo gelo é muito pequeno e podemos dizer que o momento angular é aproximadamente constante. Dessa forma, se ela diminui seu momento de inércia recolhendo os braços, então sua velocidade angular aumenta, já que  $|\vec{L}| = I \cdot |\vec{\omega}| = \text{constante}$ .

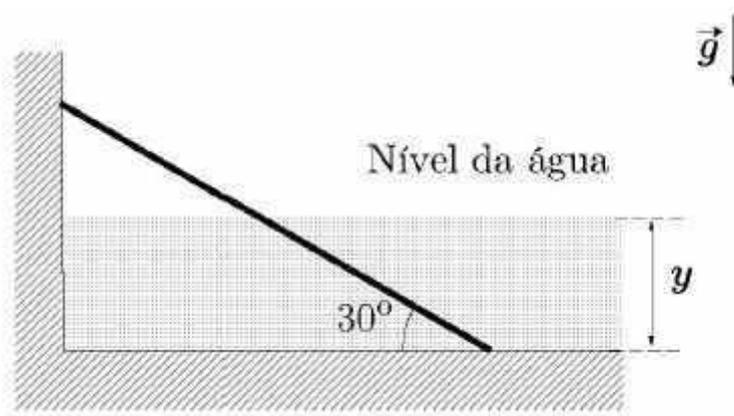




### 3. Lista de exercícios

#### 1. (ITA – 2020 – 2ª Fase)

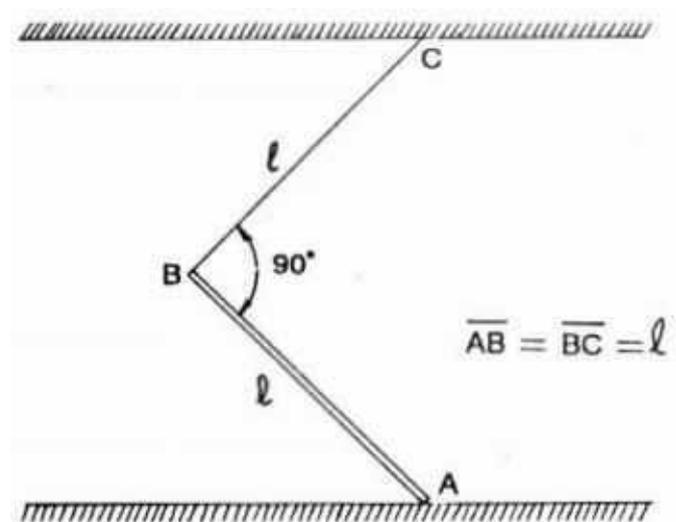
Uma prancha retangular de espessura uniforme, 5,0 m de comprimento,  $1,5 \text{ g/cm}^3$  de densidade e 10 kg de massa homogeneamente distribuída, é parcialmente submersa na piscina ilustrada na figura, em cuja parede (lisa) se apoia, formando um ângulo de  $30^\circ$  com o piso horizontal, cujo coeficiente de atrito com a prancha é  $0,6\sqrt{3}$ . Determine para quais alturas y do nível de água a prancha permanece em equilíbrio estático nessa posição.



#### 2. (ITA – 1990)

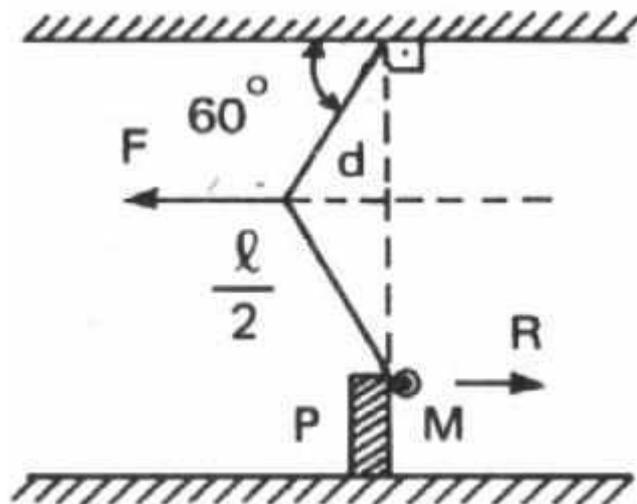
Para que a haste  $AB$  homogênea de peso  $P$  permaneça em equilíbrio suportada pelo fio  $BC$ , a força de atrito em  $A$  deve ser:

- a)  $\frac{P}{4}$
- b)  $\frac{P}{2}$
- c)  $\frac{P\sqrt{2}}{2}$
- d)  $\frac{P\sqrt{2}}{4}$
- e) de outro valor.



### 3. (ITA – 1991)

Na figura abaixo, a massa esférica  $M$  pende de um fio de comprimento  $l$  mas está solicitada para a esquerda por uma força  $F$  que mantém a massa apoiada contra uma parede vertical  $P$ , sem atrito. Determine os valores de  $F$  e de  $R$  (reação da parede). (O raio da esfera  $\ll l$ ).

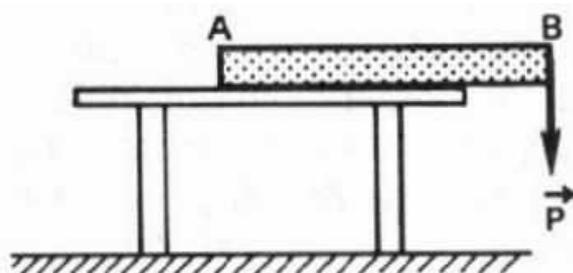


- |    | $F$                     | $R$                     |
|----|-------------------------|-------------------------|
| a) | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{Mg\sqrt{3}}{3}$  |
| b) | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ |
| c) | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ |
| d) | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ |
| e) | $Mg\sqrt{3}$            | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ |

### 4. (ITA – 1993)

Um pedaço de madeira homogêneo, de seção transversal constante  $A$  e comprimento  $L$ , repousa sobre uma mesa fixa no chão. A madeira está com 25% do seu comprimento para fora da mesa, como mostra a figura. Aplicando uma força  $P = 300\text{ N}$  no ponto  $B$  a madeira começa a se deslocar de cima da mesa. Qual é o valor real do peso  $Q$  da madeira?

- $Q = 150\text{ N}$
- $Q = 300\text{ N}$
- $Q = 400\text{ N}$
- $Q = 600\text{ N}$
- $Q = 900\text{ N}$

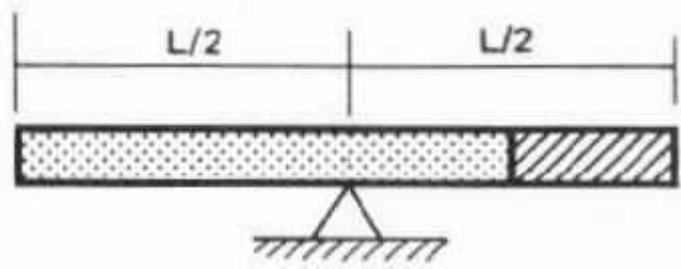


### 5. (ITA – 1993)

Uma haste metálica de seção retangular de área  $A$  e de comprimento  $L$  é composta de dois materiais de massas específicas  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . Os dois materiais constituem hastes homogêneas de comprimentos  $l_1$  e  $l_2$ , com  $l_1 + l_2 = L$  e  $l_1 = 3l_2$  soldadas nas extremidades. Colocada a haste sobre um cutelo verifica-se que o equilíbrio é atingido na situação indicada na figura. Calcule a relação  $\rho_1/\rho_2$ .



- a)  $\rho_1/\rho_2 = 1$
- b)  $\rho_1/\rho_2 = 2$
- c)  $\rho_1/\rho_2 = 3$
- d)  $\rho_1/\rho_2 = 2,5$
- e)  $\rho_1/\rho_2 = 0,4$



### 6. (ITA – 1993)

Duas esferas condutoras, de massa  $m$ , bem pequenas, estão igualmente carregadas. Elas estão suspensas num mesmo ponto, por dois longos fios de seda, de massas desprezíveis e de comprimentos iguais a  $L$ . As cargas das esferas são tais, que elas estarão em equilíbrio quando a distância entre elas é igual a  $a$  ( $a \ll L$ ). Num instante posterior, uma das esferas é descarregada. Qual será a nova distância  $b$  ( $b \ll L$ ) entre as esferas, quando após se tocarem o equilíbrio entre elas for novamente restabelecido?

- a)  $b = a/2$
- b)  $b = a\sqrt{2}/2$
- c)  $b = a\sqrt{3}/2$
- d)  $b = a/\sqrt[3]{2}$
- e)  $b = a/\sqrt[3]{4}$

### 7. (ITA – 1994)

Uma barra homogênea do peso  $P$  tem uma extremidade apoiada num assoalho horizontal e a outra numa parede vertical. O coeficiente do atrito com relação ao assoalho e com relação à parede são iguais a  $\mu$ . Quando a inclinação da barra com relação à vertical é de  $45^\circ$ , a barra encontra-se na iminência de deslizar. Podemos então concluir que o valor de  $\mu$  é:

- a)  $1 - (\sqrt{2}/2)$
- b)  $\sqrt{2} - 1$
- c)  $1/2$
- d)  $\sqrt{2}/2$
- e)  $2 - \sqrt{2}$

### 8. (ITA – 1995)

Considere as três afirmativas abaixo sobre um aspecto da Física do Cotidiano:

I — Quando João começou a subir pela escada de pedreiro apoiada numa parede vertical, e já estava no terceiro degrau, Maria grita para ele: — “Cuidado João, você vai acabar caindo, pois, a escada está muito inclinada e vai acabar deslizando”.



II — João responde: “— Se ela não deslizou até agora que estou no terceiro degrau, também não deslizará quando eu estiver no último. ”

III— Quando João chega no meio da escada fica com medo e dá total razão à Maria. Ele desce da escada e diz a Maria: “Como você é mais leve do que eu, tem mais chance de chegar ao fim da escada com a mesma inclinação, sem que ela deslize”.

Ignorando o atrito na parede:

- A) Mana está certa com relação a I mas João errado com relação a II.
- B) João está certo com relação a II mas Maria errada com relação a I.
- C) as três afirmativas estão fisicamente corretas.
- D) somente a afirmativa I é fisicamente correta.
- E) somente a afirmativa III! é fisicamente correta.

OBS: Para esta questão escreva no caderno de respostas as equações que fornecem o equilíbrio de uma escada apoiada numa parede vertical com uma pessoa sobre ela.

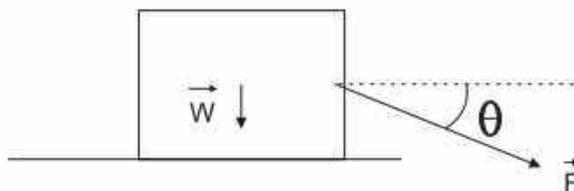
### 9. (ITA – 1997)

Um corpo de massa  $m$  é colocado no prato  $A$  de uma balança de braços desiguais e equilibrado por uma massa  $p$  colocada no prato  $B$ . Esvaziada a balança, o corpo de massa  $m$  é colocado no prato  $B$  e equilibrado por uma massa  $q$  colocada no prato  $A$ . O valor da massa  $m$  é

- a)  $pq$
- b)  $\sqrt{pq}$
- c)  $(p + q)/2$
- d)  $\sqrt{(p + q)/2}$
- e)  $pq/(p + q)$

### 10. (ITA – 1998)

Um caixote de peso  $W$  é puxado sobre um trilho horizontal por uma força de magnitude  $F$  que forma um ângulo  $\theta$  em relação à horizontal, como mostra a figura. Dado que o coeficiente de atrito estático entre o caixote e o trilho é  $\mu$ , o valor mínimo de  $F$ , a partir de qual seria possível mover o caixote, é:



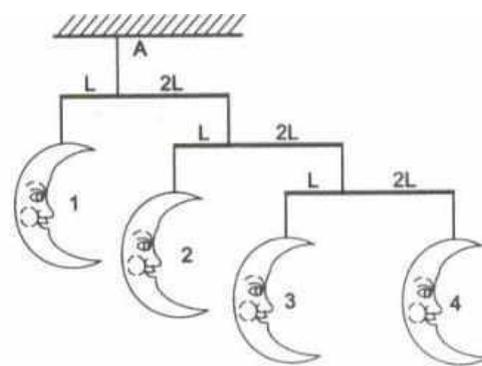
- a)  $\frac{2W}{1-\mu}$

- b)  $\frac{W \cdot \sin \theta}{1 - \mu \cdot \tan \theta}$   
 c)  $\frac{\mu \cdot W \cdot \sin \theta}{1 - \mu \cdot \tan \theta}$   
 d)  $\frac{\mu \cdot W \cdot \sec \theta}{1 - \mu \cdot \tan \theta}$   
 e)  $(1 - \mu \cdot \tan \theta) \cdot W$

### 11. (ITA – 1999)

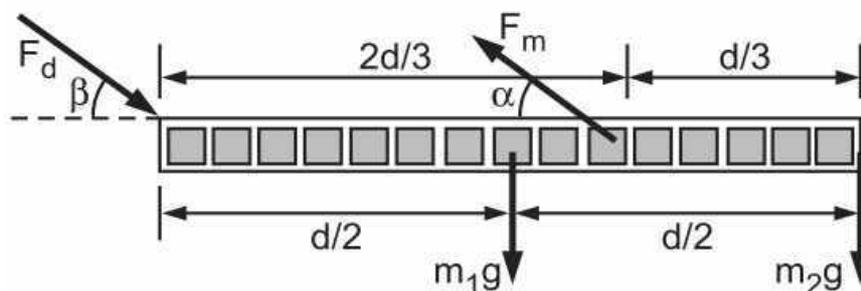
Um brinquedo que as mães utilizam para enfeitar quartos de crianças é conhecido como "mobile". Considere o "mobile" de luas esquematizado na figura abaixo. As luas estão presas por meio de fios de massas desprezíveis a três barras horizontais, também de massas desprezíveis. O conjunto todo está em equilíbrio e suspenso num único ponto A. Se a massa da lua 4 é de 10 g, então a massa em quilogramas da lua 1 é:

- a) 180.  
 b) 80.  
 c) 0,36.  
 d) 0,18.  
 e) 9.



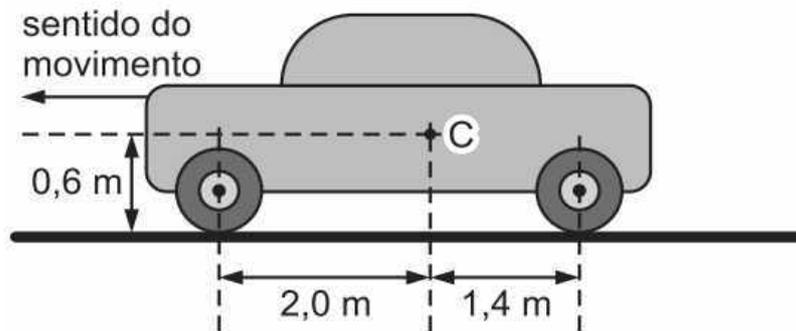
### 12. (ITA – 2006)

Considere uma pessoa de massa  $m$  que ao curvar-se permaneça com a coluna vertebral praticamente nivelada em relação ao solo. Sejam  $m_1 = \frac{2}{5}m$  a massa do tronco e  $m_2 = \frac{1}{5}m$  a soma das massas da cabeça e dos braços. Considere a coluna como uma estrutura rígida e que a resultante das forças aplicadas pelos músculos à coluna seja  $F_m$  e que  $F_d$  seja a resultante das outras forças aplicadas à coluna, de forma a mantê-la em equilíbrio. Qual é o valor da força  $F_d$ ?



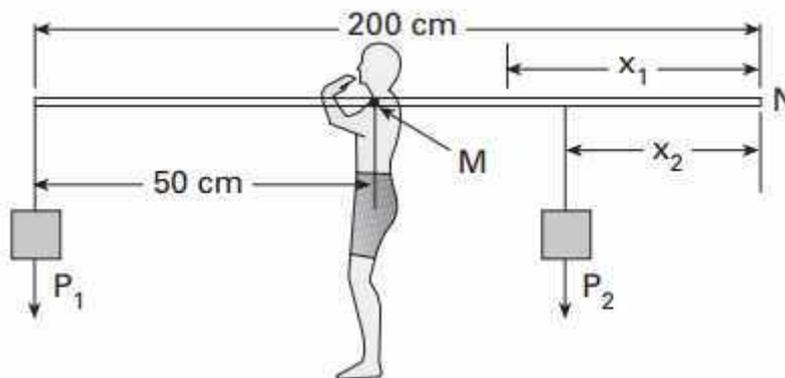
### 13. (ITA – 2006)

Considere um automóvel de peso  $P$ , com tração nas rodas dianteiras, cujo centro de massa está em  $C$ , movimentando-se num plano horizontal. Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , calcule a aceleração máxima que o automóvel pode atingir, sendo o coeficiente de atrito entre os pneus e o piso igual a 0,75.



#### 14. (ITA – 2007)

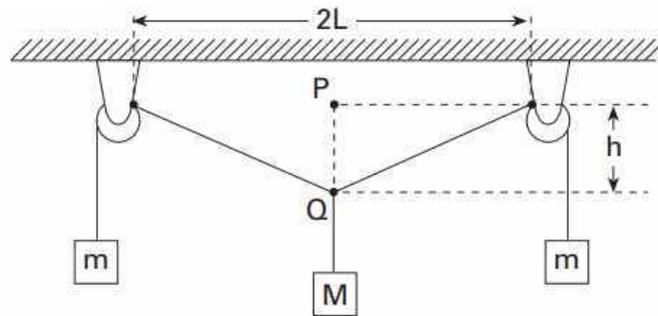
Na experiência idealizada na figura, um halterofilista sustenta, pelo ponto  $M$ , um conjunto em equilíbrio estático composto de uma barra rígida e uniforme, de um peso  $P_1 = 100\text{ N}$  na extremidade a  $50\text{ cm}$  de  $M$ , e de um peso  $P_2 = 60\text{ N}$ , na posição  $x_2$  indicada. A seguir, o mesmo equilíbrio estático é verificado dispondo-se, agora, o peso  $P_2$  na posição original de  $P_1$ , passando este à posição de distância  $x_1 = 1,6 \cdot x_2$  da extremidade  $N$ . Sendo de  $200\text{ cm}$  o comprimento da barra e  $g = 10\text{ m/s}^2$  a aceleração da gravidade, a massa da barra é de



- a) 0,5 kg.
- b) 1,0 kg.
- c) 1,5 kg.
- d) 1,6 kg.
- e) 2,0kg.

#### 15. (ITA – 2007)

No arranjo mostrado na figura com duas polias, o fio inextensível e sem peso sustenta a massa  $M$  e, também, simetricamente, as duas massas  $m$ , em equilíbrio estático.



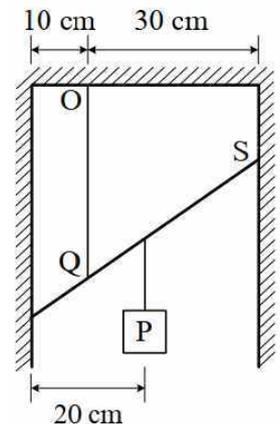
Desprezando o atrito de qualquer natureza, o valor  $h$  da distância entre os pontos  $P$  e  $Q$  vale

- a)  $ML/\sqrt{4m^2 - M^2}$
- b)  $L$
- c)  $ML/\sqrt{M^2 - 4m^2}$
- d)  $mL/\sqrt{4m^2 - M^2}$
- e)  $ML/\sqrt{2m^2 - M^2}$

**16. (ITA – 2008)**

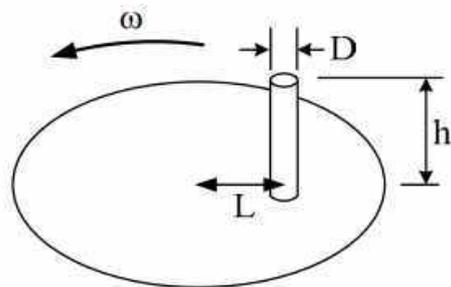
A figura mostra uma barra de 50 cm de comprimento e massa desprezível, suspensa por uma corda  $OQ$ , sustentando um peso de 3000 N no ponto indicado. Sabendo que a barra se apoia sem atrito nas paredes do vão, a razão entre a tensão na corda e a reação na parede no ponto  $S$ , no equilíbrio estático, é igual a

- a) 1,5
- b) 3,0
- c) 2,0
- d) 1,0
- e) 5,0



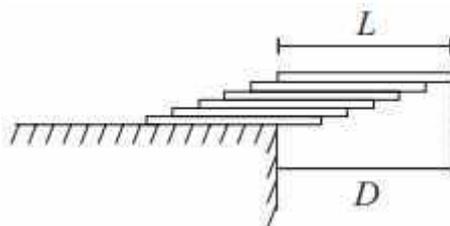
**17. (ITA – 2008)**

Um cilindro de diâmetro  $D$  e altura  $h$  repousa sobre um disco que gira num plano horizontal, com velocidade angular  $\omega$ . Considere o coeficiente de atrito entre o disco e o cilindro  $\mu > D/h$ ,  $L$  a distância entre o eixo do disco e o eixo do cilindro, e  $g$  a aceleração da gravidade. O cilindro pode escapar do movimento circular de duas maneiras: por tombamento ou por deslizamento. Mostrar o que ocorrerá primeiro, em função das variáveis.



**18. (ITA – 2009)**

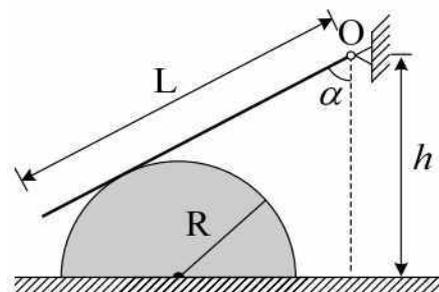
Chapas retangulares rígidas, iguais e homogêneas, são sobrepostas e deslocadas entre si, formando um conjunto que se apoia parcialmente na borda de uma calçada. A figura ilustra esse conjunto com  $n$  chapas, bem como a distância  $D$  alcançada pela sua parte suspensa. Desenvolva uma fórmula geral da máxima distância  $D$  possível de modo que o conjunto ainda se mantenha em equilíbrio. A seguir, calcule essa distância  $D$  em função do comprimento  $L$  de cada chapa, para  $n = 6$  unidades.



**19. (ITA – 2010)**

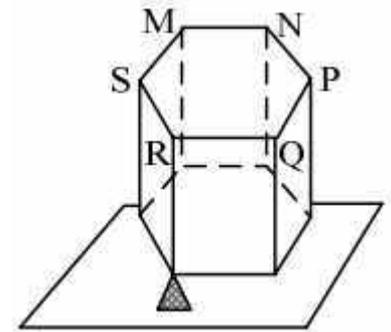
Considere um semicilindro de peso  $P$  e raio  $R$  sobre um plano horizontal não liso, mostrado em corte na figura. Uma barra homogênea de comprimento  $L$  e peso  $Q$  está articulada no ponto  $O$ . A barra está apoiada na superfície lisa do semicilindro, formando um ângulo  $\alpha$  com a vertical. Quanto vale o coeficiente de atrito mínimo entre o semicilindro e o plano horizontal para que o sistema todo permaneça em equilíbrio?

- a)  $\mu = \cos \alpha / [\cos \alpha + 2P(2h/LQ \cdot \cos (2\alpha) - R/LQ \text{sen} \alpha)]$
- b)  $\mu = \cos \alpha / [\cos \alpha + P(2h/LQ \cdot \text{sen} (2\alpha) - 2R/LQ \cos \alpha)]$
- c)  $\mu = \cos \alpha / [\text{sen} \alpha + 2P(2h/LQ \cdot \text{sen} (2\alpha) - R/LQ \cos \alpha)]$
- d)  $\mu = \text{sen} \alpha / [\text{sen} \alpha + 2P(2h/LQ \cdot \cos (\alpha) - 2R/LQ \cos \alpha)]$
- e)  $\mu = \text{sen} \alpha / [\cos \alpha + P(2h/LQ \cdot \text{sen} (\alpha) - 2R/LQ \cos \alpha)]$



**20. (ITA – 2011)**

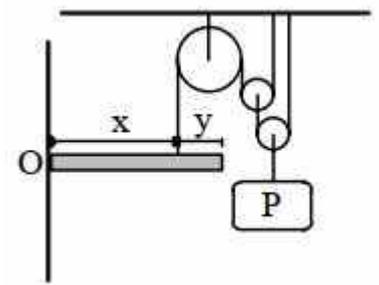
Um prisma regular hexagonal homogêneo com peso de  $15\text{ N}$  e aresta da base de  $2,0\text{ m}$  é mantido de pé graças ao apoio de um dos seus vértices da base inferior (ver figura) e à ação de uma força vertical de suspensão de  $10\text{ N}$  (não mostrada). Nessas condições, o ponto de aplicação da força na base superior do prisma encontra-se



- sobre o segmento  $\overline{RM}$  a  $2,0\text{ m}$  de  $R$ .
- sobre o segmento  $\overline{RN}$  a  $4,0\text{ m}$  de  $R$ .
- sobre o segmento  $\overline{RN}$  a  $3,0\text{ m}$  de  $R$ .
- sobre o segmento  $\overline{RN}$  a  $2,0\text{ m}$  de  $R$ .
- sobre o segmento  $\overline{RP}$  a  $2,5\text{ m}$  de  $R$ .

### 21. (ITA – 2011)

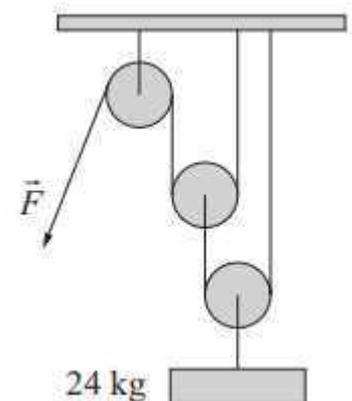
Uma barra homogênea, articulada no pino  $O$ , é mantida na posição horizontal por um fio fixado a uma distância  $x$  de  $O$ . Como mostra a figura, o fio passa por um conjunto de três polias que também sustentam um bloco de peso  $P$ . Desprezando efeitos de atrito e o peso das polias, determine a força de ação do pino  $O$  sobre a barra.



### 22. (ITA – 2012)

O arranjo de polias da figura é preso ao teto para erguer uma massa de  $24\text{ kg}$ , sendo os fios inextensíveis, e desprezíveis as massas das polias e dos fios. Desprezando os atritos, determine:

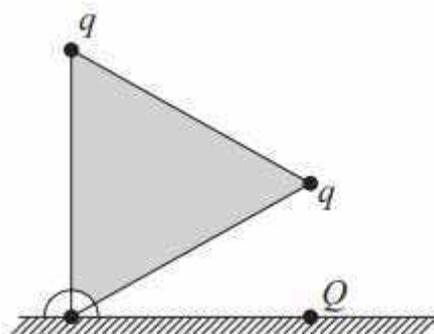
- O valor do módulo da força  $\vec{F}$  necessária para equilibrar o sistema.
- O valor do módulo da força  $\vec{F}$  necessário para erguer a massa com velocidade constante.
- A força ( $\vec{F}$  ou peso?) que realiza maior trabalho, em módulo, durante o tempo  $T$  em que a massa está sendo erguida com velocidade constante.



### 23. (ITA – 2012)

A figura mostra uma chapa fina de massa  $M$  com o formato de um triângulo equilátero, tendo um lado na posição vertical, de comprimento  $a$ , e um vértice articulado numa barra horizontal contida no plano da figura. Em cada um dos outros vértices encontra-se fixada uma carga elétrica  $q$  e, na barra horizontal, a uma distância  $a\sqrt{3}/2$  do ponto de articulação, encontra-se fixada uma carga  $Q$ . Sendo as três cargas de mesmo sinal e massa desprezível, determine a magnitude da carga  $Q$  para que o sistema permaneça em equilíbrio.

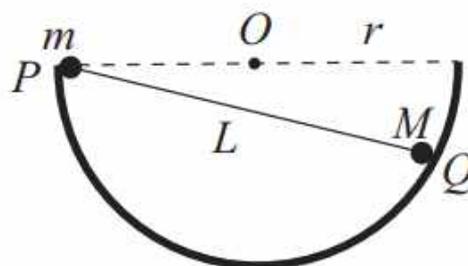




**24. (ITA – 2013)**

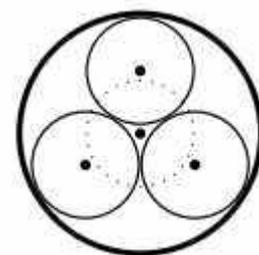
Duas partículas, de massas  $m$  e  $M$ , estão respectivamente fixadas nas extremidades de uma barra de comprimento  $L$  e massa desprezível. Tal sistema é então apoiado no interior de uma casca hemisférica de raio  $r$ , de modo a se ter equilíbrio estático com  $m$  posicionado na borda  $P$  da casca e  $M$ , num ponto  $O$ , conforme mostra a figura. Desconsiderando forças de atrito, a razão  $m/M$  entre as massas é igual a

- a)  $(L^2 - 2r^2)/(2r^2)$
- b)  $(2L^2 - 3r^2)/(2r^2)$
- c)  $(L^2 - 2r^2)/(r^2 - L^2)$
- d)  $(2L^2 - 3r^2)/(r^2 - L^2)$
- e)  $(3L^2 - 2r^2)/(L^2 - 2r^2)$



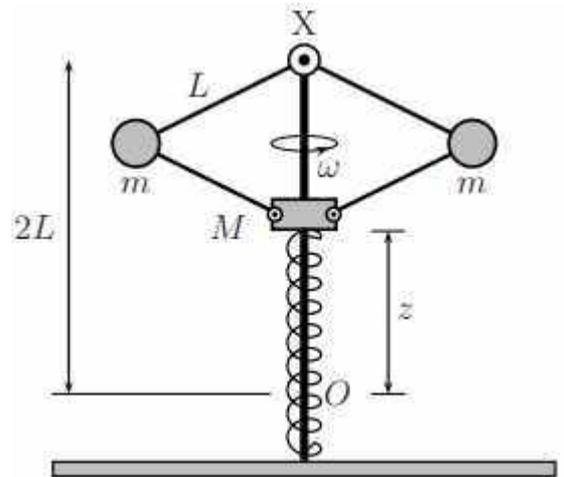
**25. (ITA – 2014)**

Um recipiente cilíndrico vertical contém em seu interior três esferas idênticas de mesmo peso  $P$  que são tangentes entre si e também à parede interna do recipiente. Uma quarta esfera, idêntica às anteriores, é então sobreposta às três esferas como ilustrado em pontilhado. Determine as respectivas intensidades das forças normais em função de  $P$  que a parede do recipiente exerce nas três esferas.



**26. (ITA – 2015)**

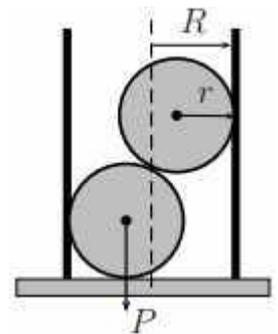
Na figura, o eixo vertical giratório  $z$  acima de  $O$  dada por imprime uma velocidade angular  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  ao sistema composto por quatro barras iguais, de comprimento  $L = 1 \text{ m}$  e massa desprezível, graças a uma dupla articulação na posição fixa  $X$ . Por sua vez, as barras de baixo são articuladas na massa  $M$  de  $2 \text{ kg}$  que, através de um furo central, pode deslizar sem atrito ao longo do eixo e esticar uma mola de constante elástica  $k = 100 \text{ N/m}$ , a partir da posição  $O$  da extremidade superior da mola em repouso, a dois metros abaixo de  $X$ . O sistema completa-se com duas massas iguais de  $m = 1 \text{ kg}$  cada uma, articuladas às barras. Sendo desprezíveis as dimensões das massas, então, a mola distender-se-á de uma altura  $X$



- a) 0,2 m
- b) 0,5 m
- c) 0,6 m
- d) 0,7 m
- e) 0,9 m

**27. (ITA – 2015)**

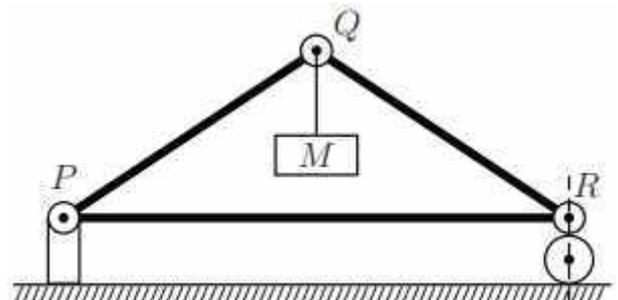
A figura mostra um tubo cilíndrico de raio  $R$  apoiado numa superfície horizontal, em cujo interior encontram-se em repouso duas bolas idênticas, de raio  $r = 3R/4$  e peso  $P$  cada uma. Determine o peso mínimo  $P_c$  do cilindro para que o sistema permaneça em equilíbrio.



**28. (ITA – 2016)**

Três barras de peso desprezível, articuladas nos pinos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ . constituem uma estrutura vertical em forma de triângulo isósceles, com  $6,0 \text{ m}$  de base e  $4,0 \text{ m}$  de altura, que sustenta uma massa  $M$  suspensa em  $Q$  em equilíbrio estático. O pino  $P$  também é articulado no seu apoio fixo, e o pino  $R$  apoia-se verticalmente sobre o rolete livre. Sendo de  $1,5 \times 10^4 \text{ N}$  e  $5,0 \times 10^3 \text{ N}$  os respectivos valores máximos das forças de tração e compressão suportáveis por qualquer das barras, o máximo valor possível para  $M$  é de

- a)  $3,0 \cdot 10^2 \text{ kg}$ .
- b)  $4,0 \cdot 10^2 \text{ kg}$ .
- c)  $8,0 \cdot 10^2 \text{ kg}$ .
- d)  $2,4 \cdot 10^3 \text{ kg}$ .
- e)  $4,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$ .



### 29. (ITA – 2016)

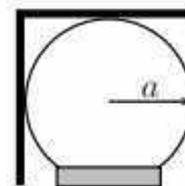
Questão 6. Um caminhão baú de 2,00 m de largura e centro de gravidade a 3,00 m do chão percorre um trecho de estrada em curva com 76,8 m de raio. Para manter a estabilidade do veículo neste trecho, sem derrapar, sua velocidade não deve exceder a

- a) 5,06 m/s.
- b) 11,3 m/s.
- c) 16,0 m/s.
- d) 19,6 m/s.
- e) 22,3 m/s.

### 30. (ITA – 2016)

A figura mostra uma placa fina de peso  $P$  dobrada em ângulo reto e disposta sobre uma esfera fixa de raio  $a$ . O coeficiente de atrito mínimo entre estes objetos para que a placa não escorregue é

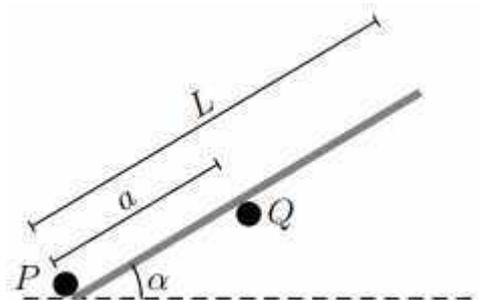
- a) 1
- b)  $1/2$
- c)  $\sqrt{2} - 1$
- d)  $\sqrt{3} - 1$
- e)  $(\sqrt{5} - 1)/2$



### 31. (ITA – 2017)

Um bastão rígido e uniforme, de comprimento  $L$ , toca os pinos  $P$  e  $Q$  fixados numa parede vertical, interdistantes de  $a$ , conforme a figura. O coeficiente de atrito entre cada pino e o bastão é  $\mu$ , e o ângulo deste com a horizontal é  $\alpha$ . Assinale a condição em que se torna possível o equilíbrio estático do bastão.

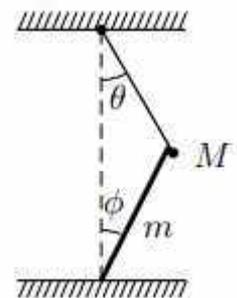
- a)  $L \geq a(1 + (\operatorname{tg} \alpha)/\mu)$
- b)  $L \geq a(-1 + (\operatorname{tg} \alpha)/\mu)$
- c)  $L \geq a(1 + (\operatorname{tg} \alpha)/2\mu)$
- d)  $L \geq a(-1 + (\operatorname{tg} \alpha)/2\mu)$
- e)  $L \geq a(1 + (\operatorname{tg} \alpha)/\mu)/2$



### 32. (ITA – 2017)

Na figura, a extremidade de uma haste delgada livre, de massa  $m$  uniformemente distribuída, apoia-se sem atrito sobre a massa  $M$  do pêndulo simples. Considerando o atrito entre a haste e o piso, assinale a razão  $M/m$  para que o conjunto permaneça em equilíbrio estático.

- a)  $tg \phi / (2 \cdot tg \theta)$
- b)  $(1 - tg \phi) / (4 \cdot sen \theta \cdot cos \theta)$
- c)  $(sen 2\phi \cdot cot \theta - 2sen^2\theta) / 4$
- d)  $(sen \phi \cdot cot \theta - 2sen^22\theta) / 4$
- e)  $(sen 2\phi \cdot cot \theta - sen^2\theta) / 4$



**33. (ITA – 2017)**

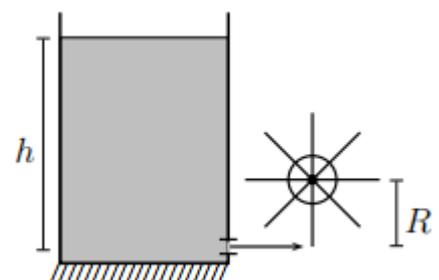
Um sistema é constituído por uma sequência vertical de  $N$  molas ideais interligadas, de mesmo comprimento natural  $l$  e constante elástica  $k$ , cada qual acoplada a uma partícula de massa  $m$ . Sendo o sistema suspenso a partir da mola 1 e estando em equilíbrio estático, pode-se afirmar que o comprimento da

- a) mola 1 é igual a  $l + (N - 1)mg/k$ .
- b) mola 2 é igual a  $l + Nmg/k$ .
- c) mola 3 é igual a  $l + (N - 2)mg/k$ .
- d) mola  $N - 1$  é igual a  $l + mg/k$ .
- e) mola  $N$  é igual a  $l$ .

**34. (ITA – 2017)**

Água de um reservatório é usada para girar um moinho de raio  $R$  com velocidade angular  $\omega$  constante graças ao jato que flui do orifício de área  $S$  situado a uma profundidade  $h$  do seu nível. Com o jato incidindo perpendicularmente em cada pá, com choque totalmente inelástico, calcule o torque das forças de atrito no eixo do moinho, sendo  $\rho$  e  $g$ , respectivamente, a massa específica da água e a aceleração da gravidade.

- a)  $2\rho ghRS$
- b)  $\rho R^2 S \omega \sqrt{2gh}$
- c)  $2\rho hRS(1 - \sqrt{2gh}/\omega R)$
- d)  $2\rho hRS(1 - \omega R/\sqrt{2gh})$
- e)  $\rho R^2 S \omega \sqrt{2gh}(1 - \omega R/\sqrt{2gh})$

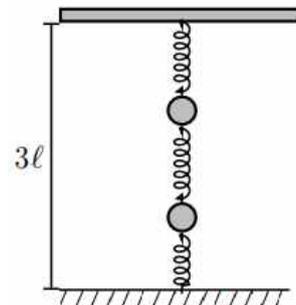


**35. (ITA – 2018)**

Três molas idênticas, de massas desprezíveis e comprimentos naturais  $l$ , são dispostas verticalmente entre o solo e o teto a  $3l$  de altura. Conforme a figura, entre tais molas são fixadas duas massas pontuais iguais. Na situação inicial de equilíbrio, retira-se a mola inferior (ligada ao solo) resultando no deslocamento da massa superior de uma distância  $d_1$  para baixo,

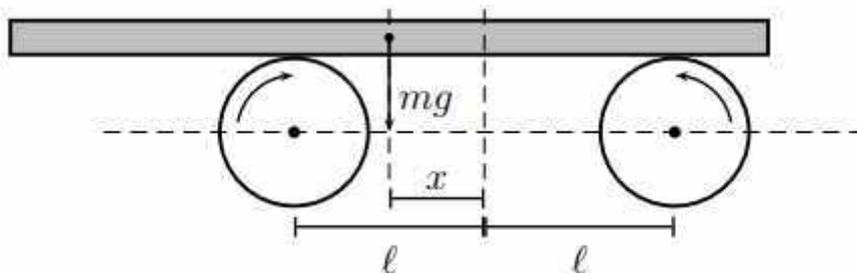
e da inferior, de uma distância  $d_2$  também para baixo, alcançando-se nova posição de equilíbrio. Assinale a razão  $d_2/d_1$ .

- a) 2
- b) 3/2
- c) 5/3
- d) 4/3
- e) 5/4



**36. (ITA – 2018)**

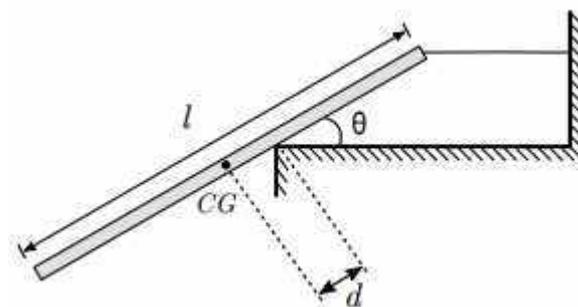
Uma prancha homogênea de massa  $m$  é sustentada por dois roletes, interdistantes de  $2l$ , que giram rapidamente em sentidos opostos, conforme a figura. Inicialmente o centro de massa da prancha dista  $x$  da linha intermediária entre os roletes. Sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito cinético entre os roletes e a prancha, determine a posição do centro de massa da prancha em função do tempo.



**37. (ITA – 2019)**

Uma barra rígida, homogênea, fina e de comprimento  $l$ , é presa a uma corda horizontal sem massa e toca a quina de uma superfície horizontal livre de atrito, fazendo um ângulo  $\theta$  como mostra a figura. Considerando a barra em equilíbrio, assinale a opção correta para o valor da razão  $d/l$ , em que  $d$  é a distância da quina ao centro de gravidade (CG) da barra.

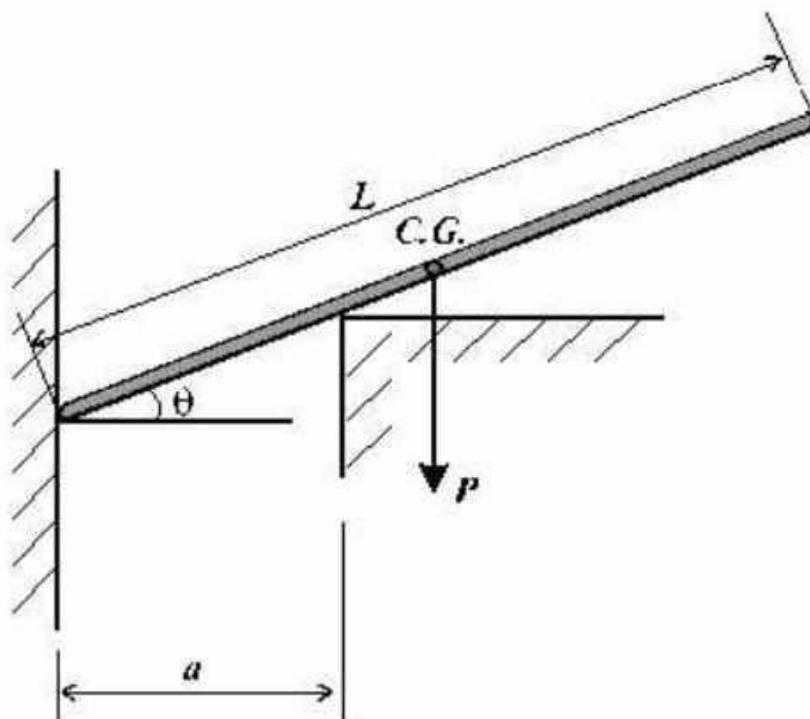
- a)  $\frac{tg^2\theta}{2}$
- b)  $\frac{\cos^2\theta}{4}$
- c)  $\frac{\text{sen}^2\theta}{4}$
- d)  $\frac{\cos^2\theta}{2}$
- e)  $\frac{\text{sen}^2\theta}{2}$



**38. (IME – 1997)**

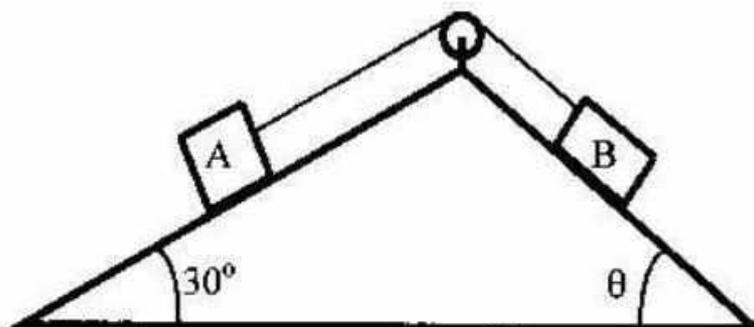
Uma barra uniforme e homogênea de peso  $P$ , tem seu centro de gravidade (C. G.) na posição indicada na figura abaixo. A única parede considerada com atrito é aquela na qual a extremidade esquerda da barra está apoiada. O módulo da força de atrito  $F_{at}$  é igual ao peso

da barra. Determine o valor do ângulo na posição de equilíbrio, em função do comprimento da barra  $L$  e da distância entre as paredes  $a$ .



**39. (IME – 1998)**

Na figura a seguir os objetos  $A$  e  $B$  pesam, respectivamente,  $40\text{ N}$  e  $30\text{ N}$  e estão apoiados sobre planos lisos, ligados entre si por uma corda inextensível, sem peso, que passa por uma polia sem atrito. Determinar o ângulo  $\theta$  e a tensão na corda quando houver equilíbrio.

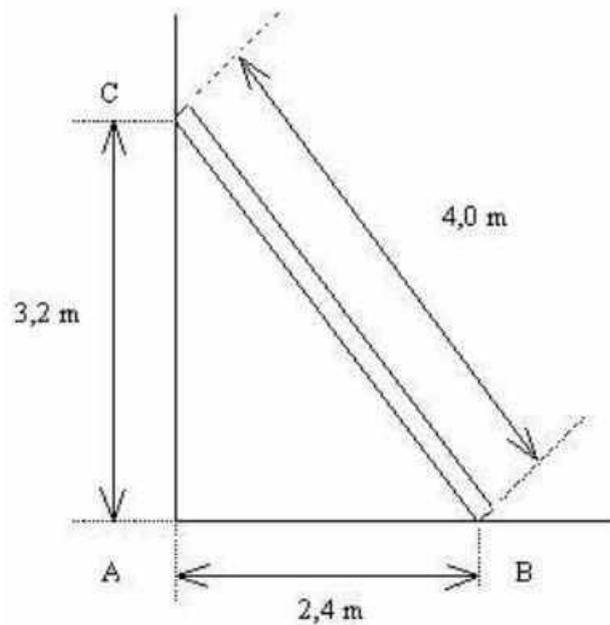


**40. (IME – 1999)**

Uma escada de  $4,0\text{ m}$  de comprimento está apoiada contra uma parede vertical com a sua extremidade inferior a  $2,4\text{ m}$  da parede, como mostra a figura. A escada pesa  $20\text{ kgf}$  e seu centro de gravidade está localizado no ponto médio. Sabendo que os coeficientes de atrito estático entre a escada e o solo e entre a escada e a parede são, respectivamente,  $0,5$  e  $0,2$ , calcule:

a) a altura máxima, em relação ao solo, a que um homem de  $90\text{ kgf}$  de peso pode subir, sem provocar o escorregamento da escada;

b) a distância máxima da parede a que se pode apoiar a parte inferior da escada vazia, sem provocar escorregamento.



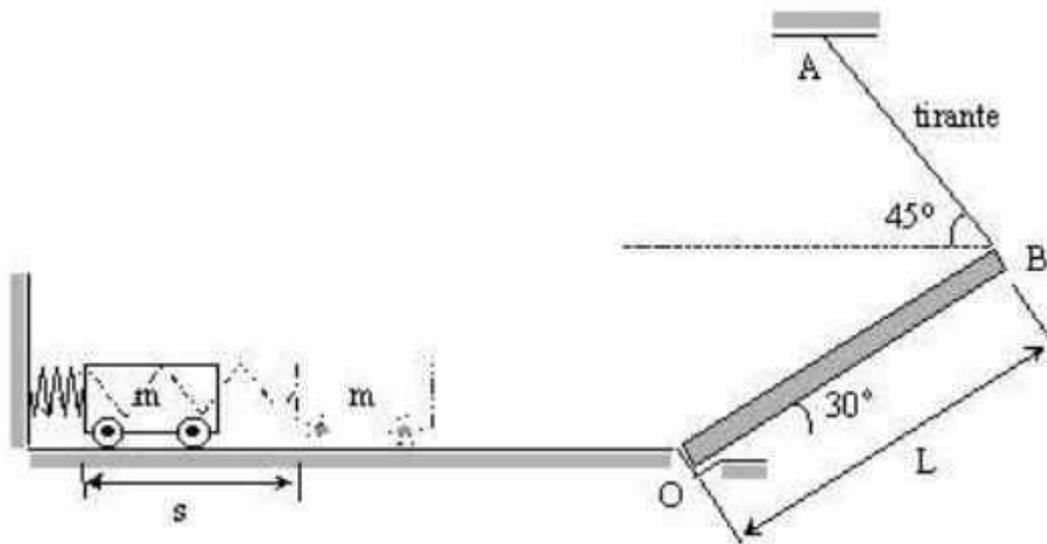
#### 41. (IME – 2000)

Um carrinho de massa  $m = 20 \text{ kg}$  encontra-se numa posição inicial comprimindo uma mola de constante elástica  $k = 18 \text{ kN/m}$  em  $s = 10 \text{ cm}$ , estando a mola presa a uma parede vertical, conforme mostra a figura abaixo. Após liberado do repouso, o carrinho se desloca ao longo da superfície horizontal e sobe a prancha inclinada  $OB$ , de comprimento  $L = 180 \text{ cm}$ , até atingir o repouso. Considerando-se desprezíveis o efeito do atrito ao longo do percurso e o peso da prancha e adotando o valor da aceleração gravitacional igual a  $10 \text{ m/s}^2$ , determine, neste instante, a força normal por unidade de área no tirante  $AB$  com seção circular de diâmetro  $d = 1,5 \text{ mm}$ .

OBS: o carrinho não está preso à mola.

Dado:  $\cos 15^\circ = 0,97$ .

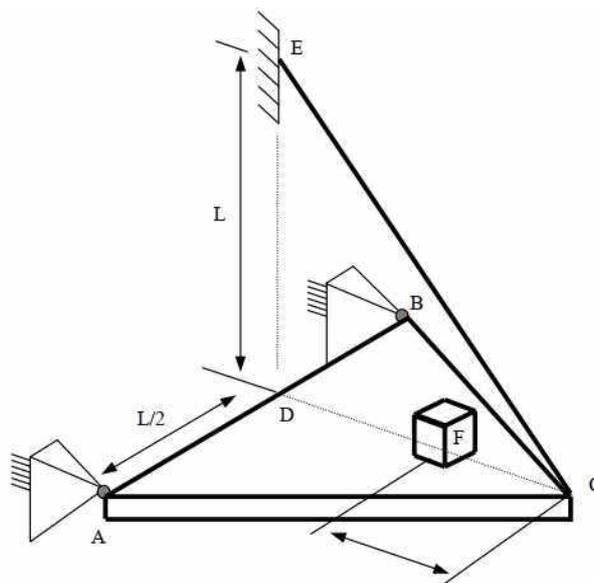




**42. (IME – 2003)**

Uma placa homogênea tem a forma de um triângulo equilátero de lado  $L$ , espessura  $L/10$  e massa específica  $\mu = 5 \text{ g/cm}^3$ . A placa é sustentada por dobradiças nos pontos  $A$  e  $B$ , e por um fio  $EC$ , conforme mostra a figura. Um cubo homogêneo de aresta  $L/10$ , feito do mesmo material da placa, é colocado com o centro de uma das faces sobre o ponto  $F$ , localizado sobre a linha  $CD$ , distando  $L\sqrt{3}/6$  do vértice  $C$ . Considere as dimensões em cm e adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Determine em função de  $L$ :

- Os pesos da placa e do cubo em Newtons.
- A tração no fio  $CE$  em Newtons.

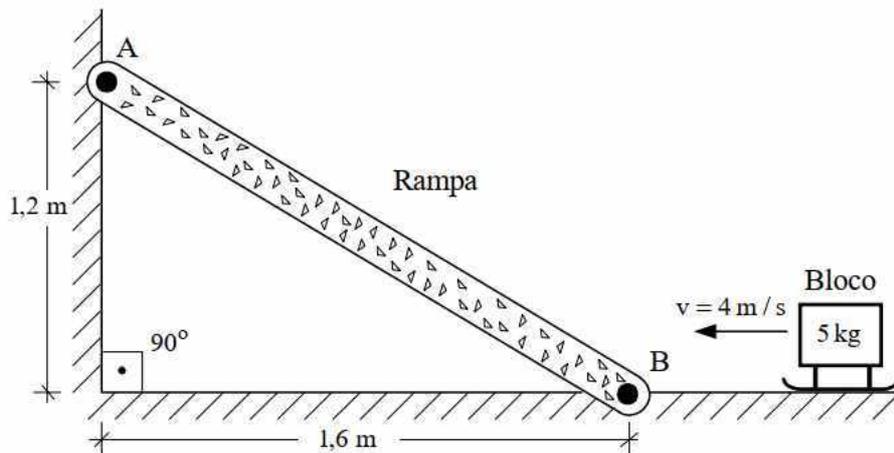


**43. (IME – 2006)**

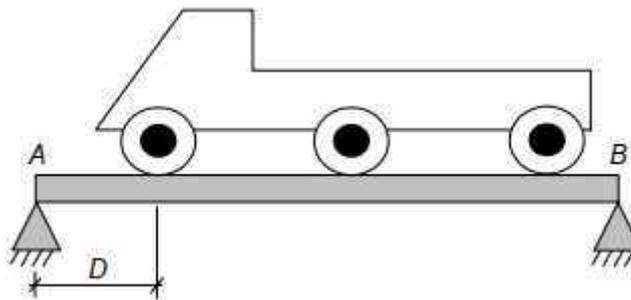
Um bloco de massa  $m = 5 \text{ kg}$  desloca-se a uma velocidade de  $4 \text{ m/s}$  até alcançar uma rampa inclinada de material homogêneo, cujos pontos  $A$  e  $B$  são apoios e oferecem reações nas direções horizontal e vertical. A rampa encontra-se fixa e o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a rampa é igual a  $0,05$ . Sabe-se que o bloco para ao atingir determinada altura e

permanece em repouso. Considerando que a reação vertical no ponto de apoio  $B$  após a parada do bloco seja de  $89\text{ N}$  no sentido de baixo para cima, determine a magnitude, a direção e o sentido das demais reações nos pontos  $A$  e  $B$ .

Dados: aceleração da gravidade ( $g$ ) =  $10\text{ m/s}^2$ , peso linear da rampa =  $95\text{ N/m}$ .



44. (IME – 2008)



Um caminhão de três eixos se desloca sobre uma viga biapoiada de  $4,5\text{ m}$  de comprimento, conforme ilustra a figura acima. A distância entre os eixos do caminhão é  $1,5\text{ m}$  e o peso por eixo aplicado à viga é  $150\text{ kN}$ . Desprezando o peso da viga, para que a reação vertical do apoio  $A$  seja o dobro da reação vertical no apoio  $B$ , a distância  $D$  entre o eixo dianteiro do caminhão e o apoio  $A$  deverá ser

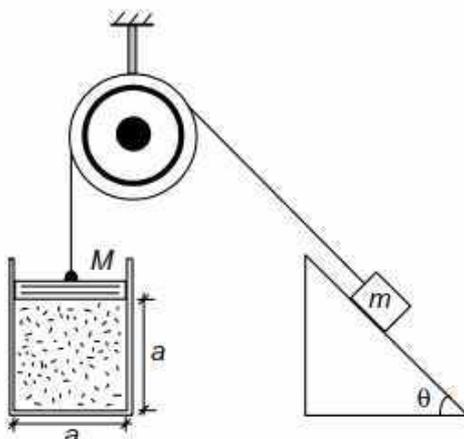
- a)  $0\text{ m}$
- b)  $0,3\text{ m}$
- c)  $0,6\text{ m}$
- d)  $0,9\text{ m}$
- e)  $1,2\text{ m}$

45. (IME – 2008)

Em um recipiente, hermeticamente fechado por uma tampa de massa  $M$ , com volume interno na forma de um cubo de lado  $a$ , encontram-se  $n$  mols de um gás ideal a uma temperatura absoluta  $T$ . A tampa está presa a uma massa  $m$  por um fio que passa por uma roldana, ambos

ideais. A massa  $m$  encontra-se na iminência de subir um plano inclinado de ângulo  $\theta$  com a horizontal e coeficiente de atrito estático  $\mu$ . Considerando que as variáveis estejam no Sistema Internacional e que não exista atrito entre a tampa  $M$  e as paredes do recipiente, determine  $m$  em função das demais variáveis.

Dados: aceleração da gravidade =  $g$ , constante universal dos gases perfeitos =  $R$ .



#### 46. (IME – 2009)

Uma viga de  $8,0\text{ m}$  de comprimento, apoiada nas extremidades, tem peso de  $40\text{ kN}$ . Sobre ela, desloca-se um carro de  $20\text{ kN}$  de peso, cujos 2 eixos de roda distam entre si  $2,0\text{ m}$ . No instante em que a reação vertical em um apoio é  $27,5\text{ kN}$ , um dos eixos do carro dista, em metros, do outro apoio

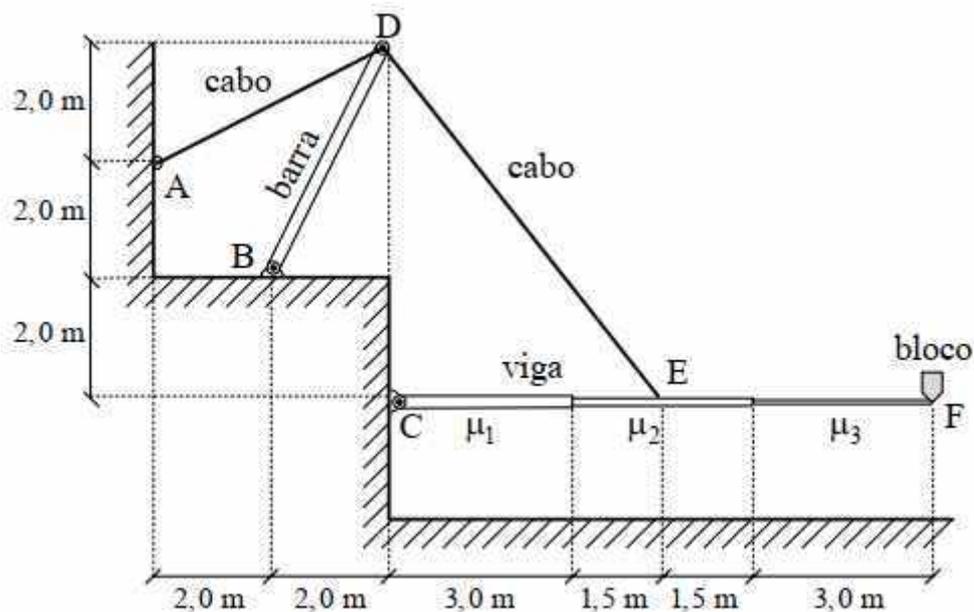
- a) 1,0
- b) 1,5
- c) 2,0
- d) 2,5
- e) 3,0

#### 47. (IME – 2009)

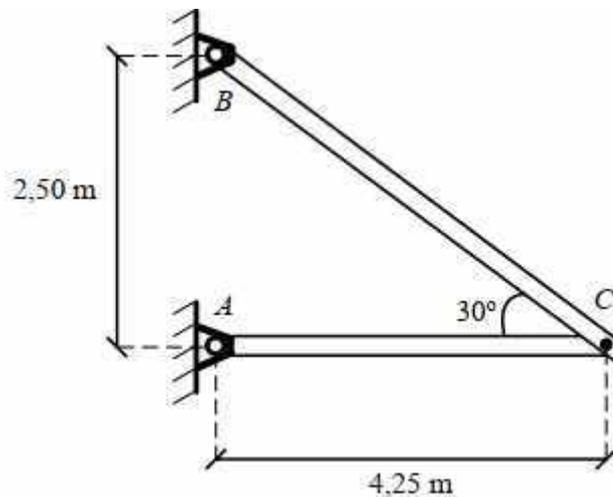
A figura mostra uma estrutura em equilíbrio, formada por uma barra  $BD$ , dois cabos  $AD$  e  $DE$ , e uma viga horizontal  $CF$ . A barra é fixada em  $B$ . Os cabos, de seção transversal circular de  $5\text{ mm}$  de diâmetro, são inextensíveis e fixados nos pontos  $A, D$  e  $E$ . A viga de material uniforme e homogêneo é apoiada em  $C$  e sustentada pelo cabo  $DE$ . Ao ser colocado um bloco de  $100\text{ kg}$  de massa na extremidade  $F$  da viga. determine:

- a) a força no trecho  $ED$  do cabo;
- b) as reações horizontal e vertical no apoio  $C$  da viga;
- c) as reações horizontal e vertical no apoio  $B$  da barra.

Dados: aceleração da gravidade:  $10\text{ m/s}^2$ ; densidades lineares de massa:  $\mu_1 = 30\text{ kg/m}$ ,  $\mu_2 = 20\text{ kg/m}$ ,  $\mu_3 = 10\text{ kg/m}$ ;  $\sqrt{20} \approx 4,5$ .



48. (IME – 2010)



A figura mostra duas barras AC e BC que suportam, em equilíbrio, uma força  $F$  aplicada no ponto C. Para que os esforços nas barras AC e BC sejam, respectivamente, 36 N (compressão) e 160 N (tração), o valor e o sentido das componentes vertical e horizontal da força  $F$  devem ser:

Observação: Despreze os pesos das barras e adote  $\sqrt{3} = 1,7$ .

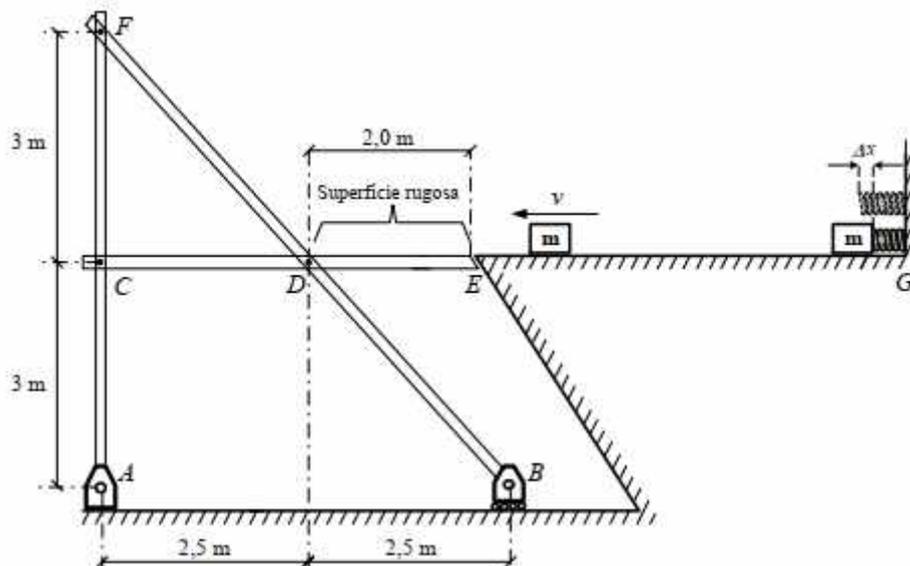
- a) 80 N (↓), 100 N (→)
- b) 100 N (↓), 80 N (→)
- c) 80 N (↑), 100 N (←)
- d) 100 N (↑), 80 N (←)
- e) 100 N (↓), 80 N (←)

49. (IME – 2010)

Uma mola com constante elástica  $k$ , que está presa a uma parede vertical, encontra-se inicialmente comprimida de  $\Delta x$  por um pequeno bloco de massa  $m$ , conforme mostra a figura. Após liberado do repouso, o bloco desloca-se ao longo da superfície horizontal lisa  $EG$ , com atrito desprezível, e passa a percorrer um trecho rugoso  $DE$  até atingir o repouso na estrutura (que permanece em equilíbrio), formada por barras articuladas com peso desprezível. Determine os valores das reações horizontal e vertical no apoio  $A$  e da reação vertical no apoio  $B$ , além das reações horizontal e vertical nas ligações em  $C$ ,  $D$  e  $F$ .

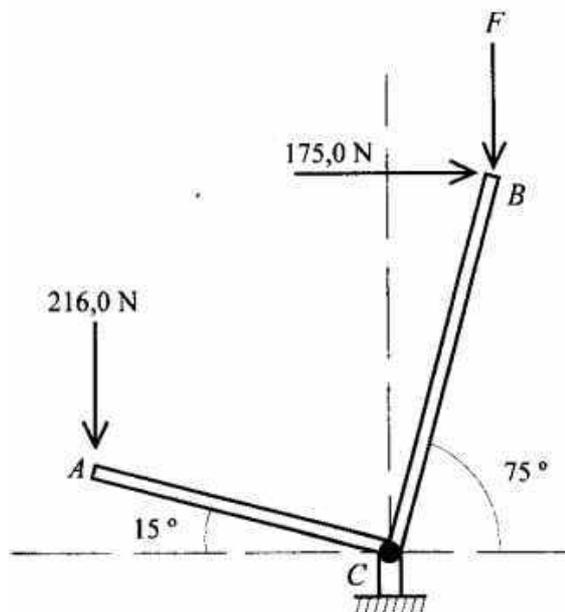
Dados:

- constante elástica:  $k = 100 \text{ kN/m}$ ;
- compressão da mola:  $\Delta x = 2 \text{ cm}$ ;
- massa do bloco:  $m = 10 \text{ kg}$ ;
- coeficiente de atrito cinético do trecho  $DE$ :  $\mu_c = 0,20$ ;
- aceleração gravitacional:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



50. (IME – 2011)





A figura acima apresenta um perfil metálico  $AB$ , com dimensões  $AC = 0,20\text{ m}$  e  $CB = 0,18\text{ m}$ , apoiado em  $C$  por meio de um pino sem atrito. Admitindo-se desprezível o peso do perfil  $AB$ , o valor da força vertical  $F$ , em newtons, para que o sistema fique em equilíbrio na situação da figura é:

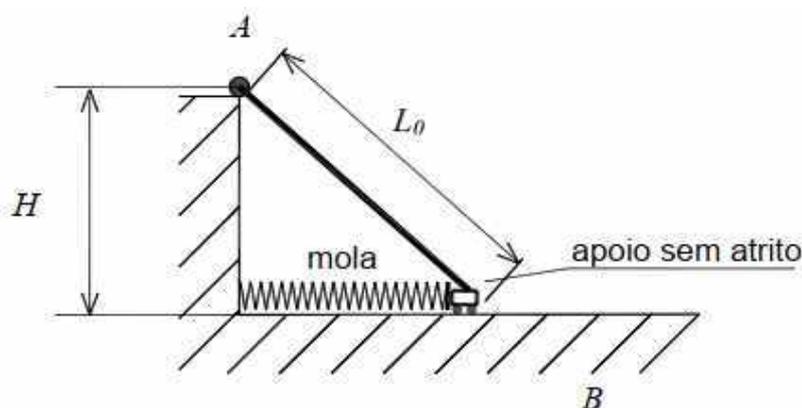
Dados:

- $\text{sen}(15^\circ) = 0,26$

- $\text{cos}(15^\circ) = 0,97$

- 242,5
- 232,5
- 222,5
- 212,5
- 210,5

**51. (IME – 2011)**



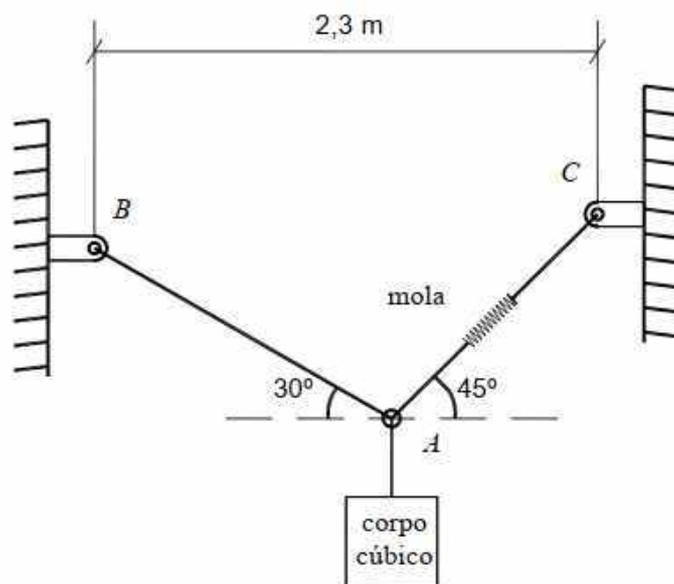
A figura acima mostra um sistema composto por uma parede vertical com altura  $H$ , uma barra com comprimento inicial  $L_0$  e uma mola. A barra está apoiada em uma superfície horizontal sem atrito e presa no ponto  $A$  por um vínculo, de forma que esta possa girar no plano da figura. A mola, inicialmente sem deformação, está conectada à parede vertical e à barra.

Após ser aquecida, a barra atinge um novo estado de equilíbrio térmico e mecânico. Nessa situação a força de reação vertical no apoio  $B$  tem módulo igual a  $30\text{ N}$ . Determine a quantidade de calor recebida pela barra.

Dados:

- $H = 3\text{ m}$ ;
- $L_0 = 3\sqrt{2}\text{ m}$ ;
- o peso da barra:  $P = 30\text{ N}$ ;
- constante elástica da mola:  $k = 20\text{ N/m}$ ;
- $\frac{P \cdot c}{g \cdot \alpha} = \frac{50 + 30\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$  joules, onde  $c$  é o calor específico da barra;  $\alpha$  é o coeficiente de dilatação linear da barra;  $g$  é a aceleração da gravidade; e  $P$  é o peso da barra.

## 52. (IME – 2012)



A figura acima mostra um corpo cúbico de  $50\text{ cm}$  de aresta suspenso por dois cabos  $AB$  e  $AC$  em equilíbrio. Sabe-se que o peso específico volumétrico do material do corpo cúbico, a rigidez da mola do cabo  $AC$  e o comprimento do cabo  $AC$  antes da colocação do corpo cúbico são iguais a  $22,4\text{ kN/m}^3$ ,  $10,0\text{ kN/m}$  e  $0,5\text{ m}$ . O valor do comprimento do cabo  $AB$ , em metros, após a colocação do corpo cúbico é

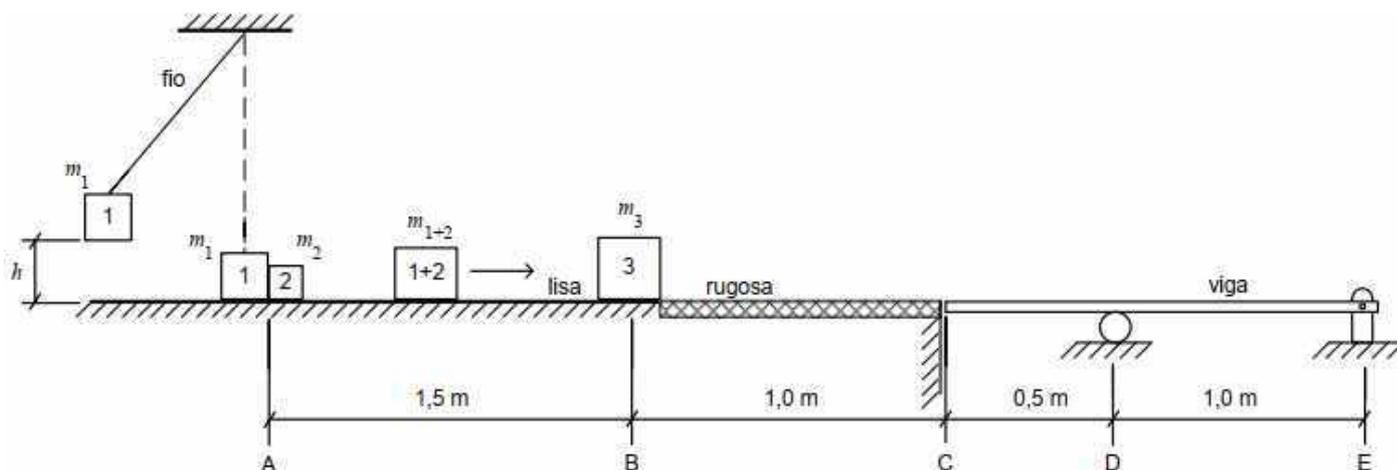
Adote:

$$\sqrt{3} = 1,73 \text{ e } \sqrt{2} = 1,41$$

a) 1,0

- b) 1,5
- c) 2,0
- d) 2,5
- e) 3,0

**53. (IME – 2012)**



Um corpo de massa  $m_1 = 4 \text{ kg}$  está em repouso suspenso por um fio a uma altura  $h$  do solo, conforme mostra a figura acima. Ao ser solto, choca-se com o corpo  $m_2$  de  $2 \text{ kg}$  no ponto A, desprendendo-se do fio. Após o choque, os corpos  $m_1$  e  $m_2$  passam a deslizar unidos sobre uma superfície lisa e colidem com um corpo em repouso, de massa  $m_3 = 8 \text{ kg}$ . Nesse ponto, o conjunto  $m_1 + m_2$  para e o corpo  $m_3$  move-se em uma superfície rugosa de coeficiente de atrito cinético igual a 0,45, estacionando no ponto C, situado na extremidade da viga CE. A viga é constituída por um material uniforme e homogêneo, cuja massa específica linear é  $4 \text{ kg/m}$ . Determine:

- a) a altura  $h$ ;
- b) o valor e o sentido da reação vertical do apoio E depois que o corpo  $m_3$  atinge o ponto C da viga.

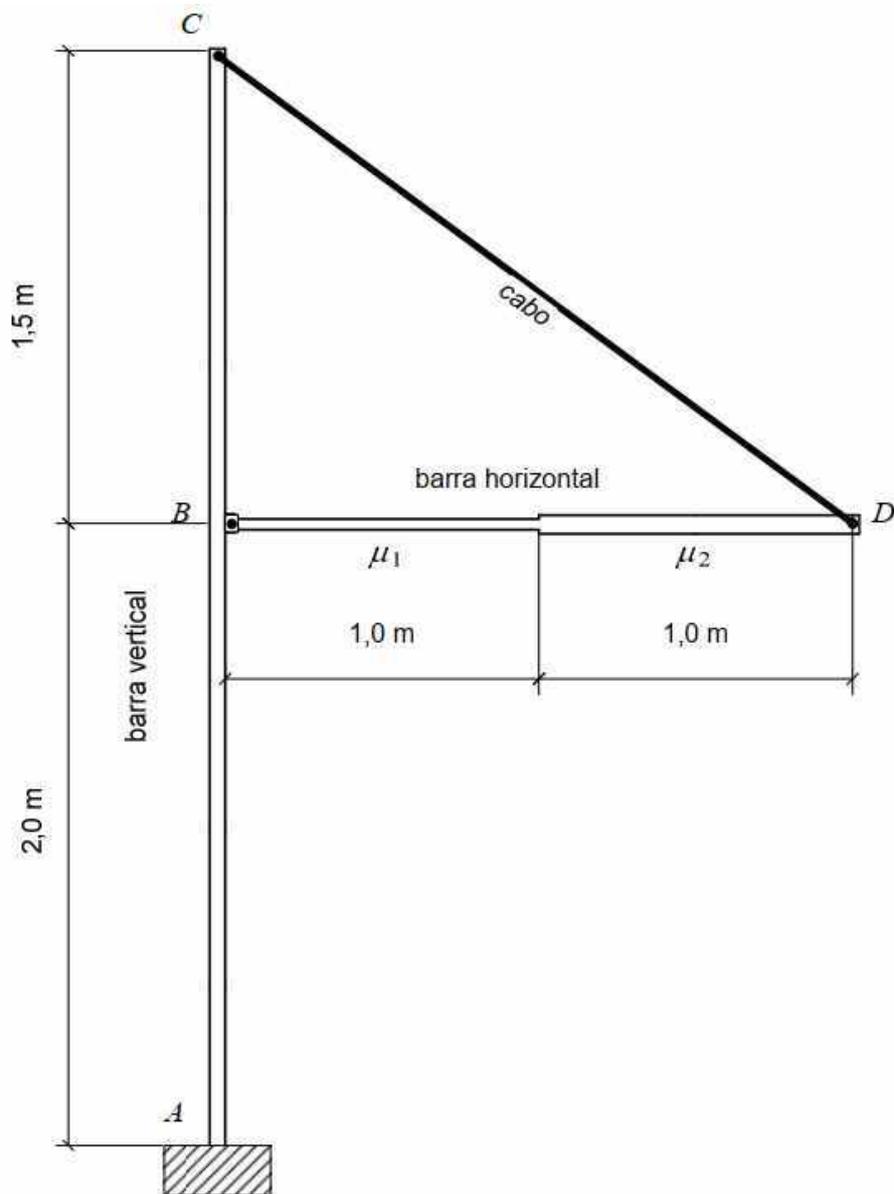
Dado:

aceleração da gravidade:  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Observação:

Considerar que os corpos  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  apresentam dimensões desprezíveis.

**54. (IME – 2013)**



A figura acima mostra uma estrutura em equilíbrio, formada por uma barra vertical  $AC$  e um cabo  $CD$ , de pesos desprezíveis, e por uma barra horizontal  $BD$ . A barra vertical é fixada em  $A$  e apoia a barra horizontal  $BD$ . O cabo de seção transversal de  $100 \text{ mm}^2$  de área é inextensível e está preso nos pontos  $C$  e  $D$ . A barra horizontal é composta por dois materiais de densidades lineares de massa  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Diante do exposto, a força normal por unidade de área, em  $MPa$ , no cabo  $CD$  é:

Dados:

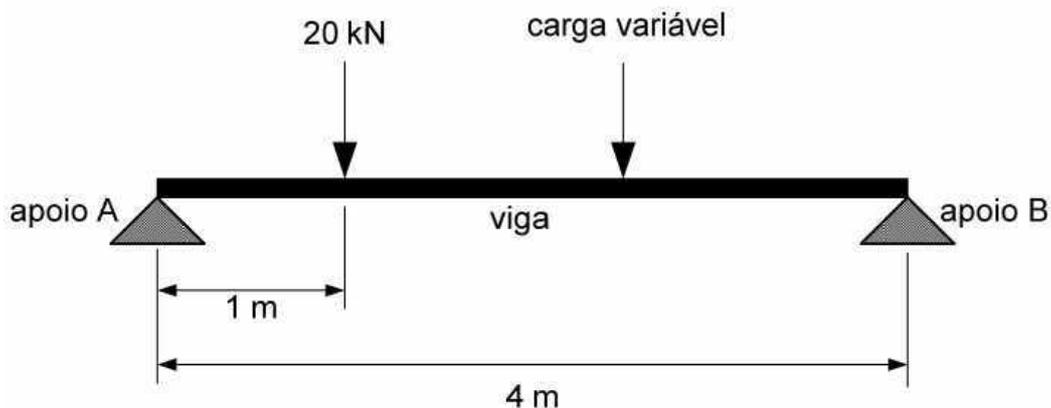
- aceleração da gravidade:  $10 \text{ m/s}^2$ ;
- densidades lineares de massa:  $\mu_1 = 600 \text{ kg/m}$  e  $\mu_2 = 800 \text{ kg/m}$ .

- 100
- 125
- 150
- 175



e) 200

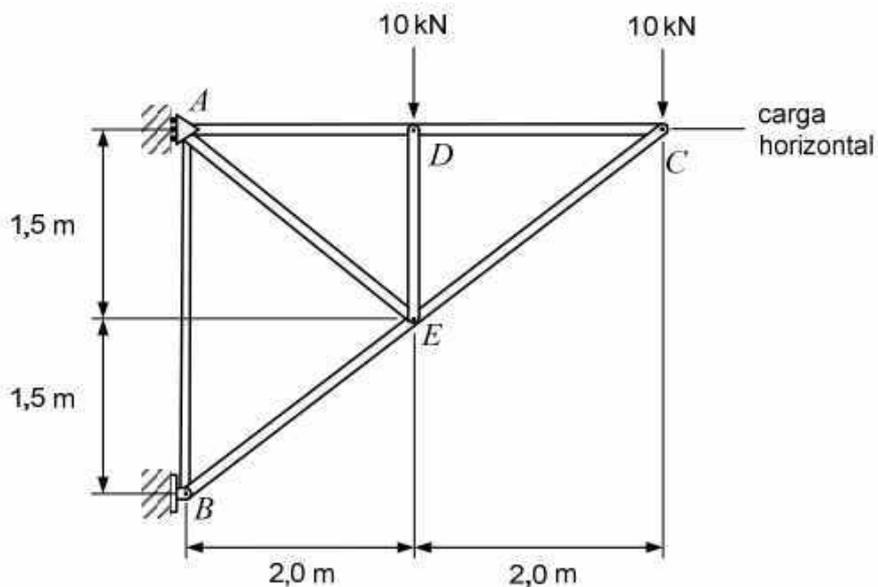
55. (IME – 2014)



A figura acima mostra uma viga em equilíbrio. Essa viga mede 4 m e seu peso é desprezível. Sobre ela, há duas cargas concentradas, sendo uma fixa e outra variável. A carga fixa de 20 kN está posicionada a 1 m do apoio A, enquanto a carga variável só pode se posicionar entre a carga fixa e o apoio B. Para que as reações verticais (de baixo para cima) dos apoios A e B sejam iguais a 25 kN e 35 kN, respectivamente, a posição da carga variável, em relação ao apoio B, e o seu módulo devem ser

- a) 1,0 m e 50 kN
- b) 1,0 m e 40 kN
- c) 1,5 m e 40 kN
- d) 1,5 m e 50 kN
- e) 2,0 m e 40 kN

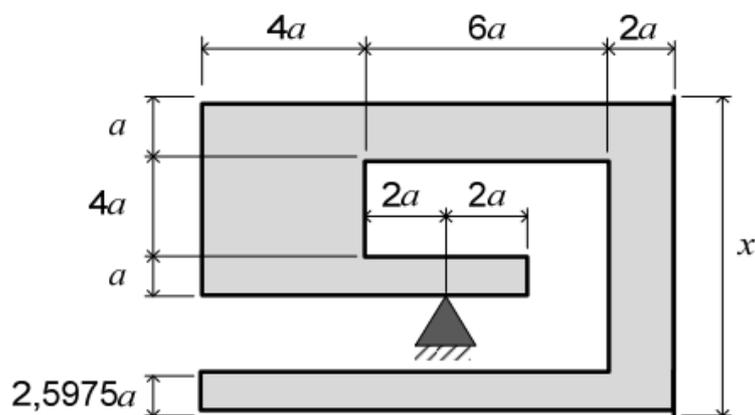
56. (IME – 2014)



A figura acima mostra uma estrutura em equilíbrio de peso desprezível em relação ao carregamento externo. As barras desta estrutura só resistem aos esforços normais de tração ou de compressão. Sobre o nó  $D$  há uma carga vertical concentrada de  $10\text{ kN}$ , enquanto no nó  $C$  há uma carga vertical concentrada de  $10\text{ kN}$  e uma carga horizontal. Sabendo que o apoio  $A$  não restringe o deslocamento vertical e a força de compressão na barra  $AB$  é  $5\text{ kN}$ , determine:

- a intensidade, em  $\text{kN}$ , e o sentido da carga horizontal no nó  $C$ ;
- as reações de apoio, em  $\text{kN}$ , nos nós  $A$  e  $B$ , indicando suas direções e sentidos;
- as barras que estão tracionadas, indicando suas magnitudes em  $\text{kN}$ ;
- as barras que estão comprimidas, indicando suas magnitudes em  $\text{kN}$ .

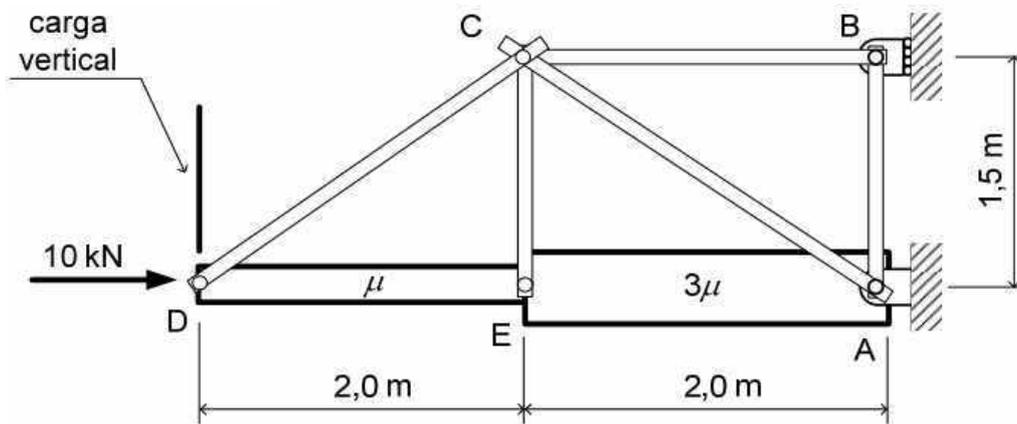
**57. (IME – 2015)**



Uma chapa rígida e homogênea encontra-se em equilíbrio. Com base nas dimensões apresentadas na figura, o valor da razão  $x/a$  é

- 10,5975
- 11,5975
- 12,4025
- 12,5975
- 13,5975

**58. (IME – 2015)**



A figura mostra uma estrutura em equilíbrio, formada por barras fixadas por pinos. As barras  $AE$  e  $DE$  são feitas de um material uniforme e homogêneo. Cada uma das barras restantes tem massa desprezível e seção transversal circular de  $16\text{ mm}$  de diâmetro. O apoio  $B$ , deformável, é elástico e só apresenta força de reação na horizontal. No ponto  $D$ , duas cargas são aplicadas, sendo uma delas conhecida e igual a  $10\text{ kN}$  e outra na direção vertical, conforme indicadas na figura. Sabendo que a estrutura no ponto  $B$  apresenta um deslocamento horizontal para a esquerda de  $2\text{ cm}$ , determine:

- a magnitude e o sentido da reação do apoio  $B$ ;
- as reações horizontal e vertical no apoio  $A$  da estrutura, indicando seu sentido;
- a magnitude e o sentido da carga vertical concentrada no ponto  $D$ ;
- o esforço normal (força) por unidade de área da barra  $BC$ , indicando sua magnitude e seu tipo (tração ou compressão).

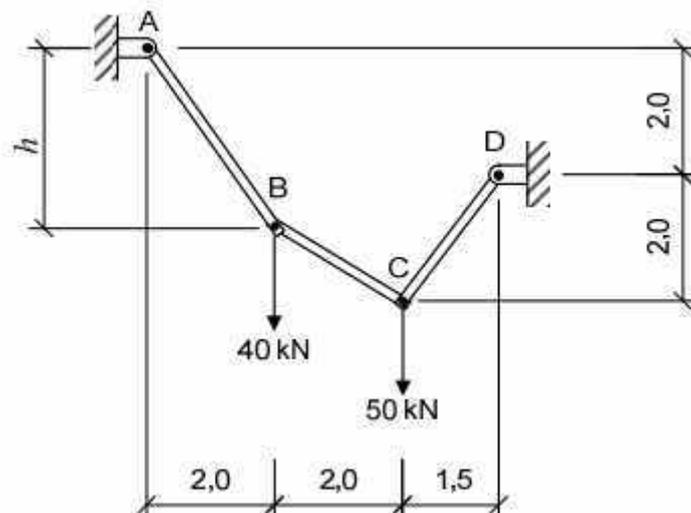
Dados:

aceleração da gravidade:  $g = 10\text{ m/s}^2$ ;

densidade linear de massa:  $\mu = 100\text{ kg/m}$ ;

constante elástica do apoio  $B$ :  $k = 1600\text{ kN/m}$ .

### 59. (IME – 2016)



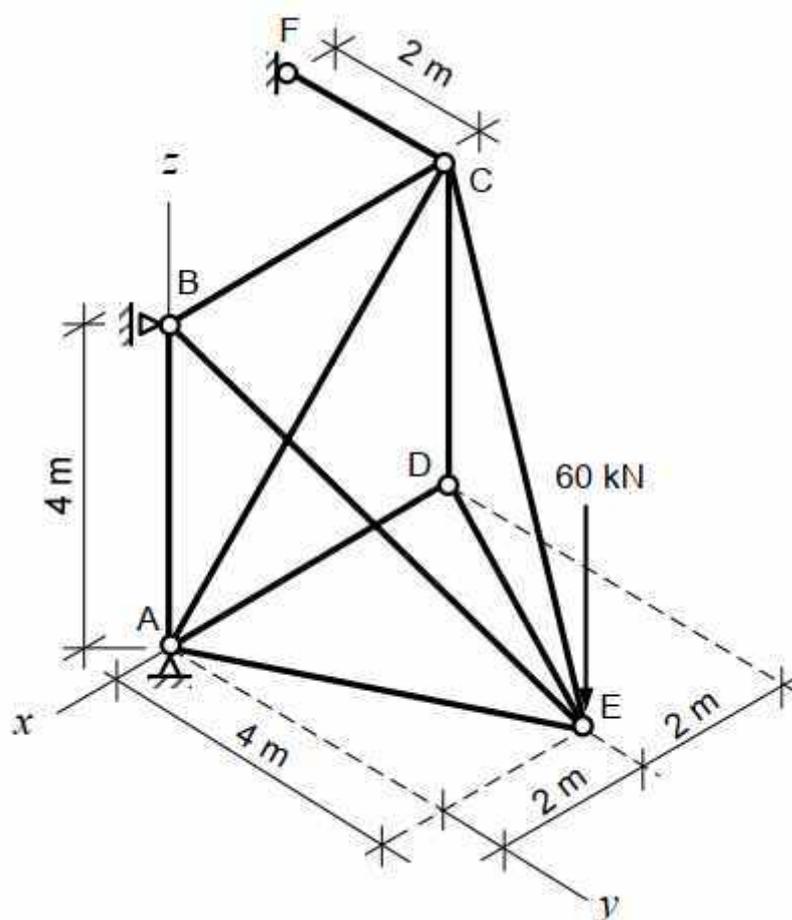
A figura acima, cujas cotas estão em metros, exibe uma estrutura em equilíbrio formada por três barras rotuladas  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$ . Nos pontos  $B$  e  $C$  existem cargas concentradas verticais. A maior força de tração que ocorre em uma barra, em  $kN$ , e a altura  $h$ , em metros, da estrutura são

Consideração:

- as barras são rígidas, homogêneas, inextensíveis e de pesos desprezíveis.

- a) 50,0 e 2,50
- b) 31,6 e 1,67
- c) 58,3 e 3,33
- d) 50,0 e 1,67
- e) 58,3 e 2,50

60. (IME – 2016)

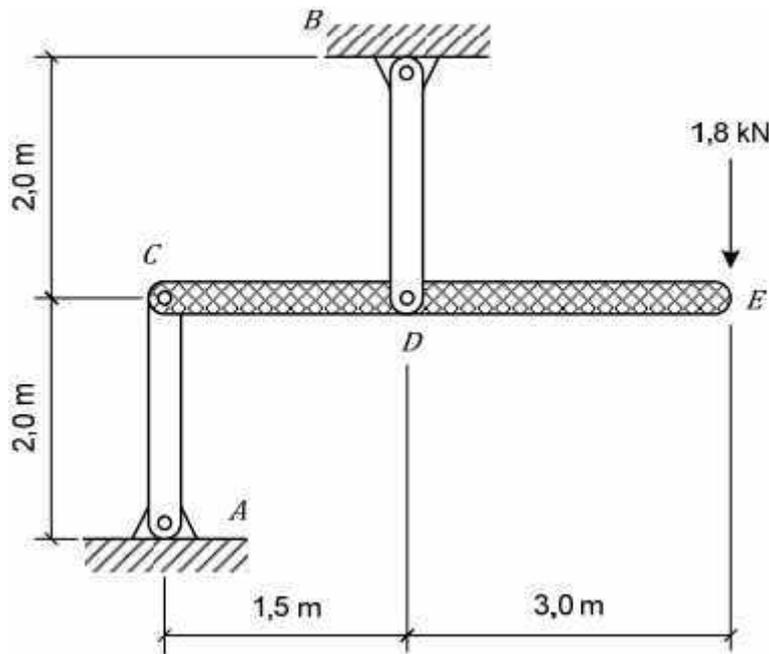


A figura acima mostra uma estrutura em equilíbrio, formada por nove barras  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$ ,  $BC$ ,  $BE$ ,  $CD$ ,  $CE$  e  $DE$  conectadas por articulações e apoiadas nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . O apoio  $A$  impede as translações nas direções dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , enquanto o apoio  $B$  impede as translações nas direções  $x$  e  $y$ . No ponto  $C$ , há um cabo  $CF$  que só restringe a translação da estrutura na direção do eixo  $y$ . Todas as barras possuem material uniforme e homogêneo e

peso desprezível. No ponto E há uma carga concentrada, paralela ao eixo z, de cima para baixo, de 60 kN. Determine, em kN:

- as componentes da reação do apoio B.
- as componentes da reação do apoio A.
- o módulo da força do cabo CF.
- os módulos das forças das barras BE, BC, AB e AC.

**61. (IME – 2017)**



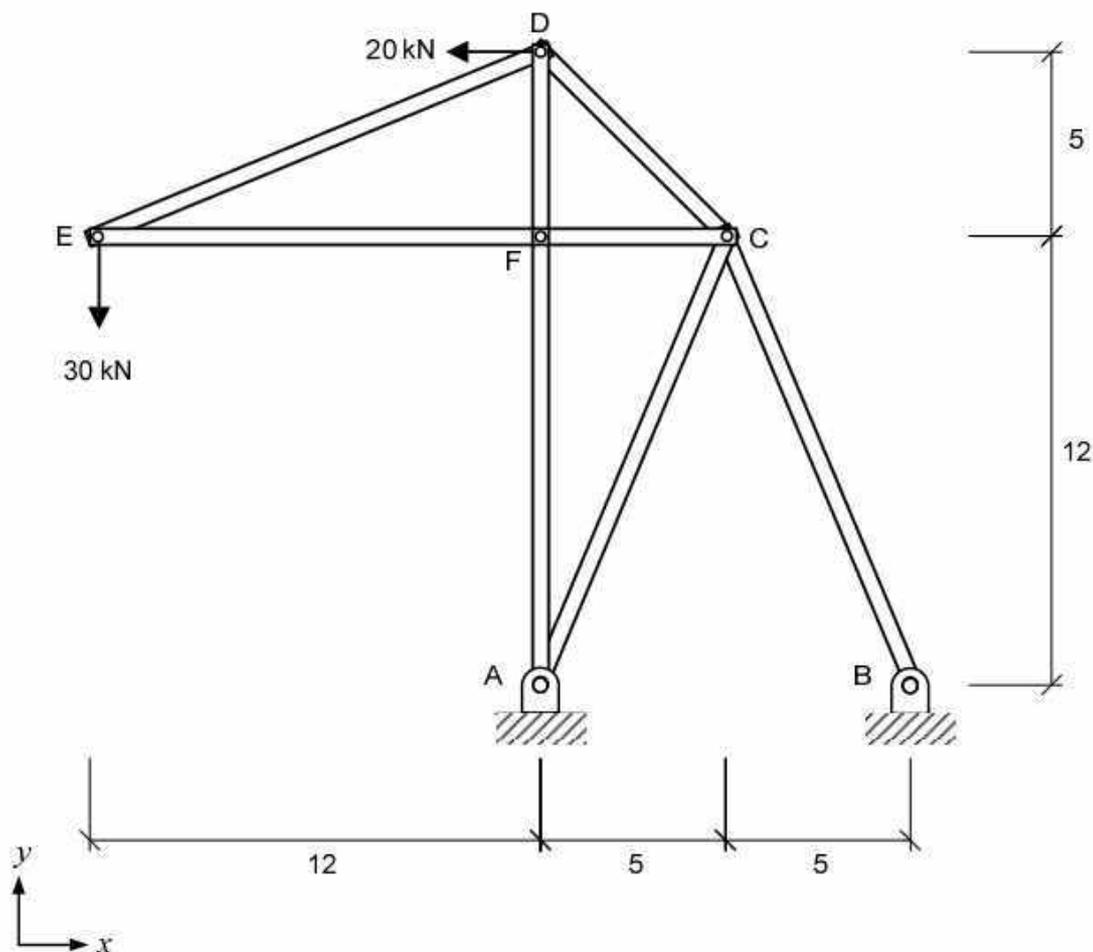
A figura acima apresenta uma estrutura em equilíbrio, formada por uma barra horizontal  $CE$  e duas barras verticais rotuladas  $AC$  e  $BD$ . Todas as barras possuem material uniforme e homogêneo e as barras  $AC$  e  $BD$  têm peso desprezível, enquanto a barra  $CE$  tem densidade linear de massa  $\mu$ . Na extremidade da barra  $CE$ , há uma carga concentrada vertical, de cima para baixo, de  $1,8 \text{ kN}$ . Para que a força de tração na barra  $BD$  seja  $8,1 \text{ kN}$ , a densidade linear de massa  $\mu$  da barra  $CE$ , em  $\text{kg/m}$ , e a força em módulo na barra  $AC$ , em  $\text{kN}$ , devem ser iguais a:

Dado:

- aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- 40 e 3,6
- 40 e 4,5
- 60 e 3,6
- 400 e 4,5
- 600 e 3,5

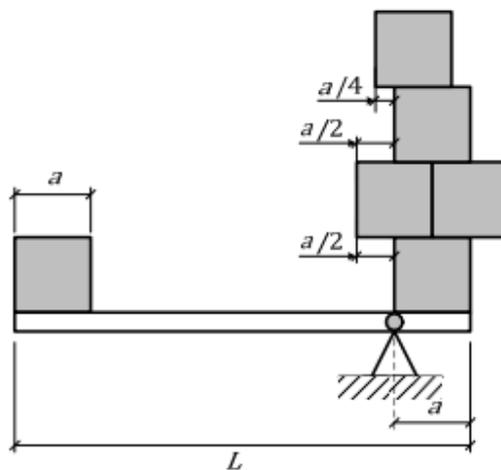
62. (IME – 2017)



A figura acima apresenta uma estrutura em equilíbrio, formada por oito barras AC, BC, AF, CF, CD, DE, DF e EF conectadas por articulações e apoiadas nos pontos A e B. Os apoios A e B impedem as translações nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ . Todas as barras são constituídas por material uniforme e homogêneo e possuem pesos desprezíveis. No ponto D, há uma carga concentrada, paralela à direção do eixo  $x$ , da direita para esquerda, de 20 kN, e, no ponto E existe uma carga concentrada, paralela à direção do eixo  $y$ , de cima para baixo, de 30 kN. Determine:

- as componentes da reação do apoio A em kN;
- as componentes da reação do apoio B em kN;
- as barras que possuem forças de tração, indicando os módulos destas forças em kN;
- as barras que possuem forças de compressão, indicando os módulos destas forças em kN.

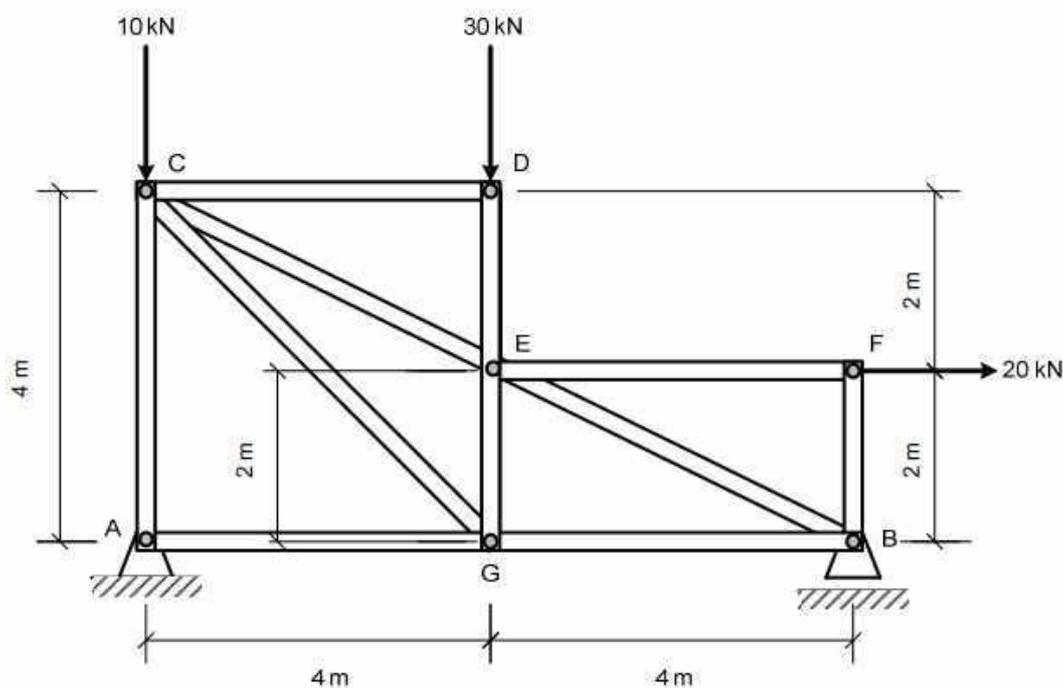
63. (IME – 2018)



O sistema mostrado na figura acima encontra-se em equilíbrio estático, sendo composto por seis cubos idênticos, cada um com massa específica  $n$  uniformemente distribuída e de aresta  $a$ , apoiados em uma alavanca composta por uma barra rígida de massa desprezível. O comprimento  $L$  da barra para que o sistema esteja em equilíbrio é:

- a)  $\frac{9}{4} \alpha$
- b)  $\frac{13}{4} \alpha$
- c)  $\frac{7}{2} \alpha$
- d)  $\frac{15}{4} \alpha$
- e)  $\frac{17}{4} \alpha$

64. (IME – 2018)



A figura acima mostra uma estrutura em equilíbrio formada por onze barras. Todas as barras têm peso desprezível. O apoio A impede deslocamentos nas direções horizontal e vertical, enquanto o apoio B somente impede deslocamentos na direção vertical. Nos pontos C e D há cargas concentradas verticais e no ponto F é aplicada uma carga horizontal. Determine os valores das forças, em kN, a que estão submetidas as barras BG e EG.

Dado:

$$\sqrt{2} \cong 1,4; \text{ e}$$

$$\sqrt{5} \cong 2,2.$$

**65. (OBF – 2007)**

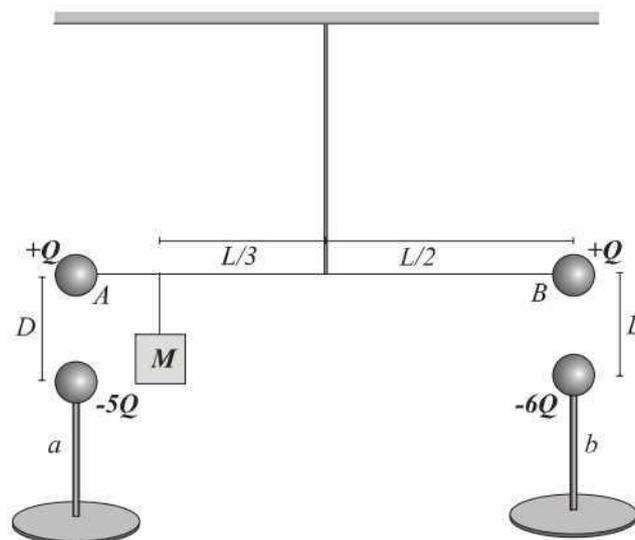


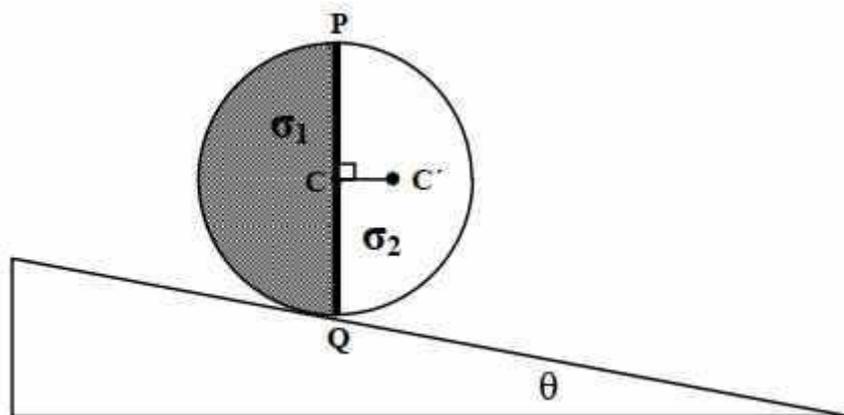
Fig. 2

Um dos resultados da Mecânica é que em um corpo extenso que não apresenta modificação em seu estado de repouso ou movimento, a resultante das forças e o momento resultante são nulos. Já a eletrostática ensina que a intensidade da força entre duas cargas puntiformes (pontuais) varia com o inverso do quadrado da distância entre elas, e é diretamente proporcional ao produto dos valores absolutos das cargas. Considerando esses resultados, suponha que no laboratório foi montada a experiência mostrada na figura 2. Nessa figura, a haste  $AB$  tem massa  $m$ , comprimento  $L$  e seu ponto médio repousa sobre um suporte fixo ao teto. Nas extremidades  $A$  e  $B$  da haste, encontram-se cargas de valor  $Q$ . Fixados à bancada, estão dois suportes  $a$  e  $b$ , em cujas extremidades há cargas de valores  $-5Q$  e  $-6Q$ , respectivamente. Os suportes e a haste são de material apropriado para que as cargas se mantenham concentradas nos pontos indicados. A experiência é montada de tal forma que somente a força elétrica entre as cargas de  $A$  e  $a$ , e a força elétrica entre as cargas de  $B$  e  $b$ , sejam consideradas. Nessas condições observa-se que, para a haste  $AB$  permanecer na horizontal, é preciso pendurar nela um corpo de massa  $M$ , no ponto situado à distância  $L/3$  de seu ponto médio. Sendo  $D$  a distância entre as cargas de  $A$  e  $a$ , e de  $B$  e  $b$ , pede-se:

a) A massa  $M$  do corpo em função da distância  $D$  e da carga  $Q$ ;

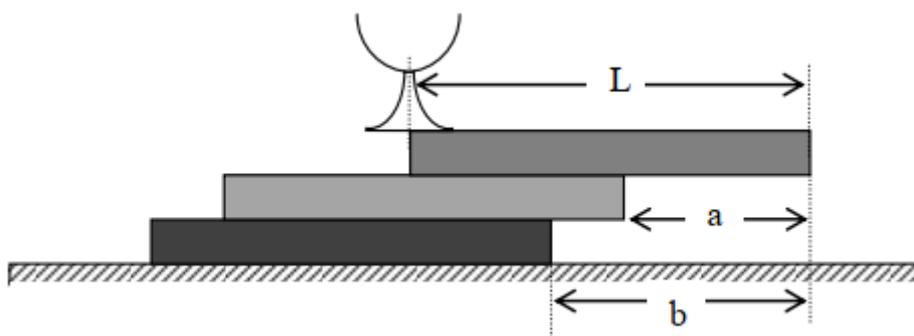
b) Sabendo o valor da carga elementar  $e = 0,16 \cdot 10^{-18} C$  e que, quando a distância  $D = 30 \text{ cm}$  a massa  $M$  do corpo, usado para manter a haste na horizontal, é igual a  $0,1536 \text{ kg}$ . determine o número de cargas elementares em  $Q$ .

66. (OBF – 2012)



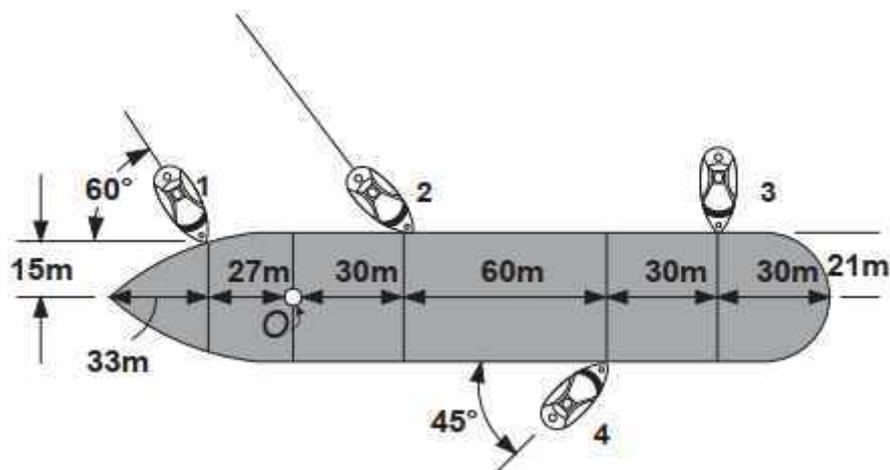
O disco, de raio  $R$ , mostrado na figura é formado por dois semicírculos com densidades de massa  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . O disco não pode escorregar, mas pode rolar. Para uma determinada posição do disco e para certos valores do ângulo  $\theta$ , é possível manter o disco em equilíbrio sobre o plano inclinado. Qual deve ser a razão entre as densidades ( $\sigma_1/\sigma_2$ ) para que o disco fique em equilíbrio com o segmento  $PQ$  posicionado na vertical? Nessa situação, qual é o intervalo permitido para o ângulo  $\theta$ ? Dado auxiliar: o centro de massa,  $C'$ , de um semicírculo de raio  $R$  é tal que o segmento  $CC'$  é  $4R/3\pi$ .

67. (OBF – 2013)



Três livros idênticos de comprimento  $L$  estão empilhados com uma taça de  $1/10$  do peso de um livro posicionada como mostra a figura. Qual o valor limite da razão  $b/a$  para que o conjunto fique em equilíbrio?

68. (OBF – 2015)



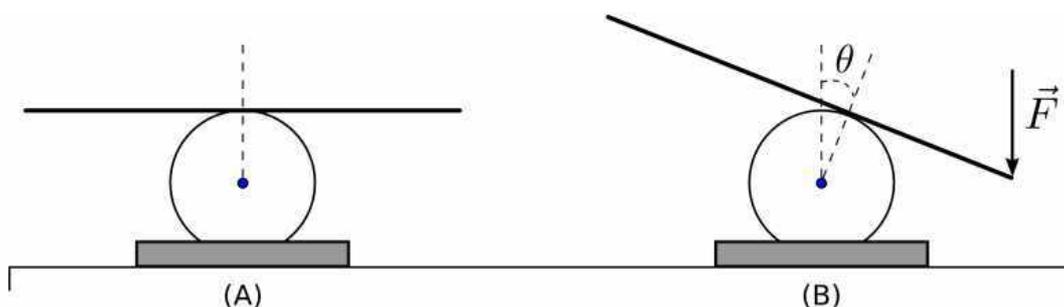
O canal da Mancha é um braço de mar pertencente ao oceano Atlântico que separa a ilha da Grã-Bretanha do norte da França. Atualmente é uma das localidades de maior circulação de navios do mundo. Quatro rebocadores são usados para trazer um transatlântico ao cais. Para isso é feita uma manobra como ilustra a figura abaixo. Cada rebocador exerce uma força de 22500 N na direção mostrada. Determine o momento resultante em relação ao ponto  $O$ .

Considere a força exercida pelo segundo rebocador na forma vetorial como sendo:

$$\vec{F}_2 = (13,5 \hat{i} - 18 \hat{j}) \text{ kN}$$

### 69. (OBF – 2017)

Uma aluna de física está investigando condições de equilíbrio estático de objetos encontrados em sua mesa de estudos. Inicialmente ela fixa uma lata cilíndrica de raio  $r = 5,00 \text{ cm}$  em uma mesa horizontal e em seu topo apoia uma régua plástica homogênea de comprimento  $L = 30,0 \text{ cm}$  e massa  $m = 40,0 \text{ g}$  na situação de equilíbrio estático ilustrada na figura A. Depois, ela aplica uma força vertical  $\vec{F}$  em uma das extremidades da régua e observa que o ponto de apoio da mesma sobre o cilindro se desloca conforme ilustrado na figura B. Ela observa que a régua pode assumir configurações de equilíbrio estático desde que  $0 < \theta < 30^\circ$ . Determine (a) o valor do coeficiente de atrito estático entre a régua e a lata e (b) a intensidade da força externa na situação em que  $\theta = 30^\circ$ .

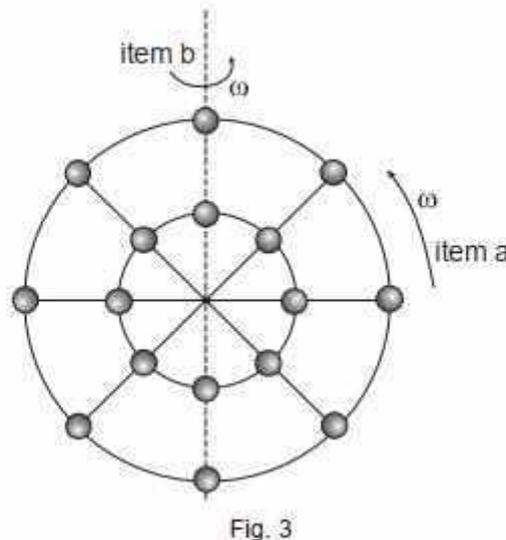


### 70. (2ª fase OBF – 2008)

A energia cinética de rotação de um corpo rígido que gira com velocidade angular  $\omega$  em torno de certo eixo, é dada por  $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ . A grandeza  $I$  é chamada de momento de inércia, a qual

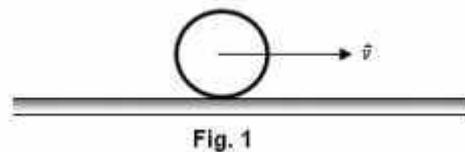
depende não só da massa do corpo, mas também de como a massa está distribuída em torno do eixo de rotação. Seja um corpo rígido constituído de dezesseis bolas de mesma massa  $m$  que estão distribuídas simetricamente ao longo de duas circunferências concêntricas de raios  $r$  e  $2r$ . Elas estão ligadas entre si por barras finas e rígidas de massa desprezível, como mostra a figura 3. Expressando o resultado em termos da massa total  $M = 16m$  e do raio externo  $R = 2r$ , calcule o momento de inércia do corpo na situação onde ele gira, com velocidade angular constante  $\omega$ , em torno de um eixo:

- perpendicular ao plano que contem as circunferências e que passa pelos seus centros
- que pertence ao plano que contém as circunferências e que passa por quatro bolas.



### 71. (3ª fase OBF – 2009)

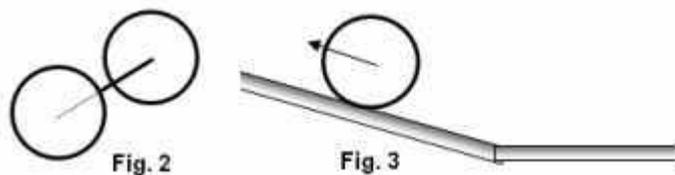
- Um aro circular de raio  $R$  e massa  $m$  uniformemente distribuída, rola sem deslizar, em movimento uniforme, sobre um plano horizontal, como mostra a figura 1.



Considerando que o movimento do aro pode ser descrito pela composição do movimento retilíneo uniforme do seu centro de massa combinado com um movimento de rotação uniforme em relação a este mesmo ponto, determine, em função de  $m$  e  $v$ , a energia cinética total do aro.

- Com dois aros idênticos ao do item anterior e uma haste rígida de comprimento  $L$  e massa desprezível, construiu-se um carretei cujo esboço é apresentado abaixo na figura 2. Os raios que dão sustentação à haste, ligando-a rigidamente aos aros não foram apresentados e suas massas são desprezíveis, também. Considere que o carretei encontra-se, inicialmente, em movimento uniforme com velocidade  $v$  sobre um plano horizontal e após um certo tempo

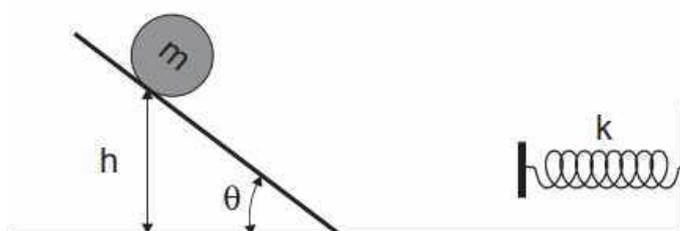
começa a subir um plano inclinado. A figura 3 mostra um corte transversal dos planos e do carretei.



Determine a altura máxima que a haste atinge em relação ao plano horizontal, quando o carretei atinge velocidade nula. Determine também a desaceleração sofrida pelo carretei durante a subida. Expresse seus resultados em função de variáveis escolhidas dentre as grandezas  $m$ ,  $v$ ,  $R$ ,  $L$  e  $g$  (aceleração da gravidade).

### 72. (2ª fase OBF – 2012)

Um cilindro de massa  $m$  e raio  $R$  é solto de uma altura  $h$  como indicado na figura abaixo.



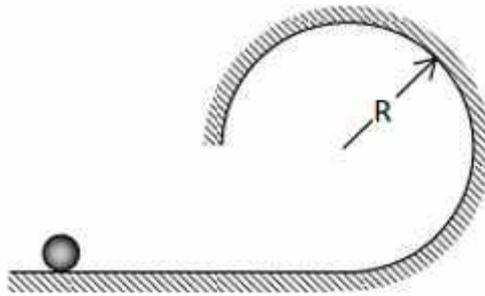
Na rampa inclinada o cilindro rola sem deslizar. Na parte horizontal não há atrito entre o cilindro e a superfície. Ao final da superfície horizontal é fixa uma mola de constante elástica  $k$ . Ao colidir com a mola toda a energia cinética de rotação do cilindro é dissipada por atrito no anteparo que está fixo na outra extremidade da mola. A Energia Cinética ( $E_R$ ) de rotação do cilindro é obtida através da relação  $E_R = \frac{1}{2}I\omega^2$ , onde  $I = \frac{1}{2}mR^2$  é o momento de inércia do cilindro e  $\omega$  a velocidade de rotação. Use  $g$  como aceleração gravitacional local.

- Determine a deformação máxima  $X$  que a mola irá sofrer durante a colisão.
- Determine a altura máxima  $H$  em relação a horizontal que o cilindro atingirá ao retomar a rampa após a primeira colisão com a mola.

### 73. (3ª fase OBF – 2012)

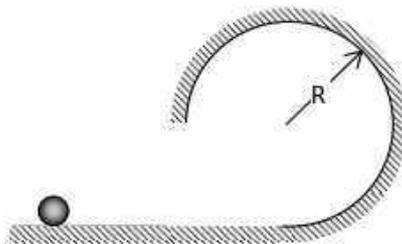
Uma esfera de raio  $r$  e massa  $m$  rola sem escorregar sobre a superfície mostrada na figura. Determine a velocidade mínima do centro de massa que a esfera deve ter para completar a curva rolando sem perder contato com a superfície.

Dado: momento de inércia de uma esfera =  $\frac{2mr^2}{5}$ .



**74. (3ª fase OBF – 2012)**

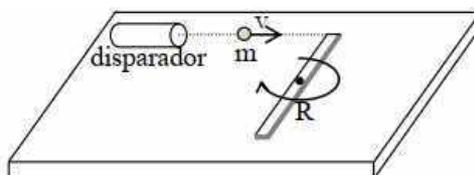
Uma esfera de raio  $r$  e massa  $m$  rola sem escorregar sobre a superfície mostrada na figura. Determine a velocidade mínima que a esfera deve ter para completar a curva rolando sem perder contato com a superfície. Dado: momento de inércia de uma esfera =  $\frac{2mr^2}{5}$ .



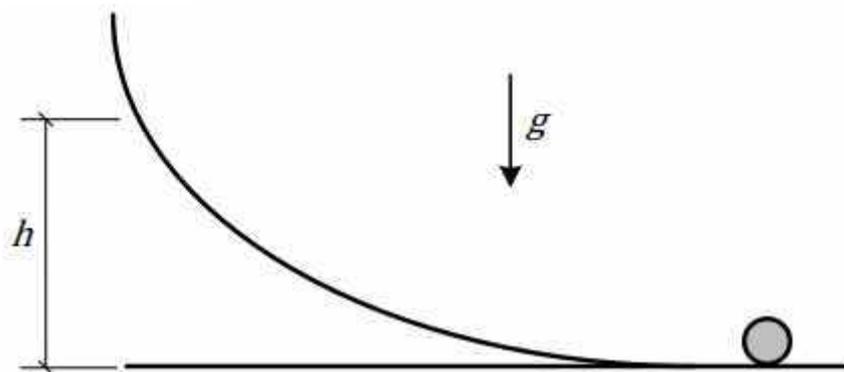
**75. (3ª fase OBF – 2013)**

A figura mostra uma haste homogênea de comprimento  $2R$  e massa  $M$  que está sobre uma superfície lisa. A haste está articulada no seu centro e inicialmente em repouso. Pequenas esferas de massa  $m$  atingem uma das extremidades da haste. As esferas são lançadas de um reservatório (disparador) e liberadas de forma a atingirem esta extremidade com velocidade  $v$  toda vez que está completando uma revolução. As colisões são elásticas e as esferas podem ser consideradas puntiformes. Encontre a velocidade angular  $\omega_{i+1}$  em termos de  $\omega_i$ , de  $v$  após a  $i$ -ésima esfera colidir com a haste.

Dado: o momento de inércia da haste é  $\frac{MR^2}{3}$ .



**76. (IME – 2019)**



Um cilindro de raio  $R$  rola, sem deslizar, em velocidade angular  $\omega$ , sobre uma superfície plana horizontal até atingir uma rampa. Considerando também que o rolamento na rampa seja sem deslizamento e chamando de  $g$  a aceleração da gravidade, a altura máxima,  $h$ , que o eixo do cilindro alcança na rampa em relação à superfície plana é:

- a)  $R + \frac{\omega^2 R^2}{g}$
- b)  $R + \frac{\omega^2 R^2}{2g}$
- c)  $2R + \frac{\omega^2 R^2}{g}$
- d)  $\frac{\omega^2 R^2}{g}$
- e)  $\frac{\omega^2 R^2}{2g}$





## 4. Gabarito sem comentários

1)  $\frac{6-\sqrt{6}}{4} < y < \frac{6+\sqrt{6}}{4} m$

2) A

3) A

4) B

5) A

6) E

7) B

8) A

9) B

10) D

11) D

12)  $F_d = \sqrt{F_m^2 - \left(\frac{3}{5}m\right)^2}$

13)  $2,7 m/s^2$

14) D

15) A

16) B

17) tombamento

18)  $D_6 = \frac{49}{40} L$

19) C

20) C

21)  $\frac{P(x-y)}{4(x+y)}$

22) 1. 60 N 2. 60 N 3. As duas forças fazem o mesmo trabalho

23)  $Q = \frac{Mg\pi\epsilon}{3q} \cdot a^2 \cdot \frac{7\sqrt{7}}{7\sqrt{7}+2}$

24) A

25)  $N_L = \frac{P\sqrt{2}}{6}$  e  $N_I = \frac{4P}{3}$

26) B

27)  $P_C = \frac{P}{2}$

28) C

29) C

30) C

31) A

32) sem alternativa

33) C

34) sem alternativa

35) A

36)  $x_{cm} = x \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{\mu \cdot g}{l}} \cdot t\right)$

37) E

38)  $\theta = \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{4a}{l}}\right)$

39)  $\theta = \arcsen\left(\frac{2}{3}\right)$  e 20 N

40) a) 0,83 m b) 2,973 m

41)  $50,5 \cdot 10^6 Pa$

42) a)  $P_{cubo} = 50L^3 N$  e  $P_{placa} =$

$1250L^3\sqrt{3} N$  b)  $T = \frac{L^3\sqrt{7}}{6} (1250\sqrt{3} + 100) N$

43) reações em

A:

{ Horizontal: 33N para a esquerda  
Vertical: 151 N para cima

reações em B:

B { Horizontal: 33 N para a direita  
Vertical: 89 N para cima

44) A

45)  $m = \frac{M \cdot g \cdot a - n \cdot R \cdot T + P_{atm} \cdot a^3}{g \cdot a(\mu \cos \theta + \sin \theta)}$

46) C

47) a)  $T = 4250 N$  b)  $F_{C_X} = 2550 N$

$F_{C_Y} = 600 N$  c)  $F_{B_X} = \frac{9350}{3} N$   $F_{B_Y} = \frac{18700}{3} N$

48) A

49)  $D_y = 140 N$ ,  $C_y = 40 N$ ,  $A_x = 0$ ,

$C_x = 0$ ,  $D_x = F_x = 0$ ,  $B_y = 70 N$ ,

$F_y = 70 N$ ,  $A_y = 30 N$ .

50) A

51)  $Q = \frac{35}{9} J$

52) C

53) a)  $h = 1,8 m$  b)  $N_E =$

$25 N$ , para baixo



54) B

55) B

56) a)  $(R_A + 20) \text{ kN}$  ( $\leftarrow$  se o valor for positivo)

b)  $R_A = (F - 20) \text{ kN}$  ( $\rightarrow$

se o valor for positivo),  $R_{B_x} =$

$20 \text{ kN}$  ( $\rightarrow$ ) e  $R_{B_y} = 20 \text{ kN}$  ( $\uparrow$ ) c)  $AE \left(\frac{25}{3} \text{ kN}\right)$  d)

$DE (10 \text{ kN}), BE (25 \text{ kN}) AB (5 \text{ kN}), CE \left(\frac{50}{3} \text{ kN}\right)$

57) B

58) a)  $32 \text{ kN}$  ( $\rightarrow$ ) b)  $42 \text{ kN}$  ( $\leftarrow$ ) e  $17 \text{ kN}$  ( $\uparrow$ ) c)

$9 \text{ kN}$  ( $\downarrow$ ) d)  $\frac{500}{\pi} \text{ MPa}$ , de tração

59) C

60) a)  $(30; -60; 0) \text{ kN}$  b)  $(-30; 60; 60) \text{ kN}$  c)  $0 \text{ kN}$  d)

$F_{BE} = 90 \text{ kN}$ ,  $F_{BC} = 0 \text{ kN}$ ,  $F_{AB} = 60 \text{ kN}$  e  $F_{AC} = 0 \text{ kN}$

61) D

62) a)  $\frac{55}{6} \text{ kN}$  ( $\leftarrow$ ),  $100 \text{ kN}$  ( $\uparrow$ )

b)  $\frac{175}{6} \text{ kN}$  ( $\rightarrow$ ),  $70 \text{ kN}$  ( $\downarrow$ )

c)

$C \left(\frac{143}{6} \text{ kN}\right)$ ,  $BC \left(\frac{455}{6} \text{ kN}\right)$ ,  $CD(92\sqrt{2} \text{ kN})$ ,  $DE(78 \text{ kN})$

d)

$AF (122 \text{ kN}), CF (72 \text{ kN}), DF (122 \text{ kN}), EF (72 \text{ kN})$

63) D

64)  $40 \text{ kN}$  e  $-20 \text{ kN}$

65) a)  $M = \frac{3kQ^2}{2gD^2}$  b)  $Q = 2 \cdot 10^{13}$  cargas elementares.

66)  $\frac{4+3\pi \cdot \text{sen } \theta}{4-3\pi \cdot \text{sen } \theta}$  e  $\text{sen } \theta < \frac{4}{3\pi}$

67)  $\frac{181}{126}$

68)  $1,4 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}$

69) a)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  b)  $0,0846 \text{ N}$

70) a)  $I = \frac{5}{8} MR^2$  b)  $I = \frac{5}{16} MR^2$

71) a)  $E_c = m \cdot v^2$  ; b)  $a = g \sin(\alpha)$

72) a)  $v = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h}{3}}$  b)  $H = \frac{2 \cdot h}{3}$

73)  $\sqrt{\frac{27Rg}{7}} \text{ m/s}$

74)  $\sqrt{\frac{27}{7} \cdot g \cdot (R - r)}$

75)  $\omega_{i+1} = \frac{1}{2} \omega_{i+1} + \frac{3}{2} v/r$

76) A



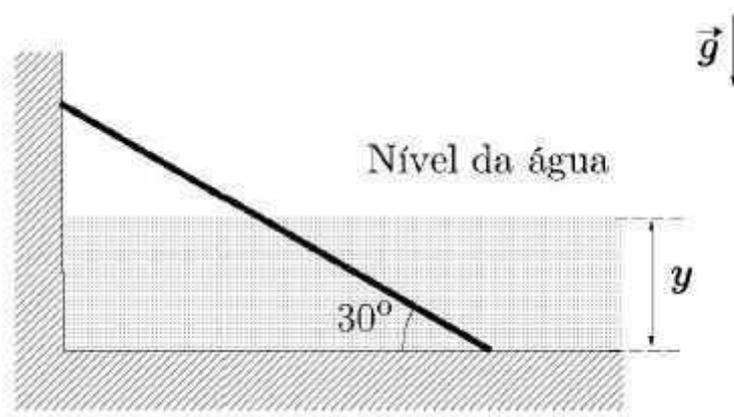
ESCLARECENDO!



## 5. Lista de exercícios comentada

### 1. (ITA – 2020 – 2ª Fase)

Uma prancha retangular de espessura uniforme, 5,0 m de comprimento,  $1,5 \text{ g/cm}^3$  de densidade e 10 kg de massa homogeneamente distribuída, é parcialmente submersa na piscina ilustrada na figura, em cuja parede (lisa) se apoia, formando um ângulo de  $30^\circ$  com o piso horizontal, cujo coeficiente de atrito com a prancha é  $0,6\sqrt{3}$ . Determine para quais alturas  $y$  do nível de água a prancha permanece em equilíbrio estático nessa posição.



#### Comentários:

A força de empuxo vale:

$$F_e = \frac{y}{L \sin 30^\circ} \cdot \frac{m}{\rho_{prancha}} \rho_{\text{água}} g = \frac{2y}{5} \cdot \frac{10}{1,5} \cdot 1 \cdot 10 = \frac{80y}{3}$$

Pelo equilíbrio de forças no eixo x:

$$N_x = F_{at}$$

Pelo equilíbrio de forças no eixo y:

$$mg = N_y + F_e$$

$$100 = N_y + \frac{80y}{3}$$

Pelo equilíbrio de torque no ponto inferior:

$$N_x L \sin 30^\circ + F_e \cdot \frac{y}{2 \tan 30^\circ} = mg \left( \frac{L}{2} \right) \cos 30^\circ$$



$$\frac{5}{2}F_{at} + \frac{40y^2\sqrt{3}}{3} = 125\sqrt{3} \rightarrow F_{at} = \sqrt{3}\left(50 - \frac{16y^2}{3}\right)$$

Mas sabemos que:

$$0 < F_{at} < N_y\mu = \left(100 - \frac{80y}{3}\right)0,6\sqrt{3}$$

Na primeira desigualdade:

$$\frac{16y^2}{3} < 50 \rightarrow 0 < y < \frac{5\sqrt{6}}{4} \text{ m}$$

Na primeira desigualdade:

$$\sqrt{3}\left(50 - \frac{16y^2}{3}\right) < \left(100 - \frac{80y}{3}\right)0,6\sqrt{3}$$

$$50 - \frac{16y^2}{3} < 60 - 16y$$

$$8y^2 - 24y + 15 > 0$$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{6}}{4}$$

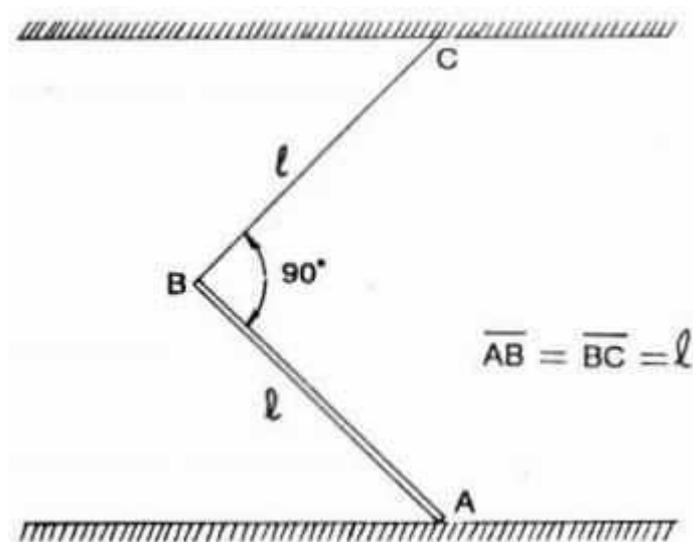
A intersecção é exatamente a última equação.

**Gabarito:**  $\frac{6-\sqrt{6}}{4} < y < \frac{6+\sqrt{6}}{4} \text{ m}$

## 2. (ITA – 1990)

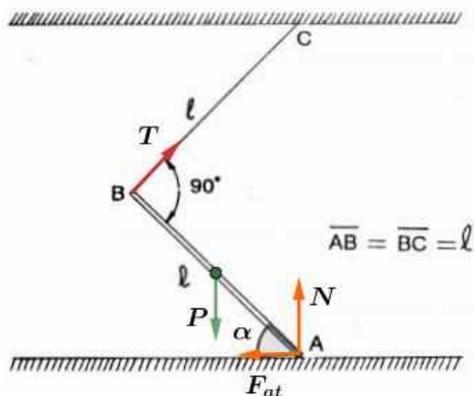
Para que a haste  $AB$  homogênea de peso  $P$  permaneça em equilíbrio suportada pelo fio  $BC$ , a força de atrito em  $A$  deve ser:

- a)  $\frac{P}{4}$
- b)  $\frac{P}{2}$
- c)  $\frac{P\sqrt{2}}{2}$
- d)  $\frac{P\sqrt{2}}{4}$
- e) de outro valor.



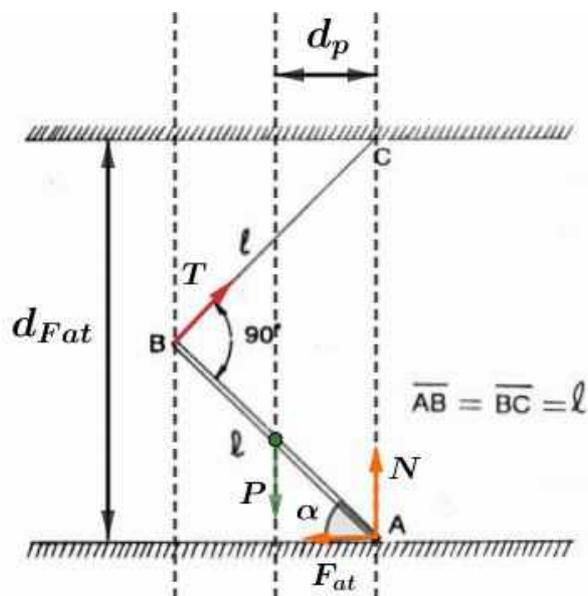
Comentários:





Na análise da dinâmica da figura, nota-se que existem quatro variáveis  $N$ ,  $F_{at}$ ,  $\alpha$  e  $T$  e somente três equações (Segunda Lei de Newton em duas direções e momento em relação à algum ponto). No caso deste problema, deve-se supor também que A e C estão na mesma vertical para que o sistema apresente solução.

Como a questão pede apenas a relação entre a força de atrito e o peso, pode-se buscar um polo no qual as contribuições de momento de  $N$  e  $T$  sejam nulas. Neste caso, o ponto C atende à demanda, pois em relação à C, o braço de alavanca da tração e da normal são nulas.



Dessa forma, o cálculo do momento em relação a C fica:

$$M_C = P \cdot d_p - F_{at} \cdot d_{F_{at}}$$

Devido ao equilíbrio de rotação, o momento em torno de qualquer polo é nulo, assim:

$$P \cdot d_p = F_{at} \cdot d_{F_{at}}$$

Pela figura:

$$d_p = \frac{L}{2\sqrt{2}} \text{ e } d_{F_{at}} = L\sqrt{2}$$

Substituindo:

$$\frac{P \cdot L}{2\sqrt{2}} = F_{at} \cdot L \cdot \sqrt{2}$$

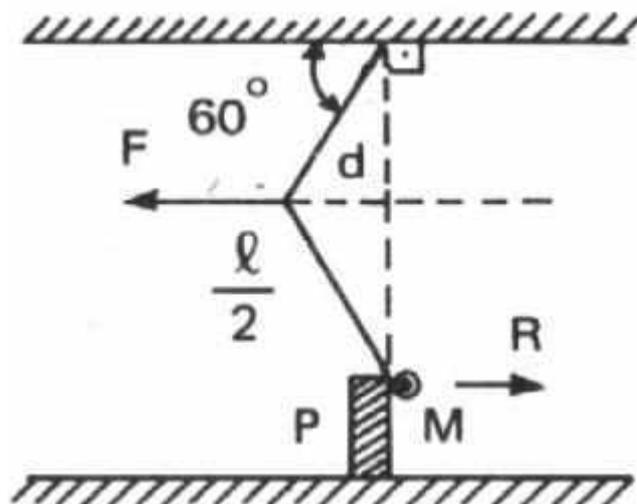
Chega-se à:

$$F_{at} = \frac{P}{4}$$

**Gabarito: A**

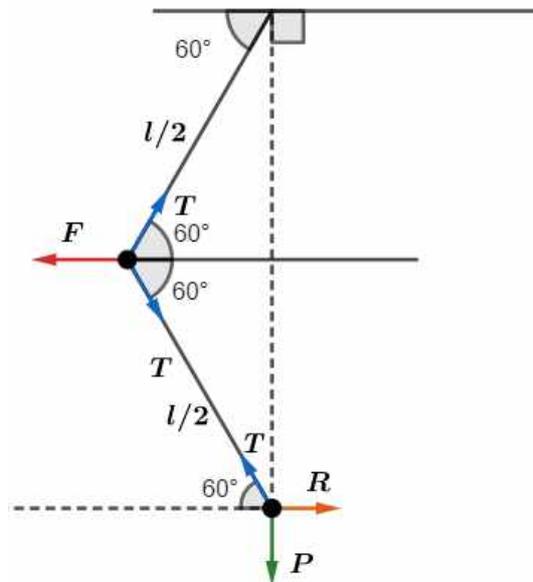
**3. (ITA – 1991)**

Na figura abaixo, a massa esférica  $M$  pende de um fio de comprimento  $l$  mas está solicitada para a esquerda por uma força  $F$  que mantém a massa apoiada contra uma parede vertical  $P$ , sem atrito. Determine os valores de  $F$  e de  $R$  (reação da parede). (O raio da esfera  $\ll l$ ).



- |    | $F$                     | $R$                     |
|----|-------------------------|-------------------------|
| a) | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{Mg\sqrt{3}}{3}$  |
| b) | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ |
| c) | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ |
| d) | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ |
| e) | $Mg\sqrt{3}$            | $\frac{2Mg\sqrt{3}}{3}$ |

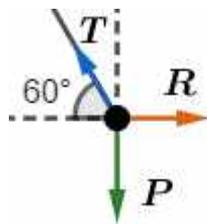
**Comentários:**



Pelo equilíbrio das forças no ponto de aplicação de \$F\$, tem-se:

$$F = 2 \cdot T \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot T \cdot \frac{1}{2} = T$$

A dinâmica do corpo fica, portanto:



Pelo equilíbrio das forças nas duas direções:

$$\begin{cases} F \cdot \cos 60^\circ = R \\ F \cdot \sin 60^\circ = P \end{cases}$$

Assim:

$$F = \frac{2 \cdot P}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot M \cdot g}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot M \cdot g}{3}$$

Substituindo \$F\$ na primeira equação:

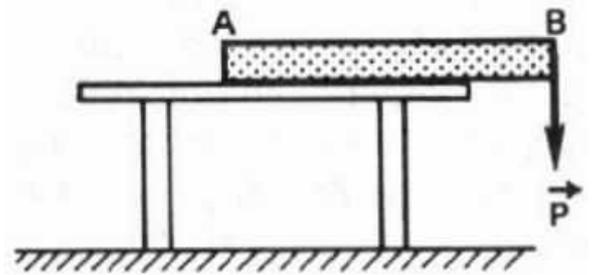
$$\frac{2\sqrt{3} \cdot M \cdot g}{3} \cdot \frac{1}{2} = R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot M \cdot g$$

**Gabarito: A**

#### 4. (ITA – 1993)

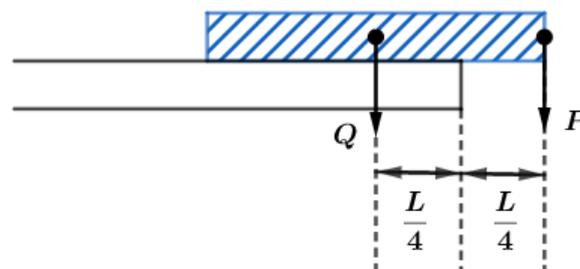
Um pedaço de madeira homogêneo, de seção transversal constante \$A\$ e comprimento \$L\$, repousa sobre uma mesa fixa no chão. A madeira está com 25% do seu comprimento para fora da mesa, como mostra a figura. Aplicando uma força \$P = 300 \text{ N}\$ no ponto \$B\$ a madeira começa a se deslocar de cima da mesa. Qual é o valor real do peso \$Q\$ da madeira?

- a)  $Q = 150 \text{ N}$
- b)  $Q = 300 \text{ N}$
- c)  $Q = 400 \text{ N}$
- d)  $Q = 600 \text{ N}$
- e)  $Q = 900 \text{ N}$



**Comentários:**

Quando o corpo começa a se deslocar, está iniciando-se uma rotação em torno da quina da mesa. Portanto, o momento, tomando essa quina como polo, é nulo na iminência do movimento. Assim:



$$M_O = \frac{PL}{4} - \frac{QL}{4} = 0$$

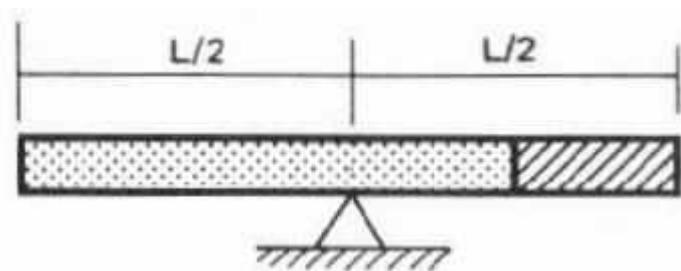
$$Q = P = 300 \text{ N}.$$

**Gabarito: B**

**5. (ITA – 1993)**

Uma haste metálica de seção retangular de área  $A$  e de comprimento  $L$  é composta de dois materiais de massas específicas  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . Os dois materiais constituem hastes homogêneas de comprimentos  $l_1$  e  $l_2$ , com  $l_1 + l_2 = L$  e  $l_1 = 3l_2$  soldadas nas extremidades. Colocada a haste sobre um cutelo verifica-se que o equilíbrio é atingido na situação indicada na figura. Calcule a relação  $\rho_1/\rho_2$ .

- a)  $\rho_1/\rho_2 = 1$
- b)  $\rho_1/\rho_2 = 2$
- c)  $\rho_1/\rho_2 = 3$
- d)  $\rho_1/\rho_2 = 2,5$
- e)  $\rho_1/\rho_2 = 0,4$



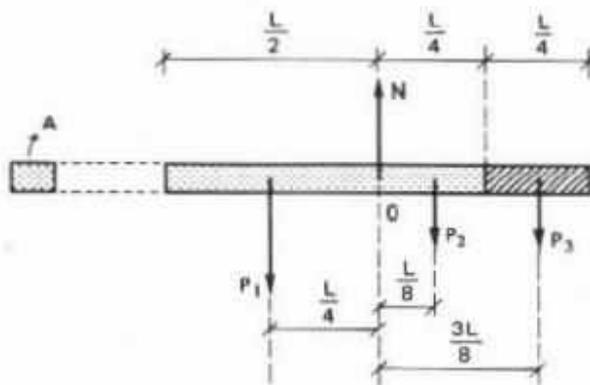
**Comentários:**

Para a solução desse problema, pode-se analisar o momento, tomando como polo o ponto de apoio, igualando o momento resultante a zero e achando a relação entre os  $\rho$ . No entanto, essa questão

apresenta uma facilidade. Visto que o ponto de apoio permanece exatamente no meio, a substituição de  $\rho_1$  por  $\rho_2$  não interferiu em nada a situação original. Isto é possível somente se:

$$\rho_1 = \rho_2$$

Resolvendo agora, da forma convencional, pelo equilíbrio de momentos:



$$\frac{P_1 \cdot L}{8} = \frac{P_2 \cdot 3L}{8}$$

Onde:

- $P_1$  é o peso da barra de densidade  $\rho_1$ ;
- $P_2$  é o peso da barra de densidade  $\rho_2$ .

Portanto:

$$P_1 = \rho_1 \cdot A \cdot \frac{3L}{4}$$

$$P_2 = \rho_2 \cdot A \cdot \frac{L}{4}$$

Substituindo:

$$\rho_1 \cdot A \cdot \frac{3L}{4} \cdot \frac{L}{8} = \rho_2 \cdot A \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{3L}{8}$$

$$\rho_1 \cdot \frac{3L^2 \cdot A}{32} = \rho_2 \cdot \frac{3L^2 \cdot A}{32}$$

Assim:

$$\rho_1 = \rho_2$$

**Gabarito: A**

## 6. (ITA – 1993)

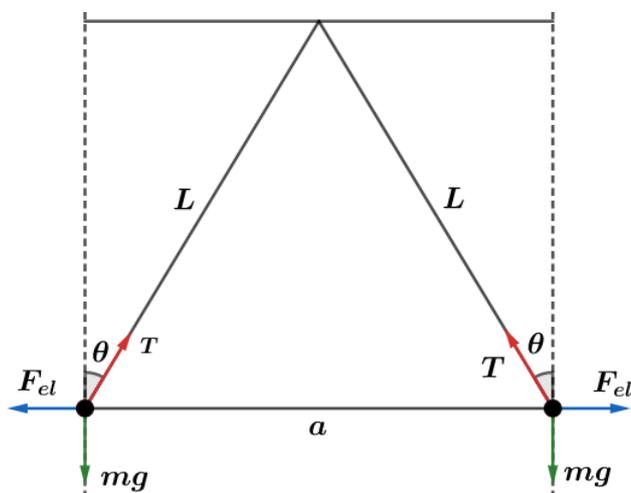
Duas esferas condutoras, de massa  $m$ , bem pequenas, estão igualmente carregadas. Elas estão suspensas num mesmo ponto, por dois longos fios de seda, de massas desprezíveis e de comprimentos iguais a  $L$ . As cargas das esferas são tais, que elas estarão em equilíbrio quando



a distância entre elas é igual a  $a$  ( $a \ll L$ ). Num instante posterior, uma das esferas é descarregada. Qual será a nova distância  $b$  ( $b \ll L$ ) entre as esferas, quando após se tocarem o equilíbrio entre elas for novamente restabelecido?

- a)  $b = a/2$
- b)  $b = a\sqrt{2}/2$
- c)  $b = a\sqrt{3}/2$
- d)  $b = a/\sqrt[3]{2}$
- e)  $b = a/\sqrt[3]{4}$

**Comentários:**



Fazendo o equilíbrio de forças para uma das massas, tem-se:

$$\begin{cases} T \cdot \cos \theta = mg \\ T \cdot \sin \theta = F_{el} \end{cases}$$

Dividindo a equação de baixo pela de cima:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Kq^2}{a^2} = \frac{Kq^2}{mga^2}$$

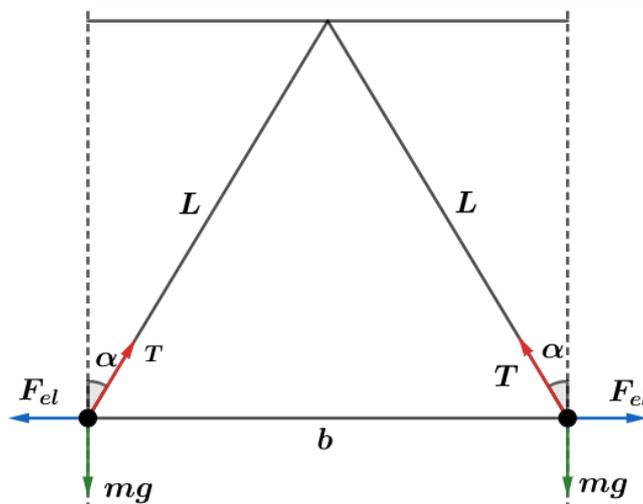
Mas, como  $\theta$  é um ângulo muito pequeno:

$$\operatorname{tg} \theta \approx \operatorname{sen} \theta = \frac{a}{2L} = \frac{a}{2L}$$

Assim:

$$\frac{Kq^2}{mga^2} = \frac{a}{2L} \Rightarrow Kq^2 = \frac{mga^3}{2L}$$





Para o novo equilíbrio:

$$\begin{cases} T \cdot \cos \alpha = mg \\ T \cdot \sin \alpha = F_{el} \end{cases}$$

Dividindo a segunda pela primeira:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{K \left(\frac{q}{2}\right)^2}{mg} = \frac{K \left(\frac{q}{2}\right)^2}{mgb^2}$$

Mas, novamente,  $\alpha$  é muito pequeno, portanto:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{2L}$$

Logo:

$$\frac{Kq^2}{4mgb^2} = \frac{b}{2L}$$

Substituindo  $Kq^2$ , tem-se:

$$\frac{\frac{mga^3}{2L}}{4mgb^2} = \frac{b}{2L} \Rightarrow mga^3 = 4mgb^3$$

$$a^3 = 4b^3 \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$$

**Gabarito: E**

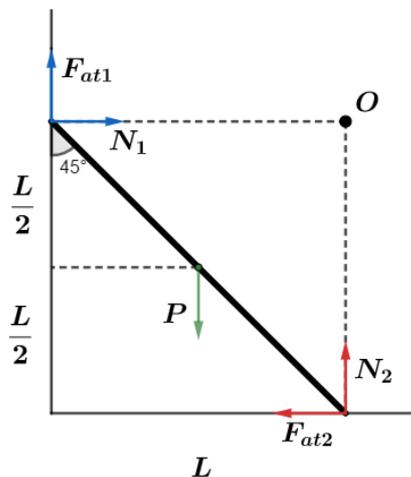
### 7. (ITA – 1994)

Uma barra homogênea do peso  $P$  tem uma extremidade apoiada num assoalho horizontal e a outra numa parede vertical. O coeficiente do atrito com relação ao assoalho e com relação à parede são iguais a  $\mu$ . Quando a inclinação da barra com relação à vertical é de  $45^\circ$ , a barra encontra-se na iminência de deslizar. Podemos então concluir que o valor de  $\mu$  é:

a)  $1 - (\sqrt{2}/2)$

- b)  $\sqrt{2} - 1$
- c)  $1/2$
- d)  $\sqrt{2}/2$
- e)  $2 - \sqrt{2}$

**Comentários:**



Primeiro, analisemos o equilíbrio das forças:

$$\begin{cases} N_1 = F_{at_2} \\ N_2 + F_{at_1} = P \end{cases}$$

Mas:

$$F_{at} = \mu N$$

Logo:

$$\begin{cases} N_1 = \mu N_2 \\ N_2 + \mu N_1 = P \end{cases}$$

Tem-se três variáveis e 2 equações. Portanto, busquemos uma terceira equação no equilíbrio rotacional. O polo adotado foi O, pois, com essa escolha, o braço de alavanca de  $N_1$  e  $N_2$  é nulo. Assim:

$$\begin{aligned} M_O &= F_{at_1}L + F_{at_2}L - \frac{PL}{2} = 0 \\ \mu N_1 + \mu N_2 &= \frac{P}{2} \end{aligned}$$

Do equilíbrio, tem-se:

$$N_2 + \mu^2 N_2 = P \text{ e } N_1 = \mu N_2$$

Substituindo no equilíbrio rotacional:

$$\mu^2 N_2 + \mu N_2 = \frac{N_2 + \mu^2 N_2}{2} \Rightarrow 2(\mu^2 + \mu) = 1 + \mu^2$$



$$\mu^2 + 2\mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

Mas,  $\mu$  deve ser positivo. Portanto:

$$\mu = \sqrt{2} - 1$$

**Gabarito: B**

---

### 8. (ITA – 1995)

Considere as três afirmativas abaixo sobre um aspecto da Física do Cotidiano:

I — Quando João começou a subir pela escada de pedreiro apoiada numa parede vertical, e já estava no terceiro degrau, Maria grita para ele: — “Cuidado João, você vai acabar caindo, pois, a escada está muito inclinada e vai acabar deslizando”.

II — João responde: “— Se ela não deslizou até agora que estou no terceiro degrau, também não deslizará quando eu estiver no último. ”

III— Quando João chega no meio da escada fica com medo e dá total razão à Maria. Ele desce da escada e diz a Maria: “Como você é mais leve do que eu, tem mais chance de chegar ao fim da escada com a mesma inclinação, sem que ela deslize”.

Ignorando o atrito na parede:

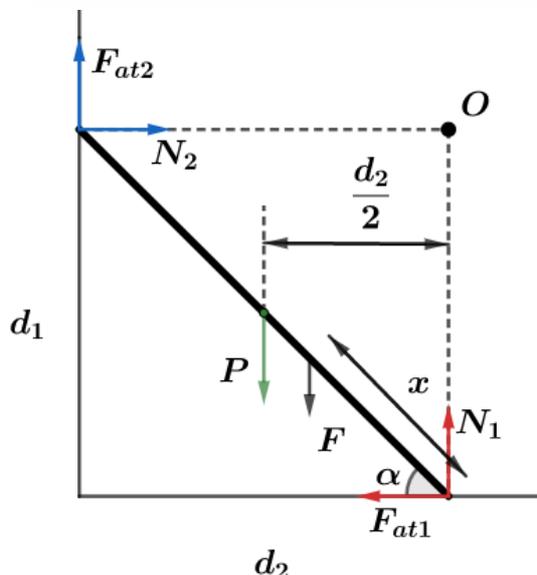
- A) Mana está certa com relação a I mas João errado com relação a II.
- B) João está certo com relação a II mas Maria errada com relação a I.
- C) as três afirmativas estão fisicamente corretas.
- D) somente a afirmativa I é fisicamente correta.
- E) somente a afirmativa III! é fisicamente correta.

OBS: Para esta questão escreva no caderno de respostas as equações que fornecem o equilíbrio de uma escada apoiada numa parede vertical com uma pessoa sobre ela.

### Comentários:

A figura abaixo representa as forças atuando sobre a escada.





Pelo equilíbrio das forças:

$$\begin{cases} N_2 = F_{at_1} \\ F + P = N_1 + F_{at_2} \end{cases}$$

Onde:

- $N_1$  e  $N_2$  são as reações normais da parede sobre a escada;
- $F_{at_1}$  e  $F_{at_2}$  são as componentes de atrito da reação da parede sobre a escada;
- $F$  é a força exercida pela pessoa sobre a escada (Peso);
- $P$  é o peso da escada.

Substituindo as forças de atrito por  $\mu \cdot N$ :

$$\begin{cases} N_2 = \mu \cdot N_1 \\ F + P = N_1 + \mu \cdot N_2 \end{cases}$$

Assim:

$$F + P = N_1 + \mu^2 \cdot N_1 = N_1(1 + \mu^2) \Rightarrow N_1 = \frac{F + P}{1 + \mu^2}$$

Agora, faz-se o equilíbrio da rotação, adotando O como polo, pois, assim, as reações normais das paredes não geram momento.

$$M_O = d_1 \cdot F_{at_1} + d_2 \cdot F_{at_2} - F \cdot x \cdot \cos \alpha - P \cdot \frac{d_2}{2} = 0$$

E:

$$d_1 = d_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Então:

$$d_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \mu \cdot N_1 + d_2 \cdot \mu^2 \cdot N_1 = F \cdot x \cdot \cos \alpha + \frac{P \cdot d_2}{2}$$

$$d_2 \cdot \frac{F + P}{1 + \mu^2} \cdot (\operatorname{tg} \alpha \cdot \mu + \mu^2) - \frac{P \cdot d_2}{2} = F \cdot x \cdot \cos \alpha$$



$$x = d_2 \cdot \frac{2(F + P)(\operatorname{tg} \alpha \cdot \mu + \mu^2) - P(1 + \mu^2)}{2(1 + \mu^2)F \cdot \cos \alpha}$$

Rearranjando:

$$x = d_2 \cdot \left[ \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \mu + \mu^2}{(1 + \mu^2) \cdot \cos \alpha} + \frac{2P \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \mu + P \cdot \mu^2 - P}{2(1 + \mu^2)F \cdot \cos \alpha} \right]$$

O resultado obtido é o menor valor de  $x$ , isto é, distância escalada, para o qual a escada irá escorregar. Portanto, analisando as afirmações:

- I) A escada muito inclinada significa um  $d_2$  pequeno e  $\cos \alpha \approx 1$ . O que implica em um  $x$  menor, ou seja, o João poderá subir menos na escada.
- II) O João está errado, pois a distância que ele pode subir depende de  $\mu$ , quanto maior o  $x$ , maior deve ser o  $\mu$ . Portanto, quanto mais alto desejar subir, maior deve ser o  $\mu$ , assim, não há garantia de que o equilíbrio até o terceiro degrau irá garantir o equilíbrio até o último.
- III) João está certo. Analisando os termos dentro dos colchetes, o primeiro é considerado constante (pois independe do peso da pessoa a escalar a escada) e o segundo varia inversamente proporcional à  $F$ , portanto, o

**Gabarito: A**

---

### 9. (ITA – 1997)

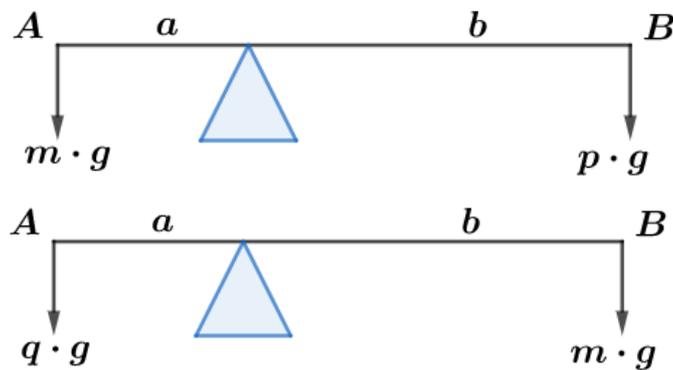
Um corpo de massa  $m$  é colocado no prato  $A$  de uma balança de braços desiguais e equilibrado por uma massa  $p$  colocada no prato  $B$ . Esvaziada a balança, o corpo de massa  $m$  é colocado no prato  $B$  e equilibrado por uma massa  $q$  colocada no prato  $A$ . O valor da massa  $m$  é

- a)  $pq$
- b)  $\sqrt{pq}$
- c)  $(p + q)/2$
- d)  $\sqrt{(p + q)/2}$
- e)  $pq/(p + q)$

**Comentários:**

Nesta questão não é necessário se considerar pesos dos pratos e da balança em si, pois estas partes já estão em equilíbrio e não foram deslocadas, ou seja, em ambas as situações descritas essas massas geravam um momento resultante nulo.





Pelo equilíbrio rotacional em cada um dos casos:

$$\begin{cases} mga = pgb \\ qga = mgb \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma = pb \\ mb = qa \end{cases}$$

Multiplicando as duas equações:

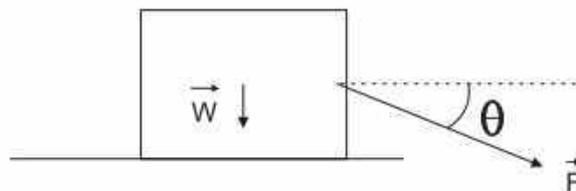
$$m^2 ab = pqab \Rightarrow m^2 = pq$$

$$m = \sqrt{pq}$$

**Gabarito: B**

### 10. (ITA – 1998)

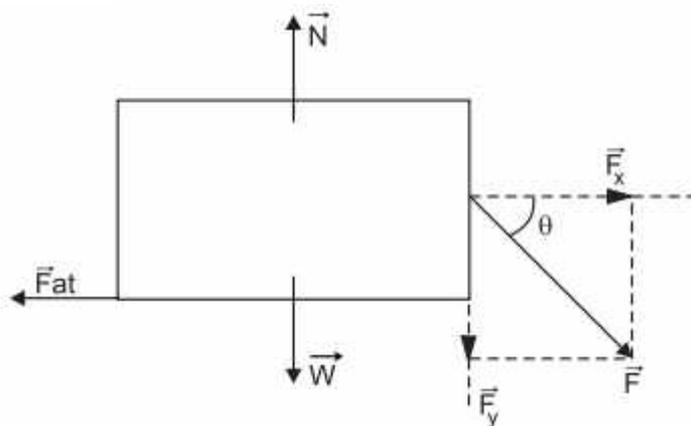
Um caixote de peso  $W$  é puxado sobre um trilho horizontal por uma força de magnitude  $F$  que forma um ângulo  $\theta$  em relação à horizontal, como mostra a figura. Dado que o coeficiente de atrito estático entre o caixote e o trilho é  $\mu$ , o valor mínimo de  $F$ , a partir de qual seria possível mover o caixote, é:



- a)  $\frac{2W}{1-\mu}$
- b)  $\frac{W \cdot \text{sen } \theta}{1-\mu \cdot \text{tg } \theta}$
- c)  $\frac{\mu \cdot W \cdot \text{sen } \theta}{1-\mu \cdot \text{tg } \theta}$
- d)  $\frac{\mu \cdot W \cdot \text{sec } \theta}{1-\mu \cdot \text{tg } \theta}$
- e)  $(1 - \mu \cdot \text{tg } \theta) \cdot W$

**Comentários:**





Pelo equilíbrio das forças tem-se:

$$\begin{cases} N = F \cdot \text{sen } \theta + W \\ F_{at} = \mu \cdot N = F \cdot \text{cos } \theta \end{cases}$$

O corpo está na iminência do movimento na situação descrita pelas equações acima. O movimento iniciar-se-ia com um acréscimo de força infinitesimal além dessa situação. Mas, para a situação do problema, esse infinitésimo é desconsiderado.

Substituindo  $N$  da primeira equação na segunda, tem-se:

$$\mu \cdot F \cdot \text{sen } \theta + \mu \cdot W = F \cdot \text{cos } \theta \Rightarrow F(\mu \cdot \text{sen } \theta - \text{cos } \theta) = -\mu \cdot W$$

$$F = \frac{\mu \cdot W}{\text{cos } \theta - \mu \cdot \text{sen } \theta}$$

Como não tem esta solução, deve-se procurar reescrever a expressão, por exemplo, dividindo o numerador e denominador por  $\text{cos } \theta$ . Assim:

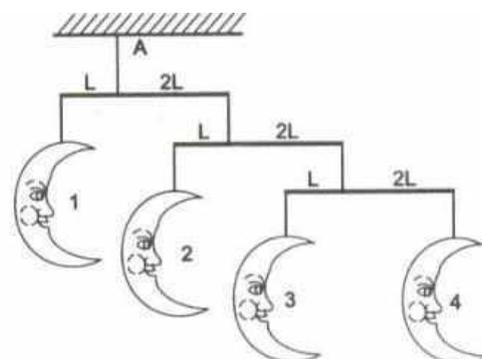
$$F = \frac{\mu \cdot W \cdot \text{sec } \theta}{1 - \mu \cdot \text{tg } \theta}$$

**Gabarito: D**

### 11. (ITA – 1999)

Um brinquedo que as mães utilizam para enfeitar quartos de crianças ó conhecido como "mobile". Considere o "mobile" de luas esquematizado na figura abaixo. As luas estão presas por meio de fios de massas desprezíveis a três barras horizontais, também de massas desprezíveis. O conjunto todo está em equilíbrio e suspenso num único ponto A. Se a massa da lua 4 é de 10 g, então a massa em quilogramas da lua 1 é:

- 180.
- 80.
- 0,36.
- 0,18.
- 9.



**Comentários:**

Como o conjunto todo está em equilíbrio, qualquer uma de suas partes também o está. Portanto, escolhe-se um subconjunto conveniente para iniciar a análise. No caso, o conjunto da lua 3 e 4.

Assim:

$$L \cdot m_3 \cdot g = 2L \cdot m_4 \cdot g$$

$$\boxed{m_3 = 20 \text{ gramas}}$$

Repete-se agora para o conjunto formado pela lua 2 e pela união das luas 3 e 4 (considerado um bloco só de massa  $m_3 + m_4$ ).

Portanto:

$$L \cdot m_2 \cdot g = 2L \cdot (m_3 + m_4) \cdot g$$

$$\boxed{m_2 = 60 \text{ gramas}}$$

Repete-se para o último conjunto:

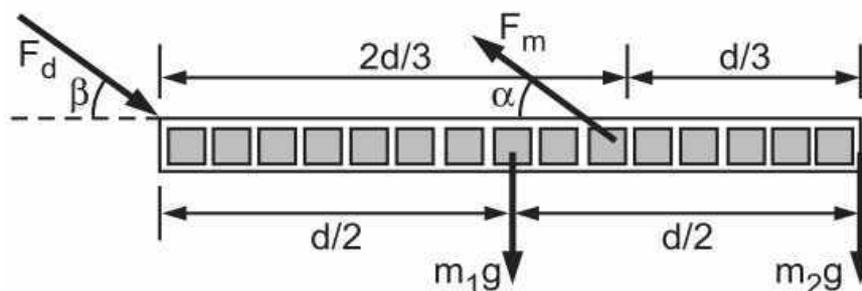
$$L \cdot m_1 \cdot g = 2L \cdot (m_2 + m_3 + m_4) \cdot g$$

$$\boxed{m_1 = 180 \text{ gramas} = 0,18 \text{ kg}}$$

**Gabarito: D**

**12. (ITA – 2006)**

Considere uma pessoa de massa  $m$  que ao curvar-se permaneça com a coluna vertebral praticamente nivelada em relação ao solo. Sejam  $m_1 = \frac{2}{5}m$  a massa do tronco e  $m_2 = \frac{1}{5}m$  a soma das massas da cabeça e dos braços. Considere a coluna como uma estrutura rígida e que a resultante das forças aplicadas pelos músculos à coluna seja  $F_m$  e que  $F_d$  seja a resultante das outras forças aplicadas à coluna, de forma a mantê-la em equilíbrio. Qual é o valor da força  $F_d$ ?



**Comentários:**

Primeiro faz-se o equilíbrio das forças:

$$\begin{cases} F_d \cdot \cos \beta = F_m \cdot \cos \alpha \\ F_m \cdot \sin \alpha = F_d \cdot \sin \beta + m_1 \cdot g + m_2 \cdot g = F_d \cdot \sin \beta + \frac{3}{5} \cdot m \cdot g \end{cases}$$

Pelo equilíbrio rotacional tomando como polo o ponto de aplicação de  $F_m$ :

$$\frac{2d}{3} \cdot F_d \cdot \text{sen } \beta + m_1 \cdot g \cdot \left(\frac{2d}{3} - \frac{d}{2}\right) = m_2 \cdot g \cdot \left(\frac{d}{3}\right)$$

$$\frac{2}{3} \cdot F_d \cdot \text{sen } \beta + \frac{2}{5} \cdot m \cdot g \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{5} \cdot m \cdot g \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$F_d \cdot \text{sen } \beta = \frac{3}{2} \cdot m \cdot g \cdot \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{15}\right) = 0$$

Agora, eleva-se ambas as equações do primeiro sistema ao quadrado, e soma-se elas:

$$F_m^2 (\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha) = F_d^2 (\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta) + 2 \cdot F_d \cdot \text{sen } \beta \cdot \frac{3}{5} mg + \left(\frac{3}{5} mg\right)^2$$

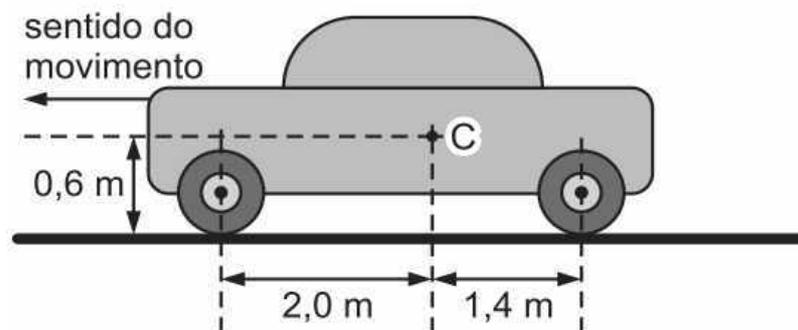
Utilizando a relação trigonométrica fundamental e o resultado obtido anteriormente  $F_d \cdot \text{sen } \beta = 0$ , chega-se a:

$$F_m^2 = F_d^2 + \left(\frac{3}{5} mg\right)^2 \Rightarrow F_d = \sqrt{F_m^2 - \left(\frac{3}{5} mg\right)^2}$$

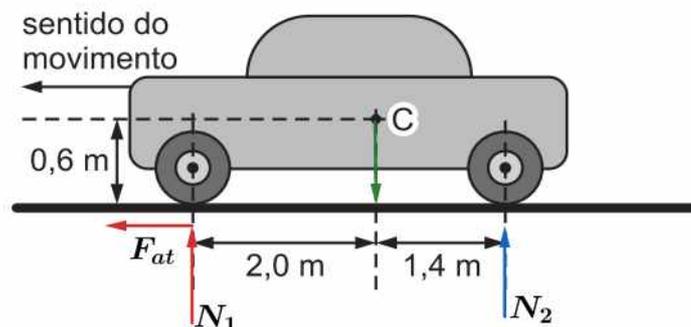
**Gabarito:**  $F_d = \sqrt{F_m^2 - \left(\frac{3}{5} m\right)^2}$

### 13. (ITA – 2006)

Considere um automóvel de peso  $P$ , com tração nas rodas dianteiras, cujo centro de massa está em  $C$ , movimentando-se num plano horizontal. Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , calcule a aceleração máxima que o automóvel pode atingir, sendo o coeficiente de atrito entre os pneus e o piso igual a 0,75.



**Comentários:**



Pela Segunda Lei de Newton:

$$\begin{cases} P = N_1 + N_2 \\ F_{at} = m \cdot a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = N_1 + N_2 \\ \mu \cdot N_1 = \frac{P}{g} \cdot a \end{cases}$$

Tem-se 3 variáveis ( $N_1, N_2, a$ ) e somente duas equações. Aplica-se o momento em torno do centro de massa, pois o carro está acelerado, ou seja, ele não é um referencial inercial. Pelo equilíbrio de momento rotacional:

$$N_1 \cdot 2 + F_{at} \cdot 0,6 = N_2 \cdot 1,4 \Rightarrow 2 \cdot N_1 + 0,6 \cdot \mu \cdot N_1 = N_2 \cdot 1,4$$

$$2N_1 + 0,45 \cdot N_1 = 1,4 \cdot N_2 \Rightarrow 2,45 \cdot N_1 = 1,4 \cdot N_2$$

$$N_2 = 1,75 \cdot N_1$$

Agora, tem-se três equações. Resolvendo o sistema inicial:

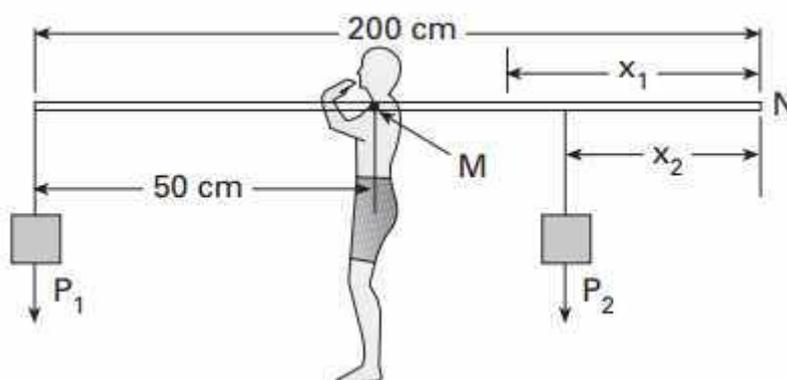
$$N_1 = \frac{P}{2,75} \Rightarrow 0,75 \cdot \frac{P}{2,75} = \frac{P}{g} \cdot a$$

$$\boxed{a = 2,72 \text{ m/s}^2}$$

**Gabarito: 2,7 m/s<sup>2</sup>**

#### 14. (ITA – 2007)

Na experiência idealizada na figura, um halterofilista sustenta, pelo ponto  $M$ , um conjunto em equilíbrio estático composto de uma barra rígida e uniforme, de um peso  $P_1 = 100 \text{ N}$  na extremidade a  $50 \text{ cm}$  de  $M$ , e de um peso  $P_2 = 60 \text{ N}$ , na posição  $x_2$  indicada. A seguir, o mesmo equilíbrio estático é verificado dispondo-se, agora, o peso  $P_2$  na posição original de  $P_1$ , passando este à posição de distância  $x_1 = 1,6 \cdot x_2$  da extremidade  $N$ . Sendo de  $200 \text{ cm}$  o comprimento da barra e  $g = 10 \text{ m/s}^2$  a aceleração da gravidade, a massa da barra é de

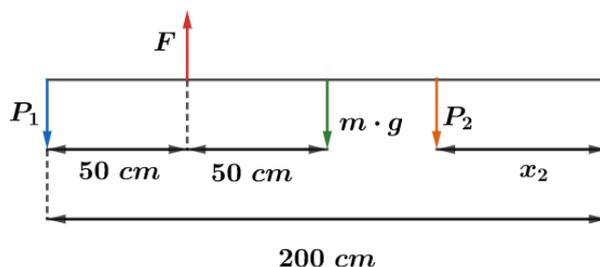


- A) 0,5 kg.
- B) 1,0 kg.
- C) 1,5 kg.
- D) 1,6 kg.

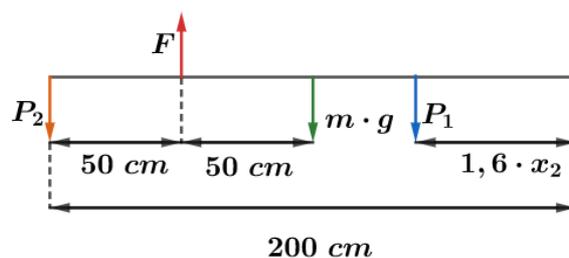
E) 2,0kg.

**Comentários:**

A situação inicial está representada a seguir:



A segunda situação está representada abaixo:



Em que:

- $m$  é a massa da barra;
- $g$  é a gravidade local;
- $F$  é a força aplicada pelo halterofilista.

Pelo equilíbrio rotacional, na situação inicial, em torno do ponto de aplicação da força do halterofilista, tem-se:

$$\frac{P_1}{2} = \frac{mg}{2} + P_2(1,5 - x_2)$$

Para a segunda situação, tem-se:

$$\frac{P_2}{2} = \frac{mg}{2} + P_1(1,5 - 1,6x_2)$$

Subtraindo as equações:

$$\frac{P_1 - P_2}{2} = 1,5(P_2 - P_1) + x_2(1,6P_1 - P_2)$$

Substituindo os valores de  $P_1$  e  $P_2$ :

$$20 = 1,5(-40) + x_2 100 \Rightarrow x_2 = 80 \text{ cm}$$

Substituindo na primeira equação de equilíbrio rotacional todos os valores, inclusive  $g = 10 \text{ m/s}^2$ :

$$50 = 5m + 60(1,5 - 0,8) \Rightarrow 5m = 8$$

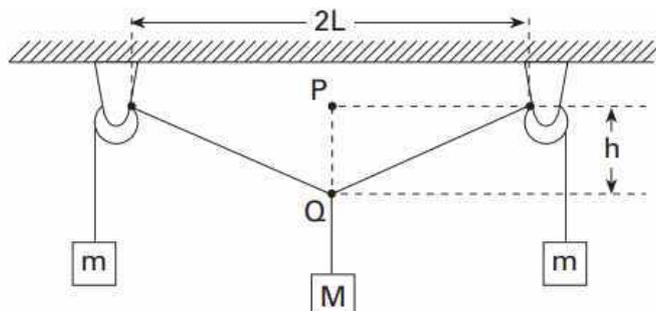
$$\boxed{m = 1,6 \text{ kg}}$$



**Gabarito: D**

**15. (ITA – 2007)**

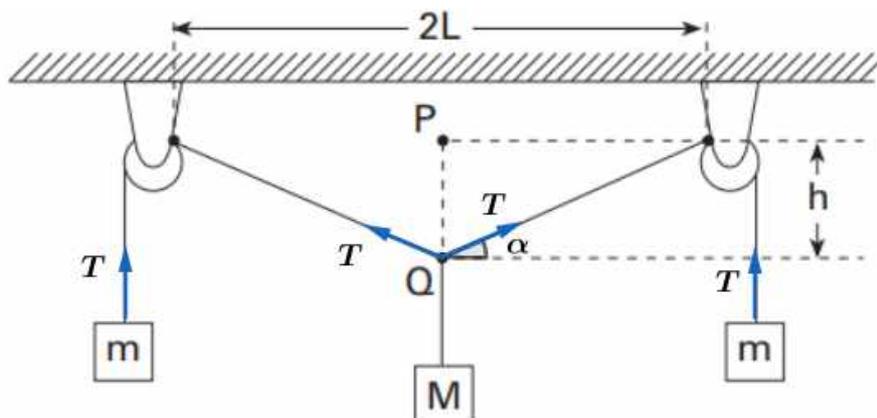
No arranjo mostrado na figura com duas polias, o fio inextensível e sem peso sustenta a massa  $M$  e, também, simetricamente, as duas massas  $m$ , em equilíbrio estático.



Desprezando o atrito de qualquer natureza, o valor  $h$  da distância entre os pontos  $P$  e  $Q$  vale

- a)  $ML/\sqrt{4m^2 - M^2}$
- b)  $L$
- c)  $ML/\sqrt{M^2 - 4m^2}$
- d)  $mL/\sqrt{4m^2 - M^2}$
- e)  $ML/\sqrt{2m^2 - M^2}$

**Comentários:**



Analisando os blocos de massa  $m$ , nota-se de imediato que:

$$T = m \cdot g$$

Pelo equilíbrio do nó Q:

$$2T \cdot \text{sen } \alpha = M \cdot g \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{M}{2m}$$

E, geometricamente:

$$h = L \cdot \text{tg } \alpha$$

Como  $0 < \alpha < 90^\circ$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{\frac{M^2}{4m^2}}}{\sqrt{1 - \frac{M^2}{4m^2}}} = \frac{M}{2m} \cdot \frac{\sqrt{4m^2}}{\sqrt{4m^2 - M^2}} = \frac{M}{\sqrt{4m^2 - M^2}}$$

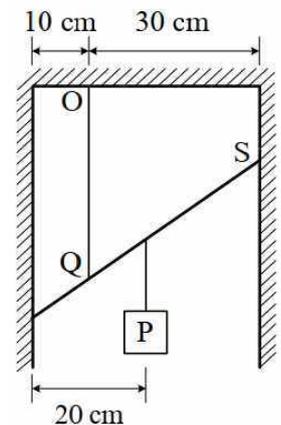
Substituindo:

$$h = \frac{ML}{\sqrt{4m^2 - M^2}}$$

**Gabarito: A**

**16. (ITA – 2008)**

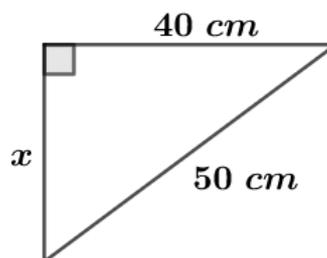
A figura mostra uma barra de 50 cm de comprimento e massa desprezível, suspensa por uma corda  $OQ$ , sustentando um peso de 3000 N no ponto indicado. Sabendo que a barra se apoia sem atrito nas paredes do vão, a razão entre a tensão na corda e a reação na parede no ponto  $S$ , no equilíbrio estático, é igual a



- a) 1,5
- b) 3,0
- c) 2,0
- d) 1,0
- e) 5,0

**Comentários:**

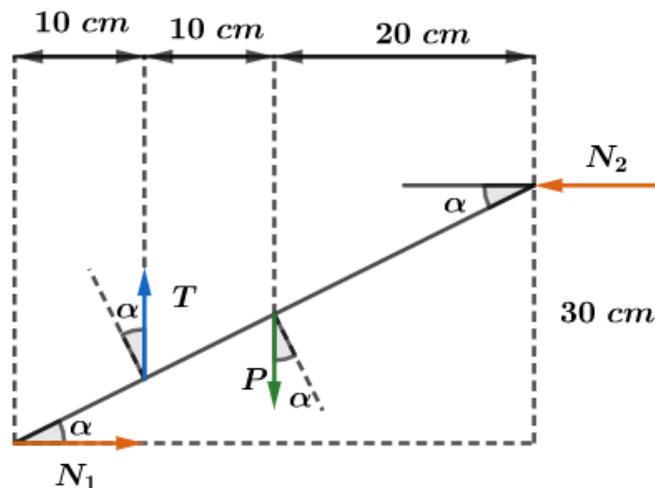
Primeiramente, a geometria do problema está representada a seguir:



Portanto:

$$x = 30 \text{ cm}$$

A situação do problema está representada a seguir:



Sabe-se que:

$$\text{sen } \alpha = 0,6 \text{ e } \text{cos } \alpha = 0,8$$

Fazendo-se o equilíbrio rotacional no ponto de aplicação de  $N_1$ :

$$T \cdot 10 + N_2 \cdot 30 = P \cdot 20 \Rightarrow T + 3 \cdot N_2 = 2 \cdot P$$

Pelo equilíbrio no eixo vertical:

$$T = P$$

Portanto:

$$3 \cdot N_2 = P \Rightarrow N_2 = \frac{P}{3}$$

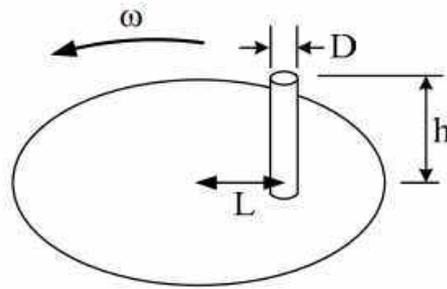
Assim:

$$\frac{T}{N_2} = \frac{P}{\frac{P}{3}} = 3$$

**Gabarito: B**

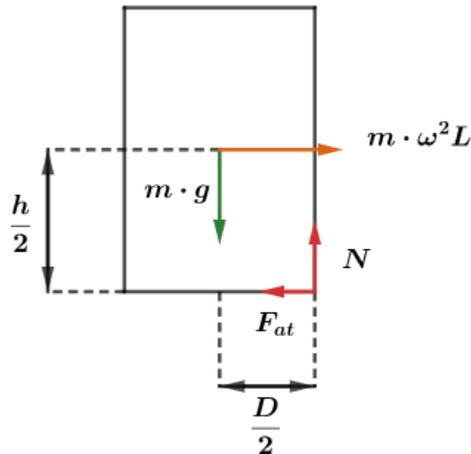
### 17. (ITA – 2008)

Um cilindro de diâmetro  $D$  e altura  $h$  repousa sobre um disco que gira num plano horizontal, com velocidade angular  $\omega$ . Considere o coeficiente de atrito entre o disco e o cilindro  $\mu > D/h$ ,  $L$  a distância entre o eixo do disco e o eixo do cilindro, e  $g$  a aceleração da gravidade. O cilindro pode escapar do movimento circular de duas maneiras: por tombamento ou por deslizamento. Mostrar o que ocorrerá primeiro, em função das variáveis.



**Comentários:**

Adotando um referencial não inercial para o cilindro, tem-se:



Para escorregamento, a força centrífuga é maior que a força de atrito, assim:

$$m\omega^2 L > F_{at}$$

Mas, sabe-se que:

$$F_{at} = \mu N = \mu mg$$

Portanto, o escorregamento ocorre quando:

$$m\omega^2 L > \mu mg$$

$$\omega > \sqrt{\frac{\mu g}{L}}$$

Para analisar o tombamento, retrata-se a dinâmica do corpo na iminência do tombamento como feito na figura acima. O ponto de aplicação da normal e do atrito encontram-se na “quina” do cilindro. Para ocorrer o tombamento, o torque gerado pela força centrífuga deve superar o torque gerado pelo peso do cilindro. A situação está equacionada a seguir:

$$m\omega^2 L \cdot \frac{h}{2} > mg \cdot \frac{D}{2} \Rightarrow \omega^2 L > \frac{Dg}{h}$$

$$\omega > \sqrt{\frac{Dg}{hL}}$$

Comparando os valores de  $\omega$  encontrados:

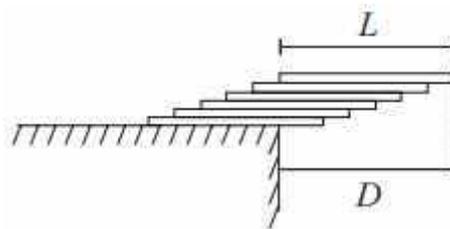
$$\frac{\omega_{tomb}}{\omega_{escor}} = \sqrt{\frac{Dg}{hL}} = \sqrt{\frac{D}{h}} < 1$$

O último passo utilizou o dado do enunciado que  $\mu > \frac{D}{h}$ . Portanto, o  $\omega_{escor}$  é maior que o de tombamento. Sendo assim, o tombamento acontece primeiro.

**Gabarito: O tombamento.**

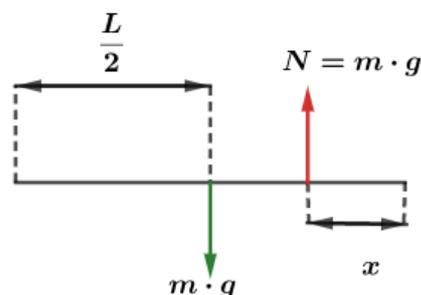
### 18. (ITA – 2009)

Chapas retangulares rígidas, iguais e homogêneas, são sobrepostas e deslocadas entre si, formando um conjunto que se apoia parcialmente na borda de uma calçada. A figura ilustra esse conjunto com  $n$  chapas, bem como a distância  $D$  alcançada pela sua parte suspensa. Desenvolva uma fórmula geral da máxima distância  $D$  possível de modo que o conjunto ainda se mantenha em equilíbrio. A seguir, calcule essa distância  $D$  em função do comprimento  $L$  de cada chapa, para  $n = 6$  unidades.



#### Comentários:

Para a solução desta questão é ideal começar pela última barra colocada, isto é, a que está sobre o monte. A situação dessa barra está representada a seguir:

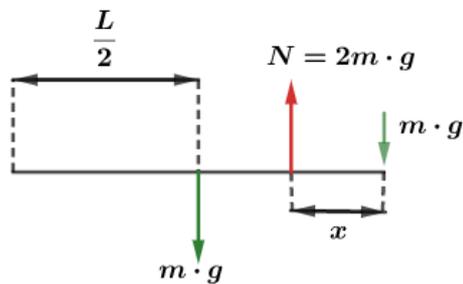


Na figura,  $x$  é a parcela da barra que está sem apoio. Portanto, estando a barra na iminência de desequilibrar, toda a normal se concentra no ponto de contato mais extremo. Fazendo o equilíbrio rotacional em torno desse ponto extremo:

$$mg \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right) = 0$$

$$x = \frac{L}{2}$$

Portanto, a situação extrema seria para a barra metade para fora. Analisemos agora a próxima barra:



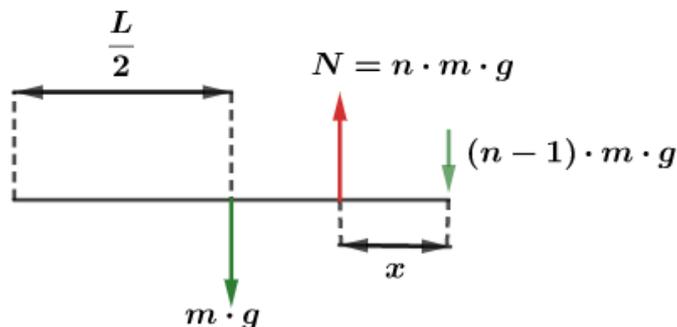
O momento rotacional fica:

$$mg \left( \frac{L}{2} - x \right) = mgx$$

$$\frac{L}{2} = 2x$$

$$x = \frac{L}{4}$$

Façamos para a n-ésima barra:



$$mg \left( \frac{L}{2} - x \right) = (n-1)mgx \Rightarrow \frac{L}{2} = nx$$

$$\boxed{x = \frac{L}{2n}}$$

Logo:

$$D_n = \sum_{i=1}^n \frac{L}{2n}$$

Portanto, o  $D_6$  pedido nada mais é que:

$$\sum_{n=1}^6 \frac{L}{2n} = L \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \right) = \frac{L(60 + 30 + 20 + 15 + 12 + 10)}{120} = \frac{147}{120} L = \frac{49}{40} L$$

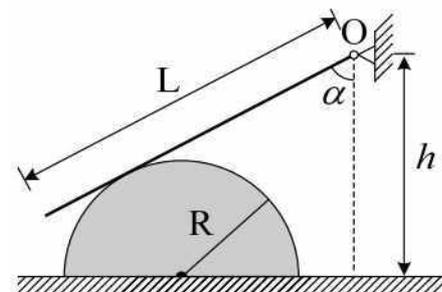
**Gabarito:**  $D_6 = \frac{49}{40} L$

19. (ITA – 2010)



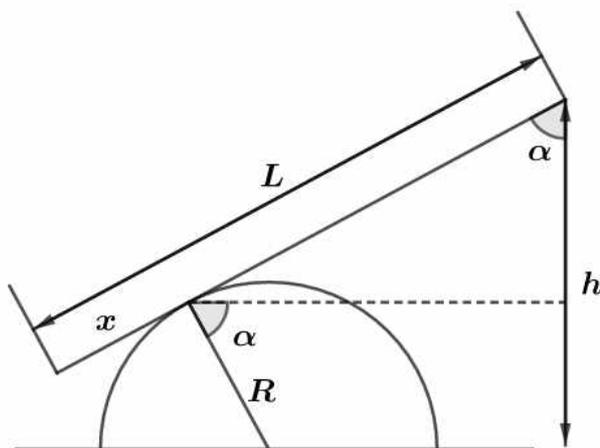
Considere um semicilindro de peso  $P$  e raio  $R$  sobre um plano horizontal não liso, mostrado em corte na figura. Uma barra homogênea de comprimento  $L$  e peso  $Q$  está articulada no ponto  $O$ . A barra está apoiada na superfície lisa do semicilindro, formando um ângulo  $\alpha$  com a vertical. Quanto vale o coeficiente de atrito mínimo entre o semicilindro e o plano horizontal para que o sistema todo permaneça em equilíbrio?

- a)  $\mu = \cos \alpha / [\cos \alpha + 2P(2h/LQ \cdot \cos (2\alpha) - R/LQ \text{sen}\alpha)]$
- b)  $\mu = \cos \alpha / [\cos \alpha + P(2h/LQ \cdot \text{sen} (2\alpha) - 2R/LQ \cos \alpha)]$
- c)  $\mu = \cos \alpha / [\text{sen} \alpha + 2P(2h/LQ \cdot \text{sen} (2\alpha) - R/LQ \cos \alpha)]$
- d)  $\mu = \text{sen} \alpha / [\text{sen} \alpha + 2P(2h/LQ \cdot \cos (\alpha) - 2R/LQ \cos \alpha)]$
- e)  $\mu = \text{sen} \alpha / [\cos \alpha + P(2h/LQ \cdot \text{sen} (\alpha) - 2R/LQ \cos \alpha)]$



**Comentários:**

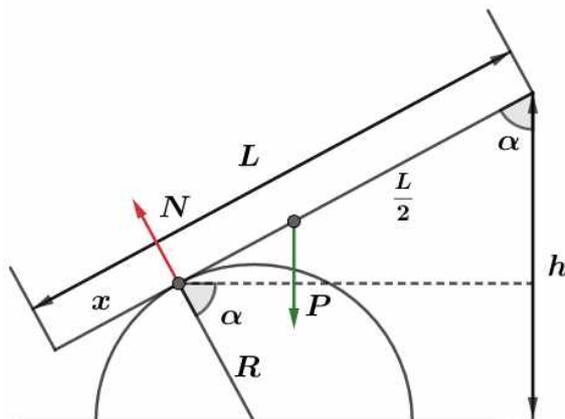
A geometria do problema está representada abaixo:



Em que  $x$  é a distância da extremidade inferior da barra até o ponto de contato com o semicilindro. Pela geometria do problema:

$$(L - x) \cdot \cos \alpha + R \cdot \text{sen} \alpha = h \Rightarrow (L - x) = \frac{h - R \cdot \text{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

Com  $x$  encontrado, analisemos o equilíbrio rotacional da barra, representada a seguir:

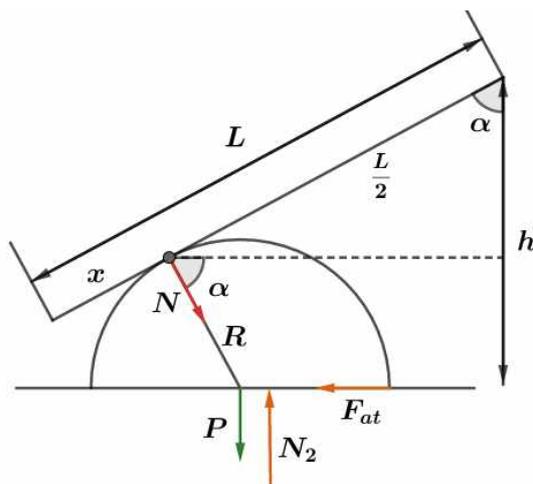


Fazendo o equilíbrio rotacional com a extremidade superior como polo (dessa forma não há necessidade de lidar com a reação de apoio que tornaria o problema muito mais complicado):

$$\frac{Q \cdot \text{sen } \alpha \cdot L}{2} = N \cdot (L - x) \Rightarrow \frac{Q \cdot L \cdot \text{sen } \alpha}{2} = N \cdot \frac{h - R \cdot \text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

$$N = \frac{\frac{Q \cdot L \cdot \text{sen } 2\alpha}{2}}{2(h - R \cdot \text{sen } \alpha)} = \frac{Q \cdot L \cdot \text{sen } 2\alpha}{4(h - R \cdot \text{sen } \alpha)}$$

Finalmente, pode-se analisar a dinâmica do semicilindro, representado a seguir:



Equacionando o equilíbrio:

$$\begin{cases} N \cdot \cos \alpha = F_{at} = \mu \cdot N_2 \\ N_2 = P + N \cdot \text{sen } \alpha \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira e o valor de  $N$ :

$$\frac{Q \cdot L \cdot \text{sen } 2\alpha}{4(h - R \cdot \text{sen } \alpha)} \cdot \cos \alpha = \mu \left( P + \frac{Q \cdot L \cdot \text{sen } 2\alpha}{4(h - R \cdot \text{sen } \alpha)} \cdot \text{sen } \alpha \right)$$

$$\frac{Q \cdot L \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \cos \alpha}{4(h - R \cdot \text{sen } \alpha)} \cdot \left( \frac{4(h - R \cdot \text{sen } \alpha)}{4 \cdot P \cdot h - 4 \cdot P \cdot R \cdot \text{sen } \alpha + Q \cdot L \cdot \text{sen } 2\alpha \cdot \text{sen } \alpha} \right)$$

Dividindo numerador e denominador por  $Q \cdot L \cdot \text{sen } 2\alpha$ :

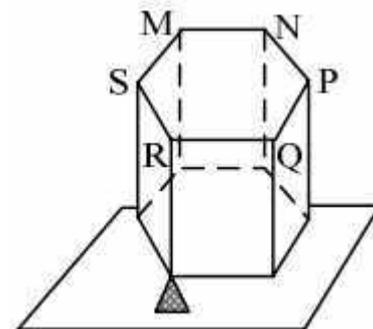
$$\frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha + 2P \left( \frac{2h}{Q \cdot L \cdot \text{sen } 2\alpha} - \frac{R}{Q \cdot L \cdot \cos \alpha} \right)}$$

**Gabarito: C**

20. (ITA – 2011)



Um prisma regular hexagonal homogêneo com peso de  $15\text{ N}$  e aresta da base de  $2,0\text{ m}$  é mantido de pé graças ao apoio de um dos seus vértices da base inferior (ver figura) e à ação de uma força vertical de suspensão de  $10\text{ N}$  (não mostrada). Nessas condições, o ponto de aplicação da força na base superior do prisma encontra-se



- sobre o segmento  $\overline{RM}$  a  $2,0\text{ m}$  de  $R$ .
- sobre o segmento  $\overline{RN}$  a  $4,0\text{ m}$  de  $R$ .
- sobre o segmento  $\overline{RN}$  a  $3,0\text{ m}$  de  $R$ .
- sobre o segmento  $\overline{RN}$  a  $2,0\text{ m}$  de  $R$ .
- sobre o segmento  $\overline{RP}$  a  $2,5\text{ m}$  de  $R$ .

### Comentários:

A questão pode ser resolvida de duas formas. A primeira é utilizando o produto vetorial para calcular o momento no espaço. A segunda é percebendo que o peso estará no centro geométrico, ou seja, dividindo o segmento  $RN$  em 2, portanto duas das três forças citadas no texto estão sobre o eixo  $RN$ . A última força, por conseguinte, tem que estar também sobre o eixo  $RN$ , se não, surgiria um momento em relação ao eixo  $RN$ .

Para o primeiro método, deve-se definir um sistema de coordenadas. Adota-se o ponto de apoio como origem do sistema. A direção  $x$  é paralela à  $RQ$ , a direção  $y$  é paralela a  $RM$  e a direção  $z$  é paralela à altura do prisma.

Assim, o ponto de aplicação do peso é o ponto  $(1; \sqrt{3}; h)$ . O ponto de aplicação da força do apoio é  $(0;0;0)$  e não gerará torque. Portanto, calculemos o torque gerado pelo peso:

$$\vec{M}_F = \vec{r}_F \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & \sqrt{3} & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = (-15\sqrt{3}; 15; 0)$$

Agora, calculando o momento da força vertical e zerando o momento resultante, tem-se:

$$\vec{M}_F = \vec{r}_F \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (10y; -10x; 0)$$

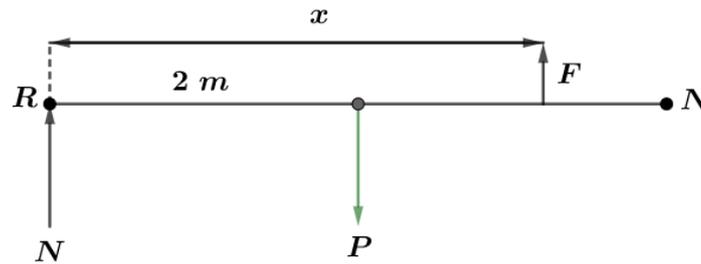
$$\vec{M}_P + \vec{M}_F = 0 \Rightarrow (-15\sqrt{3}; 15; 0) + (10y; -10x; 0) = 0$$

$$\begin{cases} x = 1,5 \\ y = 1,5\sqrt{3} \end{cases}$$

Essas são as coordenadas do ponto de aplicação. Assim, o ponto de aplicação irá distar  $3\text{ m}$  na direção  $RN$ .

A resolução da segunda forma é mais rápida, apesar de precisar uma análise prévia. Sabendo que o ponto de aplicação da força estará sobre  $RN$ , pode-se unidimensionalizar o problema, assemelhando-o a uma barra. Isso é possível, pois as forças são verticais, portanto, a posição sobre o eixo  $z$  (adotado anteriormente) pouco importa. Além do mais, sabe-se que ambas as forças estão

sobre a mesma reta, portanto não é necessário trabalhar no plano. Assim, nosso problema se resume a:



Em que:

- $N$  é a reação do apoio;
- $P$  é o peso;
- $F$  é a força aplicada.

Pelo equilíbrio rotacional, com R como polo, tem-se:

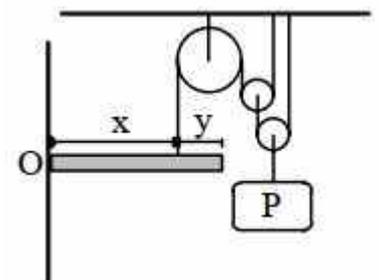
$$2P - x \cdot F = 0 \Rightarrow 2 \cdot 15 - x \cdot 10 = 0$$

$$\boxed{x = 3}$$

**Gabarito: C**

### 21. (ITA – 2011)

Uma barra homogênea, articulada no pino  $O$ , é mantida na posição horizontal por um fio fixado a uma distância  $x$  de  $O$ . Como mostra a figura, o fio passa por um conjunto de três polias que também sustentam um bloco de peso  $P$ . Desprezando efeitos de atrito e o peso das polias, determine a força de ação do pino  $O$  sobre a barra.



**Comentários:**

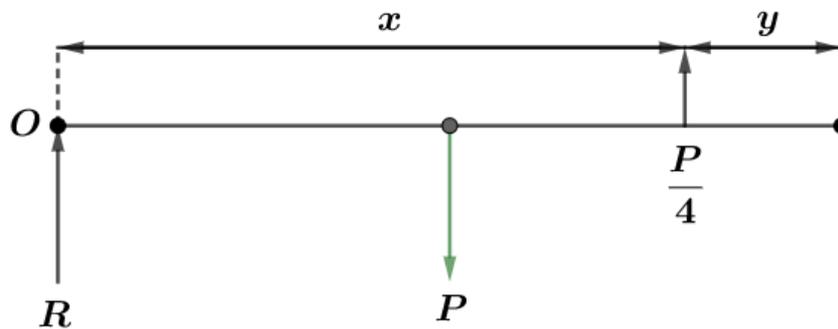
Primeiramente deve-se descobrir a tração exercida pelo fio sobre a barra. Como o sistema consta de duas polias móveis e uma fixa:

$$T = \frac{P}{2^n}$$

Onde  $n$  é o número de polias móveis. Portanto:

$$T = \frac{P}{2^2} = \frac{P}{4}$$

Agora, analisa-se as forças que atuam sobre a barra. Elas estão representadas na figura abaixo:



Em que:

- $R$  é a reação do apoio  $O$ ;
- $P_B$  é o peso da barra;
- $\frac{P}{4}$  é a tração exercida pelo fio.

Pelo equilíbrio de momento, tomando  $O$  como polo:

$$P_B \cdot \frac{x+y}{2} = \frac{P}{4} \cdot x \Rightarrow P_B = \frac{P \cdot x}{2(x+y)}$$

Agora, pelo equilíbrio de forças:

$$R + \frac{P}{4} = P_B \Rightarrow R = \frac{P \cdot x}{2(x+y)} - \frac{P}{4}$$

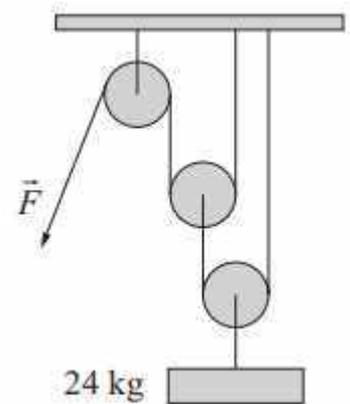
$$R = \frac{P}{4} \left( \frac{2x - (x+y)}{(x+y)} \right) = \frac{P(x-y)}{4(x+y)}$$

**Gabarito:**  $\frac{P(x-y)}{4(x+y)}$

## 22. (ITA – 2012)

O arranjo de polias da figura é preso ao teto para erguer uma massa de  $24 \text{ kg}$ , sendo os fios inextensíveis, e desprezíveis as massas das polias e dos fios. Desprezando os atritos, determine:

1. O valor do módulo da força  $\vec{F}$  necessária para equilibrar o sistema.
2. O valor do módulo da força  $\vec{F}$  necessário para erguer a massa com velocidade constante.
3. A força ( $\vec{F}$  ou peso?) que realiza maior trabalho, em módulo, durante o tempo  $T$  em que a massa está sendo erguida com velocidade constante.



### Comentários:

Como é um sistema de polias fixas e móveis acopladas, utiliza-se a fórmula:

$$F = \frac{P}{2^n}$$

Em que:

- $F$  é a força necessária para erguer o bloco;
- $P$  é o peso do bloco;
- $n$  é o número de polias móveis.

Portanto, para este problema:

$$F = \frac{240}{2^2} = 60 \text{ N}$$

Para velocidade constante, a aceleração é nula. Portanto, a força resultante também é nula. Assim, o valor de  $F$  necessário é o mesmo do item 1.

$$F = 60 \text{ N}$$

Para a análise do item 3 há duas opções. Primeiramente, pelo Teorema da Energia Cinética:

$$W_{F_R} = \Delta E_c$$

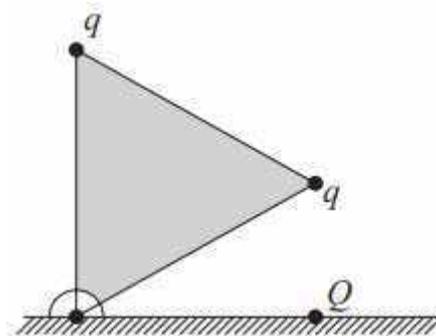
$$W_P + W_F = 0$$

Portanto, ambas as forças realizam mesmo trabalho, já que a variação de energia cinética é nula. A outra forma de resolver este item seria utilizando a definição de trabalho como sendo força multiplicado por deslocamento (no caso de força constante e de mesma direção que o deslocamento) atrelado ao vínculo geométrico do problema. Embora  $F$  seja 4 vezes menor que  $P$ , seu deslocamento é 4 vezes maior.

**Gabarito: 1. 60 N 2. 60 N 3. As duas forças fazem o mesmo trabalho**

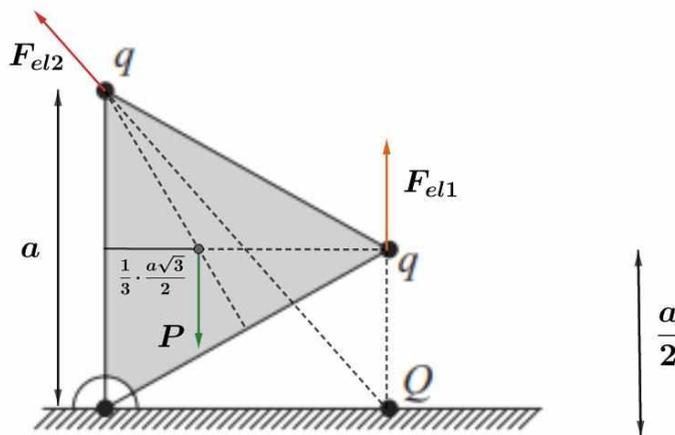
### 23. (ITA – 2012)

A figura mostra uma chapa fina de massa  $M$  com o formato de um triângulo equilátero, tendo um lado na posição vertical, de comprimento  $a$ , e um vértice articulado numa barra horizontal contida no plano da figura. Em cada um dos outros vértices encontra-se fixada uma carga elétrica  $q$  e, na barra horizontal, a uma distância  $a\sqrt{3}/2$  do ponto de articulação, encontra-se fixada uma carga  $Q$ . Sendo as três cargas de mesmo sinal e massa desprezível, determine a magnitude da carga  $Q$  para que o sistema permaneça em equilíbrio.



**Comentários:**

A geometria do problema está exposta abaixo:



Primeiro, calculemos as forças de interação elétrica  $F_{el1}$  e  $F_{el2}$ .

$$F_{el1} = \frac{KQq}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{4KQq}{a^2} \text{ e } F_{el2} = \frac{KQq}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{4KQq}{7a^2}$$

Agora, fazendo o equilíbrio rotacional:

$$P \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = F_{el1} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} + F_{el2} \cdot a \cdot \text{sen}\alpha$$

Onde  $\alpha$  é o ângulo entre o  $F_{el2}$  e a vertical. Assim:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (a)^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

Substituindo os valores na expressão:

$$\begin{aligned} \frac{Mg\sqrt{3}}{6} &= \frac{4KQq}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4KQq}{7a^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \frac{Mga^2}{24KQq} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7\sqrt{7}} \\ \frac{Mga^2}{24KQq} &= \frac{7\sqrt{7} + 2}{14\sqrt{7}} \Rightarrow Q = \frac{7\sqrt{7}}{7\sqrt{7} + 2} \cdot \frac{Mga^2}{12Kq} \end{aligned}$$

Lembrando que:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

Portanto:

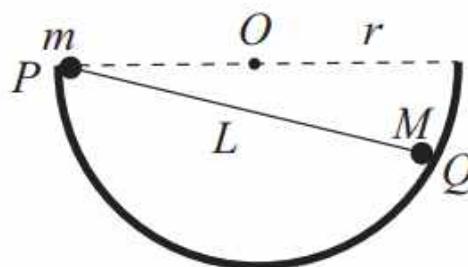
$$Q = \frac{Mg\pi\epsilon}{3q} \cdot a^2 \cdot \frac{7\sqrt{7}}{7\sqrt{7} + 2}$$

**Gabarito:**  $Q = \frac{Mg\pi\epsilon}{3q} \cdot a^2 \cdot \frac{7\sqrt{7}}{7\sqrt{7}+2}$

**24. (ITA – 2013)**

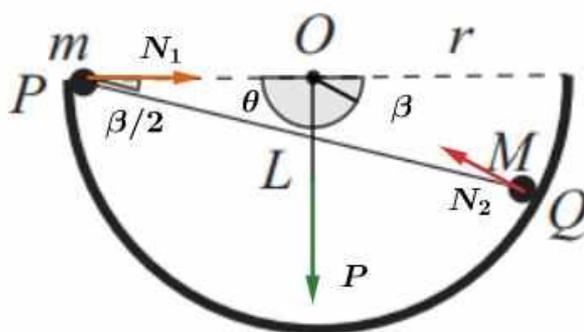
Duas partículas, de massas  $m$  e  $M$ , estão respectivamente fixadas nas extremidades de uma barra de comprimento  $L$  e massa desprezível. Tal sistema é então apoiado no interior de uma casca hemisférica de raio  $r$ , de modo a se ter equilíbrio estático com  $m$  posicionado na borda  $P$  da casca e  $M$ , num ponto  $O$ , conforme mostra a figura. Desconsiderando forças de atrito, a razão  $m/M$  entre as massas é igual a

- a)  $(L^2 - 2r^2)/(2r^2)$
- b)  $(2L^2 - 3r^2)/(2r^2)$
- c)  $(L^2 - 2r^2)/(r^2 - L^2)$
- d)  $(2L^2 - 3r^2)/(r^2 - L^2)$
- e)  $(3L^2 - 2r^2)/(L^2 - 2r^2)$



**Comentários:**

Pelo Teorema das Três Forças, sabe-se que o centro de massa do conjunto deve estar alinhado verticalmente com o centro do semicírculo. A geometria do problema está representada abaixo:



Da figura, tira-se, pela Lei dos Cossenos que:

$$L^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{2r^2 - L^2}{2r^2}$$

Como:

$$\theta + \beta = 180^\circ$$

Então:

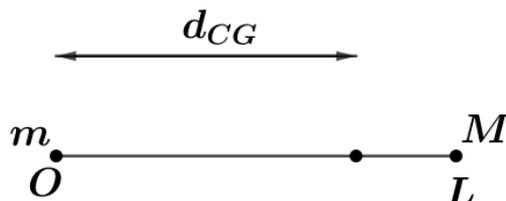
$$\cos \beta = -\cos \theta \Rightarrow \cos \beta = \frac{L^2 - 2r^2}{2r^2} = 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1$$

$$2 \cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{L^2}{2r^2} \Rightarrow \cos \frac{\beta}{2} = \frac{L}{2r}$$

Finalmente, a posição do CG estando alinhado com o centro do semicírculo, é dado por:

$$d_{CG} = \frac{r}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{2r^2}{L}$$

Agora, analisando a barra:



$$d_{CG} = \frac{0 \cdot m + L \cdot M}{m + M} = \frac{2r^2}{L} \Rightarrow LM = \frac{(m + M)2r^2}{L}$$

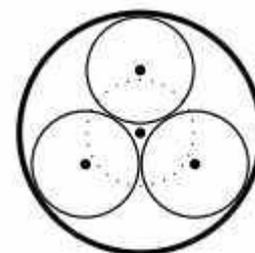
$$ML^2 = m2r^2 + M2r^2 \Rightarrow 2r^2m = M(L^2 - 2r^2)$$

$$\boxed{\frac{m}{M} = \frac{L^2 - 2r^2}{2r^2}}$$

**Gabarito: A**

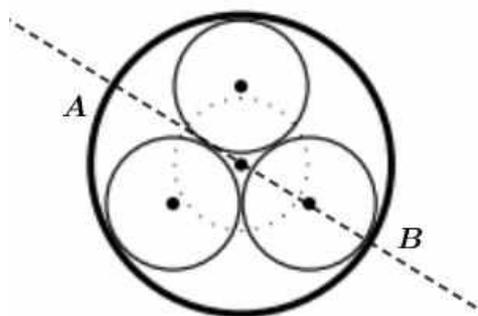
### 25. (ITA – 2014)

Um recipiente cilíndrico vertical contém em seu interior três esferas idênticas de mesmo peso  $P$  que são tangentes entre si e também à parede interna do recipiente. Uma quarta esfera, idêntica às anteriores, é então sobreposta às três esferas como ilustrado em pontilhado. Determine as respectivas intensidades das forças normais em função de  $P$  que a parede do recipiente exerce nas três esferas.



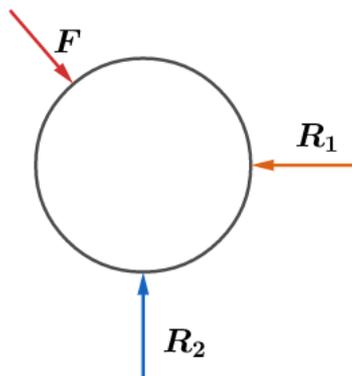
### Comentários:

É importante a visualização do que está acontecendo neste problema. Os centros das esferas formam um tetraedro regular de aresta  $2R$ , sendo  $R$  o raio das esferas. Essa visualização permite achar as direções das forças normais. Na figura abaixo define-se o plano no qual analisar-se-á o equilíbrio:



Nesse plano, as forças que atuam sobre uma das esferas de baixo está representado abaixo:





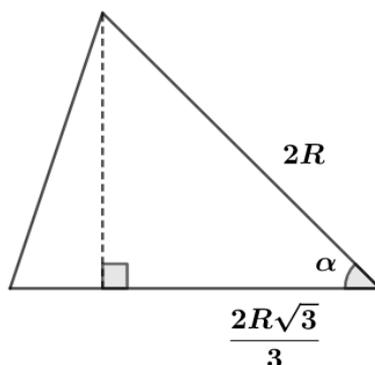
As equações de equilíbrio, portanto, ficam:

$$\begin{cases} F \cdot \cos \alpha = R_1 \\ F \cdot \sin \alpha + P = R_2 \end{cases}$$

Resta ainda:

- Descobrir  $\alpha$ .
- Descobrir  $F$ .

Para achar  $\alpha$ , ainda sobre o plano AB, temos a seguinte visão do tetraedro:



Portanto:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Para achar  $F$ , analisa-se a dinâmica da esfera superior. Devido à simetria, as componentes horizontais das forças  $F$  irão se cancelar, restando somente a componente vertical. A componente vertical de cada  $F$  é  $F \sin \alpha$ .

Portanto:

$$3F \cdot \sin \alpha = P \Rightarrow F = \frac{P}{3 \cdot \sin \alpha} = \frac{P}{\sqrt{6}}$$

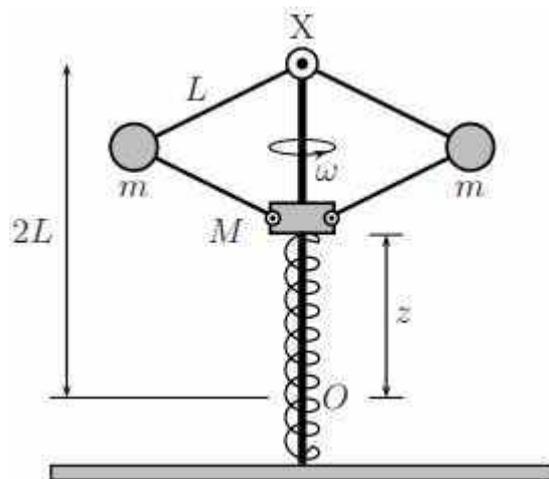
Substituindo todos os valores no sistema de equações do equilíbrio, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{P}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = R_1 \\ \frac{P}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} + P = R_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{P}{3\sqrt{2}} \\ R_2 = \frac{4P}{3} \end{cases}$$

**Gabarito:**  $N_L = \frac{P\sqrt{2}}{6}$  e  $N_I = \frac{4P}{3}$

**26. (ITA – 2015)**

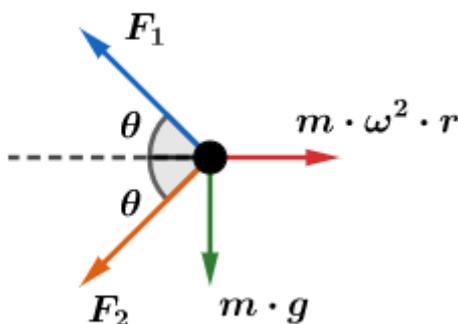
Na figura, o eixo vertical giratório  $z$  acima de  $O$  dada por imprime uma velocidade angular  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  ao sistema composto por quatro barras iguais, de comprimento  $L = 1 \text{ m}$  e massa desprezível, graças a uma dupla articulação na posição fixa  $X$ . Por sua vez, as barras de baixo são articuladas na massa  $M$  de  $2 \text{ kg}$  que, através de um furo central, pode deslizar sem atrito ao longo do eixo e esticar uma mola de constante elástica  $k = 100 \text{ N/m}$ , a partir da posição  $O$  da extremidade superior da mola em repouso, a dois metros abaixo de  $X$ . O sistema completa-se com duas massas iguais de  $m = 1 \text{ kg}$  cada uma, articuladas às barras. Sendo desprezíveis as dimensões das massas, então, a mola distender-se-á de uma altura  $X$



- a) 0,2 m
- b) 0,5 m
- c) 0,6 m
- d) 0,7 m
- e) 0,9 m

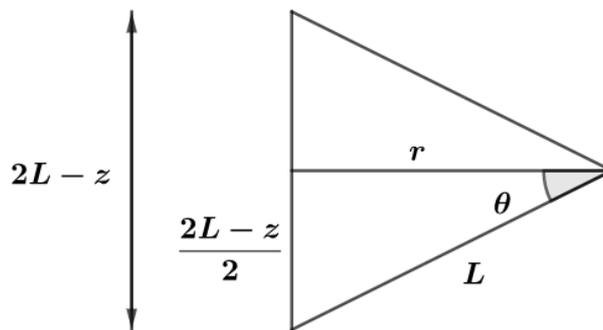
**Comentários:**

Adotando um referencial não inercial e analisando a dinâmica da massa  $m$ :



$$\begin{cases} m \cdot \omega^2 \cdot r = (F_1 + F_2) \cdot \cos \theta \\ (F_1 - F_2) \cdot \sin \theta = m \cdot g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 + F_2 = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{2 \cos \theta} \\ F_1 - F_2 = \frac{m \cdot g}{\sin \theta} \end{cases}$$

O  $r, \cos \theta$  e  $\sin \theta$  do movimento é obtido pelo seguinte triângulo retângulo:



Portanto:

$$\frac{r}{L} = \cos \theta \Rightarrow \frac{r}{\cos \theta} = L$$

E:

$$\text{sen } \theta = \frac{\left(L - \frac{z}{2}\right)}{L} = \frac{2L - z}{2L}$$

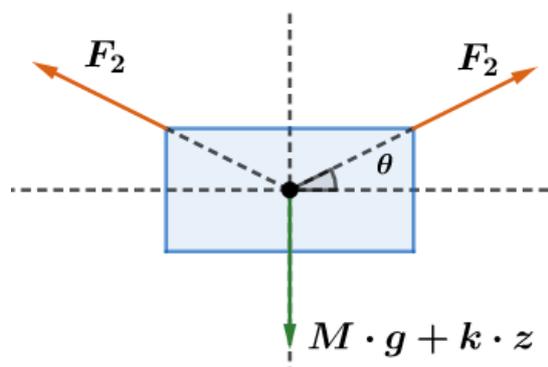
Substituindo:

$$\begin{cases} F_1 + F_2 = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot L}{2} \\ F_1 - F_2 = \frac{m \cdot g \cdot 2 \cdot L}{2L - z} \end{cases}$$

Fazendo a primeira equação menos a segunda:

$$2 \cdot F_2 = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot L}{2} - \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot L}{2L - z} = m \cdot L \cdot \left( \frac{\omega^2(2L - z) - 4 \cdot m \cdot g \cdot L}{2(2L - z)} \right)$$

A dinâmica do bloco inferior fica, portanto:



Assim, a equação de equilíbrio fica:

$$2 \cdot F_2 \cdot \text{sen } \theta = M \cdot g + k \cdot z$$

$$m \cdot L \cdot \left( \frac{\omega^2(2L - z) - 4 \cdot m \cdot g \cdot L}{2(2L - z)} \right) \cdot \left( \frac{2L - z}{2L} \right) = M \cdot g + k \cdot z$$

Substituindo os valores do problema:

$$1 \left( \frac{100(2-z) - 40}{2(2-z)} \right) \cdot \frac{2-z}{2} = 20 + 100z$$

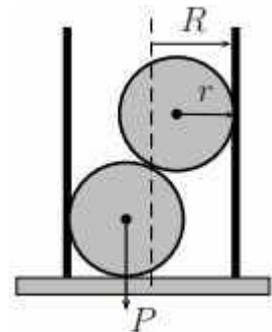
$$\left( \frac{160 - 100z}{4} \right) = 20 + 100z \Rightarrow 40 - 25z = 20 + 100z$$

$$z = \frac{60}{125} = 0,48 \approx 0,50$$

**Gabarito: B**

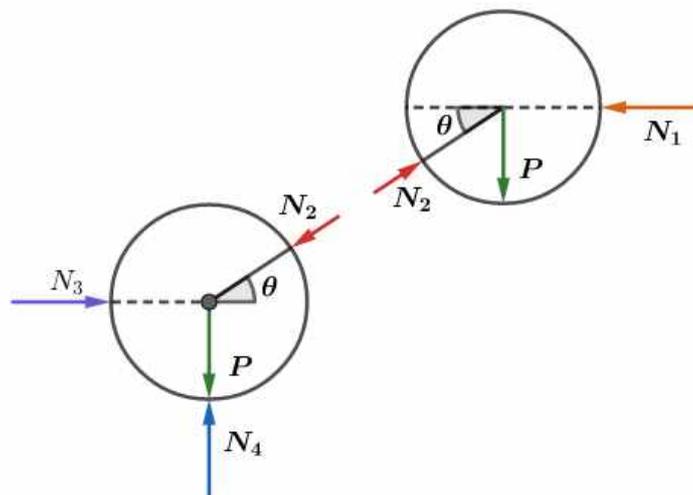
**27. (ITA – 2015)**

A figura mostra um tubo cilíndrico de raio  $R$  apoiado numa superfície horizontal, em cujo interior encontram-se em repouso duas bolas idênticas, de raio  $r = 3R/4$  e peso  $P$  cada uma. Determine o peso mínimo  $P_c$  do cilindro para que o sistema permaneça em equilíbrio.

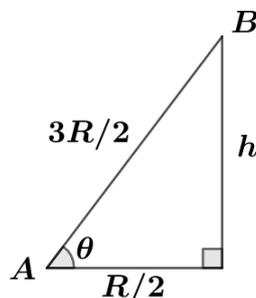


**Comentários:**

A dinâmica das esferas está representada a seguir:



Analisando a geometria do problema, tem-se:



Pela geometria, temos:

$$h = \sqrt{\left(\frac{3R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$$

Portanto:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos \theta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Agora, fazendo o equilíbrio da esfera superior:

$$\begin{cases} N_1 = N_2 \cdot \cos \theta \\ N_2 \cdot \operatorname{sen} \theta = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = \frac{N_2}{3} \\ N_2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_2 = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot P \\ N_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot P \end{cases}$$

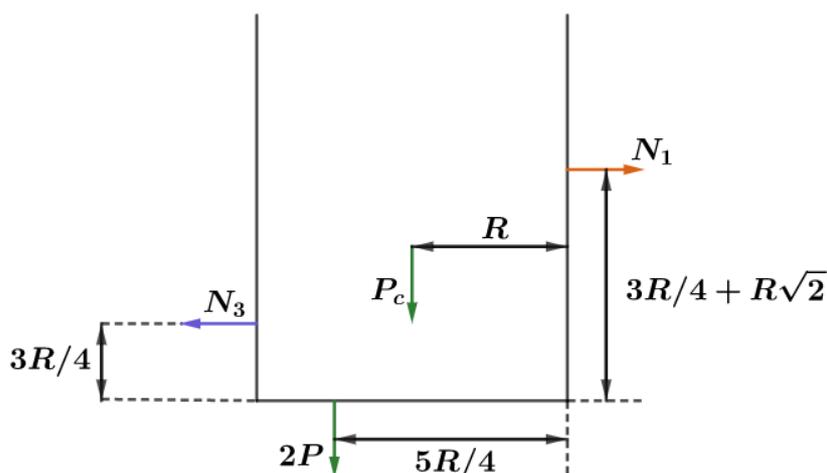
Agora, faz-se o equilíbrio da esfera inferior:

$$\begin{cases} N_2 \cdot \cos \theta = N_3 \\ N_2 \cdot \operatorname{sen} \theta + P = N_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_3 = \frac{P\sqrt{2}}{4} \\ N_4 = 2P \end{cases}$$

Agora, analisemos a dinâmica do cilindro. Existem duas possibilidades:

- O cilindro tem fundo;
- O cilindro não tem fundo.

Ao se fazer a análise considerando o fundo, nota-se que a estabilidade é garantida mesmo para um cilindro sem peso. Portanto, aqui será resolvido para o cilindro sem fundo. Abaixo, a dinâmica para o cilindro com fundo está representada, mas para as contas posteriores serão consideradas apenas as forças sobre as laterais.



Pelo equilíbrio rotacional em torno do canto direito inferior:

$$P_c \cdot R + N_3 \cdot \frac{3R}{4} = N_1 \cdot \left( \frac{3R}{4} + R\sqrt{2} \right)$$

$$P_c \cdot R + \frac{P\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3R}{4} = \frac{P\sqrt{2}}{4} \cdot \left( \frac{3R}{4} + R\sqrt{2} \right)$$

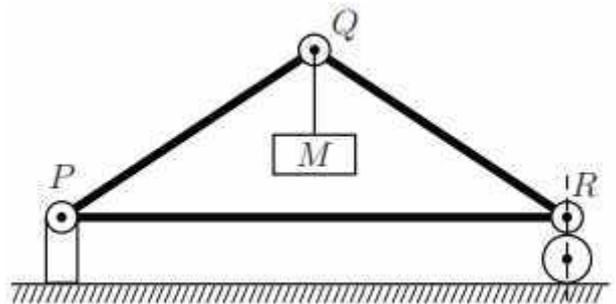
$$P_c = \frac{P}{2}$$

**Gabarito:**  $P_c = P/2$

**28. (ITA – 2016)**

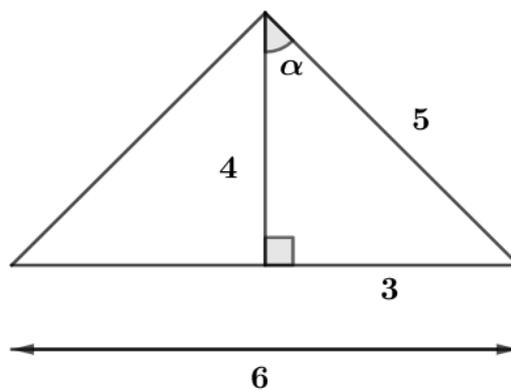
Três barras de peso desprezível, articuladas nos pinos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , constituem uma estrutura vertical em forma de triângulo isósceles, com  $6,0\text{ m}$  de base e  $4,0\text{ m}$  de altura, que sustenta uma massa  $M$  suspensa em  $Q$  em equilíbrio estático. O pino  $P$  também é articulado no seu apoio fixo, e o pino  $R$  apoia-se verticalmente sobre o rolete livre. Sendo de  $1,5 \times 10^4\text{ N}$  e  $5,0 \times 10^3\text{ N}$  os respectivos valores máximos das forças de tração e compressão suportáveis por qualquer das barras, o máximo valor possível para  $M$  é de

- a)  $3,0 \cdot 10^2\text{ kg}$ .
- b)  $4,0 \cdot 10^2\text{ kg}$ .
- c)  $8,0 \cdot 10^2\text{ kg}$ .
- d)  $2,4 \cdot 10^3\text{ kg}$ .
- e)  $4,0 \cdot 10^3\text{ kg}$ .



**Comentários:**

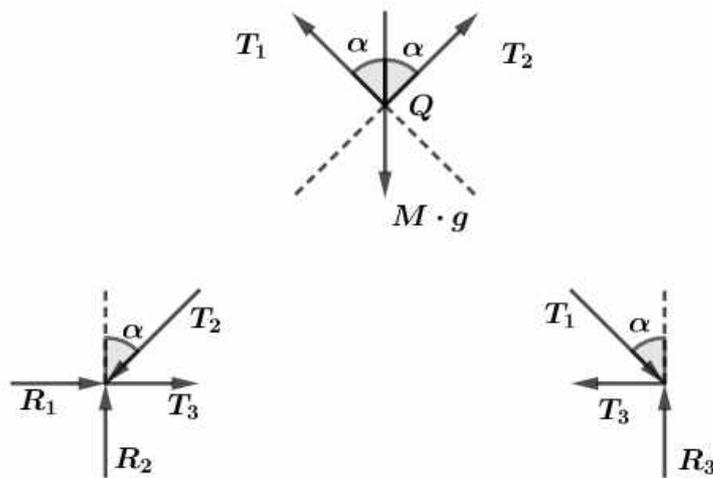
A geometria do problema está representada abaixo:



Logo:

$$\cos \alpha = 0,8 \text{ e } \sin \alpha = 0,6$$

A dinâmica de cada nó está representada a seguir:



Pelo equilíbrio do nó superior:

$$\begin{cases} T_1 \cdot \text{sen } \alpha = T_2 \cdot \text{sen } \alpha \\ (T_1 + T_2) \cdot \text{cos } \alpha = Mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = T_2 \\ 1,6T_1 = Mg \end{cases}$$

Note que  $T_1$  e  $T_2$  são forças de compressão (conferir a figura).

Resta descobrir  $T_3$ . Pelo equilíbrio do nó inferior direito:

$$T_1 \cdot \text{sen } \alpha = T_3 \Rightarrow 0,6T_1 = T_3$$

Portanto,  $T_3$  é tracionada.

Como  $T_3$  é menor que  $T_1$  e sabe-se que a resistência à tração é maior que à compressão, o limitante será a compressão das barras sob ação de  $T_1 = T_2$ .

Portanto:

$$1,6 \cdot 5000 = M \cdot 10 \Rightarrow \boxed{M = 800kg}$$

**Gabarito: C**

## 29. (ITA – 2016)

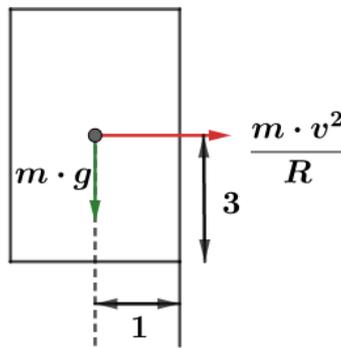
Questão 6. Um caminhão baú de 2,00 m de largura e centro de gravidade a 3,00 m do chão percorre um trecho de estrada em curva com 76,8 m de raio. Para manter a estabilidade do veículo neste trecho, sem derrapar, sua velocidade não deve exceder a

- a) 5,06 m/s.
- b) 11,3 m/s.
- c) 16,0 m/s.
- d) 19,6 m/s.
- e) 22,3 m/s.

**Comentários:**

Adotando um referencial não inercial, a dinâmica do caminhão baú fica:





Portanto, na iminência de escorregamento:

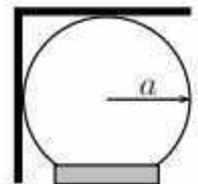
$$\frac{mv^2}{R} \cdot 3,0 = mg \cdot 1 \Rightarrow v^2 = \frac{gR}{3,0} = \frac{768}{3} = 256 \Rightarrow \boxed{v = 16 \text{ m/s}}$$

**Gabarito: C**

### 30. (ITA – 2016)

A figura mostra uma placa fina de peso  $P$  dobrada em ângulo reto e disposta sobre uma esfera fixa de raio  $a$ . O coeficiente de atrito mínimo entre estes objetos para que a placa não escorregue é

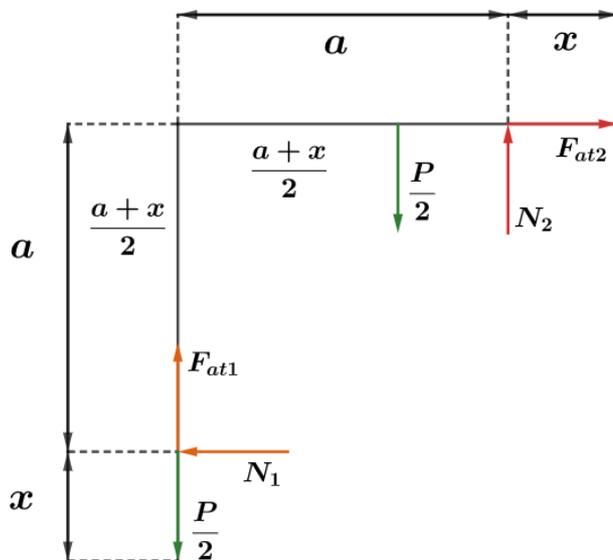
- a) 1
- b)  $1/2$
- c)  $\sqrt{2} - 1$
- d)  $\sqrt{3} - 1$
- e)  $(\sqrt{5} - 1)/2$



#### Comentários:

Como não foi afirmado nada sobre as dimensões da placa, a dinâmica da figura fica da maneira a seguir:





Para o equilíbrio de forças:

$$\begin{cases} F_{at1} + N_2 = P \\ N_1 = F_{at2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu N_1 + N_2 = P \\ N_1 = \mu N_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 = \mu N_2 \\ N_2(\mu^2 + 1) = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_2 = \frac{P}{\mu^2 + 1} \\ N_1 = \frac{\mu P}{\mu^2 + 1} \end{cases}$$

Agora, faz-se a análise do equilíbrio rotacional:

$$N_1 \cdot a + \frac{P}{2} \cdot \frac{a+x}{2} = N_2 \cdot a \Rightarrow \frac{P(a+x)}{4} = a(N_2 - N_1) = \frac{aP}{\mu^2 + 1} (1 - \mu)$$

$$(a+x)(\mu^2 + 1) = 4a(1 - \mu) \Rightarrow \mu^2(a+x) + 4a\mu - 3a + x = 0$$

Como não há informações sobre  $x$ , o sistema não teria solução. Portanto, adota-se  $x = a$ , visto que é o que a figura mais se assemelha. Assim, fica:

$$2\mu^2 + 4\mu - 2 = 0$$

$$\mu = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 16}}{4} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{4} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Como  $\mu$  deve ser positivo:

$$\boxed{\mu = \sqrt{2} - 1}$$

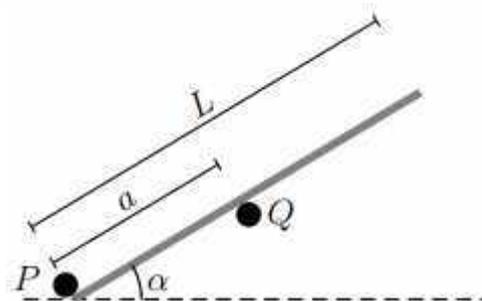
**Gabarito: C**

### 31. (ITA – 2017)

Um bastão rígido e uniforme, de comprimento  $L$ , toca os pinos  $P$  e  $Q$  fixados numa parede vertical, interdistantes de  $a$ , conforme a figura. O coeficiente de atrito entre cada pino e o bastão é  $\mu$ , e o ângulo deste com a horizontal é  $\alpha$ . Assinale a condição em que se torna possível o equilíbrio estático do bastão.

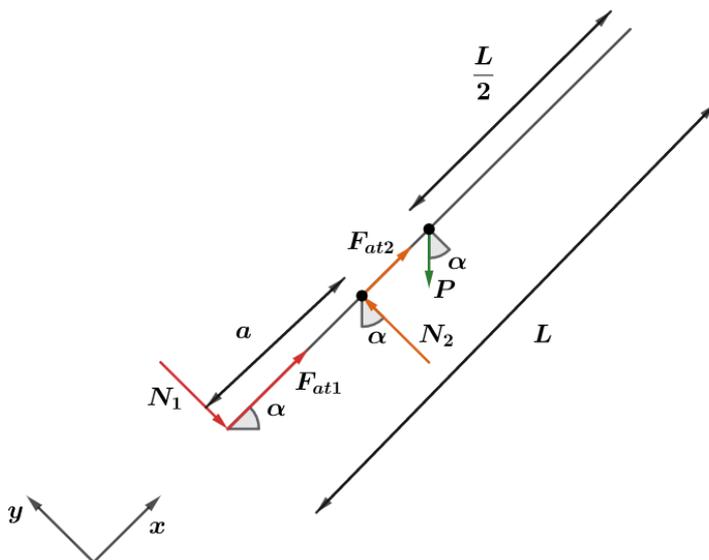


- a)  $L \geq a(1 + (\operatorname{tg} \alpha)/\mu)$
- b)  $L \geq a(-1 + (\operatorname{tg} \alpha)/\mu)$
- c)  $L \geq a(1 + (\operatorname{tg} \alpha)/2\mu)$
- d)  $L \geq a(-1 + (\operatorname{tg} \alpha)/2\mu)$
- e)  $L \geq a(1 + (\operatorname{tg} \alpha)/\mu)/2$



**Comentários:**

A dinâmica do problema encontra-se representada abaixo:



Para o equilíbrio translacional no eixo y:

$$N_2 - N_1 = P \cdot \cos \alpha$$

Pelo equilíbrio rotacional, com P como polo:

$$N_2 \cdot a = P \cdot \cos \alpha \cdot \frac{L}{2}$$

$$N_2 \cdot a = \frac{(N_2 - N_1) \cdot L}{2}$$

$$\frac{N_2(L - 2a)}{L} = N_1$$

Para o equilíbrio translacional no eixo x:

$$F_{at_1} + F_{at_2} = P \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Mas,  $F_{at}$  é sempre menor ou igual à  $\mu N$  (no caso de atrito estático). Portanto:

$$F_{at_1} + F_{at_2} = P \cdot \operatorname{sen} \alpha \leq \mu(N_1 + N_2) \Rightarrow \mu(N_1 + N_2) \geq P \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Substituindo  $N_1$  e  $N_2$  tem-se:

$$\frac{\mu \cdot N_2}{L} (L - 2a + L) \geq P \cdot \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \frac{\mu \cdot N_2(2L - 2a)}{L} \geq P \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$N_2 \geq \frac{P \cdot L \cdot \sin \alpha}{2(L - a)\mu}$$

Substituindo esta desigualdade na equação de equilíbrio rotacional visando eliminar a variável  $N_2$ , visto que não faz parte da resposta:

$$\frac{P \cdot \cos \alpha \cdot L}{2} = N_2 \cdot a \geq \frac{P \cdot L \cdot a \cdot \sin \alpha}{2(L - a)\mu} \Rightarrow \cos \alpha \geq \frac{a \cdot \sin \alpha}{(L - a)\mu}$$

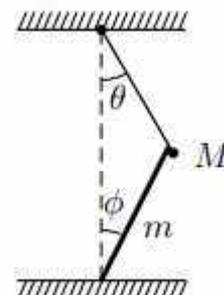
$$L \cdot \cos \alpha \cdot \mu \geq a \cdot \cos \alpha \cdot \mu + a \cdot \sin \alpha \Rightarrow L \geq a \left( 1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right)$$

**Gabarito: A**

### 32. (ITA – 2017)

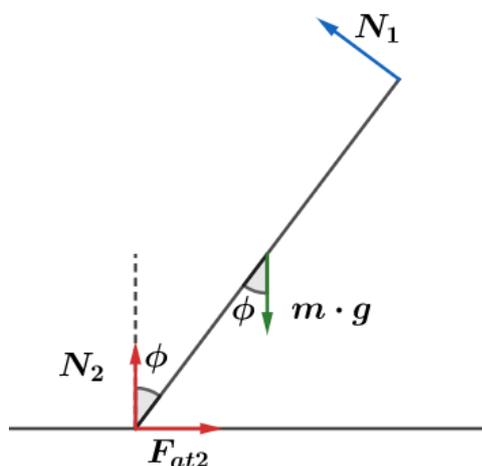
Na figura, a extremidade de uma haste delgada livre, de massa  $m$  uniformemente distribuída, apoia-se sem atrito sobre a massa  $M$  do pêndulo simples. Considerando o atrito entre a haste e o piso, assinale a razão  $M/m$  para que o conjunto permaneça em equilíbrio estático.

- a)  $\operatorname{tg} \phi / (2 \cdot \operatorname{tg} \theta)$
- b)  $(1 - \operatorname{tg} \phi) / (4 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta)$
- c)  $(\sin 2\phi \cdot \cot \theta - 2\sin^2 \theta) / 4$
- d)  $(\sin \phi \cdot \cot \theta - 2\sin^2 2\theta) / 4$
- e)  $(\sin 2\phi \cdot \cot \theta - \sin^2 \theta) / 4$



**Comentários:**

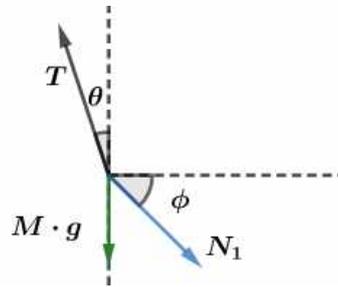
A representação da dinâmica da barra encontra-se abaixo:



Para o equilíbrio rotacional em torno do ponto de apoio no chão:

$$m \cdot g \cdot \sin \phi \cdot \frac{L}{2} = N_1 \cdot L \Rightarrow N_1 = \frac{m \cdot g \cdot \sin \phi}{2}$$

Agora, as forças sobre a massa  $M$ :



$$\begin{cases} N_1 \cdot \cos \phi = T \cdot \text{sen } \theta \\ N_1 \cdot \text{sen } \phi + Mg = T \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Da primeira equação:

$$T = \frac{m \cdot g \cdot \cos \phi \cdot \text{sen } \phi}{2 \text{sen } \theta}$$

Substituindo na segunda:

$$\frac{m \cdot g \cdot \text{sen}^2 \phi}{2} + M \cdot g = \frac{m \cdot g \cdot \frac{\text{sen} 2\phi}{2}}{2 \text{sen } \theta} \cdot \cos \theta \Rightarrow m \left( \frac{\text{sen}^2 \phi}{2} - \frac{\text{sen} 2\phi \cdot \cos \theta}{4 \text{sen } \theta} \right) = -M$$

$$\boxed{\frac{M}{m} = \frac{\text{sen} 2\phi \cdot \text{cotg } \theta - 2 \text{sen}^2 \phi}{4}}$$

**Gabarito: Sem alternativa**

### 33. (ITA – 2017)

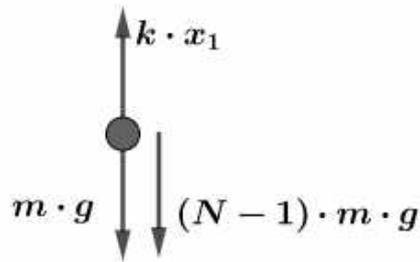
Um sistema é constituído por uma sequência vertical de  $N$  molas ideais interligadas, de mesmo comprimento natural  $l$  e constante elástica  $k$ , cada qual acoplada a uma partícula de massa  $m$ . Sendo o sistema suspenso a partir da mola 1 e estando em equilíbrio estático, pode-se afirmar que o comprimento da

- mola 1 é igual a  $l + (N - 1)mg/k$ .
- mola 2 é igual a  $l + Nmg/k$ .
- mola 3 é igual a  $l + (N - 2)mg/k$ .
- mola  $N - 1$  é igual a  $l + mg/k$ .
- mola  $N$  é igual a  $l$ .

#### Comentários:

Ao analisar a dinâmica do primeiro corpo, tem-se:

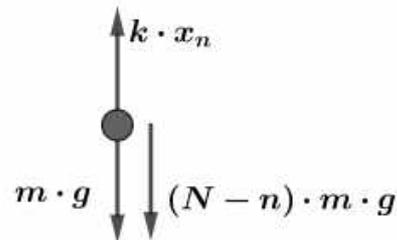




Pelo equilíbrio:

$$k \cdot x_1 = m \cdot g + (N - 1) \cdot m \cdot g \Rightarrow k \cdot x_1 = N \cdot m \cdot g$$

Analogamente, para o n-ésimo corpo:



$$k \cdot x_n = m \cdot g + (N - n) \cdot m \cdot g$$

$$k \cdot x_n = (N - (n - 1)) \cdot m \cdot g$$

$$x_n = \frac{(N - (n - 1)) \cdot m \cdot g}{k} = \frac{(N - n + 1) \cdot m \cdot g}{k}$$

Soma-se a deformação ao comprimento natural, obtendo-se o comprimento total:

$$L_n = l + \frac{(N - n + 1) \cdot m \cdot g}{k}$$

Pela análise das alternativas, chega-se ao gabarito C.

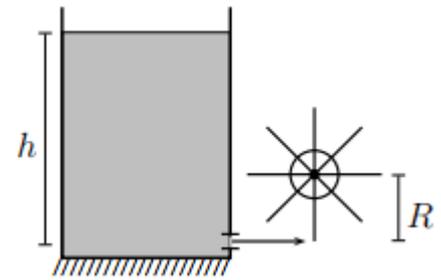
**Gabarito: C**

### 34. (ITA – 2017)

Água de um reservatório é usada para girar um moinho de raio  $R$  com velocidade angular  $\omega$  constante graças ao jato que flui do orifício de área  $S$  situado a uma profundidade  $h$  do seu nível. Com o jato incidindo perpendicularmente em cada pá, com choque totalmente inelástico, calcule o torque das forças de atrito no eixo do moinho, sendo  $\rho$  e  $g$ , respectivamente, a massa específica da água e a aceleração da gravidade.



- a)  $2\rho ghRS$
- b)  $\rho R^2 S \omega \sqrt{2gh}$
- c)  $2\rho hRS(1 - \sqrt{2gh}/\omega R)$
- d)  $2\rho hRS(1 - \omega R/\sqrt{2gh})$
- e)  $\rho R^2 S \omega \sqrt{2gh}(1 - \omega R/\sqrt{2gh})$



**Comentários:**

Pelo enunciado, já se descobre que o torque resultante é nulo, visto que não há variação de velocidade angular.

Portanto:

$$\tau_{Res} = \tau_{\acute{a}gua} + \tau_{atrito} = 0$$

Assim:

$$|\tau_{\acute{a}gua}| = |\tau_{atrito}|$$

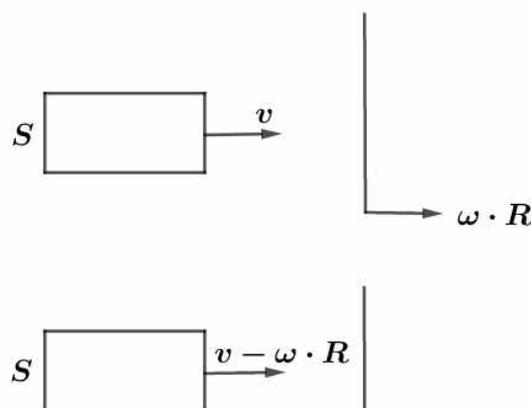
Logo, se calcular o torque que a água gera, irá se encontrar o torque gerado pelo atrito. É necessário encontrar a força gerada pelo jato d'água. Utilizando-se o teorema do impulso:

$$I = \Delta Q \Rightarrow I = F \cdot \Delta t = m \cdot v - m \cdot \omega \cdot R$$

$$F = \frac{m \cdot v - m \cdot \omega \cdot R}{\Delta t}$$

Repare que foi considerado que a água após chocar com a pá manteve velocidade igual à da pá.

Agora, deve-se descobrir a massa de água que se choca com a pá no intervalo de tempo  $\Delta t$ . Pode-se aproximar o jato por um cilindro, e a massa de água será o volume do cilindro. Fazendo-se uma mudança de referencial, visualiza-se o "cilindro" a seguir:



Portanto, o volume de água que chega até a pá em um tempo  $\Delta t$  é dado por:

$$V_{\acute{a}gua} = S \cdot (v - \omega \cdot R) \cdot \Delta t$$

A massa, portanto:

$$m_{\acute{a}gua} = m = \rho \cdot S \cdot (v - \omega \cdot R) \cdot \Delta t$$

Substituindo  $m$  na expressão de  $F$ :

$$F = \rho \cdot S \cdot (v - \omega \cdot R)^2$$

O torque gerado pela água, portanto, é:

$$\tau_{\text{água}} = \rho \cdot S \cdot R \cdot (v - \omega \cdot R)^2$$

$v$  pode ser calculado a partir da equação de Bernoulli.

$$P_{\text{atm}} + \rho \cdot g \cdot h = P_{\text{atm}} + \frac{\rho \cdot v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Substituindo o valor de  $v$ , rearranjando a expressão e sabendo que  $|\tau_{\text{atrito}}| = |\tau_{\text{água}}|$ :

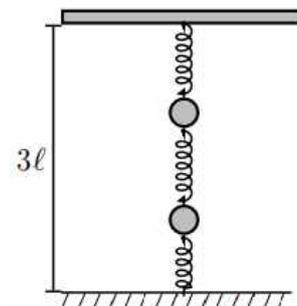
$$|\tau_{\text{atrito}}| = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot R \cdot g \cdot h \cdot \left(1 - \frac{\omega \cdot R}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}\right)^2$$

**Gabarito: sem alternativa**

### 35. (ITA – 2018)

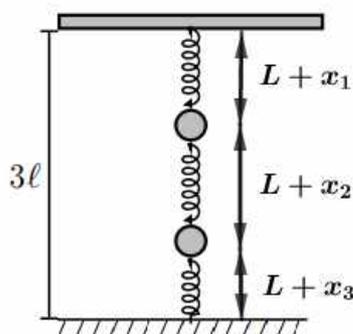
Três molas idênticas, de massas desprezíveis e comprimentos naturais  $l$ , são dispostas verticalmente entre o solo e o teto a  $3l$  de altura. Conforme a figura, entre tais molas são fixadas duas massas pontuais iguais. Na situação inicial de equilíbrio, retira-se a mola inferior (ligada ao solo) resultando no deslocamento da massa superior de uma distância  $d_1$  para baixo, e da inferior, de uma distância  $d_2$  também para baixo, alcançando-se nova posição de equilíbrio. Assinale a razão  $d_2/d_1$ .

- a) 2
- b) 3/2
- c) 5/3
- d) 4/3
- e) 5/4



#### Comentários:

Na situação inicial, o conjunto está na seguinte situação:

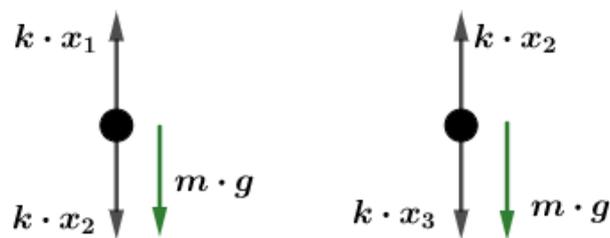


Portanto:



$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

E as forças sobre os blocos fica:



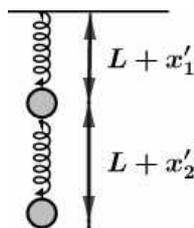
Fazendo-se o equilíbrio de cada um, monta-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = \frac{m \cdot g}{k} \\ x_2 - x_3 = \frac{m \cdot g}{k} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

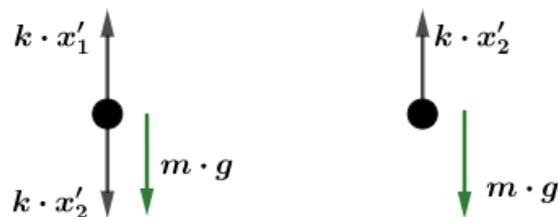
A solução do sistema fornece como resposta:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m \cdot g}{k} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\frac{m \cdot g}{k} \end{cases}$$

Portanto, a posição inicial de  $x_1$  e de  $x_2$  são, respectivamente:  $d_{1,i} = l + \frac{mg}{k}$  e  $d_{2,i} = 2l + \frac{mg}{k}$ , medidos a partir do teto. Agora, para a análise do segundo equilíbrio. A situação está representada na figura a seguir:



A força sobre os blocos fica da seguinte forma:



Pelo equilíbrio dos blocos:

$$\begin{cases} k \cdot x_1' - k \cdot x_2' = m \cdot g \\ k \cdot x_2' = m \cdot g \end{cases}$$

Logo:



$$\begin{cases} x'_1 = \frac{2 \cdot m \cdot g}{k} \\ x'_2 = \frac{m \cdot g}{k} \end{cases}$$

As posições finais, portanto, ficam:  $d_{1,f} = l + \frac{2 \cdot m \cdot g}{k}$  e  $d_{2,f} = l + \frac{3 \cdot m \cdot g}{k}$ .

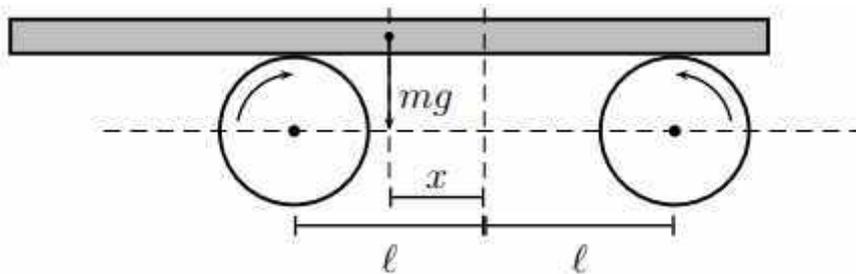
Portanto, o pedido no enunciado é:

$$\frac{d_{2,f} - d_{2,i}}{d_{1,f} - d_{1,i}} = \frac{\frac{2 \cdot m \cdot g}{k}}{\frac{m \cdot g}{k}} = 2$$

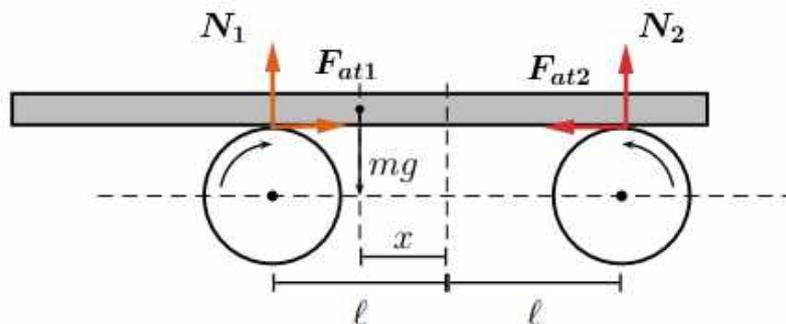
**Gabarito: A**

### 36. (ITA – 2018)

Uma prancha homogênea de massa  $m$  é sustentada por dois roletes, interdistantes de  $2l$ , que giram rapidamente em sentidos opostos, conforme a figura. Inicialmente o centro de massa da prancha dista  $x$  da linha intermediária entre os roletes. Sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito cinético entre os roletes e a prancha, determine a posição do centro de massa da prancha em função do tempo.



**Comentários:**



Pelo equilíbrio translacional na direção vertical:

$$N_1 + N_2 = P$$

Pelo equilíbrio rotacional, adotando o centro de massa como polo:

$$N_1(L - x) = N_2(L + x) \Rightarrow N_1 = \frac{N_2(L + x)}{L - x}$$

Substituindo no equilíbrio translacional:

$$N_2 \cdot \frac{L + x + L - x}{L - x} = P \Rightarrow N_2 = \frac{P(L - x)}{2L}$$

Na direção horizontal, as forças ficam:

$$R_x = F_{at_1} - F_{at_2} = \mu(N_1 - N_2)$$

$$R_x = \mu \cdot N_2 \left( \frac{L + x}{L - x} - 1 \right) = \mu \cdot \frac{P(L - x)}{2L} \cdot \frac{2x}{L - x} = \frac{\mu \cdot P \cdot x}{L}$$

Repare que a força resultante é no sentido contrário do deslocamento e diretamente proporcional a  $x$ , caracterizando, assim, um MHS. A posição do centro de massa portanto segue um MHS tal que:

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{\mu \cdot P}{L}}{m}} = \sqrt{\frac{\mu \cdot g}{L}}$$

E de amplitude  $x$ . Portanto:

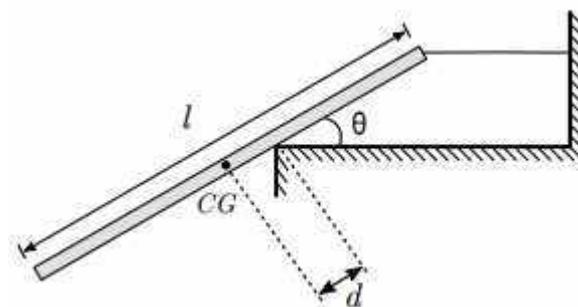
$$X_{CM} = x \cdot \cos \left( \sqrt{\frac{\mu \cdot g}{L}} \cdot t \right)$$

**Gabarito:**  $x_{cm} = x \cdot \cos \left( \sqrt{\frac{\mu \cdot g}{L}} \cdot t \right)$

### 37. (ITA – 2019)

Uma barra rígida, homogênea, fina e de comprimento  $l$ , é presa a uma corda horizontal sem massa e toca a quina de uma superfície horizontal livre de atrito, fazendo um ângulo  $\theta$  como mostra a figura. Considerando a barra em equilíbrio, assinale a opção correta para o valor da razão  $d/l$ , em que  $d$  é a distância da quina ao centro de gravidade (CG) da barra.

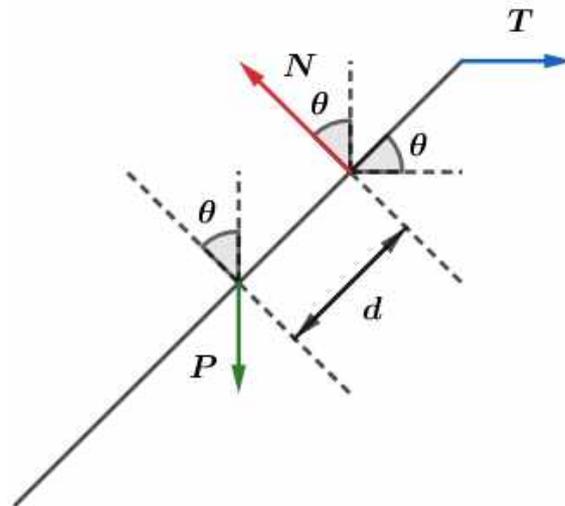
- a)  $\frac{tg^2 \theta}{2}$
- b)  $\frac{\cos^2 \theta}{4}$
- c)  $\frac{\text{sen}^2 \theta}{4}$
- d)  $\frac{\cos^2 \theta}{2}$
- e)  $\frac{\text{sen}^2 \theta}{2}$



#### Comentários:

As forças atuando sobre a barra estão representadas na figura a seguir:





Pelo equilíbrio translacional:

$$\begin{cases} P = N \cdot \cos \theta \\ T = N \cdot \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = \frac{P}{\cos \theta} \\ T = P \cdot \operatorname{tg} \theta \end{cases}$$

Pelo equilíbrio rotacional, adotando a extremidade superior como polo:

$$N \cdot \left( \frac{l}{2} - d \right) = P \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \theta \Rightarrow \frac{l}{2} - d = \frac{l \cdot \cos^2 \theta}{2}$$

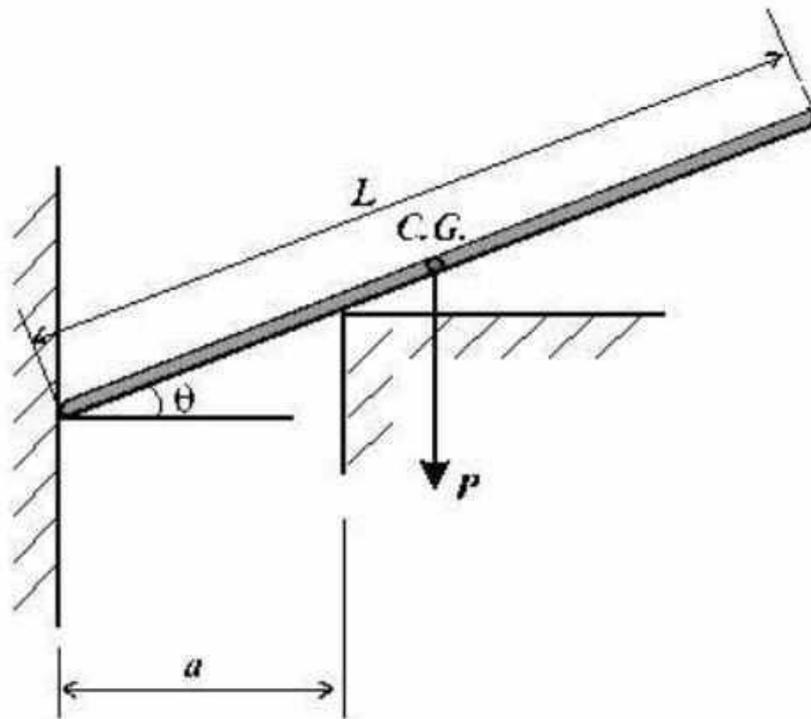
$$d = \frac{l}{2} (1 - \cos^2 \theta) \Rightarrow \boxed{\frac{d}{l} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}^2 \theta}$$

**Gabarito: E**

### 38. (IME – 1997)

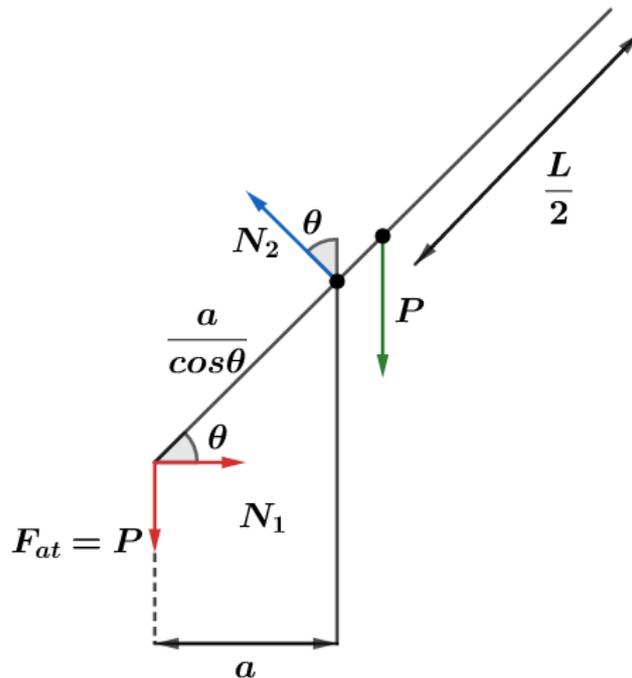
Uma barra uniforme e homogênea de peso  $P$ , tem seu centro de gravidade ( $C. G.$ ) na posição indicada na figura abaixo. A única parede considerada com atrito é aquela na qual a extremidade esquerda da barra está apoiada. O módulo da força de atrito  $F_{at}$  é igual ao peso da barra. Determine o valor do ângulo na posição de equilíbrio, em função do comprimento da barra  $L$  e da distância entre as paredes  $a$ .





**Comentários:**

A barra com as forças atuantes está representada a seguir:



Pelo equilíbrio translacional:

$$\begin{cases} N_1 = N_2 \cdot \text{sen } \theta \\ N_2 \cdot \text{cos } \theta = 2P \end{cases} \begin{cases} N_2 = \frac{2P}{\text{cos } \theta} \\ N_1 = 2P \cdot \text{tg } \theta \end{cases}$$

Fazendo o equilíbrio rotacional, tomando a extremidade esquerda inferior como polo:

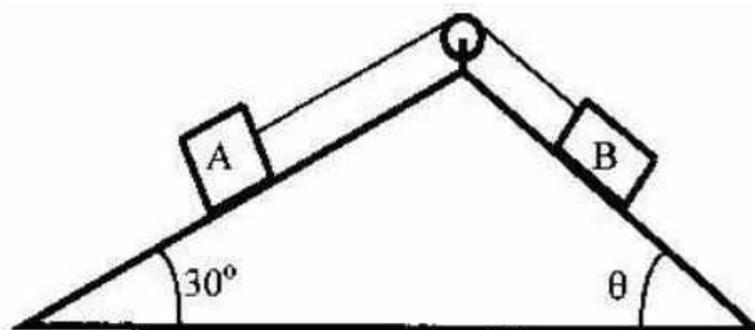
$$\frac{N_2 \cdot a}{\cos \theta} = \frac{P \cdot \cos \theta \cdot l}{2} \Rightarrow \frac{2P \cdot a}{\cos^2 \theta} = \frac{P \cdot \cos \theta \cdot l}{2}$$

$$\cos^3 \theta = \frac{4a}{l} \Rightarrow \cos \theta = \sqrt[3]{\frac{4a}{l}} \Rightarrow \theta = \arccos \left( \sqrt[3]{\frac{4a}{l}} \right)$$

**Gabarito:**  $\theta = \arccos \left( \sqrt[3]{\frac{4a}{l}} \right)$

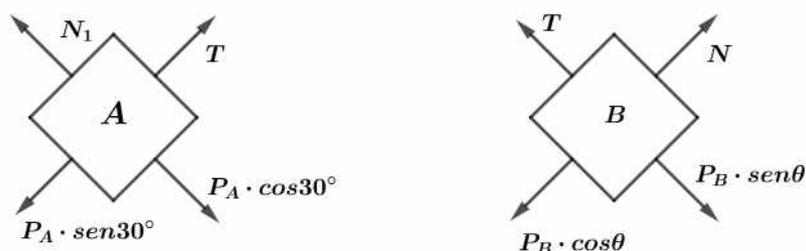
### 39. (IME – 1998)

Na figura a seguir os objetos *A* e *B* pesam, respectivamente, 40 N e 30 N e estão apoiados sobre planos lisos, ligados entre si por uma corda inextensível, sem peso, que passa por uma polia sem atrito. Determinar o ângulo  $\theta$  e a tensão na corda quando houver equilíbrio.



#### Comentários:

A dinâmica de cada bloco está representada abaixo:



Fazendo somente o equilíbrio na direção da corda para cada bloco:

$$\begin{cases} T = P_A \cdot \text{sen } 30^\circ \\ T = P_B \cdot \text{sen } \theta \end{cases}$$

Igualando as expressões:

$$40 \cdot \frac{1}{2} = 30 \cdot \text{sen } \theta \Rightarrow \theta = \arcsen \left( \frac{2}{3} \right)$$

E, pela primeira equação:

$$T = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ N}$$

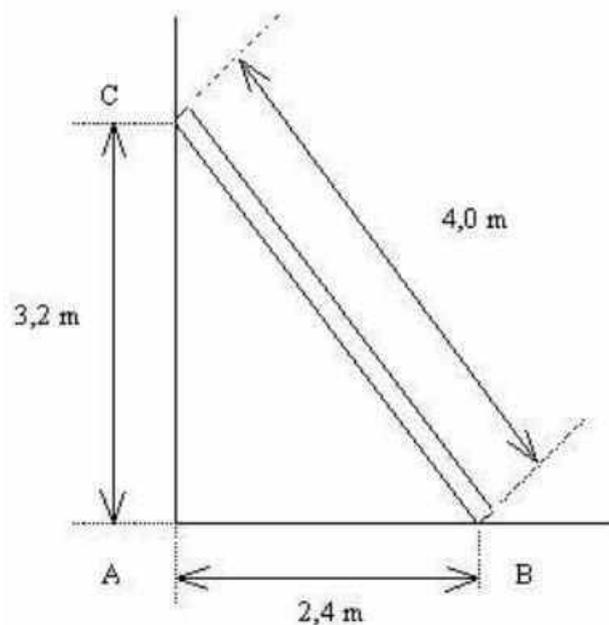


Gabarito:  $\theta = \arcsen\left(\frac{2}{3}\right)$  e 20 N

40. (IME – 1999)

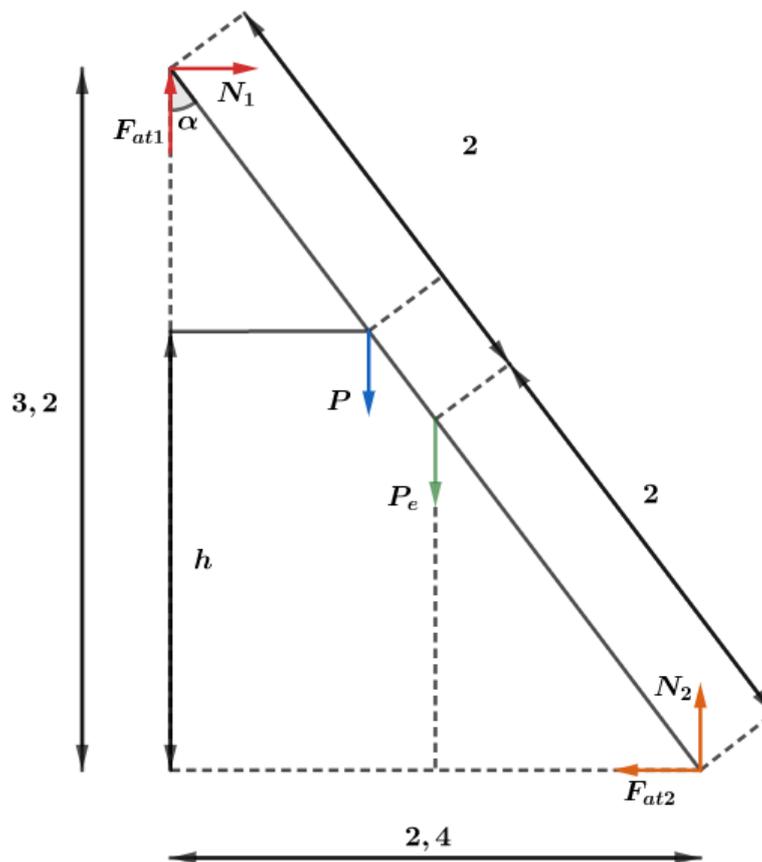
Uma escada de 4,0 m de comprimento está apoiada contra uma parede vertical com a sua extremidade inferior a 2,4 m da parede, como mostra a figura. A escada pesa 20 kgf e seu centro de gravidade está localizado no ponto médio. Sabendo que os coeficientes de atrito estático entre a escada e o solo e entre a escada e a parede são, respectivamente, 0,5 e 0,2, calcule:

- a) a altura máxima, em relação ao solo, a que um homem de 90 kgf de peso pode subir, sem provocar o escorregamento da escada;
- b) a distância máxima da parede a que se pode apoiar a parte inferior da escada vazia, sem provocar escorregamento.



Comentários:

- a) A escada está representada abaixo com todas as forças que atuam sobre ela:



Fazendo o equilíbrio translacional:

$$\begin{cases} N_1 = F_{at2} \\ F_{at1} + N_2 = P + P_e \end{cases}$$

Onde:

- $P_e$  é o peso da escada;
- $P$  é o peso do homem.

$$\begin{cases} N_1 = \mu_2 \cdot N_2 \\ \mu_1 \cdot N_1 + N_2 = P + P_e \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda:

$$N_2(\mu_1 \cdot \mu_2 + 1) = P + P_e \Rightarrow N_2 = \frac{110}{1,1} = 100 \text{ kgf}$$

Substituindo este resultado na primeira equação:

$$N_1 = 50 \text{ kgf}$$

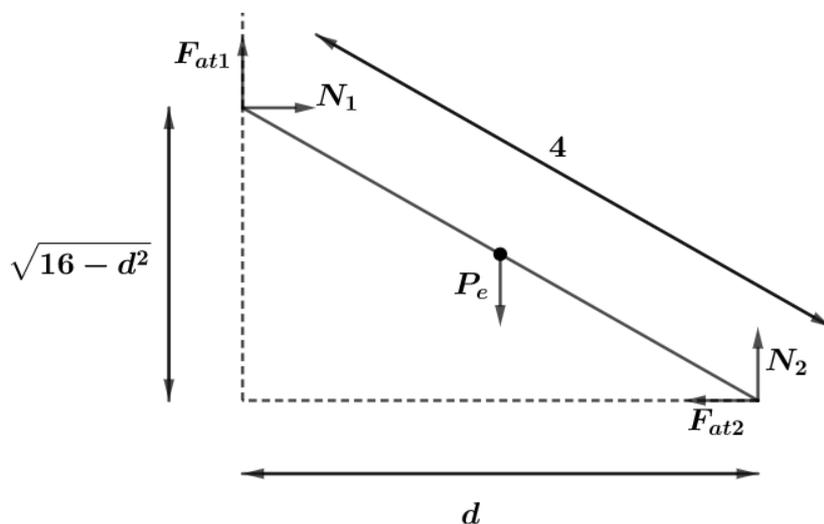
Fazendo o equilíbrio rotacional em torno canto da parede, abaixo da extremidade superior da escada:

$$N_1 \cdot 3,2 + P \cdot \frac{3h}{4} + P_e \cdot 1,2 = N_2 \cdot 2,4 \Rightarrow 160 + 90 \cdot \frac{3h}{4} + 24 = 240$$

$$\frac{3h}{4} = \frac{56}{90} \Rightarrow h = \frac{224}{270} \approx 0,83 \text{ m}$$



b) A representação da situação descrita encontra-se abaixo:



Pelo equilíbrio translacional:

$$\begin{cases} N_1 = F_{at2} \\ F_{at1} + N_2 = P_e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = \mu_2 N_2 \\ \mu_1 N_1 + N_2 = P_e \end{cases}$$

$$N_2 = \frac{P}{\mu_1 \mu_2 + 1} \Rightarrow N_2 = \frac{20}{1,1} \text{ kgf}$$

$$N_1 = \frac{10}{1,1} \text{ kgf}$$

Pelo equilíbrio rotacional:

$$N_1 \cdot \sqrt{16 - d^2} + P_e \cdot \frac{d}{2} = N_2 \cdot d \Rightarrow \frac{10\sqrt{16 - d^2}}{1,1} = d \left( \frac{20}{1,1} - 10 \right)$$

$$\frac{100(16 - d^2)}{1,21} = \frac{d^2(81)}{1,21} \Rightarrow 181d^2 = 1600$$

$$d^2 = \frac{1600}{181} \Rightarrow d \approx 2,973 \text{ m}$$

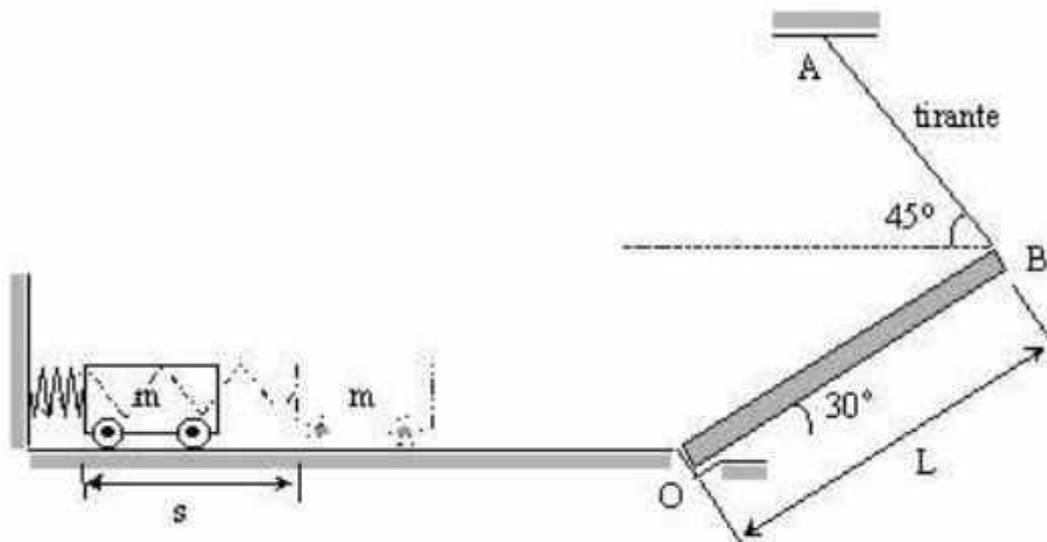
**Gabarito: a) 0,83 m b) 2,973 m**

#### 41. (IME – 2000)

Um carrinho de massa  $m = 20 \text{ kg}$  encontra-se numa posição inicial comprimindo uma mola de constante elástica  $k = 18 \text{ kN/m}$  em  $s = 10 \text{ cm}$ , estando a mola presa a uma parede vertical, conforme mostra a figura abaixo. Após liberado do repouso, o carrinho se desloca ao longo da superfície horizontal e sobe a prancha inclinada  $OB$ , de comprimento  $L = 180 \text{ cm}$ , até atingir o repouso. Considerando-se desprezíveis o efeito do atrito ao longo do percurso e o peso da prancha e adotando o valor da aceleração gravitacional igual a  $10 \text{ m/s}^2$ , determine, neste instante, a força normal por unidade de área no tirante  $AB$  com seção circular de diâmetro  $d = 1,5 \text{ mm}$ .

OBS: o carrinho não está preso à mola.

Dado:  $\cos 15^\circ = 0,97$ .



**Comentários:**

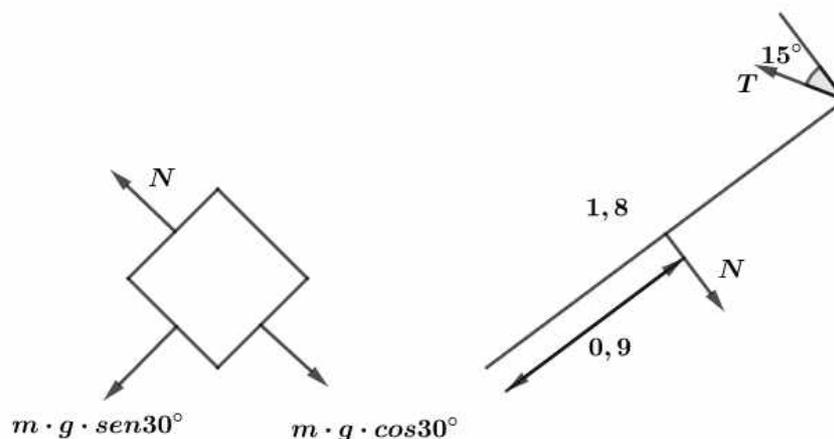
Fazendo-se a conservação de energia entre o momento que o carrinho é solto e o momento em que atinge o repouso:

$$\frac{kx^2}{2} = mgh \Rightarrow h = \frac{kx^2}{2mg} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 20 \cdot 10} = 0,45 \text{ m}$$

Chamando de x a distância que o carrinho percorreu sobre a prancha:

$$\frac{h}{x} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 0,9 \text{ m}$$

Agora, analisa-se a dinâmica do carrinho e da prancha:



Pelo carrinho:

$$N = m \cdot g \cdot \cos 30^\circ$$

Pelo equilíbrio rotacional da prancha em torno do polo O:

$$0,9 \cdot N = 1,8 \cdot T \cdot \cos 15^\circ \Rightarrow T = \frac{N}{2 \cdot 0,97}$$

Substituindo N:

$$T = \frac{m \cdot g \cdot \cos 30^\circ}{1,94} = \frac{20 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1,94} = \frac{200\sqrt{3}}{3,88} \text{ N}$$

Para calcular a força normal por unidade de área:

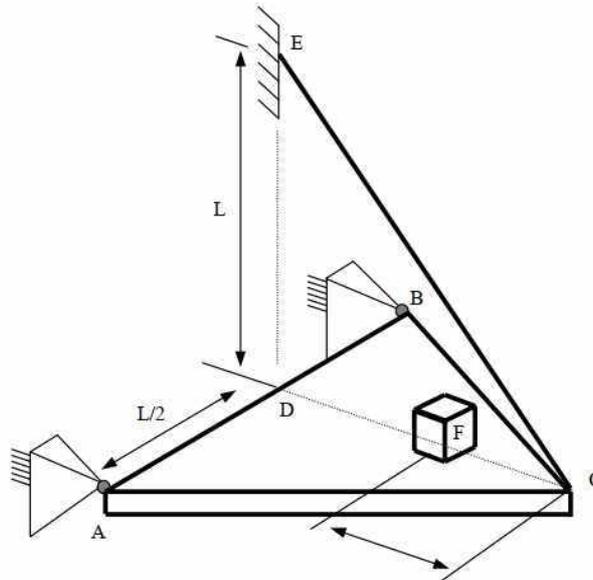
$$\frac{F}{A} = \frac{T}{A} = \frac{\frac{200\sqrt{3}}{3,88}}{\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{800\sqrt{3}}{3,88 \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{800\sqrt{3}}{3,88 \cdot \pi \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})^2} = 50,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

**Gabarito:  $50,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$**

#### 42. (IME – 2003)

Uma placa homogênea tem a forma de um triângulo equilátero de lado  $L$ , espessura  $L/10$  e massa específica  $\mu = 5 \text{ g/cm}^3$ . A placa é sustentada por dobradiças nos pontos  $A$  e  $B$ , e por um fio  $EC$ , conforme mostra a figura. Um cubo homogêneo de aresta  $L/10$ , feito do mesmo material da placa, é colocado com o centro de uma das faces sobre o ponto  $F$ , localizado sobre a linha  $CD$ , distando  $L\sqrt{3}/6$  do vértice  $C$ . Considere as dimensões em cm e adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Determine em função de  $L$ :

- Os pesos da placa e do cubo em Newtons.
- A tração no fio  $CE$  em Newtons.



#### Comentários:

- O peso do cubo é dado por:

$$P_{cubo} = V_{cubo} \cdot \rho_{cubo} \cdot g \Rightarrow P_{cubo} = \left(\frac{L}{10}\right)^3 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 10$$

$$P_{cubo} = 50 \cdot L^3 \text{ N}$$

Vale notar que  $L$  deve ser em metros.

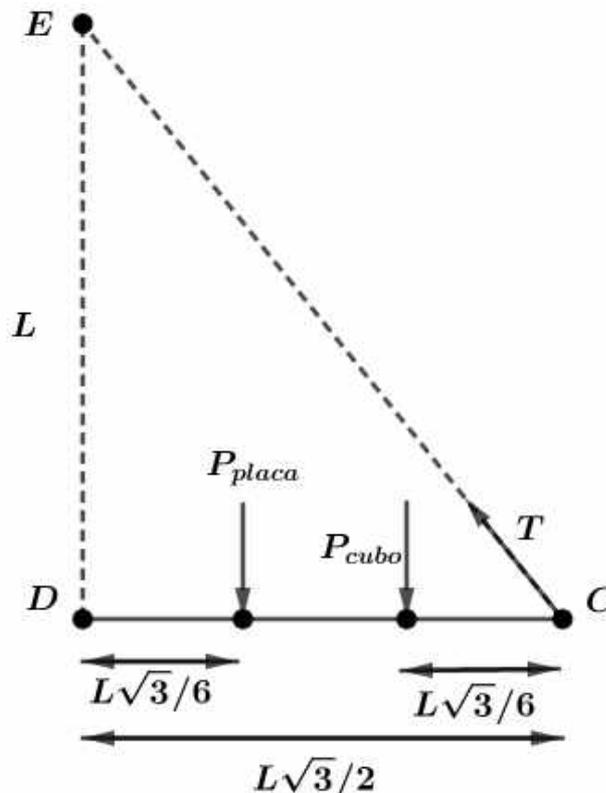
O peso da placa é semelhante e dado por:

$$P_{placa} = V_{placa} \cdot \rho_{placa} \cdot g \Rightarrow P_{placa} = \left( \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{L}{10} \right) \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 10$$

$$P_{placa} = 1250 \cdot L^3 \cdot \sqrt{3} \text{ N}$$

Novamente,  $L$  deve ser em metros.

- b) Devido à simetria do problema, o torque gerado por cara dobradiça irá gerar torque de mesmo módulo, mas sentidos contrários. Portanto, restam somente forças sobre a linha CD. Dessa forma, pode-se reduzir o problema ao plano que passa por E, C e D. Assim, tem-se a seguinte figura:



Assim:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{21}}{7} \text{ e } \sin \theta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

E, pelo equilíbrio rotacional com D como polo:

$$P_{placa} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{6} + P_{cubo} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{3} = T \cdot \sin \theta \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1250L^3\sqrt{3}}{6} + \frac{50L^3}{3} = T \cdot \frac{2\sqrt{7}}{14}$$

$$\frac{1250L^3\sqrt{3} + 100L^3}{6} \cdot \frac{14}{2\sqrt{7}} = T \Rightarrow T = \frac{L^3\sqrt{7}}{6} (1250\sqrt{3} + 100) \text{ N}$$

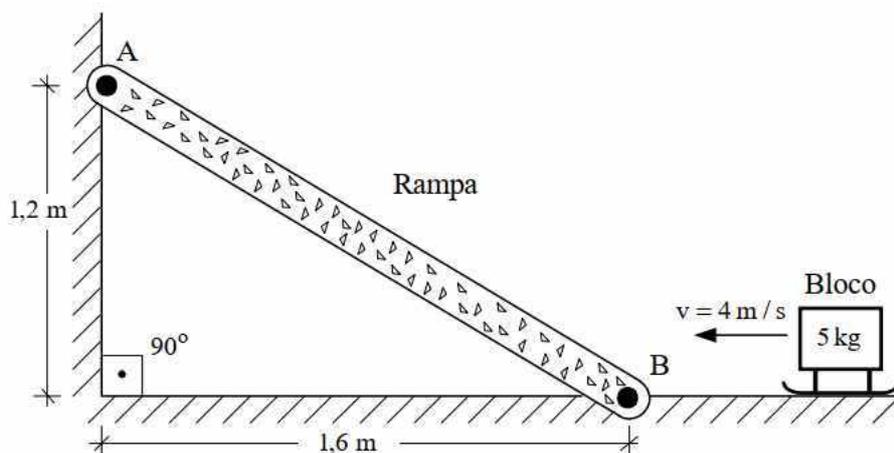
Novamente, faz-se a ressalva de que  $L$  deve ser utilizado em metros nesta fórmula obtida.

**Gabarito:** a)  $P_{cubo} = 50L^3 \text{ N}$  e  $P_{placa} = 1250L^3\sqrt{3} \text{ N}$  b)  $T = \frac{L^3\sqrt{7}}{6} (1250\sqrt{3} + 100) \text{ N}$

### 43. (IME – 2006)

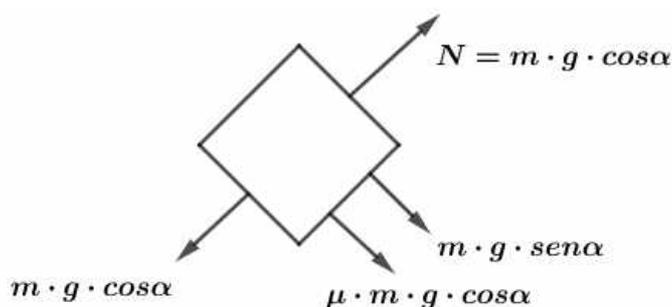
Um bloco de massa  $m = 5 \text{ kg}$  desloca-se a uma velocidade de  $4 \text{ m/s}$  até alcançar uma rampa inclinada de material homogêneo, cujos pontos  $A$  e  $B$  são apoios e oferecem reações nas direções horizontal e vertical. A rampa encontra-se fixa e o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a rampa é igual a  $0,05$ . Sabe-se que o bloco para ao atingir determinada altura e permanece em repouso. Considerando que a reação vertical no ponto de apoio  $B$  após a parada do bloco seja de  $89 \text{ N}$  no sentido de baixo para cima, determine a magnitude, a direção e o sentido das demais reações nos pontos  $A$  e  $B$ .

Dados: aceleração da gravidade ( $g$ ) =  $10 \text{ m/s}^2$ , peso linear da rampa =  $95 \text{ N/m}$ .



#### Comentários:

Primeiro, calcula-se o ponto de parada do bloco sobre a rampa. Para isso, analisa-se primeiramente a dinâmica do bloco:



Em que  $\alpha$  é tal que:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \text{sen } \alpha = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Portanto, a desaceleração do bloco é:

$$a = -g(\text{sen } \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) = -10 \left( \frac{3}{5} + \frac{1}{20} \cdot \frac{4}{5} \right) = -6,4 \text{ m/s}^2$$

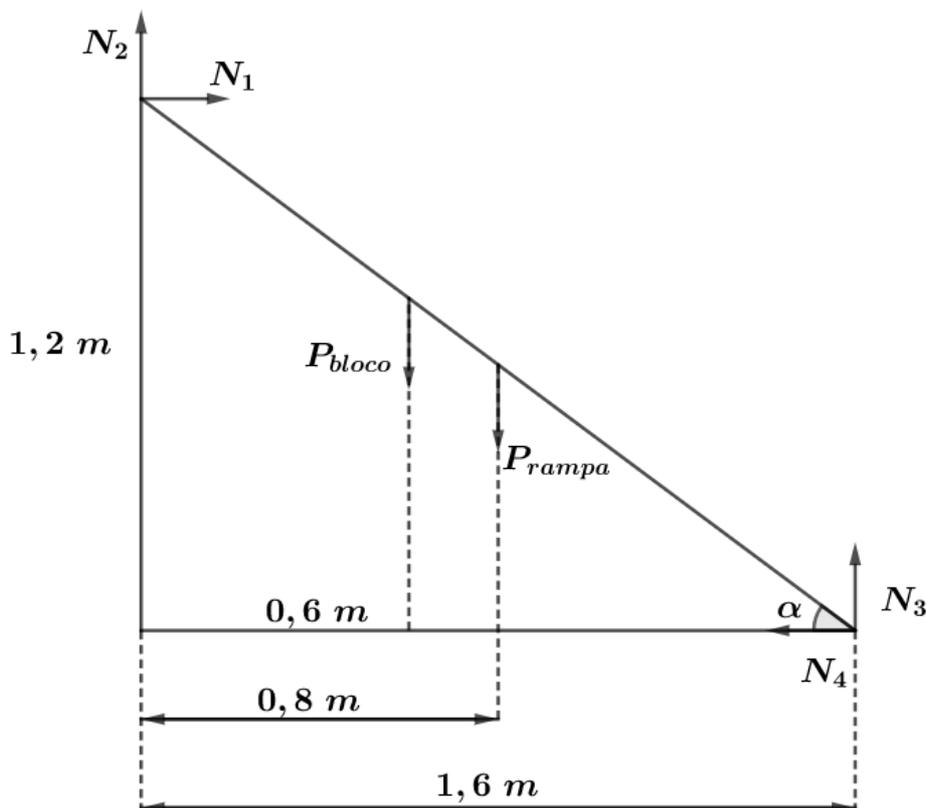
A distância percorrida pelo bloco sobre a rampa, portanto, é:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S$$

$$0 = 16 - 12,8 \cdot \Delta S$$

$$\Delta S = 1,25 \text{ m}$$

Portanto, as forças atuando sobre a rampa no momento de parada do bloco ficam:



Pelo equilíbrio translacional:

$$\begin{cases} N_2 + N_3 = P_{rampa} + P_{bloco} \\ N_1 = N_4 \end{cases}$$

Substituindo-se  $N_3$ ,  $P_{rampa}$ ,  $P_{bloco}$ ,  $\alpha$  e  $\mu$ :

$$N_2 = 190 + 50 - 89 \Rightarrow N_2 = 151 \text{ N}$$

Pelo equilíbrio rotacional em relação ao canto esquerdo inferior (abaixo do apoio A):

$$N_1 \cdot 1,2 + P_{bloco} \cdot 0,6 + P_{rampa} \cdot 0,8 = N_3 \cdot 1,6 \Rightarrow 1,2N_1 = 89 \cdot 1,6 - 190 \cdot 0,8 - 50 \cdot 0,6$$

$$N_1 = -\frac{39,6}{1,2} = -33 \text{ N}$$

E, pelo equilíbrio translacional:

$$N_4 = N_1 = -33 \text{ N}$$

O sinal de menos indica que o sentido atribuído ao vetor estava errado.

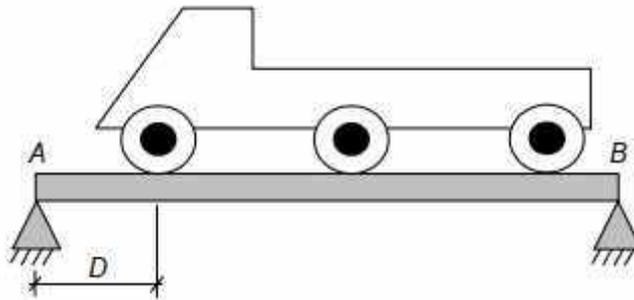
**Gabarito:**

reações em A  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Horizontal: } 33 \text{ N para a esquerda} \\ \text{Vertical: } 151 \text{ N para cima} \end{array} \right.$

reações em B  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Horizontal: } 33 \text{ N para a direita} \\ \text{Vertical: } 89 \text{ N para cima} \end{array} \right.$



44. (IME – 2008)

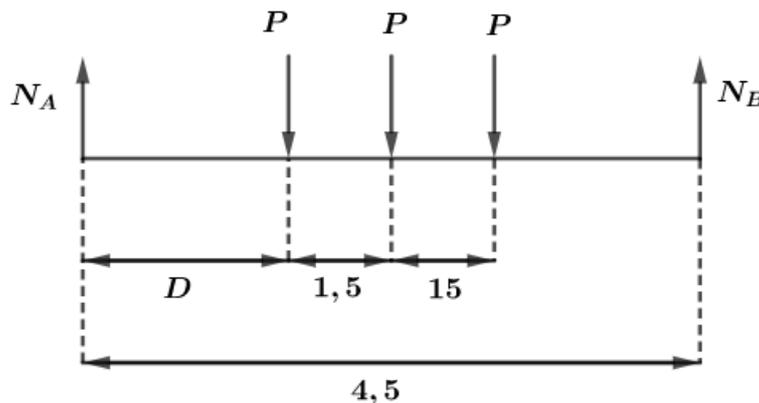


Um caminhão de três eixos se desloca sobre uma viga biapoiada de 4,5 m de comprimento, conforme ilustra a figura acima. A distância entre os eixos do caminhão é 1,5 m e o peso por eixo aplicado à viga é 150 kN. Desprezando o peso da viga, para que a reação vertical do apoio A seja o dobro da reação vertical no apoio B, a distância D entre o eixo dianteiro do caminhão e o apoio A deverá ser

- a) 0 m
- b) 0,3 m
- c) 0,6 m
- d) 0,9 m
- e) 1,2 m

**Comentários:**

As forças sobre a viga estão representadas a seguir:



Pelo equilíbrio translacional:

$$N_A + N_B = 3P$$

Pelo equilíbrio rotacional com polo em A:

$$P \cdot D + P \cdot (1,5 + D) + P \cdot (3 + D) = N_B \cdot 4,5$$

Como deseja-se que a reação em A seja o dobro de B:

$$N_A = 2N_B \Rightarrow N_B = P$$

Substituindo no equilíbrio rotacional:

$$D + 1,5 + D + 3 + D = 4,5$$

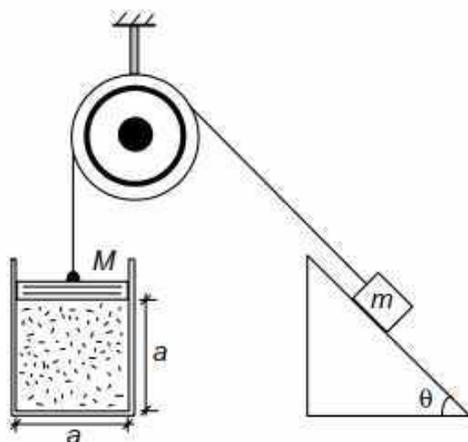
$$D = 0$$

**Gabarito: A**

**45. (IME – 2008)**

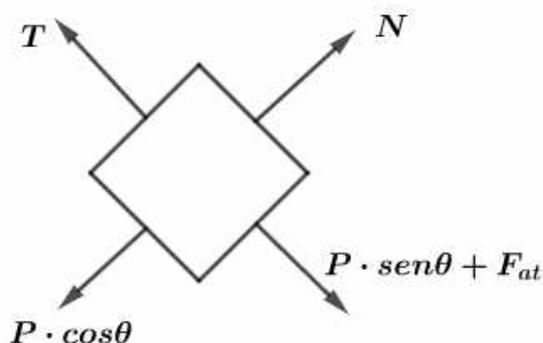
Em um recipiente, hermeticamente fechado por uma tampa de massa  $M$ , com volume interno na forma de um cubo de lado  $a$ , encontram-se  $n$  mols de um gás ideal a uma temperatura absoluta  $T$ . A tampa está presa a uma massa  $m$  por um fio que passa por uma roldana, ambos ideais. A massa  $m$  encontra-se na iminência de subir um plano inclinado de ângulo  $\theta$  com a horizontal e coeficiente de atrito estático  $\mu$ . Considerando que as variáveis estejam no Sistema Internacional e que não exista atrito entre a tampa  $M$  e as paredes do recipiente, determine  $m$  em função das demais variáveis.

Dados: aceleração da gravidade =  $g$ , constante universal dos gases perfeitos =  $R$ .



**Comentários:**

Analisando as forças que atuam sobre o bloco:



Como o bloco está na iminência de subir, a resultante ainda é 0. Portanto:

$$\begin{cases} N = P \cdot \cos \theta \\ T = P \cdot \text{sen } \theta + \mu N = P \cdot \text{sen } \theta + \mu P \cdot \cos \theta \end{cases}$$

$$T = P(\text{sen } \theta + \mu \cdot \cos \theta) = mg(\cdot \text{sen } \theta + \mu \cdot \cos \theta)$$

Agora, analisa-se o êmbolo:

$$T + P_{gás} \cdot A = M \cdot g + P_{atm} \cdot A$$
$$P_{gás} = \frac{M \cdot g - m \cdot g \cdot (\text{sen } \theta + \mu \cdot \text{cos } \theta)}{a^2} + P_{atm}$$

Pela equação de Clapeyron:

$$P_{gás} \cdot V = n \cdot R \cdot T$$
$$\left( \frac{M \cdot g - m \cdot g (\text{sen } \theta + \mu \cdot \text{cos } \theta)}{a^2} + P_{atm} \right) a^3 = n \cdot R \cdot T$$
$$a(M \cdot g - m \cdot g (\text{sen } \theta + \mu \cdot \text{cos } \theta)) + P_{atm} \cdot a^3 = n \cdot R \cdot T$$
$$M \cdot g - m \cdot g (\text{sen } \theta + \mu \cdot \text{cos } \theta) = \frac{n \cdot R \cdot T - P_{atm} \cdot a^3}{a}$$
$$m \cdot g (\text{sen } \theta + \mu \cdot \text{cos } \theta) = \frac{M \cdot g \cdot a - nRT + P_{atm} \cdot a^3}{a}$$
$$m = \frac{M \cdot g \cdot a - n \cdot R \cdot T + P_{atm} \cdot a^3}{a \cdot g (\text{sen } \theta + \mu \cdot \text{cos } \theta)}$$

---

**Gabarito:**  $m = \frac{M \cdot g \cdot a - n \cdot R \cdot T + P_{atm} \cdot a^3}{g \cdot a (\mu \text{cos } \theta + \text{sen } \theta)}$

#### 46. (IME – 2009)

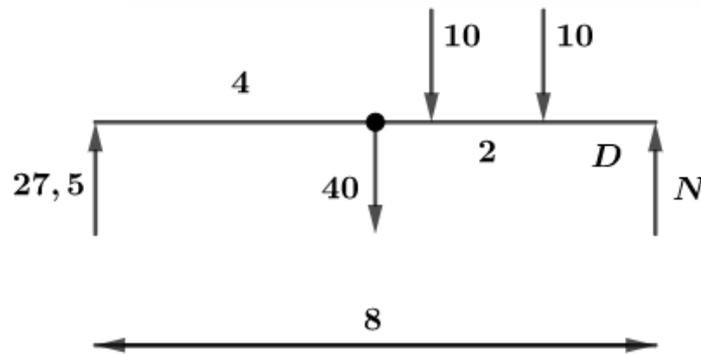
Uma viga de 8,0 m de comprimento, apoiada nas extremidades, tem peso de 40 kN. Sobre ela, desloca-se um carro de 20 kN de peso, cujos 2 eixos de roda distam entre si 2,0 m. No instante em que a reação vertical em um apoio é 27,5 kN, um dos eixos do carro dista, em metros, do outro apoio

- a) 1,0
- b) 1,5
- c) 2,0
- d) 2,5
- e) 3,0

**Comentários:**

Analisando a viga:





Pelo equilíbrio translacional:

$$N = 32,5 \text{ kN}$$

Pelo equilíbrio rotacional (com polo no apoio da direita):

$$10D + 10(D + 2) + 40 \cdot 4 = 27,5 \cdot 8 \Rightarrow 20D = 220 - 160 - 20$$

$$D = 2 \text{ m}$$

**Gabarito: C**

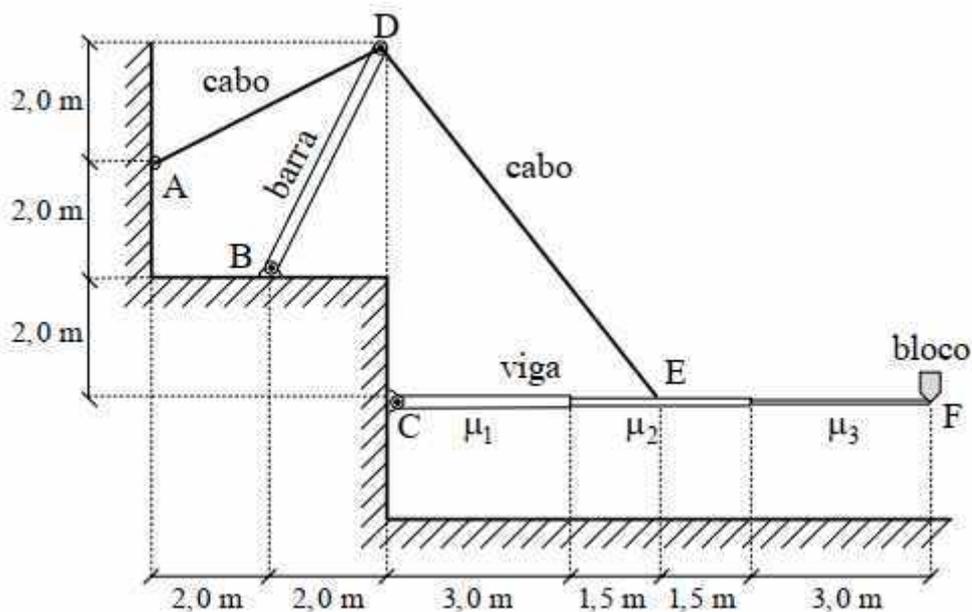
#### 47. (IME – 2009)

A figura mostra uma estrutura em equilíbrio, formada por uma barra  $BD$ , dois cabos  $AD$  e  $DE$ , e uma viga horizontal  $CF$ . A barra é fixada em  $B$ . Os cabos, de seção transversal circular de  $5 \text{ mm}$  de diâmetro, são inextensíveis e fixados nos pontos  $A, D$  e  $E$ . A viga de material uniforme e homogêneo é apoiada em  $C$  e sustentada pelo cabo  $DE$ . Ao ser colocado um bloco de  $100 \text{ kg}$  de massa na extremidade  $F$  da viga. determine:

- a) a força no trecho  $ED$  do cabo;
- b) as reações horizontal e vertical no apoio  $C$  da viga;
- c) as reações horizontal e vertical no apoio  $B$  da barra.

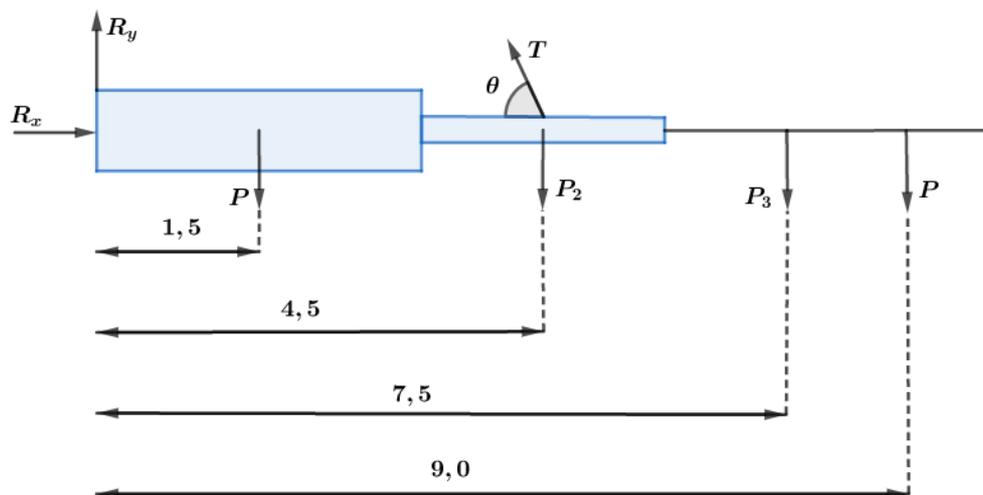
Dados: aceleração da gravidade:  $10 \text{ m/s}^2$ ; densidades lineares de massa:  $\mu_1 = 30 \text{ kg/m}$ ,  $\mu_2 = 20 \text{ kg/m}$ ,  $\mu_3 = 10 \text{ kg/m}$ ;  $\sqrt{20} \approx 4,5$ .





**Comentários:**

Situação da viga:



E pelas dimensões do problema, sabe-se que:

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{4}{5}$$

Pela análise do equilíbrio rotacional com polo no apoio C:

$$1,5 \cdot P_1 + 4,5 \cdot P_2 + 7,5 \cdot P_3 + 9 \cdot P = 4,5 \cdot T \cdot \text{sen } \theta$$

Calculando os pesos:

$$P_1 = 30 \cdot 3 \cdot 10 = 900 \text{ N}$$

$$P_2 = 20 \cdot 3 \cdot 10 = 600 \text{ N}$$

$$P_3 = 10 \cdot 3 \cdot 10 = 300 \text{ N} \Rightarrow P = 1000 \text{ N}$$

Substituindo:

$$1350 + 2700 + 2250 + 9000 = 3,6T \Rightarrow T = 4250 \text{ N}$$

Pelo equilíbrio translacional da viga:

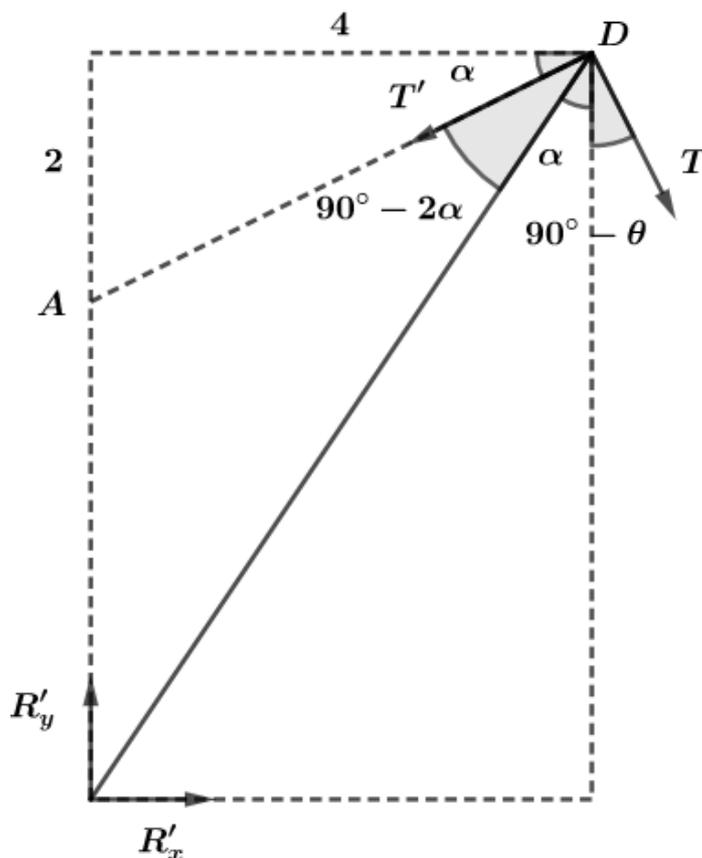
$$\begin{cases} R_y = P_1 + P_2 + P_3 + P - T \cdot \text{sen } \theta \\ R_x = T \cdot \text{cos } \theta \end{cases}$$

Substituindo:

$$\begin{cases} R_y = 900 + 600 + 300 + 1000 - 4250 \cdot \frac{4}{5} \\ R_x = 4250 \cdot \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 2550 \text{ N} \\ R_y = -600 \text{ N} \end{cases}$$

Portanto, o sentido de  $R_y$  é contrário ao indicado na figura.

Finalmente, situação da barra:



Por trigonometria:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } 2\alpha = \frac{4}{5} = \cos(90^\circ - 2\alpha) \\ \cos 2\alpha = \frac{3}{5} = \text{sen}(90^\circ - 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(90^\circ - \theta) = \frac{4}{5} \\ \text{sen}(90^\circ - \theta) = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(90^\circ - \theta + \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos(90^\circ - \theta + \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$



Fazendo o equilíbrio rotacional em torno de B:

$$T' \cdot \text{sen}(90^\circ - 2\alpha) \cdot 2\sqrt{5} = T \cdot \text{sen}(90^\circ - \theta + \alpha) \cdot 2\sqrt{5}$$

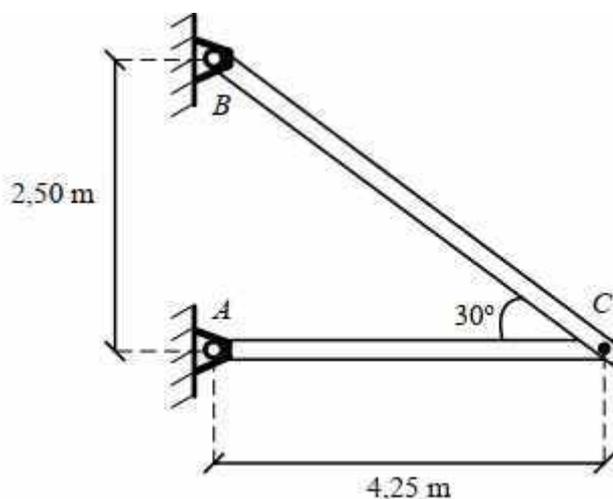
$$T' \cdot \frac{3}{5} = T \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow T' = \frac{2\sqrt{5}}{3} 4250 = \frac{8500\sqrt{5}}{3}$$

Agora, para o equilíbrio translacional:

$$\begin{cases} R_x = T' \cdot \cos \alpha - T \cdot \cos \theta \\ R_y = T' \cdot \text{sen} \alpha + T \cdot \text{sen} \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = \frac{8500\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} - 4250 \cdot 0,6 \\ R_y = \frac{8500\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + 4250 \cdot 0,8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = \frac{9350}{3} \text{ N} \\ R_y = \frac{18700}{3} \text{ N} \end{cases}$$

**Gabarito:** a)  $T = 4250 \text{ N}$  b)  $F_{c_x} = 2550 \text{ N}$   $F_{c_y} = 600 \text{ N}$  c)  $F_{B_x} = \frac{9350}{3} \text{ N}$   $F_{B_y} = \frac{18700}{3} \text{ N}$

48. (IME – 2010)



A figura mostra duas barras  $AC$  e  $BC$  que suportam, em equilíbrio, uma força  $F$  aplicada no ponto  $C$ . Para que os esforços nas barras  $AC$  e  $BC$  sejam, respectivamente,  $36 \text{ N}$  (compressão) e  $160 \text{ N}$  (tração), o valor e o sentido das componentes vertical e horizontal da força  $F$  devem ser:

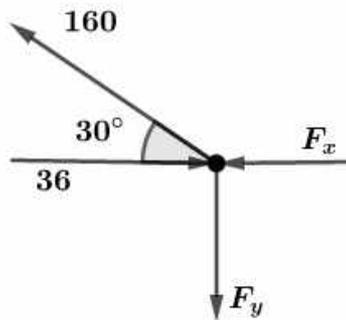
Observação: Despreze os pesos das barras e adote  $\sqrt{3} = 1,7$ .

- a)  $80 \text{ N}$  ( $\downarrow$ ),  $100 \text{ N}$  ( $\rightarrow$ )
- b)  $100 \text{ N}$  ( $\downarrow$ ),  $80 \text{ N}$  ( $\rightarrow$ )
- c)  $80 \text{ N}$  ( $\uparrow$ ),  $100 \text{ N}$  ( $\leftarrow$ )
- d)  $100 \text{ N}$  ( $\uparrow$ ),  $80 \text{ N}$  ( $\leftarrow$ )
- e)  $100 \text{ N}$  ( $\downarrow$ ),  $80 \text{ N}$  ( $\leftarrow$ )

**Comentários:**



Situação no nó C:



$$\begin{cases} F_x = 36 - 160 \cdot \cos 30^\circ \\ F_y = 160 \cdot \sin 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = 36 - \frac{160\sqrt{3}}{2} = 36 - 80 \cdot 1,7 = -100 \text{ N} \\ F_y = 80 \text{ N} \end{cases}$$

O sinal negativo implica que o sinal indicado na figura está errado. Portanto, a resposta correta é letra A.

**Gabarito: A**

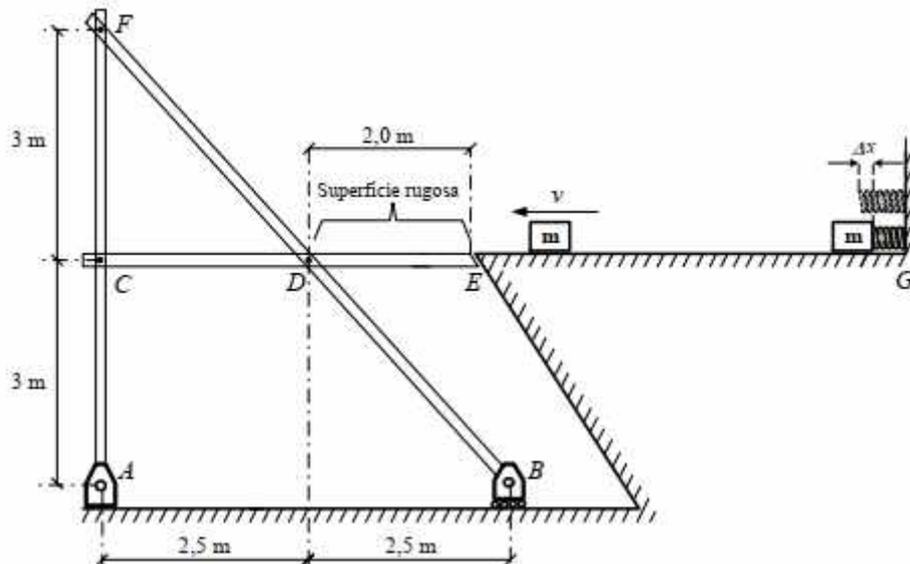
#### 49. (IME – 2010)

Uma mola com constante elástica  $k$ , que está presa a uma parede vertical, encontra-se inicialmente comprimida de  $\Delta x$  por um pequeno bloco de massa  $m$ , conforme mostra a figura. Após liberado do repouso, o bloco desloca-se ao longo da superfície horizontal lisa  $EG$ , com atrito desprezível, e passa a percorrer um trecho rugoso  $DE$  até atingir o repouso na estrutura (que permanece em equilíbrio), formada por barras articuladas com peso desprezível. Determine os valores das reações horizontal e vertical no apoio  $A$  e da reação vertical no apoio  $B$ , além das reações horizontal e vertical nas ligações em  $C$ ,  $D$  e  $F$ .

Dados:

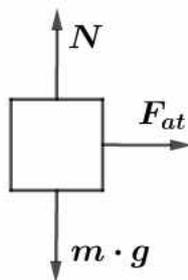
- constante elástica:  $k = 100 \text{ kN/m}$ ;
- compressão da mola:  $\Delta x = 2 \text{ cm}$ ;
- massa do bloco:  $m = 10 \text{ kg}$ ;
- coeficiente de atrito cinético do trecho  $DE$ :  $\mu_c = 0,20$ ;
- aceleração gravitacional:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .





**Comentários:**

Primeiro, calcula-se o ponto de parada do bloco  $m$ . Para isso, primeiro calcula-se a desaceleração na superfície rugosa:



$$a = -\mu g = -0,2 \cdot 10 = -2 \text{ m/s}^2$$

Portanto, utilizando Torricelli:

$$0 = v^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S$$

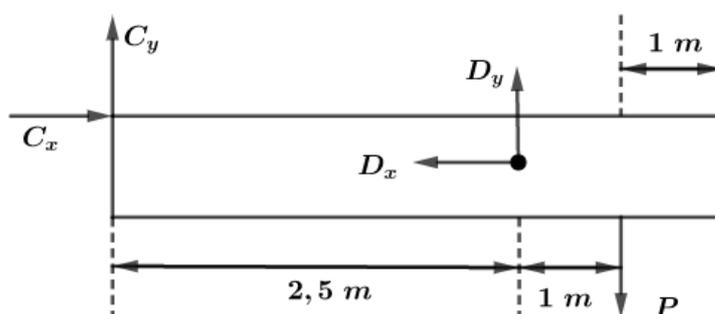
E pela conservação de energia:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{kx^2}{m} = 10^5 \cdot \frac{(2 \cdot 10^{-2})^2}{10} = 4$$

Substituindo em Torricelli:

$$0 = 4 - 4 \cdot \Delta S \Rightarrow \Delta S = 1 \text{ m}$$

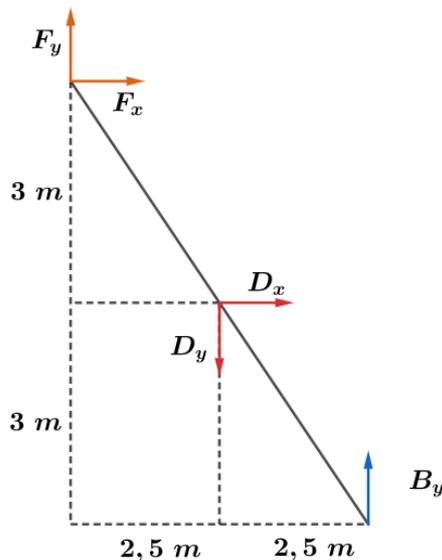
Agora, fazendo a análise da estrutura:



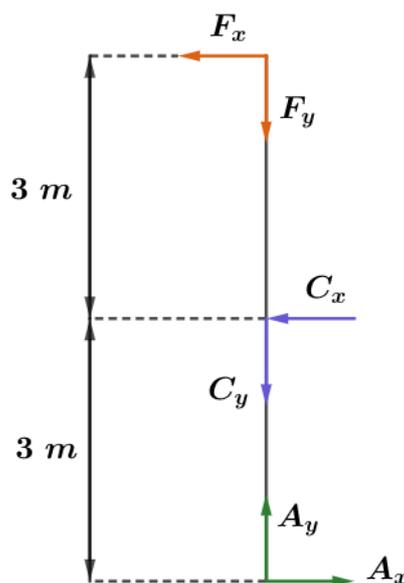
$$\begin{cases} D_x = C_x \text{ (I)} \\ C_y + D_y = P \\ P = 2D_y + 4,5C_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_x = C_x \\ C_y + D_y = P \\ 2,5C_y = -P \end{cases}$$

$$C_y = -\frac{2P}{5} = -40 \text{ N}$$

$$D_y = \frac{7P}{5} = 140 \text{ N}$$



$$\begin{cases} F_y + B_y = D_y \text{ (II)} \\ D_x + F_x = 0 \text{ (III)} \\ 3F_x + 2,5F_y = 2,5B_y \text{ (IV)} \end{cases}$$



$$\begin{cases} F_y + C_y = A_y \text{ (V)} \\ F_x + C_x = A_x \text{ (VI)} \\ 3C_x + 6F_x = 0 \text{ (VII)} \end{cases}$$

Com (I) e (III):

$$C_x + F_x = 0 \text{ (VIII)}$$



Com (VIII) em (VI):

$$A_x = 0$$

Com (VIII) em (VII):

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ C_x = 0 \end{cases}$$

Logo, por (I):

$$D_x = 0$$

Reescrevendo (IV):

$$F_y = B_y \text{ (IX)}$$

Com (IX) em (II):

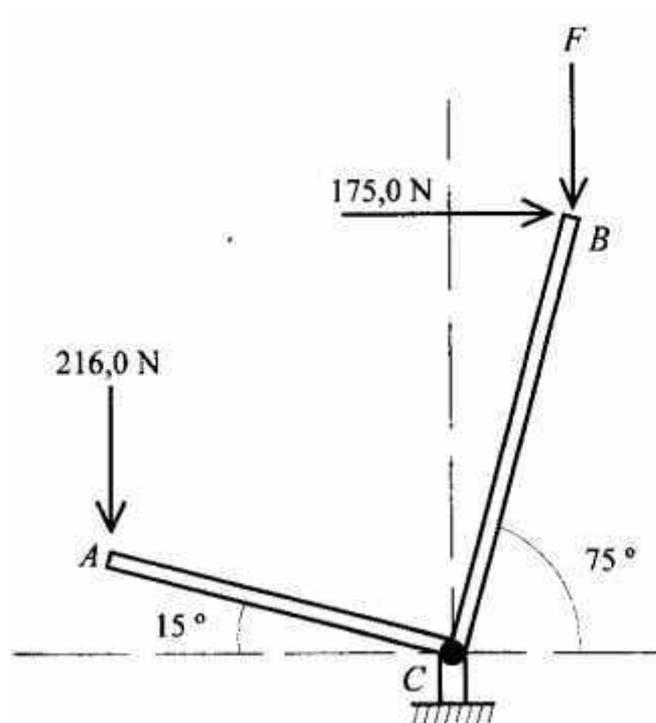
$$F_y = B_y = \frac{D_y}{2} = 70 \text{ N}$$

Substituindo tudo em (V):

$$70 - 40 = A_y \Rightarrow A_y = 30 \text{ N}$$

**Gabarito:**  $D_y = 140 \text{ N}$ ,  $C_y = 40 \text{ N}$ ,  $A_x = 0$ ,  $C_x = 0$ ,  $D_x = F_x = 0$ ,  $B_y = 70 \text{ N}$ ,  $F_y = 70 \text{ N}$ ,  $A_y = 30 \text{ N}$ .

50. (IME – 2011)



A figura acima apresenta um perfil metálico  $AB$ , com dimensões  $AC = 0,20 \text{ m}$  e  $CB = 0,18 \text{ m}$ , apoiado em  $C$  por meio de um pino sem atrito. Admitindo-se desprezível o peso do

perfil  $AB$ , o valor da força vertical  $F$ , em newtons, para que o sistema fique em equilíbrio na situação da figura é:

Dados:

•  $\text{sen}(15^\circ) = 0,26$

•  $\text{cos}(15^\circ) = 0,97$

a) 242,5

b) 232,5

c) 222,5

d) 212,5

e) 210,5

**Comentários:**

Igualando a zero o momento com C como polo:

$$216 \cdot 0,2 \cdot \cos 15^\circ = 175 \cdot 0,18 \cdot \text{sen } 75^\circ + F \cdot 0,18 \cdot \cos 75^\circ$$

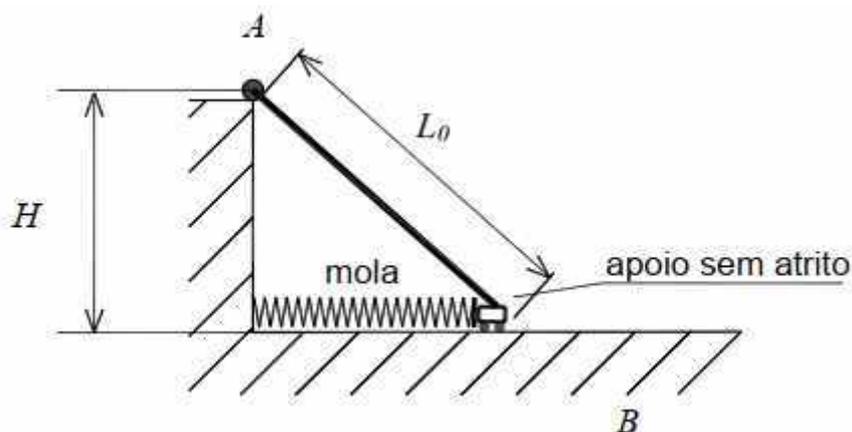
Substituindo:

$$43,2 \cdot 0,97 = 31,5 \cdot 0,97 + F \cdot 0,18 \cdot 0,26$$

$$F = \frac{0,97(43,2 - 31,5)}{0,18 \cdot 0,26} = 242,5 \text{ N}$$

**Gabarito: A**

**51. (IME – 2011)**



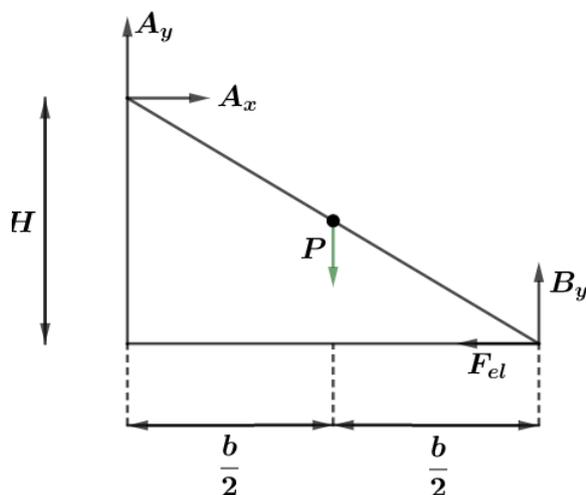
A figura acima mostra um sistema composto por uma parede vertical com altura  $H$ , uma barra com comprimento inicial  $L_0$  e uma mola. A barra está apoiada em uma superfície horizontal sem atrito e presa no ponto  $A$  por um vínculo, de forma que esta possa girar no plano da figura. A mola, inicialmente sem deformação, está conectada à parede vertical e à barra.

Após ser aquecida, a barra atinge um novo estado de equilíbrio térmico e mecânico. Nessa situação a força de reação vertical no apoio  $B$  tem módulo igual a  $30\text{ N}$ . Determine a quantidade de calor recebida pela barra.

Dados:

- $H = 3\text{ m}$ ;
- $L_0 = 3\sqrt{2}\text{ m}$ ;
- o peso da barra:  $P = 30\text{ N}$ ;
- constante elástica da mola:  $k = 20\text{ N/m}$ ;
- $\frac{P \cdot c}{g \cdot \alpha} = \frac{50 + 30\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$  joules, onde  $c$  é o calor específico da barra;  $\alpha$  é o coeficiente de dilatação linear da barra;  $g$  é a aceleração da gravidade; e  $P$  é o peso da barra.

Comentários:

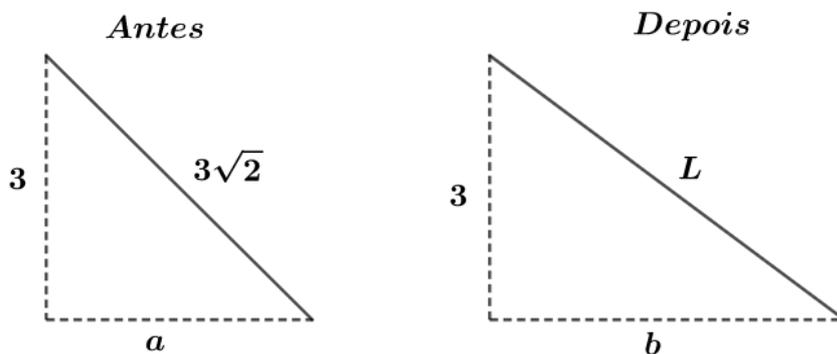


Fazendo momento nulo em relação à A:

$$\frac{P \cdot b}{2} + F_{el} \cdot H = B_y \cdot b \Rightarrow 15 \cdot b + 20 \cdot x \cdot 3 = 30 \cdot b$$

$$15 \cdot b = 60 \cdot x \Rightarrow b = 4x$$

Comparemos a geometria inicial com final:



Da inicial:



$$3^2 + a^2 = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow a = 3$$

Da final:

$$\begin{cases} x = b - a \\ b = 4x \end{cases} \Rightarrow a = 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \text{ e } b = 4$$

Portanto:

$$3^2 + 4^2 = L^2 \Rightarrow L = 5$$

Pela dilatação térmica:

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

Onde:

- $\Delta L$  é a variação do comprimento;
- $\Delta T$  é a variação de temperatura.

$$\Delta L = 5 - 3\sqrt{2} \Rightarrow \Delta T = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\alpha}$$

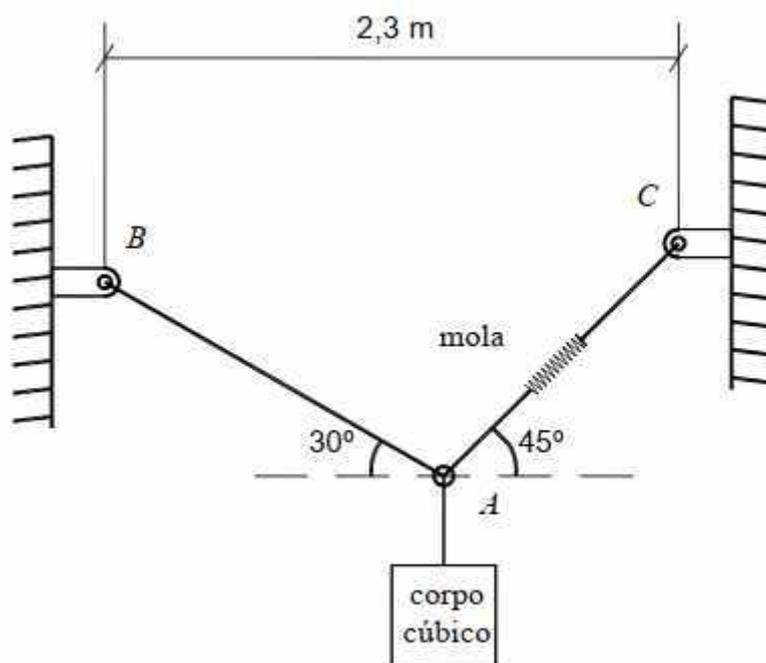
Agora, sabendo-se da variação de temperatura:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

$$Q = m \cdot c \cdot \frac{5 - 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\alpha} = \frac{P}{g} \cdot \frac{c}{\alpha} \cdot \left( \frac{5 - 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \right) = 10 \cdot \frac{5 + 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{5 - 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 10 \cdot \frac{7}{18} = \frac{70}{18} = \frac{35}{9} \text{ J}$$

**Gabarito:**  $Q = \frac{35}{9} \text{ J}$

**52. (IME – 2012)**



A figura acima mostra um corpo cúbico de 50 cm de aresta suspenso por dois cabos AB e AC em equilíbrio. Sabe-se que o peso específico volumétrico do material do corpo cúbico, a rigidez da mola do cabo AC e o comprimento do cabo AC antes da colocação do corpo cúbico são iguais a  $22,4 \text{ kN/m}^3$ ,  $10,0 \text{ kN/m}$  e  $0,5 \text{ m}$ . O valor do comprimento do cabo AB, em metros, após a colocação do corpo cúbico é

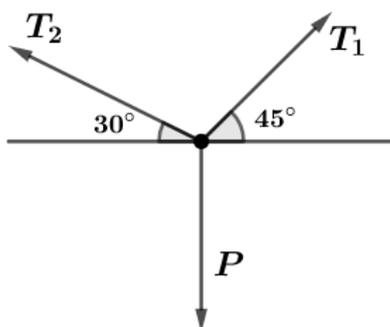
Adote:

$$\sqrt{3} = 1,73 \text{ e } \sqrt{2} = 1,41$$

- a) 1,0
- b) 1,5
- c) 2,0
- d) 2,5
- e) 3,0

### Comentários:

A situação de equilíbrio final é:



Pelo equilíbrio:

$$\begin{cases} T_1 \cdot \cos 45^\circ = T_2 \cdot \cos 30^\circ \\ T_1 \cdot \sin 45^\circ + T_2 \cdot \sin 30^\circ = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 \sqrt{2} = T_2 \sqrt{3} \\ \frac{T_1 \sqrt{2}}{2} + T_2 \cdot \frac{1}{2} = P \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda:

$$\frac{T_2}{2} (\sqrt{3} + 1) = P$$

Logo:

$$T_2 = P(\sqrt{3} - 1)$$

Assim:

$$T_1 = \frac{P(\sqrt{3} - 1)\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{P(3 - \sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \frac{P(3\sqrt{2} - \sqrt{6})}{2}$$

Mas:

$$T_1 = k \cdot x$$

$$x = \frac{P(3\sqrt{2} - \sqrt{6})}{2k} = (0,5)^3 \cdot 22,4 \cdot 10^3 \cdot \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2 \cdot 10^4}$$

$$x = 0,25 \text{ m}$$

Portanto, o comprimento de AC é:

$$AC = 0,5 + 0,25 = 0,75 \text{ m}$$

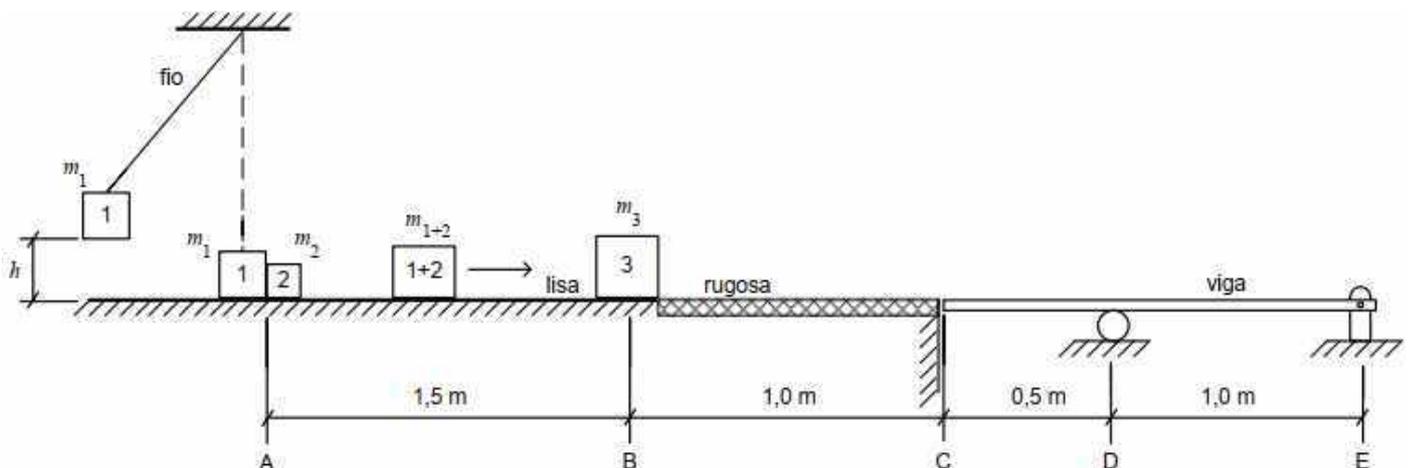
Pela geometria do problema:

$$AB \cdot \cos 30^\circ + AC \cdot \cos 45^\circ = 2,3 \Rightarrow AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,3$$

$$AB = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left( 2,3 - \frac{3\sqrt{2}}{8} \right) \approx 2,048 \text{ m}$$

**Gabarito: C**

**53. (IME – 2012)**



Um corpo de massa  $m_1 = 4 \text{ kg}$  está em repouso suspenso por um fio a uma altura  $h$  do solo, conforme mostra a figura acima. Ao ser solto, choca-se com o corpo  $m_2$  de  $2 \text{ kg}$  no ponto A, despreendendo-se do fio. Após o choque, os corpos  $m_1$  e  $m_2$  passam a deslizar unidos sobre uma superfície lisa e colidem com um corpo em repouso, de massa  $m_3 = 8 \text{ kg}$ . Nesse ponto, o conjunto  $m_1 + m_2$  para e o corpo  $m_3$  move-se em uma superfície rugosa de coeficiente de atrito cinético igual a  $0,45$ , estacionando no ponto C, situado na extremidade da viga CE. A viga é constituída por um material uniforme e homogêneo, cuja massa específica linear é  $4 \text{ kg/m}$ . Determine:

- a altura  $h$ ;
- o valor e o sentido da reação vertical do apoio E depois que o corpo  $m_3$  atinge o ponto C da viga.

Dado:

aceleração da gravidade:  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Observação:

Considerar que os corpos  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  apresentam dimensões desprezíveis.

**Comentários:**

a)

Fazendo-se a conservação de energia para o corpo  $m_1$ , tem-se:

$$v = \sqrt{2gh}$$

No choque, considera-se a conservação da quantidade de movimento:

$$m_1 \cdot v = m_3 \cdot v'$$

Em seguida, aplica-se Torricelli ao corpo 3:

$$0 = v'^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S \Rightarrow a = -\frac{v'^2}{2\Delta S}$$

Pela dinâmica do bloco, a aceleração é calculada por:

$$a = -\frac{F_{at}}{m} = -\frac{\mu \cdot m \cdot g}{m} = -\mu g$$

Igualando as equações:

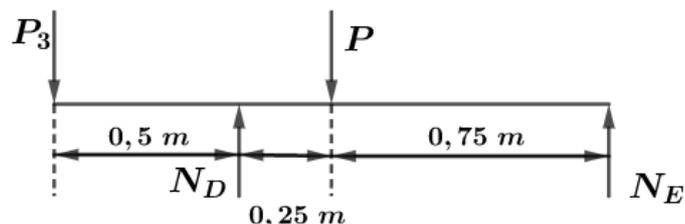
$$\frac{v'^2}{2\Delta S} = \mu g \Rightarrow \frac{\left(\frac{m_1}{m_3}\right)^2 v^2}{2\Delta S} = \mu g$$

Substituindo:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 20h}{2} = 0,45 \cdot 10 \Rightarrow \frac{5h}{2} = 4,5$$
$$5h = 9 \Rightarrow h = 1,8 \text{ m}$$

b)

Analisando as forças que atuam sobre a viga:



Pelo equilíbrio rotacional em torno de D:

$$0,5P_3 + N_E \cdot 1 = P \cdot 0,25$$

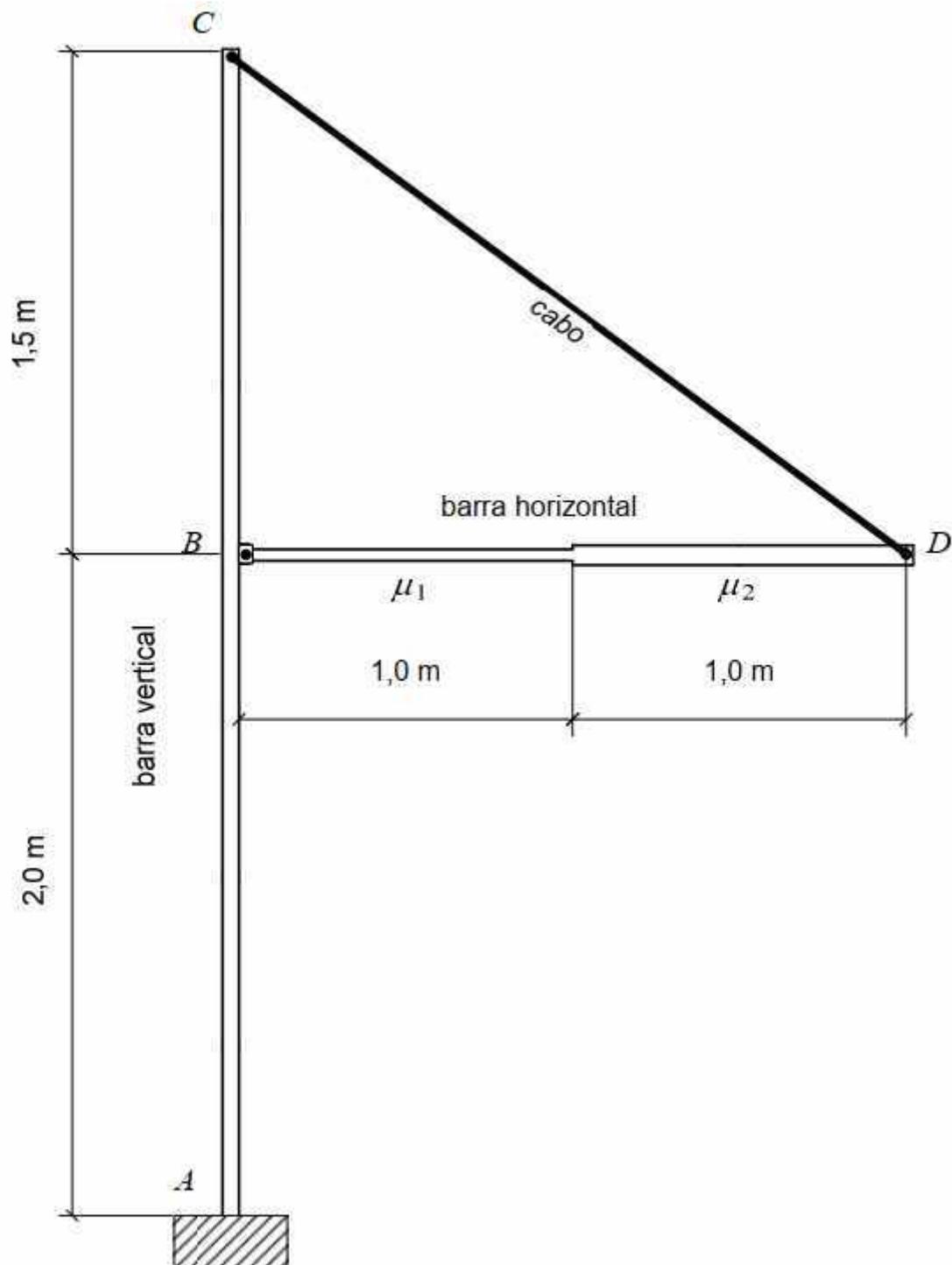
Substituindo:

$$0,5 \cdot 80 + N_E = 15 \Rightarrow N_E = -25 \text{ N}$$

O sentido adotado na figura, portanto, estava errado, isto é, a força atua para baixo.

Gabarito: a)  $h = 1,8 \text{ m}$  b)  $N_E = 25 \text{ N}$ , para baixo

54. (IME – 2013)



A figura acima mostra uma estrutura em equilíbrio, formada por uma barra vertical  $AC$  e um cabo  $CD$ , de pesos desprezíveis, e por uma barra horizontal  $BD$ . A barra vertical é fixada em  $A$  e apoia a barra horizontal  $BD$ . O cabo de seção transversal de  $100 \text{ mm}^2$  de área é inextensível e está preso nos pontos  $C$  e  $D$ . A barra horizontal é composta por dois materiais de densidades lineares de massa  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Diante do exposto, a força normal por unidade de área, em  $\text{MPa}$ , no cabo  $CD$  é:

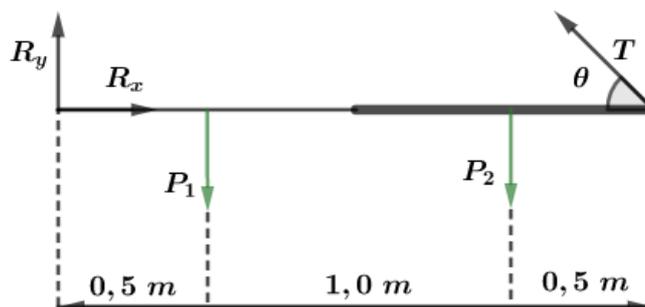
Dados:

- aceleração da gravidade:  $10 \text{ m/s}^2$ ;
- densidades lineares de massa:  $\mu_1 = 600 \text{ kg/m}$  e  $\mu_2 = 800 \text{ kg/m}$ .

- a) 100
- b) 125
- c) 150
- d) 175
- e) 200

**Comentários:**

Analisando a barra B:



Existem 5 forças sobre a barra, duas são conhecidas, uma deseja-se encontrar e as demais coincidem em um só ponto. Por esse motivo, é imediato analisar o torque em relação ao ponto de encontro das forças indesejadas (reações de B). Assim:

$$P_1 \cdot 0,5 + P_2 \cdot 1,5 = T \cdot \text{sen } \theta \cdot 2$$

Pela figura:

$$\text{sen } \theta = \frac{3}{5}$$

Pelos dados do problema:

$$P_1 = 600 \cdot 1 \cdot 10 = 6 \cdot 10^3 \text{ N} \Rightarrow P_2 = 8 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Substituindo:

$$3 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^3 = T \cdot \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{75}{6} \cdot 10^3 = T \Rightarrow T = 12,5 \cdot 10^3 \text{ N}$$

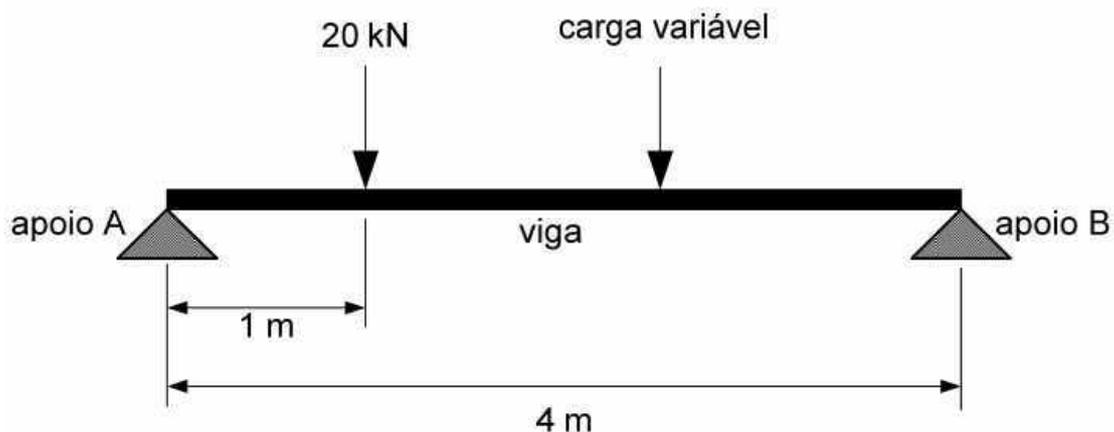
Como deseja-se a força pela área no cabo:

$$\frac{T}{A} = \frac{12,5 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{8} \cdot 10^9 = \frac{1000}{8} \cdot 10^6 \text{ Pa} = 125 \text{ MPa}$$

**Gabarito: B**



55. (IME – 2014)



A figura acima mostra uma viga em equilíbrio. Essa viga mede 4 m e seu peso é desprezível. Sobre ela, há duas cargas concentradas, sendo uma fixa e outra variável. A carga fixa de 20 kN está posicionada a 1 m do apoio A, enquanto a carga variável só pode se posicionar entre a carga fixa e o apoio B. Para que as reações verticais (de baixo para cima) dos apoios A e B sejam iguais a 25 kN e 35 kN, respectivamente, a posição da carga variável, em relação ao apoio B, e o seu módulo devem ser

- a) 1,0 m e 50 kN
- b) 1,0 m e 40 kN
- c) 1,5 m e 40 kN
- d) 1,5 m e 50 kN
- e) 2,0 m e 40 kN

**Comentários:**

Chamando de  $x$  a distância entre a carga variável e B, analisa-se o equilíbrio translacional e rotacional (em torno de B):

$$\begin{cases} 20 + P = R_A + R_B \\ Px + 20 \cdot 3 = R_A \cdot 4 \end{cases}$$

Substituindo  $R_A$  e  $R_B$ :

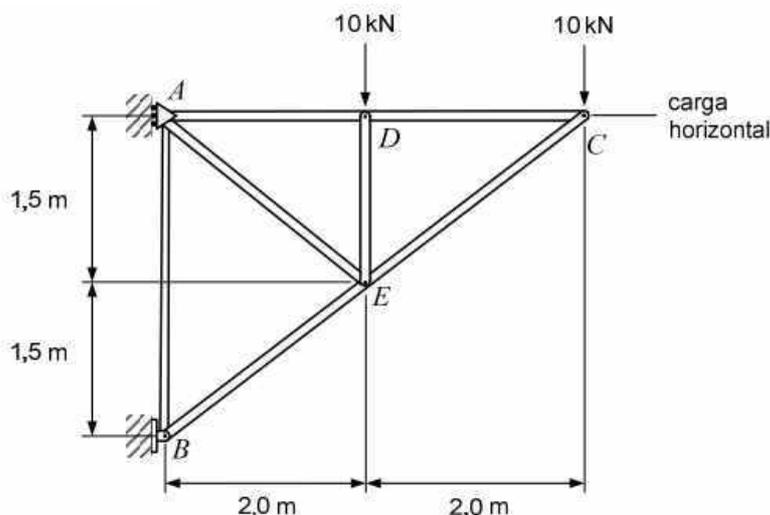
$$\begin{cases} P = 60 - 20 = 40 \\ Px = 100 - 60 = 40 \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} P = 40 \\ x = 1 \end{cases}$$

**Gabarito: B**

56. (IME – 2014)

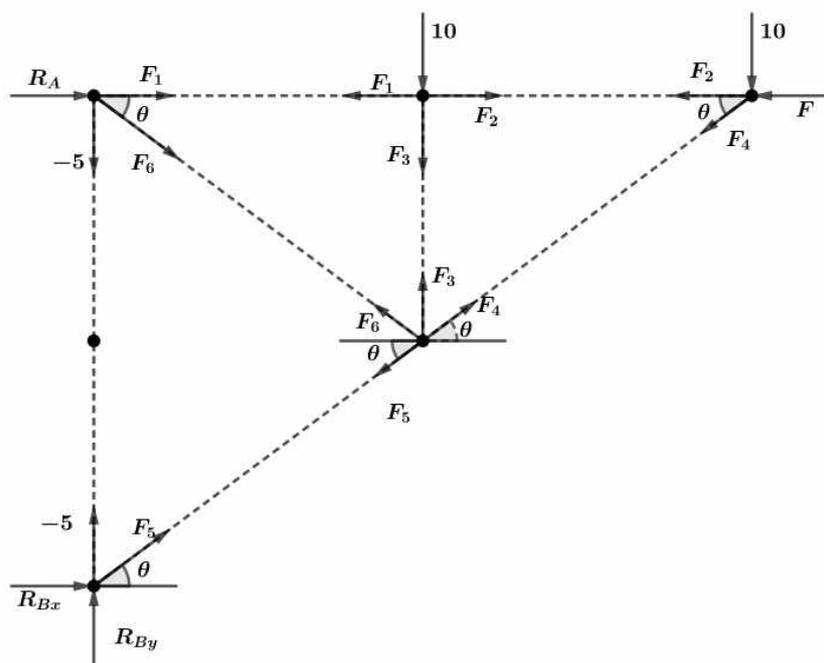


A figura acima mostra uma estrutura em equilíbrio de peso desprezível em relação ao carregamento externo. As barras desta estrutura só resistem aos esforços normais de tração ou de compressão. Sobre o nó  $D$  há uma carga vertical concentrada de  $10\text{ kN}$ , enquanto no nó  $C$  há uma carga vertical concentrada de  $10\text{ kN}$  e uma carga horizontal. Sabendo que o apoio  $A$  não restringe o deslocamento vertical e a força de compressão na barra  $AB$  é  $5\text{ kN}$ , determine:

- a intensidade, em  $\text{kN}$ , e o sentido da carga horizontal no nó  $C$ ;
- as reações de apoio, em  $\text{kN}$ , nos nós  $A$  e  $B$ , indicando suas direções e sentidos;
- as barras que estão tracionadas, indicando suas magnitudes em  $\text{kN}$ ;
- as barras que estão comprimidas, indicando suas magnitudes em  $\text{kN}$ .

### Comentários:

Analisando a estrutura, tem-se:



Na convenção adotada, forças de compressão são negativas e as forças de tração são positivas. E, sabe-se que:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{4}{5} \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Primeiramente, fazendo a análise do equilíbrio rotacional com A como polo (notar que as forças internas de compressão e tração não necessitam ser levadas em consideração visto que são ação e reação que exercem mesmo momento sobre a estrutura toda):

$$10 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = R_{B_x} \cdot 3 \Rightarrow R_{B_x} = 20 \text{ kN}$$

Agora, fazendo o equilíbrio rotacional com B como polo:

$$R_A \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = F \cdot 3 \Rightarrow R_A = F - 20 \text{ (I)}$$

Pelo equilíbrio translacional da estrutura toda:

$$R_{B_y} = 20 \text{ kN}$$

Agora, fazendo o equilíbrio para cada nó, em ordem alfabética:

$$A: \begin{cases} R_A = F_1 + F_6 \cdot \cos \theta \\ -5 + F_6 \cdot \operatorname{sen} \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow F_6 = 5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{3} \text{ kN}$$

$$R_A = F_1 + \frac{20}{3} \text{ (II)}$$

$$B: \begin{cases} F_5 \cdot \cos \theta + R_{B_x} = 0 \\ R_{B_y} - 5 + F_5 \operatorname{sen} \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow F_5 = -25 \text{ kN}$$

$$C: \begin{cases} F + F_2 + F_4 \cdot \cos \theta = 0 \\ F_4 \operatorname{sen} \theta + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow F_4 = -\frac{50}{3} \text{ kN}$$

$$F + F_2 = \frac{40}{3} \text{ (III)}$$

$$D: \begin{cases} F_3 + 10 = 0 \\ F_1 = F_2 \text{ (IV)} \end{cases} \Rightarrow F_3 = -10 \text{ kN}$$

O restante do problema não apresenta solução. As demais equações a que se chegam são combinações lineares da demais. Falta uma equação para que o sistema seja SPD. Portanto a solução final ficará em função de F que é a carga horizontal aplicada.

**Gabarito: a) ( $R_A + 20$ ) kN ( $\leftarrow$  se o valor for positivo)**

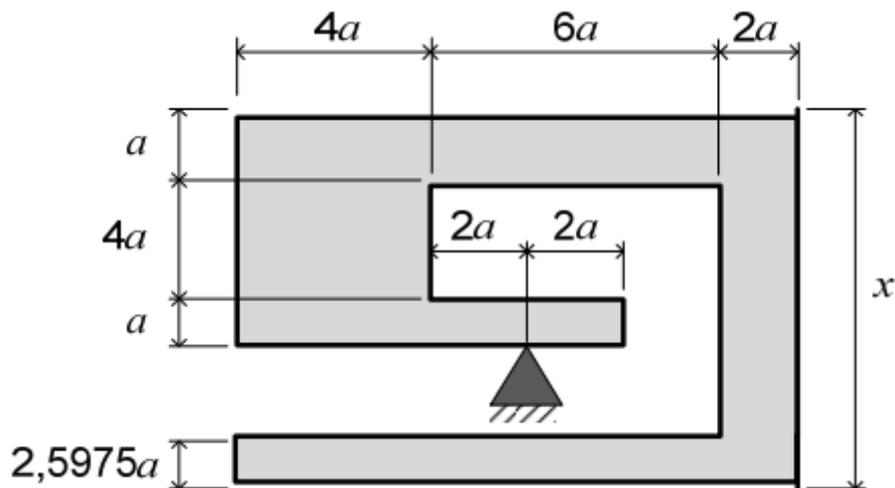
**b)  $R_A = (F - 20)$  kN ( $\rightarrow$  se o valor for positivo),  $R_{B_x} = 20$  kN ( $\rightarrow$ ) e  $R_{B_y} = 20$  kN ( $\uparrow$ )**

**c) AE ( $\frac{25}{3}$  kN)**

**d) DE (10 kN), BE (25 kN) AB (5 kN), CE ( $\frac{50}{3}$  kN)**



57. (IME – 2015)

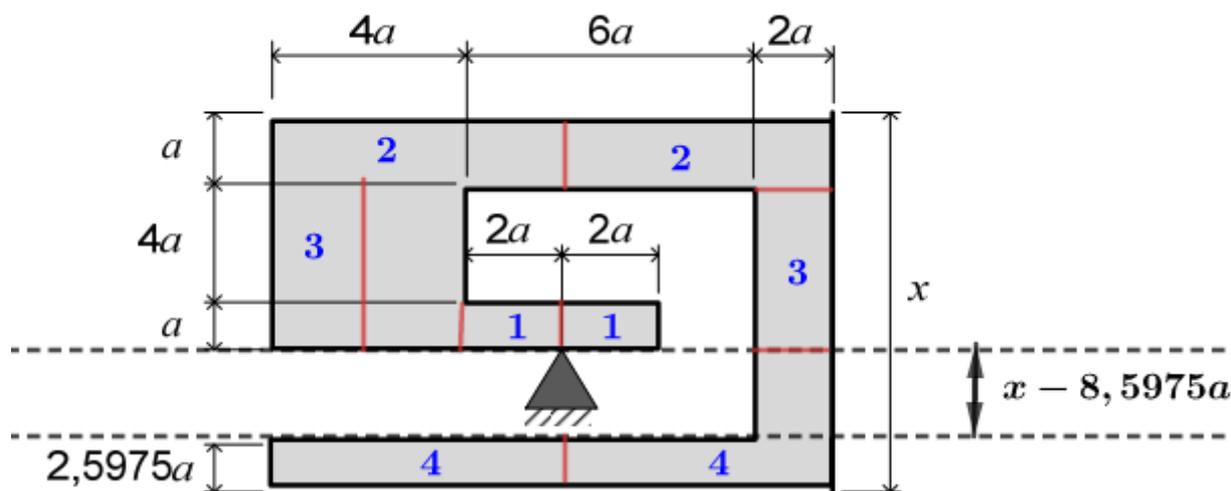


Uma chapa rígida e homogênea encontra-se em equilíbrio. Com base nas dimensões apresentadas na figura, o valor da razão  $x/a$  é

- (A) 10,5975
- (B) 11,5975
- (C) 12,4025
- (D) 12,5975
- (E) 13,5975

**Comentários:**

Qualquer simetria em torno do eixo vertical pode ser desconsiderada, pois o torque gerado por metade da estrutura é igual em módulo, mas de sentido oposto ao gerado pela metade simétrica. Portanto, a figura reduz-se a:



Onde os blocos com mesmo número são simétricos em relação ao eixo vertical. Portanto, basta igualar o torque dos dois blocos que restaram. Assim, tem-se:

$$\delta \cdot 10a^2 \cdot 3a = \delta \cdot 2a(x - 8,5975a) \cdot 5a$$

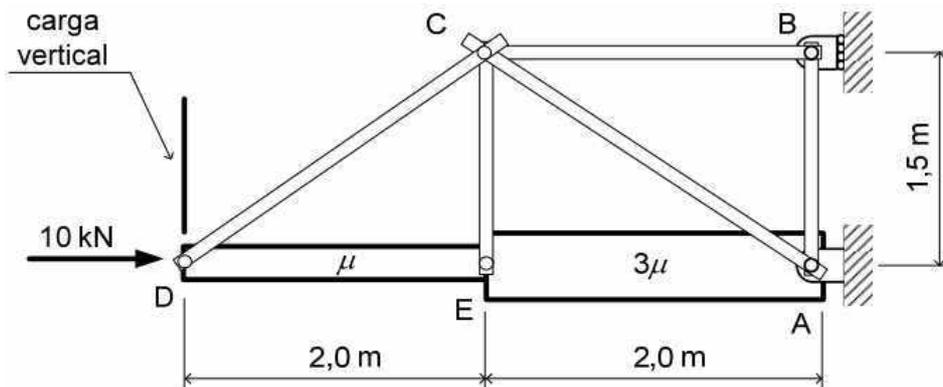
Onde  $\delta$  é a densidade superficial de massa da placa.

$$30a^3 = 10a^2(x - 8,5975a) \Rightarrow 3a = (x - 8,5975a)$$

$$x = 11,5975a$$

**Gabarito: B**

**58. (IME – 2015)**



A figura mostra uma estrutura em equilíbrio, formada por barras fixadas por pinos. As barras  $AE$  e  $DE$  são feitas de um material uniforme e homogêneo. Cada uma das barras restantes tem massa desprezível e seção transversal circular de  $16 \text{ mm}$  de diâmetro. O apoio  $B$ , deformável, é elástico e só apresenta força de reação na horizontal. No ponto  $D$ , duas cargas são aplicadas, sendo uma delas conhecida e igual a  $10 \text{ kN}$  e outra na direção vertical, conforme indicadas na figura. Sabendo que a estrutura no ponto  $B$  apresenta um deslocamento horizontal para a esquerda de  $2 \text{ cm}$ , determine:

- a magnitude e o sentido da reação do apoio  $B$ ;
- as reações horizontal e vertical no apoio  $A$  da estrutura, indicando seu sentido;
- a magnitude e o sentido da carga vertical concentrada no ponto  $D$ ;
- o esforço normal (força) por unidade de área da barra  $BC$ , indicando sua magnitude e seu tipo (tração ou compressão).

Dados:

aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;

densidade linear de massa:  $\mu = 100 \text{ kg/m}$ ;

constante elástica do apoio  $B$ :  $k = 1600 \text{ kN/m}$ .

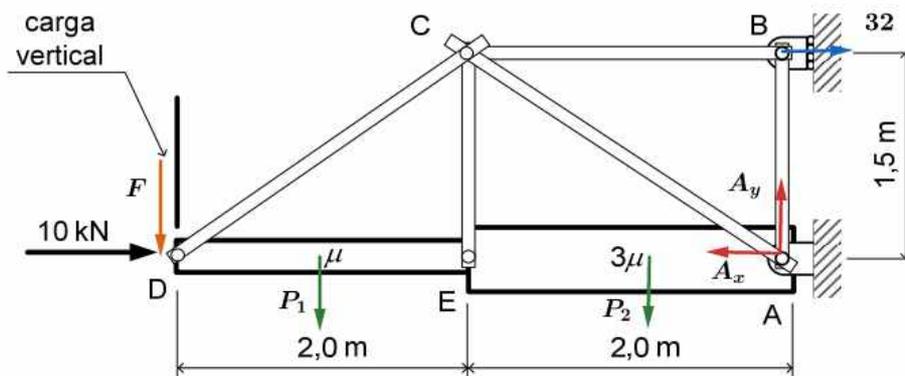
**Comentários:**

Como dito pelo enunciado, o apoio  $B$  apresenta comportamento elástico. Portanto:

$$F = kx = 1600 \cdot 0,02 = 32 \text{ kN}$$



Como o deslocamento foi para a esquerda, a força é para a direita. Para analisar o momento resultante sobre a estrutura, interessa apenas as forças externas. Neste caso, o peso das barras, as reações em A e B e a carga D. Portanto, tem-se a seguinte situação:



Calculando o momento em torno de A:

$$P_1 \cdot 3 + P_2 \cdot 1 + F \cdot 4 = 32 \cdot 1,5$$

Calculando os pesos:

$$P_1 = 2 \cdot 100 \cdot 10 = 2 \cdot 10^3 = 2 \text{ kN}$$

$$P_2 = 2 \cdot 300 \cdot 10 = 6 \cdot 10^3 = 6 \text{ kN}$$

Substituindo:

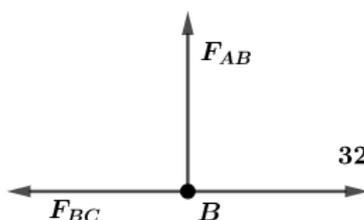
$$F = \frac{48 - 6 - 6}{4} = 9 \text{ kN}$$

Pelo equilíbrio translacional da estrutura:

$$\begin{cases} A_x = 10 + 32 \\ P_1 + P_2 + 9 = A_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = 42 \text{ kN} \\ A_y = 17 \text{ kN} \end{cases}$$

O equilíbrio do nó B encontra-se representado abaixo:



Pelo equilíbrio horizontal:

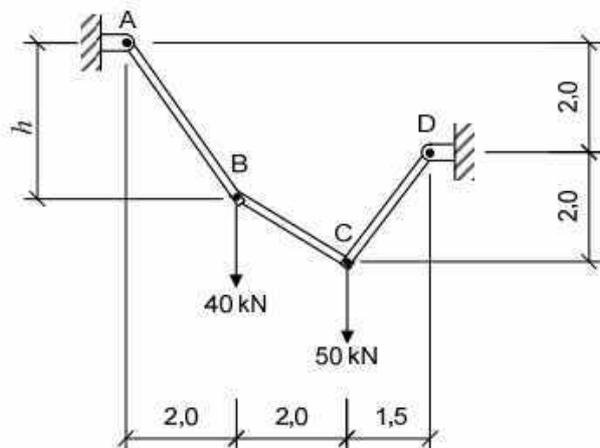
$$F_{BC} = 32 \text{ kN}$$

Sendo o sinal positivo característico de tração no sentido adotado. A força por área é:

$$\frac{F_{BC}}{A} = \frac{32000}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{32000}{\pi(8 \cdot 10^{-3})^2} = \frac{32}{64\pi} \cdot 10^9 = \frac{500}{\pi} \text{ MPa}$$

Gabarito: a)  $32 \text{ kN}$  ( $\rightarrow$ ) b)  $42 \text{ kN}$  ( $\leftarrow$ ) e  $17 \text{ kN}$  ( $\uparrow$ ) c)  $9 \text{ kN}$  ( $\downarrow$ ) d)  $\frac{500}{\pi} \text{ MPa}$ , de tração

59. (IME – 2016)



A figura acima, cujas cotas estão em metros, exibe uma estrutura em equilíbrio formada por três barras rotuladas  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$ . Nos pontos  $B$  e  $C$  existem cargas concentradas verticais. A maior força de tração que ocorre em uma barra, em  $kN$ , e a altura  $h$ , em metros, da estrutura são

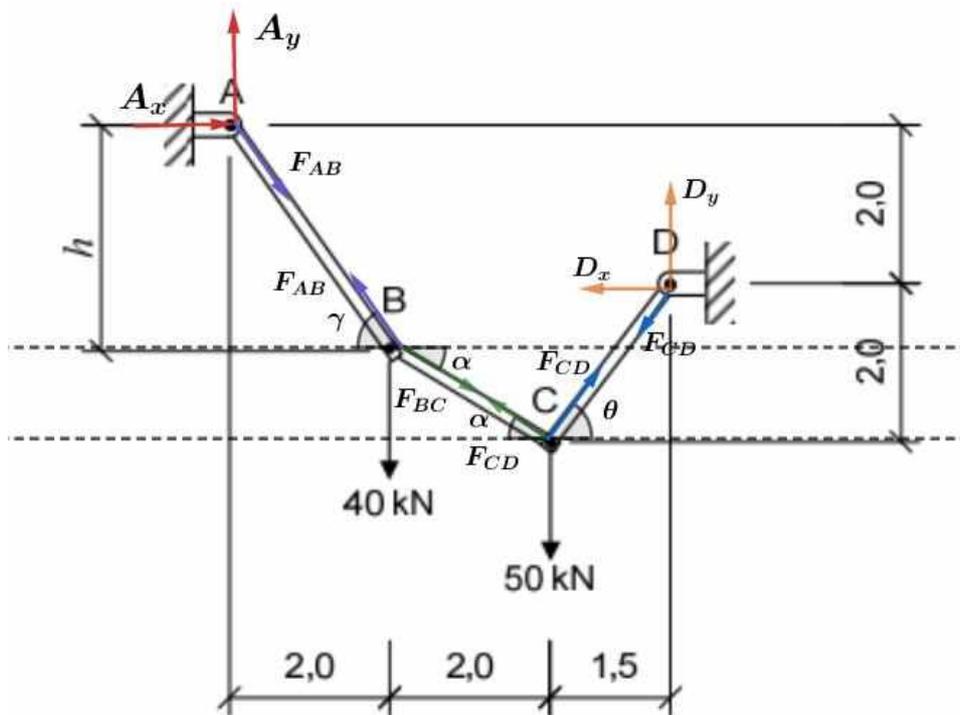
Consideração:

- as barras são rígidas, homogêneas, inextensíveis e de pesos desprezíveis.

- a) 50,0 e 2,50
- b) 31,6 e 1,67
- c) 58,3 e 3,33
- d) 50,0 e 1,67
- e) 58,3 e 2,50

**Comentários:**

As forças sobre a estrutura ficam:



Onde:

$$\cos \theta = \frac{3}{5} \text{ e } \sin \theta = \frac{4}{5}.$$

Para o equilíbrio translacional da estrutura:

$$\begin{cases} A_x = D_x \\ A_y + D_y = 90 \end{cases}$$

Para o equilíbrio rotacional da estrutura (com A como polo):

$$40 \cdot 2 + 50 \cdot 4 - D_y \cdot 5,5 + D_x \cdot 2 = 0$$

$$4D_x - 11D_y = -560 \text{ (I)}$$

Analisando o nó D:

$$D: \begin{cases} D_y = F_{CD} \cdot \sin \theta \\ D_x + F_{CD} \cdot \cos \theta = 0 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação de D na segunda:

$$D_x + D_y \cdot \cotg \theta = 0 \Rightarrow 4D_x + 3D_y = 0$$

Substituindo na equação (I):

$$-14D_y = -560 \Rightarrow D_y = 40 \text{ kN} \Rightarrow D_x = -30 \text{ kN}$$

Portanto:

$$F_{CD} = 50 \text{ kN}$$

Analisando C:

$$C: \begin{cases} F_{CD} \cdot \cos \theta = F_{BC} \cdot \cos \alpha \\ F_{BC} \cdot \sin \alpha = 50 - F_{CD} \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{cases} F_{BC} \cdot \cos \alpha = 30 \\ F_{BC} \cdot \sin \alpha = 10 \end{cases} \Rightarrow F_{BC} = 10\sqrt{10}$$

Analisando B:

$$B: \begin{cases} F_{BC} \cdot \cos \alpha = F_{AB} \cdot \cos \gamma \\ F_{AB} \cdot \sin \gamma = F_{BC} \cdot \sin \alpha + 40 \end{cases}$$

Substituindo os resultados anteriores:

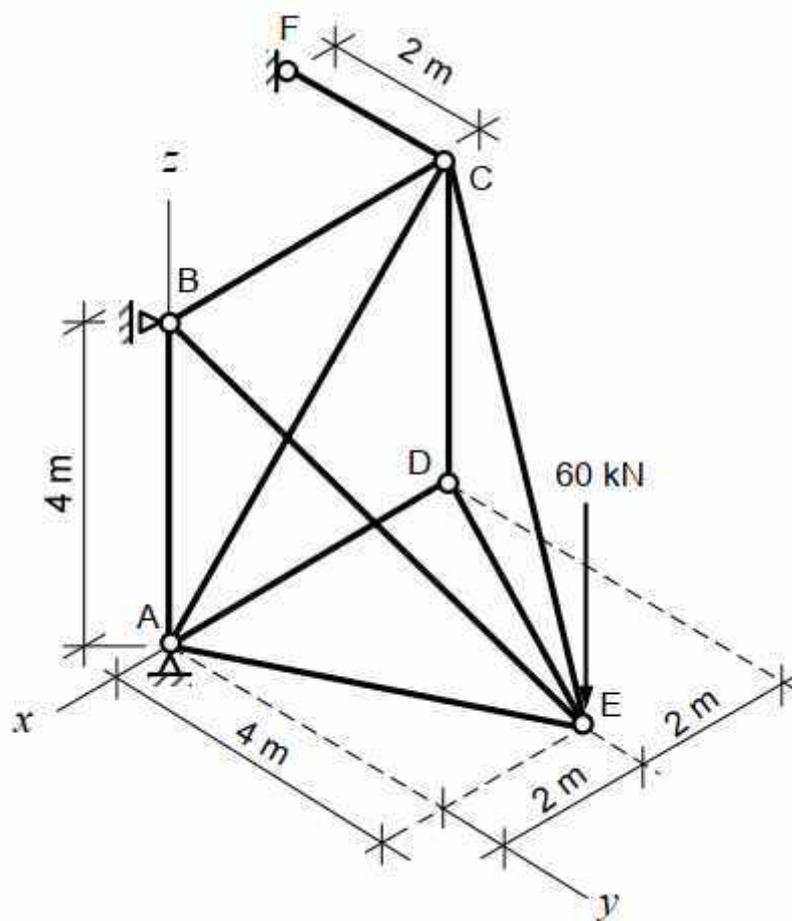
$$\begin{cases} F_{AB} \cdot \cos \gamma = 30 \\ F_{AB} \cdot \sin \gamma = 50 \end{cases} \Rightarrow F_{AB} = 10\sqrt{34} \approx 58,3$$

Portanto, a barra mais tracionada é  $F_{AB}$  (58,3 kN). Para o cálculo da altura:

$$\frac{F_{AB} \cdot \sin \gamma}{F_{AB} \cdot \cos \gamma} = \frac{5}{3} = \operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{2} \Rightarrow \boxed{h = 3,33 \text{ m}}$$

**Gabarito: C**

60. (IME – 2016)



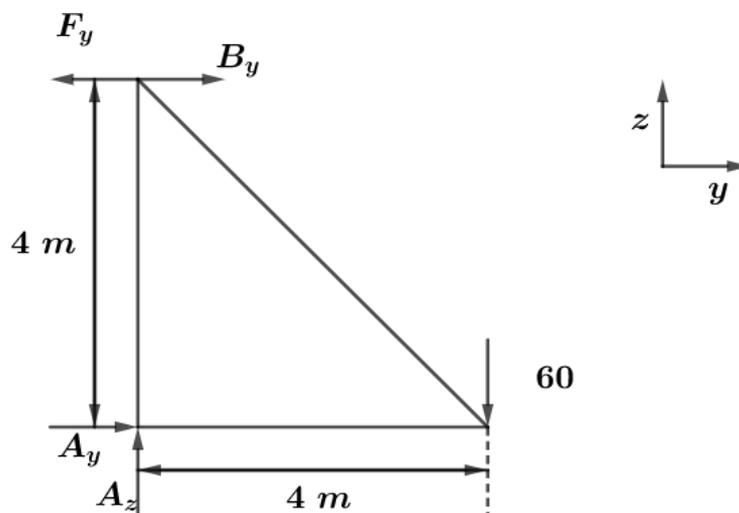
A figura acima mostra uma estrutura em equilíbrio, formada por nove barras AB, AC, AD, AE, BC, BE, CD, CE e DE conectadas por articulações e apoiadas nos pontos A, B e C. O apoio A impede as translações nas direções dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , enquanto o apoio B impede as translações nas direções  $x$  e  $y$ . No ponto C, há um cabo CF que só restringe a translação da estrutura na direção do eixo  $y$ . Todas as barras possuem material uniforme e homogêneo e

peso desprezível. No ponto E há uma carga concentrada, paralela ao eixo  $z$ , de cima para baixo, de 60 kN. Determine, em kN:

- as componentes da reação do apoio B.
- as componentes da reação do apoio A.
- o módulo da força do cabo CF.
- os módulos das forças das barras BE, BC, AB e AC.

### Comentários:

Como a estrutura toda está em equilíbrio, ela estará em equilíbrio ao ser analisado em cada plano. Ao se analisar somente as forças em cada plano, considera-se apenas a rotação em torno de um eixo. Primeiramente, analisando as forças no plano  $yz$  (apenas rotação em torno de  $x$ ):



Para rotação em torno do ponto superior esquerdo:

$$4A_y - 60 \cdot 4 = 0 \Rightarrow A_y = 60 \text{ kN}$$

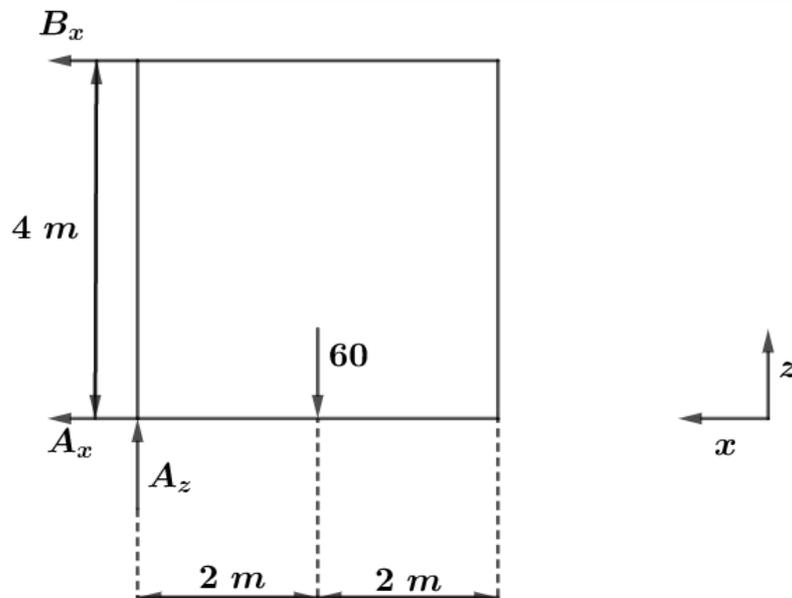
Pelo equilíbrio translacional:

$$\begin{cases} A_z = 60 \text{ kN} \\ B_y - F_y + A_y = 0 \end{cases}$$

$$F_y - B_y = 60 \text{ kN (I)}$$

Agora, analisando as forças no plano  $xz$  (apenas rotação em torno de  $y$ ):





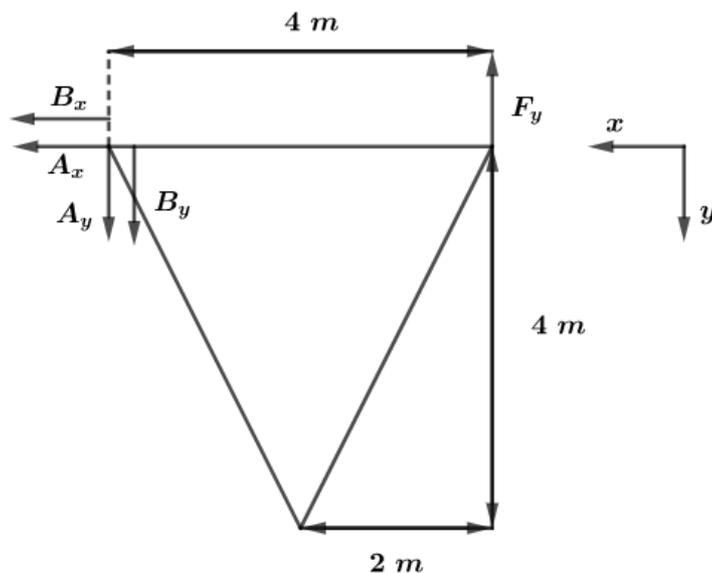
Pelo equilíbrio translacional:

$$A_x = -B_x$$

Pelo equilíbrio rotacional em torno do canto esquerdo inferior:

$$4B_x = 60 \cdot 2 \Rightarrow B_x = 30 \text{ kN} \Rightarrow A_x = -30 \text{ kN}$$

Agora, analisando as forças no plano  $xy$  (apenas rotação em torno de  $z$ ):



Pela rotação em torno do canto esquerdo superior:

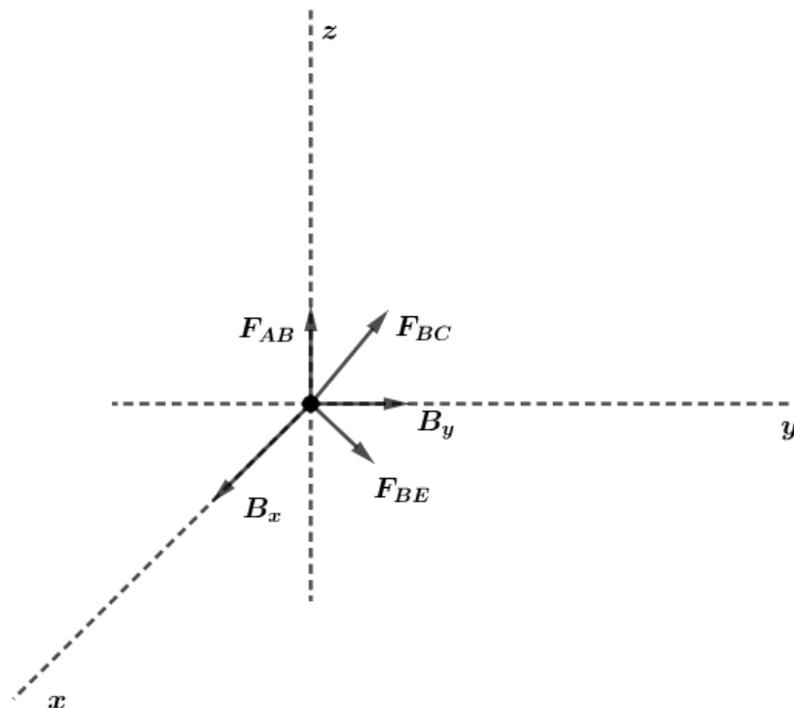
$$4 \cdot F_y = 0 \Rightarrow F_y = 0$$

Substituindo em (I):

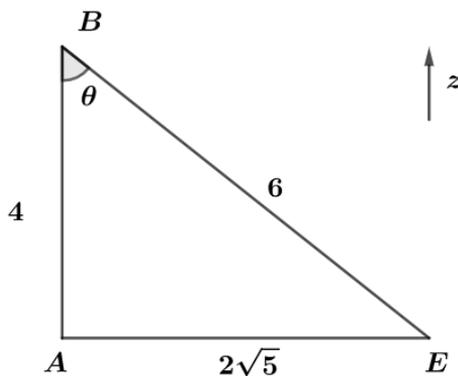
$$B_y = -60 \text{ kN}$$

Das quatro barras que se desejam o equilíbrio, 3 estão com uma extremidade no nó B. Portanto, analisando as forças sobre B:





Como pode-se ver,  $F_{BE}$  é a única força que necessita ser decomposta. Analisando o triângulo  $ABE$ , tem-se:



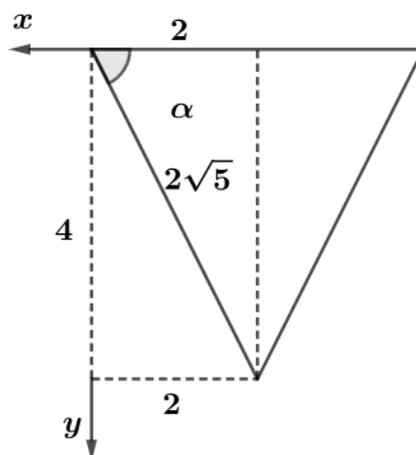
Portanto, a decomposição de  $F_{BE}$  no eixo  $z$  é:

$$F_{BE} \cdot \cos \theta = F_{BEz} = F_{BE} \cdot \frac{2}{3}$$

A decomposição de  $F_{BE}$  no plano  $xy$  é:

$$F_{BE} \cdot \sin \theta = F_{BE_{xy}} = F_{BE} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Analisando o nó  $B$  na projeção da estrutura sobre o plano  $xy$ :



Portanto, a projeção de  $F_{BE}$  sobre os eixos  $x$  e  $y$  fica:

$$F_{BE_{xy}} \cdot \cos \alpha = F_{BE_x} = F_{BE} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{F_{BE}}{3}$$

$$F_{BE_{xy}} \cdot \sin \alpha = F_{BE_y} = F_{BE} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2F_{BE}}{3}$$

Portanto, o equilíbrio das forças sobre o nó B fica:

$$\begin{cases} \text{Em } x: & B_x = F_{BC} + \frac{F_{BE}}{3} \\ \text{Em } y: & B_y + \frac{2F_{BE}}{3} = 0 \\ \text{Em } z: & F_{AB} = \frac{2F_{BE}}{3} \end{cases}$$

Com as duas primeiras equações:

$$2B_x + B_y = 2F_{BC}$$

$$F_{BC} = 0 \text{ kN}$$

$$F_{BE} = 90 \text{ kN}$$

E substituindo na terceira:

$$F_{AB} = 60 \text{ kN}$$

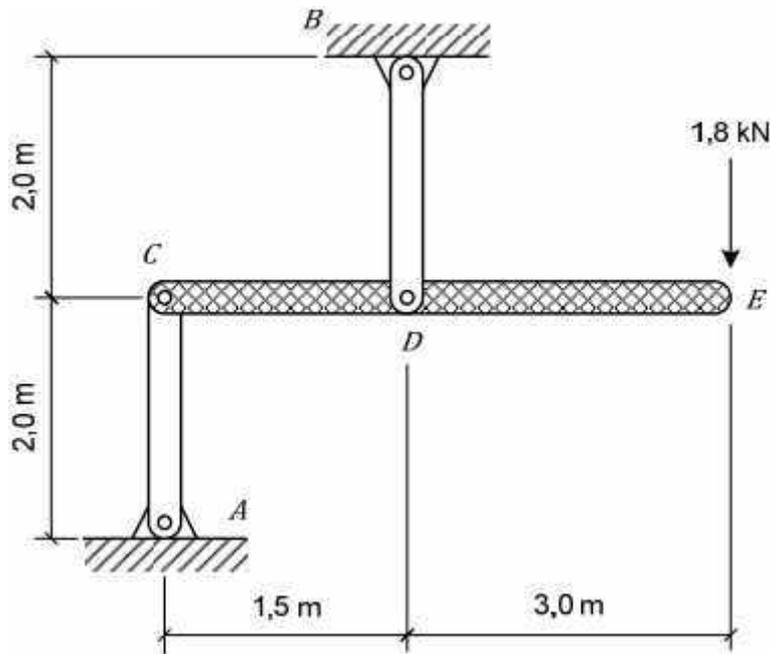
Ao analisar o nó C, nota-se que as forças atuantes sobre ele são somente duas ( $F_{AC}$  e  $F_{CD}$ ), visto que  $F_{BC}$  e  $F_y$  são nulas. Como as direções das duas forças atuantes são linearmente independentes, ambas devem ser nulas. Portanto:

$$F_{AC} = 0 \text{ kN}$$

**Gabarito:** a) (30; -60; 0) kN b) (-30; 60; 60) kN c) 0 kN d)  $F_{BE} = 90 \text{ kN}$ ,  $F_{BC} = 0 \text{ kN}$ ,  $F_{AB} = 60 \text{ kN}$  e  $F_{AC} = 0 \text{ kN}$

61. (IME – 2017)





A figura acima apresenta uma estrutura em equilíbrio, formada por uma barra horizontal  $CE$  e duas barras verticais rotuladas  $AC$  e  $BD$ . Todas as barras possuem material uniforme e homogêneo e as barras  $AC$  e  $BD$  têm peso desprezível, enquanto a barra  $CE$  tem densidade linear de massa  $\mu$ . Na extremidade da barra  $CE$ , há uma carga concentrada vertical, de cima para baixo, de  $1,8 \text{ kN}$ . Para que a força de tração na barra  $BD$  seja  $8,1 \text{ kN}$ , a densidade linear de massa  $\mu$  da barra  $CE$ , em  $\text{kg/m}$ , e a força em módulo na barra  $AC$ , em  $\text{kN}$ , devem ser iguais a:

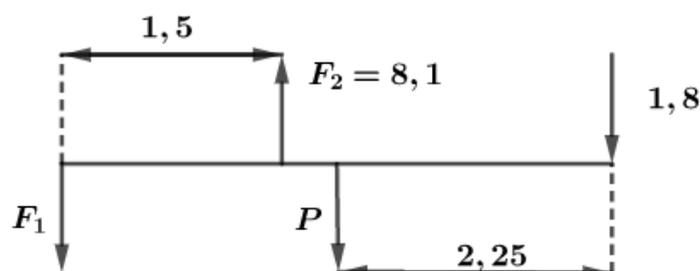
Dado:

- aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- 40 e 3,6
- 40 e 4,5
- 60 e 3,6
- 400 e 4,5
- 600 e 3,5

### Comentários:

As forças sobre a barra são:



Analisando o equilíbrio translacional:

$$P + F_1 + 1,8 = 8,1 \Rightarrow P + F_1 = 6,3$$

Pelo equilíbrio rotacional (CG como polo):

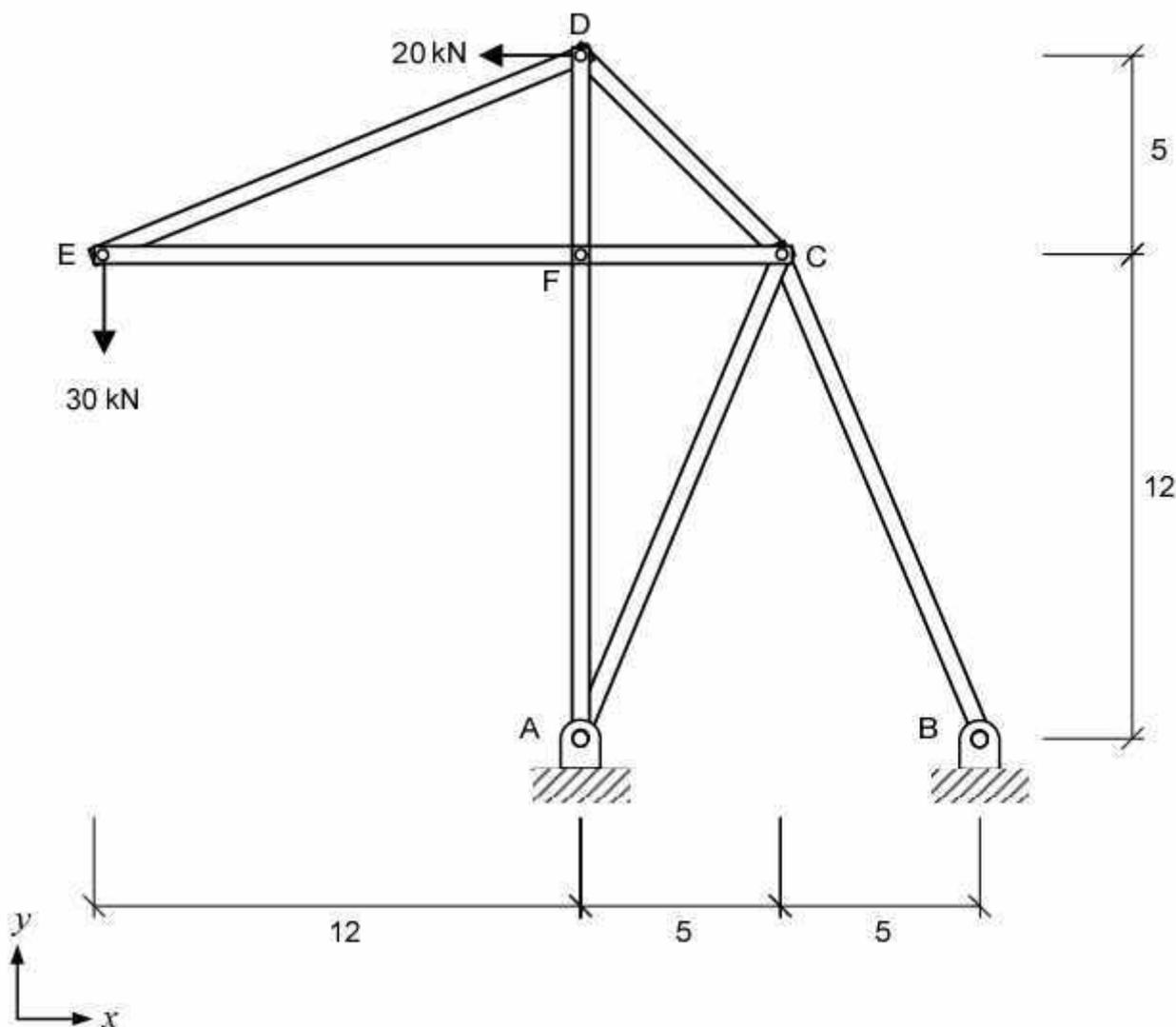
$$2,25 \cdot 1,8 + 8,1 \cdot 0,75 = 2,25 \cdot F_1 \Rightarrow F_1 = 4,5 \text{ kN}$$

Portanto:

$$P = 1,8 \text{ kN} = 4,5\mu \Rightarrow \frac{1800}{4,5} = \mu = 400$$

**Gabarito: D**

**62. (IME – 2017)**



A figura acima apresenta uma estrutura em equilíbrio, formada por oito barras AC, BC, AF, CF, CD, DE, DF e EF conectadas por articulações e apoiadas nos pontos A e B. Os apoios A e B impedem as translações nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ . Todas as barras são constituídas por material uniforme e homogêneo e possuem pesos desprezíveis. No ponto D, há uma carga concentrada, paralela à direção do eixo  $x$ , da direita para esquerda, de 20 kN, e, no ponto E



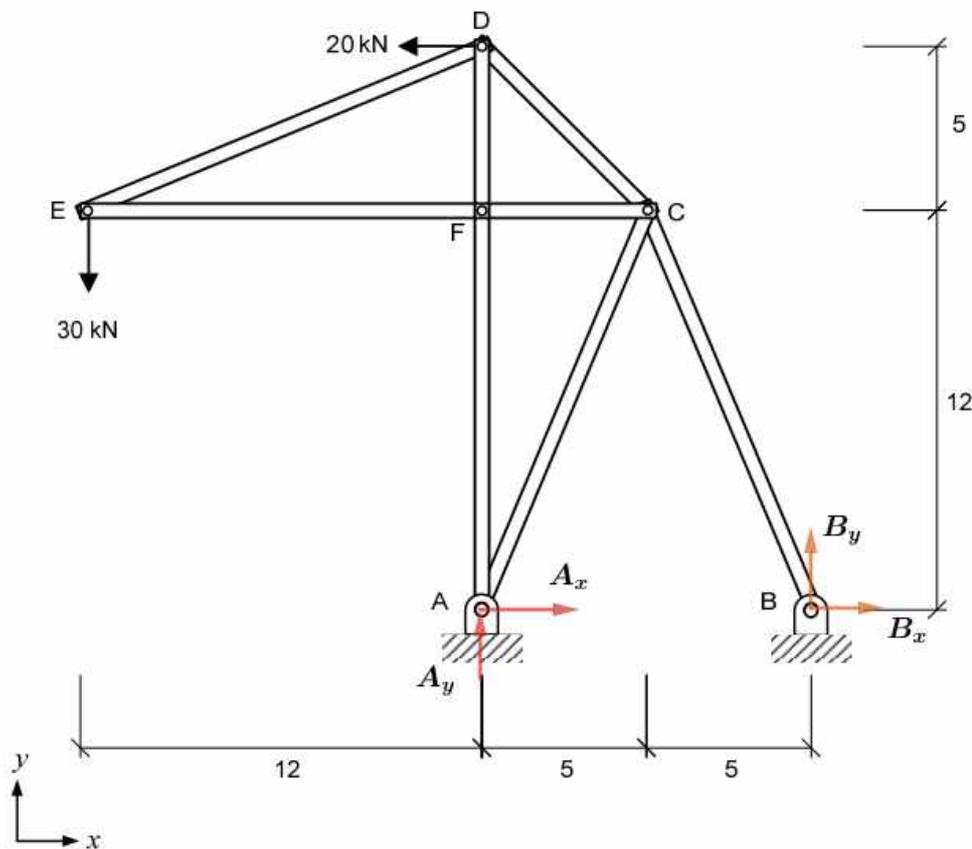
existe uma carga concentrada, paralela à direção do eixo  $y$ , de cima para baixo, de 30 kN. Determine:

- as componentes da reação do apoio A em kN;
- as componentes da reação do apoio B em kN;
- as barras que possuem forças de tração, indicando os módulos destas forças em kN;
- as barras que possuem forças de compressão, indicando os módulos destas forças em kN.

### Comentários:

Na resolução adota-se sempre as forças das barras atuando no sentido para dentro da barra. Com isso, forças positivas são forças de tração e forças negativas de compressão.

As forças externas atuantes sobre a estrutura estão representadas a seguir:



Fazendo o momento resultante em torno de A e de B, igualando ambos a 0 chegamos às equações abaixo:

$$\begin{cases} B_y \cdot 10 + 20 \cdot 17 + 30 \cdot 12 = 0 \\ A_y \cdot 10 + 20 \cdot 17 + 30 \cdot 22 = 0 \end{cases}$$
$$B_y = -70 \text{ kN}$$
$$A_y = 100 \text{ kN}$$

Pelo equilíbrio translacional em  $x$ :

$$A_x + B_x = 20 \text{ (I)}$$

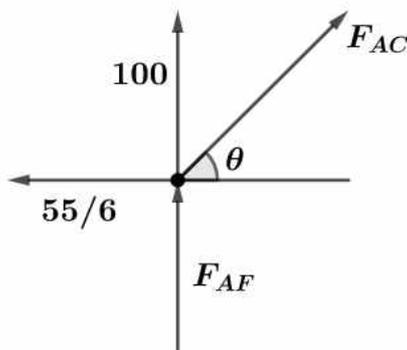
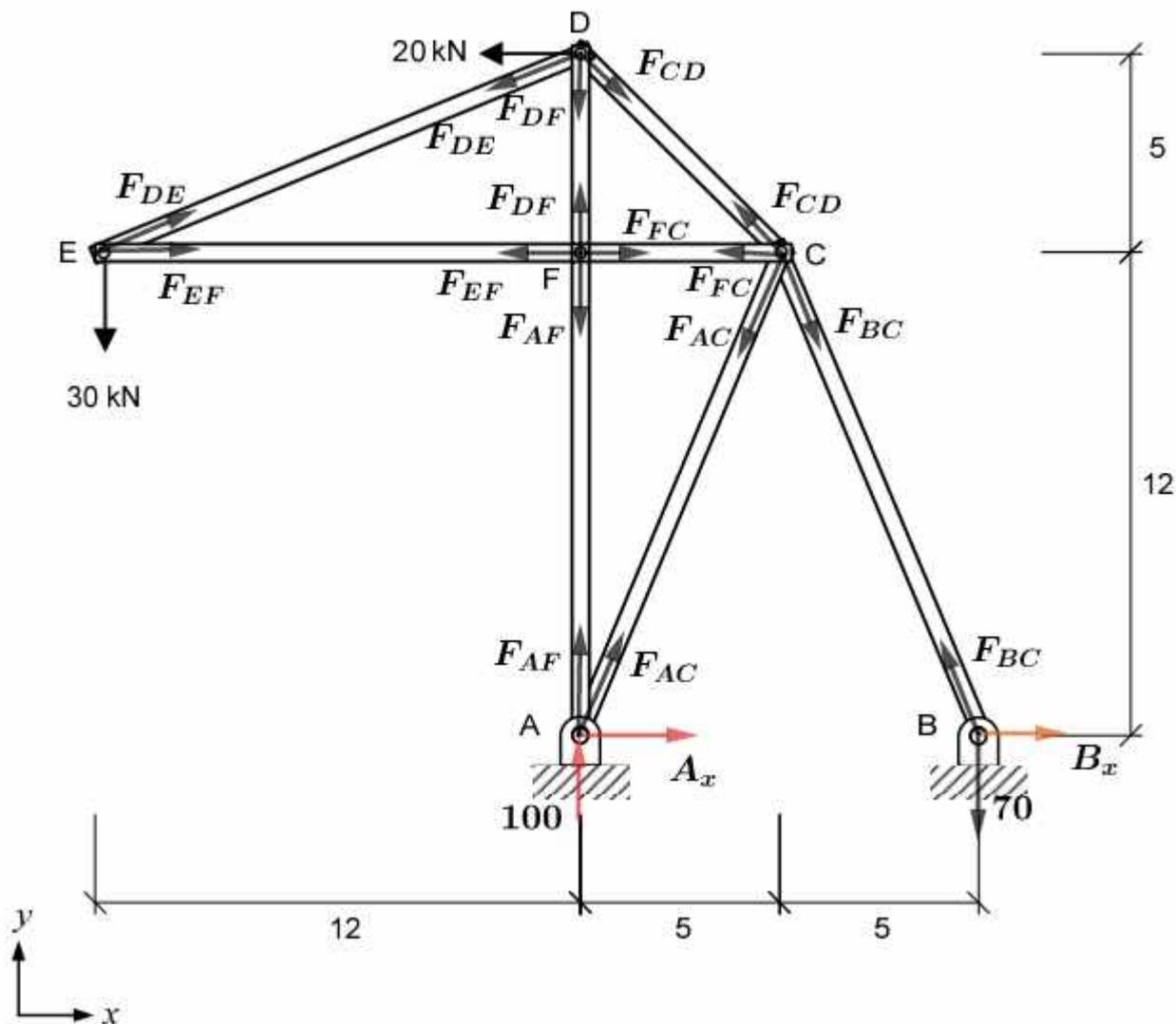
Como a reação de apoio de B deve seguir a direção da barra BC:

$$\frac{B_x}{70} = \frac{5}{12} \Rightarrow B_x = \frac{175}{6} \text{ kN}$$

Em (I):

$$A_x = -\frac{55}{6} \text{ kN}$$

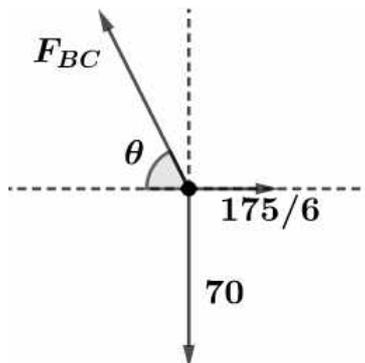
Analisando A:



$$\cos \theta = \frac{5}{13} \text{ e } \operatorname{sen} \theta = \frac{12}{13}$$

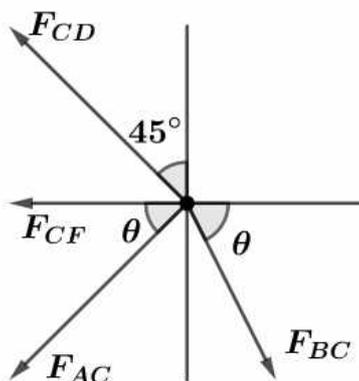
$$\begin{cases} F_{AC} \cdot \cos \theta = \frac{55}{6} \\ F_{AF} + F_{AC} \cdot \operatorname{sen} \theta + 100 = 0 \end{cases} \Rightarrow F_{AC} = \frac{143}{6} \text{ kN} \Rightarrow F_{AF} = -100 - \frac{143}{6} \cdot \frac{12}{13} = -122 \text{ kN}$$

Analisando B:



$$F_{BC} \cdot \cos \theta = \frac{175}{6} \Rightarrow F_{BC} = \frac{175}{6} \cdot \frac{13}{5} = \frac{455}{6} \text{ kN}$$

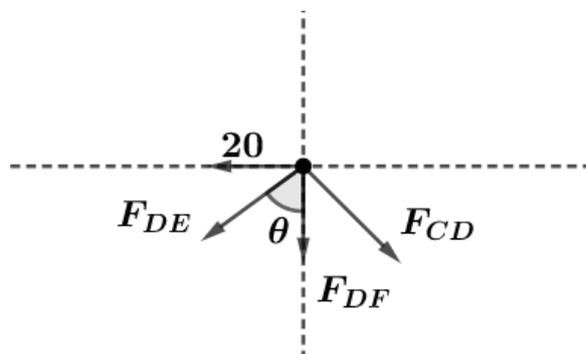
Analisando C:



$$\begin{cases} F_{CF} + F_{AC} \cdot \cos \theta + F_{CD} \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = F_{BC} \cdot \cos \theta \\ F_{CD} \cdot \cos 45^\circ = F_{AC} \cdot \operatorname{sen} \theta + F_{BC} \cdot \operatorname{sen} \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{CF} + \frac{F_{CD}\sqrt{2}}{2} = \frac{455}{6} \cdot \frac{5}{13} - \frac{143}{6} \cdot \frac{5}{13} \\ F_{CD} = \sqrt{2} \left( \frac{143}{6} \cdot \frac{12}{13} + \frac{455}{6} \cdot \frac{12}{13} \right) \end{cases}$$

$$F_{CD} = 92\sqrt{2} \text{ kN} \Rightarrow F_{CF} = 20 - 92 = -72 \text{ kN}$$

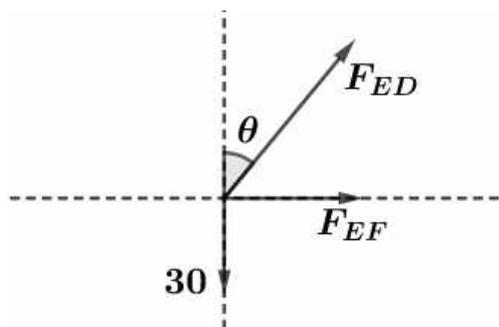
Analisando D:



$$\begin{cases} 20 + F_{DE} \cdot \text{sen } \theta = F_{CD} \cdot \cos 45^\circ \\ F_{DF} + F_{DE} \cdot \cos \theta + F_{CD} \cdot \text{sen } 45^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow F_{DE} = (92 - 20) \cdot \frac{13}{12} = 78 \text{ kN}$$

$$F_{DF} = -92 - 78 \cdot \frac{5}{13} = -122 \text{ kN}$$

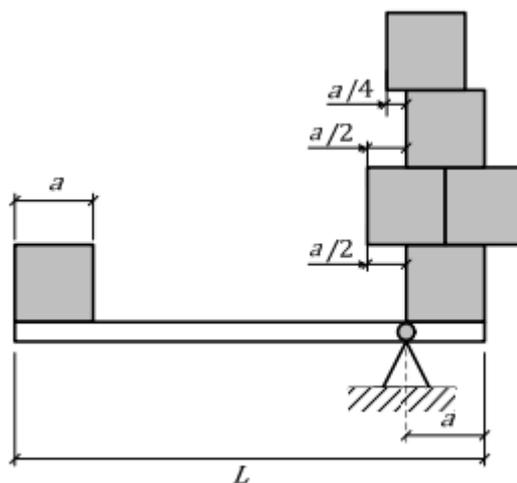
Analisando E:



$$F_{EF} = -F_{ED} \cdot \text{sen } \theta = -78 \cdot \frac{12}{13} = -72 \text{ kN}$$

**Gabarito:** a)  $\frac{55}{6} \text{ kN}$  ( $\leftarrow$ ),  $100 \text{ kN}$  ( $\uparrow$ )      b)  $\frac{175}{6} \text{ kN}$  ( $\rightarrow$ ),  $70 \text{ kN}$  ( $\downarrow$ )      c)  
 $C \left( \frac{143}{6} \text{ kN} \right)$ ,  $BC \left( \frac{455}{6} \text{ kN} \right)$ ,  $CD(92\sqrt{2} \text{ kN})$ ,  $DE(78 \text{ kN})$       d)  
 $AF (122 \text{ kN})$ ,  $CF (72 \text{ kN})$ ,  $DF (122 \text{ kN})$ ,  $EF (72 \text{ kN})$

63. (IME – 2018)



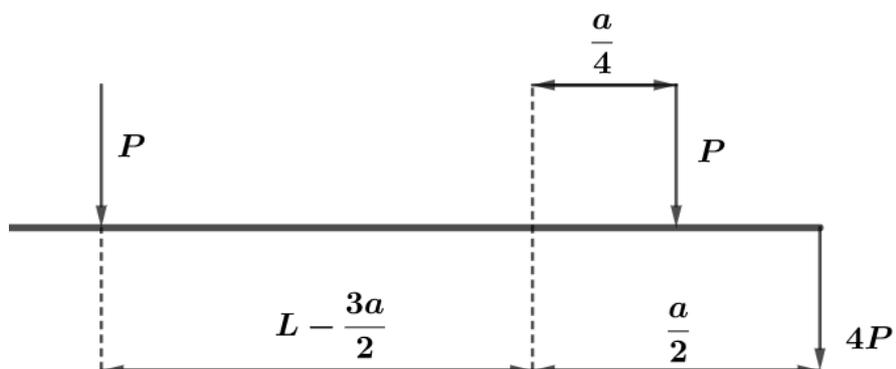
O sistema mostrado na figura acima encontra-se em equilíbrio estático, sendo composto por seis cubos idênticos, cada um com massa específica  $n$  uniformemente distribuída e de aresta  $a$ , apoiados em uma alavanca composta por uma barra rígida de massa desprezível. O comprimento  $L$  da barra para que o sistema esteja em equilíbrio é:

- a)  $\frac{9}{4} \alpha$
- b)  $\frac{13}{4} \alpha$



- c)  $\frac{7}{2} \alpha$
- d)  $\frac{15}{4} \alpha$
- e)  $\frac{17}{4} \alpha$

Comentários:

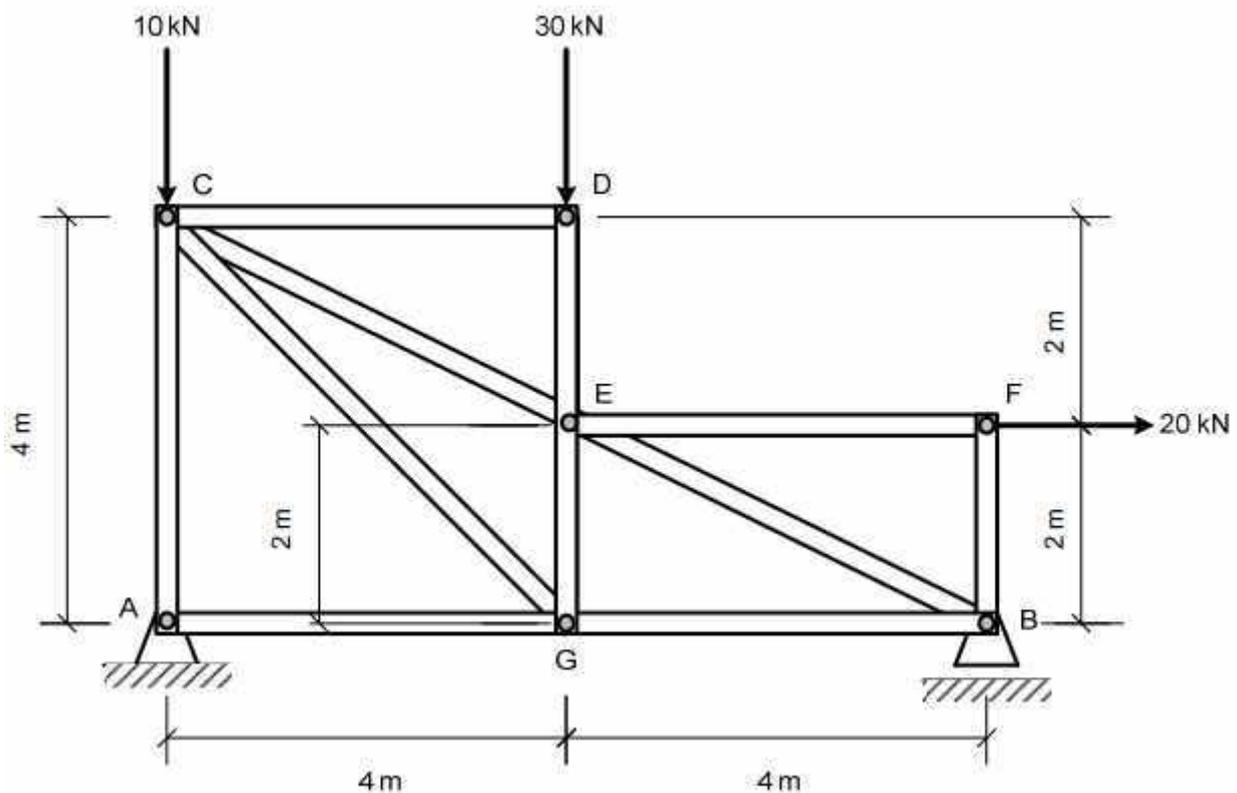


Fazendo o equilíbrio rotacional em torno do apoio:

$$P \left( L - \frac{3a}{2} \right) = 4P \cdot \frac{a}{2} + P \cdot \frac{a}{4}$$
$$L = \frac{3a}{2} + \frac{4a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{15a}{4}$$

Gabarito: D

64. (IME – 2018)



A figura acima mostra uma estrutura em equilíbrio formada por onze barras. Todas as barras têm peso desprezível. O apoio A impede deslocamentos nas direções horizontal e vertical, enquanto o apoio B somente impede deslocamentos na direção vertical. Nos pontos C e D há cargas concentradas verticais e no ponto F é aplicada uma carga horizontal. Determine os valores das forças, em kN, a que estão submetidas as barras BG e EG.

Dado:

$$\sqrt{2} \cong 1,4; e$$

$$\sqrt{5} \cong 2,2.$$

### Comentários:

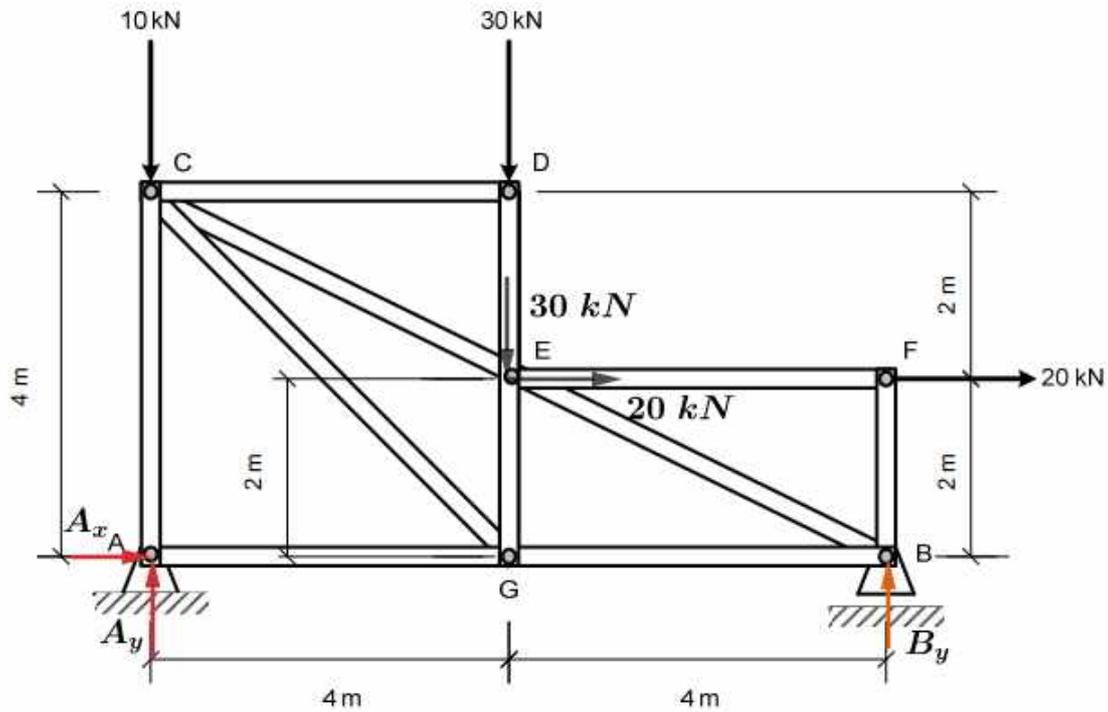
Antes de iniciar a questão é importante a análise de cada nó individualmente. Nessa análise prévia é possível eliminar algumas barras do problema. Aqui, por exemplo, ao analisar o nó D o aluno verá que existem três possíveis forças atuando sobre o nó D, sendo duas delas na mesma direção e uma em uma direção linearmente independente.

Portanto, essa força de direção linearmente independente deve ser nula, no caso seria a força da barra CD. Da mesma forma se conclui que BF é nula. Com isto, conclui-se também que:

$$\begin{cases} F_{EF} = 20 \text{ kN} \\ F_{DE} = 30 \text{ kN} \end{cases}$$

Redesenhando o problema:





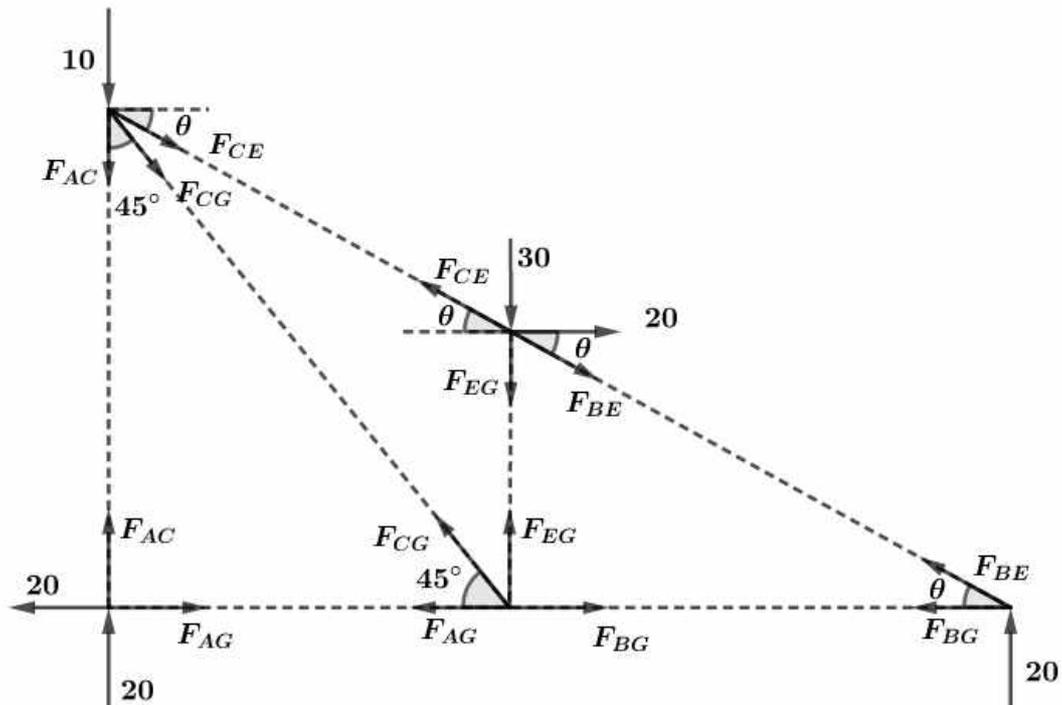
Pelo equilíbrio rotacional com A como polo:

$$20 \cdot 2 + 30 \cdot 4 = B_y \cdot 8 \Rightarrow B_y = 20 \text{ kN}$$

Pelo equilíbrio translacional:

$$\begin{cases} A_y + 20 = 40 \\ A_x + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_y = 20 \text{ kN} \\ A_x = -20 \text{ kN} \end{cases}$$

Agora, analisa-se cada nó individualmente:



$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \text{sen } \theta = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Para o nó B:

$$\begin{cases} 20 + F_{BE} \cdot \text{sen } \theta = 0 \\ F_{BG} + F_{BE} \cdot \cos \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow F_{BE} = -20\sqrt{5} \text{ kN} \Rightarrow F_{BG} = 40 \text{ kN}$$

Para o nó E:

$$\begin{cases} F_{CE} \cos \theta = 20 + F_{BE} \cos \theta \\ F_{EG} + 30 + F_{BE} \text{sen } \theta = F_{CE} \text{sen } \theta \end{cases} \Rightarrow F_{CE} = -20 \Rightarrow F_{EG} = 30 - 20 - 30 \Rightarrow F_{EG} = -20 \text{ kN}$$

Obs: pela convenção adotada, sinal positivo é tração e negativo compressão.

**Gabarito: 40 kN e -20 kN**

65. (OBF – 2007)

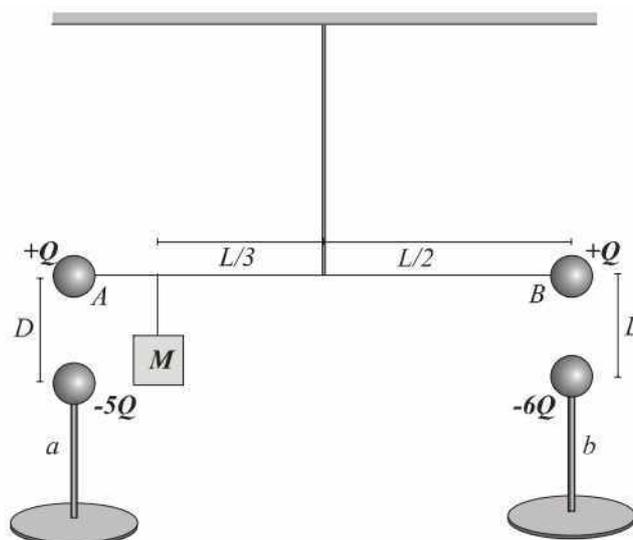


Fig. 2

Um dos resultados da Mecânica é que em um corpo extenso que não apresenta modificação em seu estado de repouso ou movimento, a resultante das forças e o momento resultante são nulos. Já a eletrostática ensina que a intensidade da força entre duas cargas puntiformes (pontuais) varia com o inverso do quadrado da distância entre elas, e é diretamente proporcional ao produto dos valores absolutos das cargas. Considerando esses resultados, suponha que no laboratório foi montada a experiência mostrada na figura 2. Nessa figura, a haste AB tem massa  $m$ , comprimento  $L$  e seu ponto médio repousa sobre um suporte fixo ao teto. Nas extremidades A e B da haste, encontram-se cargas de valor  $Q$ . Fixados à bancada, estão dois suportes  $a$  e  $b$ , em cujas extremidades há cargas de valores  $-5Q$  e  $-6Q$ , respectivamente. Os suportes e a haste são de material apropriado para que as cargas se mantenham concentradas nos pontos indicados. A experiência é montada de tal forma que somente a força elétrica entre as cargas de A e  $a$ . e a força elétrica entre as cargas de B e  $b$ ,

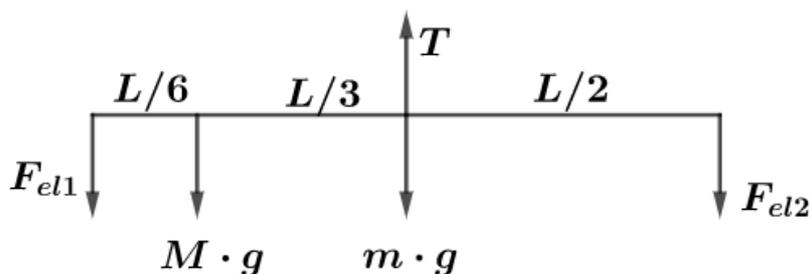
sejam consideradas. Nessas condições observa-se que, para a haste  $AB$  permanecer na horizontal, é preciso pendurar nela um corpo de massa  $M$ , no ponto situado à distância  $L/3$  de seu ponto médio. Sendo  $D$  a distância entre as cargas de  $A$  e  $a$ , e de  $B$  e  $b$ , pede-se:

- A massa  $M$  do corpo em função da distância  $D$  e da carga  $Q$ ;
- Sabendo o valor da carga elementar  $e = 0,16 \cdot 10^{-18} \text{ C}$  e que, quando a distância  $D = 30 \text{ cm}$  a massa  $M$  do corpo, usado para manter a haste na horizontal, é igual a  $0,1536 \text{ kg}$ , determine o número de cargas elementares em  $Q$ .

**Comentários:**

a)

As forças atuando sobre a barra estão representadas a seguir:



Pelo equilíbrio de momentos em torno do meio da barra:

$$\frac{MgL}{3} + \frac{F_{el_1}L}{2} = \frac{F_{el_2}L}{2} \Rightarrow M = \frac{3}{2g} \left( \frac{6kQ^2}{D^2} - \frac{5kQ^2}{D^2} \right) \Rightarrow M = \frac{3kQ^2}{2gD^2}$$

b)

Para calcular a carga  $Q$ :

$$Q = \sqrt{\frac{2MgD^2}{3k}}$$

Substituindo os valores do enunciado:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1536 \cdot 0,09 \cdot 10}{3 \cdot 9 \cdot 10^9}} = \sqrt{32 \cdot 10^7} = 4 \cdot 10^3 \sqrt{20} = 8 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{5}$$

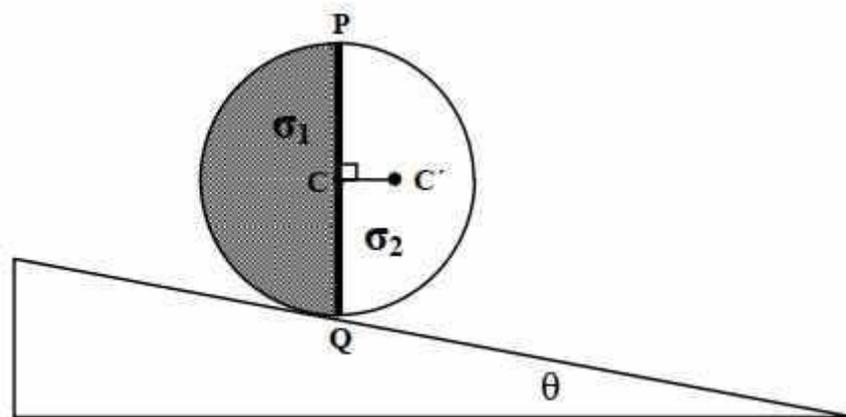
O número de cargas elementares portanto é:

$$\frac{Q}{e} = \frac{8\sqrt{5} \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 5\sqrt{5} \cdot 10^{16}$$

**Gabarito:** a)  $M = \frac{3kQ^2}{2gD^2}$  b)  $Q = 2 \cdot 10^{13}$  cargas elementares.

**66. (OBF – 2012)**

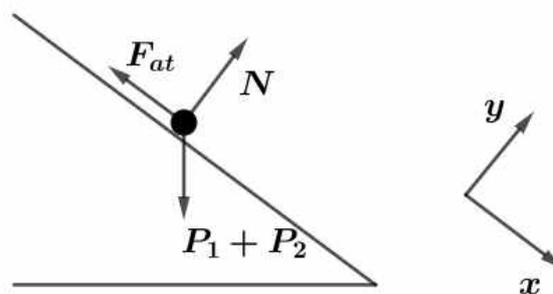




O disco, de raio  $R$ , mostrado na figura é formado por dois semicírculos com densidades de massa  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . O disco não pode escorregar, mas pode rolar. Para uma determinada posição do disco e para certos valores do ângulo  $\theta$ , é possível manter o disco em equilíbrio sobre o plano inclinado. Qual deve ser a razão entre as densidades ( $\sigma_1/\sigma_2$ ) para que o disco fique em equilíbrio com o segmento  $PQ$  posicionado na vertical? Nessa situação, qual é o intervalo permitido para o ângulo  $\theta$ ? Dado auxiliar: o centro de massa,  $C'$ , de um semicírculo de raio  $R$  é tal que o segmento  $CC'$  é  $4R/3\pi$ .

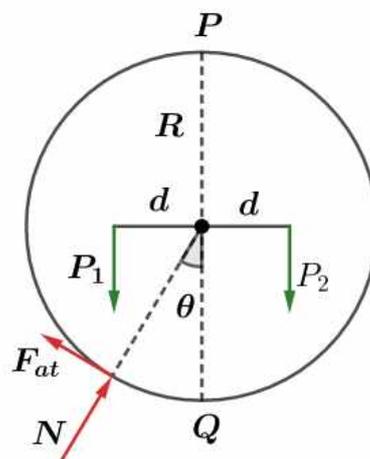
### Comentários:

Analisando o equilíbrio no eixo  $x$  da figura a seguir:



$$F_{at} = (P_1 + P_2) \cdot \text{sen } \theta$$

Agora, analisando a esfera:



Fazendo-se o momento em torno do centro da esfera:

$$P_1 \cdot d = P_2 \cdot d + F_{at} \cdot R \Rightarrow P_1 \cdot d = P_2 \cdot d + (P_1 + P_2) \cdot R \cdot \text{sen } \theta$$

$$P_1(d - R \cdot \text{sen } \theta) = P_2(d + R \cdot \text{sen } \theta)$$

Mas:

$$P_1 = \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot \sigma_1$$

$$P_2 = \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot \sigma_2$$

Logo:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{d + R \cdot \text{sen } \theta}{d - R \cdot \text{sen } \theta} = \frac{3\pi R \text{sen } \theta + 4R}{4R - 3\pi R \cdot \text{sen } \theta} = \frac{4 + 3\pi \cdot \text{sen } \theta}{4 - 3\pi \cdot \text{sen } \theta}$$

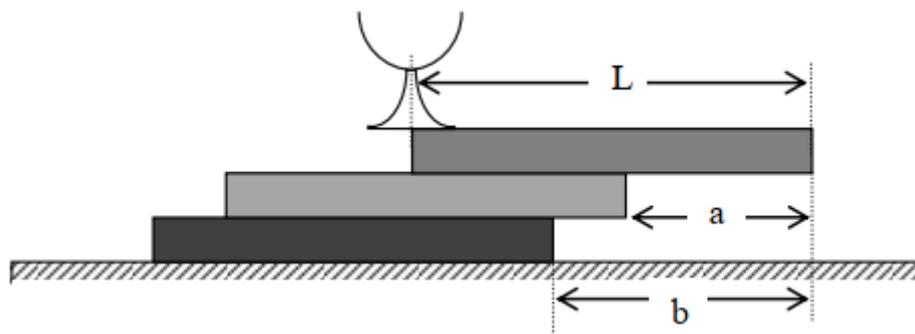
Como  $0 \leq \theta < 90^\circ$ ,  $\text{sen } \theta > 0$ .

Logo o numerador é sempre positivo, enquanto o denominador pode assumir valores negativos dependendo de  $\theta$ . Entretanto, como trata-se de uma proporção de densidades, um valor negativo não apresenta sentido físico. Portanto:

$$4 > 3\pi \cdot \text{sen } \theta \Rightarrow \boxed{\text{sen } \theta < \frac{4}{3\pi}}$$

**Gabarito:**  $\frac{4+3\pi \cdot \text{sen } \theta}{4-3\pi \cdot \text{sen } \theta}$  e  $\text{sen } \theta < \frac{4}{3\pi}$

### 67. (OBF – 2013)



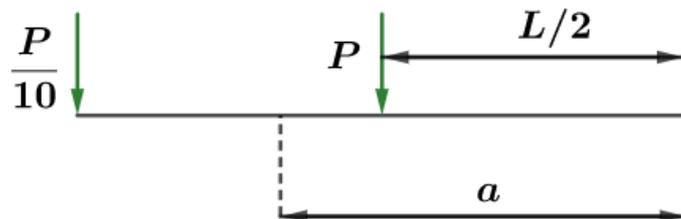
Três livros idênticos de comprimento  $L$  estão empilhados com uma taça de  $1/10$  do peso de um livro posicionada como mostra a figura. Qual o valor limite da razão  $b/a$  para que o conjunto fique em equilíbrio?

#### Comentários:

O ideal é que se trabalhe o problema de cima para baixo, buscando sempre a situação limite em cada livro.

Para a primeira barra:



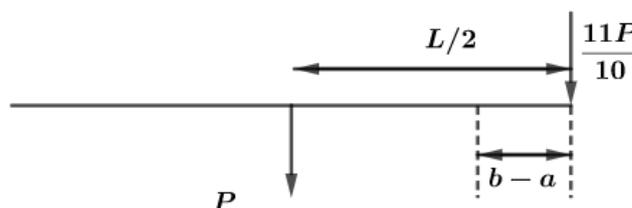


O momento com o último ponto de contato entre os livros como polo:

$$\frac{P}{10}(L - a) = P\left(a - \frac{L}{2}\right) \Rightarrow L - a = 10a - 5L$$

$$6L = 11a \Rightarrow a = \frac{6}{11}L$$

No caso limite, também se tem que o CG do conjunto está no último ponto de contato (se for além disso o conjunto cai). Portanto, a representação para o próximo livro fica:



Fazendo o momento em torno do ponto extremo:

$$P\left(\frac{L}{2} - (b - a)\right) = \frac{11P}{10}(b - a) \Rightarrow \frac{L}{2} - b + a = \frac{11}{10}b - \frac{11}{10}a$$

Substituindo  $a$ :

$$\frac{L}{2} + \frac{21}{10} \cdot \frac{6}{11}L = \frac{21}{10}b \Rightarrow \frac{181L}{110} = \frac{21b}{10} \Rightarrow b = \frac{1810L}{21 \cdot 110}$$

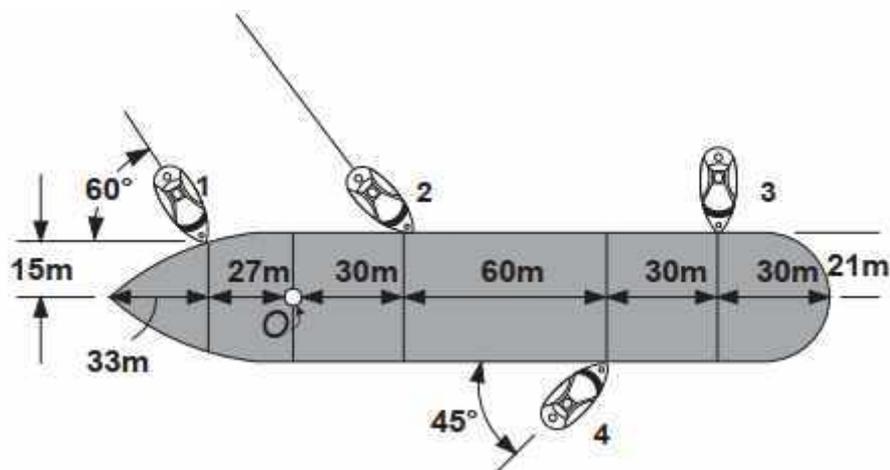
Logo, a relação pedida fica:

$$\frac{b}{a} = \frac{1810}{21 \cdot 110} \cdot \frac{11}{6} = \frac{905}{5 \cdot 126} = \frac{181}{126}$$

**Gabarito:**  $\frac{181}{126}$

68. (OBF – 2015)





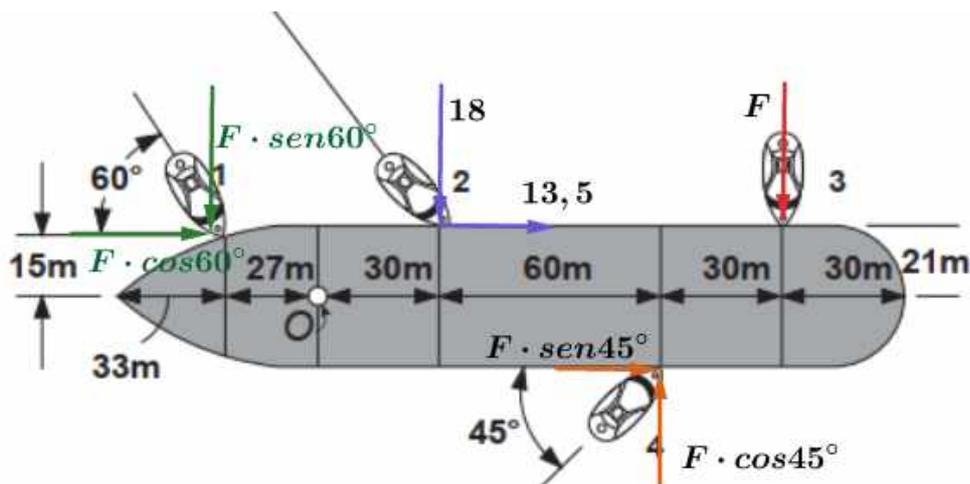
O canal da Mancha é um braço de mar pertencente ao oceano Atlântico que separa a ilha da Grã-Bretanha do norte da França. Atualmente é uma das localidades de maior circulação de navios do mundo. Quatro rebocadores são usados para trazer um transatlântico ao cais. Para isso é feita uma manobra como ilustra a figura abaixo. Cada rebocador exerce uma força de 22500 N na direção mostrada. Determine o momento resultante em relação ao ponto  $O$ .

Considere a força exercida pelo segundo rebocador na forma vetorial como sendo:

$$\vec{F}_2 = (13,5 \hat{i} - 18 \hat{j}) \text{ kN}$$

#### Comentários:

As forças e medidas relevantes são:



Calculando o momento em relação a  $O$ , tem-se:

$$F \cdot \cos 60^\circ \cdot 15 + 18 \cdot 30 + 13,5 \cdot 21 + F \cdot 120 - F \cdot \sin 60^\circ \cdot 27 - F \cdot \sin 45^\circ \cdot 21 - F \cdot \cos 45^\circ \cdot 90 = M_o$$

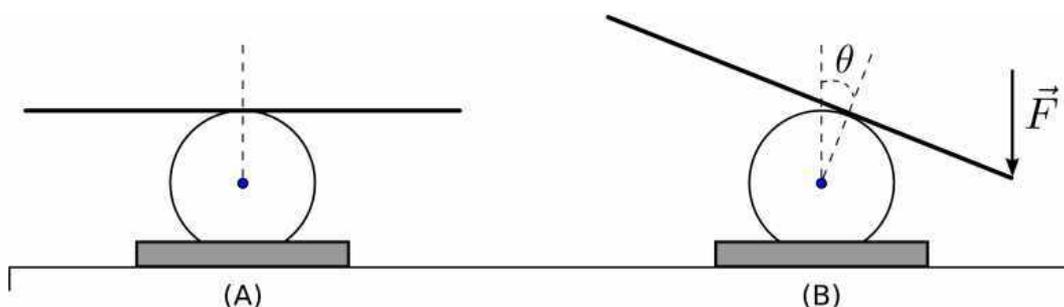
$$M_o = \frac{22,5 \cdot 15}{2} + 540 + 283,5 + 22,5 \cdot 120 - 22,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 27 - 22,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 21 - 22,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 90$$

$$M_o \approx 1400 \text{ kN.m} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ N.m}$$

**Gabarito:  $1,4 \cdot 10^6 \text{ N.m}$**

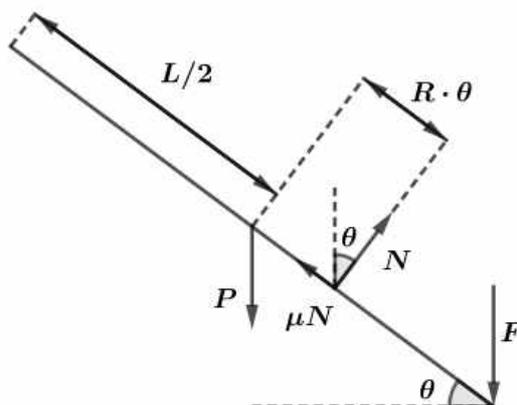
### 69. (OBF – 2017)

Uma aluna de física está investigando condições de equilíbrio estático de objetos encontrados em sua mesa de estudos. Inicialmente ela fixa uma lata cilíndrica de raio  $r = 5,00 \text{ cm}$  em uma mesa horizontal e em seu topo apoia uma régua plástica homogênea de comprimento  $L = 30,0 \text{ cm}$  e massa  $m = 40,0 \text{ g}$  na situação de equilíbrio estático ilustrada na figura A. Depois, ela aplica uma força vertical  $\vec{F}$  em uma das extremidades da régua e observa que o ponto de apoio da mesma sobre o cilindro se desloca conforme ilustrado na figura B. Ela observa que a régua pode assumir configurações de equilíbrio estático desde que  $0 < \theta < 30^\circ$ . Determine (a) o valor do coeficiente de atrito estático entre a régua e a lata e (b) a intensidade da força externa na situação em que  $\theta = 30^\circ$ .



#### Comentários:

No equilíbrio:



Fazendo o equilíbrio translacional na situação limite:

$$\begin{cases} P + F = N(\cos 30^\circ + \mu \cdot \sin 30^\circ) \\ \mu \cdot N \cdot \cos 30^\circ = N \cdot \sin 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \mu = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para achar o F, faz-se o equilíbrio rotacional em torno do ponto de contato entre a lata e a régua:

$$P \cdot r \cdot \theta \cdot \cos \theta = F \cdot \left( \frac{L}{2} - r \cdot \theta \right) \cdot \cos \theta \Rightarrow \frac{P \cdot r \cdot \theta}{\frac{L}{2} - r \cdot \theta} = F = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot r \cdot \theta}{L - 2 \cdot r \cdot \theta}$$

Para os valores do problema:



$$F = \frac{2 \cdot 0,04 \cdot 10 \cdot 0,05 \cdot \frac{\pi}{6}}{0,3 - 2 \cdot 0,05 \cdot \frac{\pi}{6}} \approx 0,0846 \text{ N}$$

**Gabarito:** a)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  b) 0,0846 N

### 70. (2ª fase OBF – 2008)

A energia cinética de rotação de um corpo rígido que gira com velocidade angular  $\omega$  em torno de certo eixo, é dada por  $E_{rot} = \frac{I}{2} \omega^2$ . A grandeza  $I$  é chamada de momento de inércia, a qual depende não só da massa do corpo, mas também de como a massa está distribuída em torno do eixo de rotação. Seja um corpo rígido constituído de dezesseis bolas de mesma massa  $m$  que estão distribuídas simetricamente ao longo de duas circunferências concêntricas de raios  $r$  e  $2r$ . Elas estão ligadas entre si por barras finas e rígidas de massa desprezível, como mostra a figura 3. Expressando o resultado em termos da massa total  $M = 16m$  e do raio externo  $R = 2r$ , calcule o momento de inércia do corpo na situação onde ele gira, com velocidade angular constante  $\omega$ , em torno de um eixo:

- perpendicular ao plano que contem as circunferências e que passa pelos seus centros
- que pertence ao plano que contém as circunferências e que passa por quatro bolas.

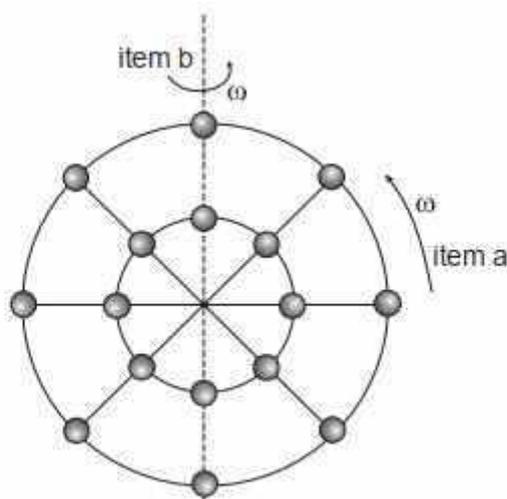


Fig. 3

### Comentários:

a)

No caso do eixo perpendicular ao eixo das bolinhas, como todas elas possuem o mesmo eixo de giração, teremos que todas possuem a mesma velocidade angular. Assim, podemos calcular a energia cinética do sistema da seguinte forma:

i. Bolinhas mais externas:

$$E_c = \frac{8 \cdot m \cdot (\omega \cdot 2r)^2}{2}$$

ii. Bolinhas internas:

$$E_c = \frac{8 \cdot m \cdot (\omega \cdot r)^2}{2}$$

iii. Somando (i) e (ii), e igualando à fórmula fornecida pelo enunciado, temos:

$$E_c = \frac{40 \cdot m \cdot (\omega \cdot r)^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2} \Rightarrow I = 40m \cdot r^2$$

Mas  $R = 2r$  e  $M = 16m$ , assim:

$$I = \frac{5}{8} M \cdot R^2$$

b)

Aplicaremos o mesmo raciocínio utilizado no item a):

iv. Vamos considerar que as bolinhas as quais estão sobre o eixo de rotação possuem energia cinética nula.

v. Observe que o círculo foi dividido em 8 partes iguais, dessa forma, cada arco possui o valor de 45 graus.

vi. Assim, para as bolinhas do círculo menor temos:

$$E_c = \frac{2m(\omega r)^2}{2} + \frac{4m \left( \omega r \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{2} = 2m(\omega r)^2$$

vii. Analogamente para as bolinhas mais externas:

$$E_c = \frac{2m(\omega 2r)^2}{2} + \frac{4m \left( \omega 2r \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{2} = 8m(\omega r)^2$$

viii. Somando (iii) e (iv), temos:

$$E_c = 10m(\omega r)^2 = \frac{I\omega^2}{2} \Rightarrow I = \frac{5}{16} M \cdot R^2$$

**Gabarito:** a)  $I = \frac{5}{8} MR^2$  b)  $I = \frac{5}{16} MR^2$

### 71. (3ª fase OBF – 2009)

a) Um aro circular de raio  $R$  e massa  $m$  uniformemente distribuída, rola sem deslizar, em movimento uniforme, sobre um plano horizontal, como mostra a figura 1.

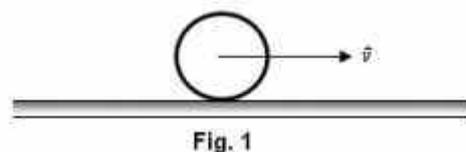
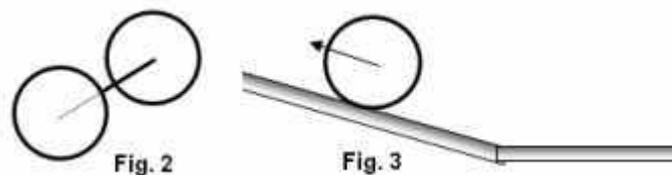


Fig. 1

Considerando que o movimento do aro pode ser descrito pela composição do movimento retilíneo uniforme do seu centro de massa combinado com um movimento de rotação uniforme em relação a este mesmo ponto, determine, em função de  $m$  e  $v$ , a energia cinética total do aro.

b) Com dois aros idênticos ao do item anterior e uma haste rígida de comprimento  $L$  e massa desprezível, construiu-se um carretei cujo esboço é apresentado abaixo na figura 2. Os raios que dão sustentação à haste, ligando-a rigidamente aos aros não foram apresentados e suas massas são desprezíveis, também. Considere que o carretei encontra-se, inicialmente, em movimento uniforme com velocidade  $v$  sobre um plano horizontal e após um certo tempo começa a subir um plano inclinado. A figura 3 mostra um corte transversal dos planos e do carretei.



Determine a altura máxima que a haste atinge em relação ao plano horizontal, quando o carretei atinge velocidade nula. Determine também a desaceleração sofrida pelo carretei durante a subida. Expresse seus resultados em função de variáveis escolhidas dentre as grandezas  $m$ ,  $v$ ,  $R$ ,  $L$  e  $g$  (aceleração da gravidade).

### Comentários:

a)

O aro terá energia cinética de rotação e energia cinética de translação.

Energia cinética de translação:

$$E_{c,tr} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Energia cinética de rotação:

$$E_{c,rot} = \frac{I\omega^2}{2}$$

Em que  $I$  é o momento de Inércia e  $\omega$  é a velocidade angular.

O momento de Inércia é dado por:

$$I = \int r^2 dm$$

Mas, como o raio é constante para qualquer que seja o elemento de massa do anel que selecionarmos, poderemos retirá-lo na integral e concluir que:

$$I = m \cdot r^2$$

E, como  $v = \omega r$ , temos que:

$$E_{c,rot} = E_{c,tr} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Assim, somando (i) e (ii), obtemos  $E_c = m \cdot v^2$ .

b)

A fim de facilitar o problema, vamos tratar esse corpo binário como sendo um único, para isso, devemos determinar a posição do centro de massa. Uma vez que os dois anéis são idênticos, o centro de massa do sistema estará no ponto médio da haste que os liga:

Pela conservação de energia do centro de massa do sistema, temos:

$$2 \cdot m \cdot gH = 2 \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow H = \frac{v^2}{g}$$

Como o enunciado pede a altura em relação ao plano horizontal, temos de somar o valor do Raio do anel.

$$H_T = \frac{v^2}{g} + R$$

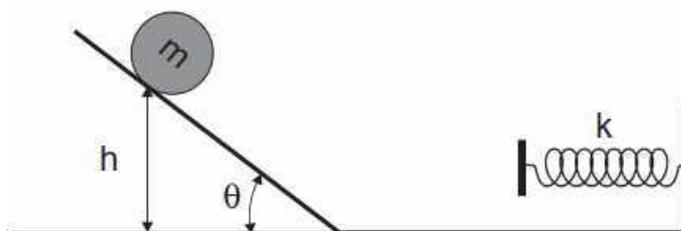
Observe que o enunciado não nos forneceu o ângulo que o plano inclinado faz com o solo, vamos considerar a existência de um ângulo  $\alpha$ . Assim, temos que:

$$m \cdot a = mg \sin(\alpha) \Rightarrow a = g \sin(\alpha)$$

**Gabarito: a)  $E_c = m \cdot v^2$  ; b)  $a = g \sin(\alpha)$**

## 72. (2ª fase OBF – 2012)

Um cilindro de massa  $m$  e raio  $R$  é solto de uma altura  $h$  como indicado na figura abaixo.



Na rampa inclinada o cilindro rola sem deslizar. Na parte horizontal não há atrito entre o cilindro e a superfície. Ao final da superfície horizontal é fixa uma mola de constante elástica  $k$ . Ao colidir com a mola toda a energia cinética de rotação do cilindro é dissipada por atrito no anteparo que está fixo na outra extremidade da mola. A Energia Cinética ( $E_R$ ) de rotação do cilindro é obtida através da relação  $E_R = \frac{1}{2}I\omega^2$ , onde  $I = \frac{1}{2}mR^2$  é o momento de inércia do cilindro e  $\omega$  a velocidade de rotação. Use  $g$  como aceleração gravitacional local.

a) Determine a deformação máxima  $X$  que a mola irá sofrer durante a colisão.

b) Determine a altura máxima  $H$  em relação a horizontal que o cilindro atingirá ao retomar a rampa após a primeira colisão com a mola.

**Comentários:**



a)

Como o cilindro irá dissipar toda a energia cinética de rotação por atrito, somente a energia cinética de translação será considerada, a qual podemos calcular pela conservação de energia:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

Como  $\omega = v/R$  e substituindo o valor de  $I$ , temos:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{3}{4} \cdot mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h}{3}}$$

Assim, vamos ter que:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h \cdot m}{3 \cdot k}}$$

b)

O cilindro chega ao ponto mais alto de sua trajetória com energia cinética nula, assim:

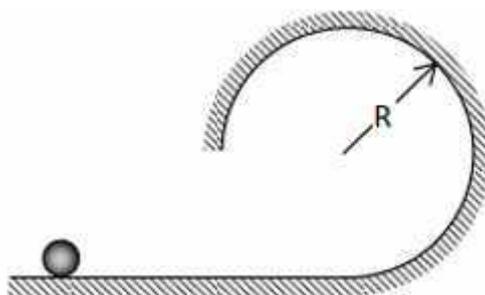
$$m \cdot g \cdot H = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow H = \frac{2 \cdot h}{3}$$

**Gabarito:** a)  $v = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h}{3}}$  b)  $H = \frac{2 \cdot h}{3}$

### 73. (3ª fase OBF – 2012)

Uma esfera de raio  $r$  e massa  $m$  rola sem escorregar sobre a superfície mostrada na figura. Determine a velocidade mínima do centro de massa que a esfera deve ter para completar a curva rolando sem perder contato com a superfície.

Dado: momento de inércia de uma esfera =  $2mr^2/5$ .



**Comentários:**

A energia se conserva:

$$E_0 = E_f$$
$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{I\omega'^2}{2} + mg2R$$

Em que  $\omega = \frac{v}{r}$  e  $I = \frac{2mr^2}{5}$ .

Além disso, a velocidade mínima se dá quando a  $N = 0$  no ponto mais alto. Dessa forma, temos:

$$N = 0 \Rightarrow R_{CP} = P \Rightarrow \frac{mv'^2}{R} = mg \Rightarrow v' = \sqrt{Rg}$$

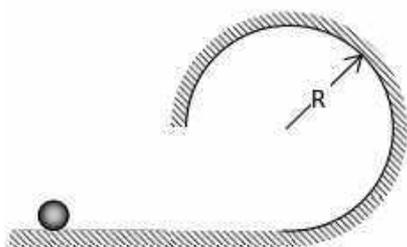
Substituindo na equação da energia, vem:

$$v^2 + \frac{2v^2}{5} = Rg + \frac{2Rg}{5} + 4Rg \Rightarrow 7v^2 = 27Rg \Rightarrow v = \sqrt{\frac{27Rg}{7}} \text{ m/s}$$

**Gabarito:**  $\sqrt{\frac{27Rg}{7}} \text{ m/s}$

**74. (3ª fase OBF – 2012)**

Uma esfera de raio  $r$  e massa  $m$  rola sem escorregar sobre a superfície mostrada na figura. Determine a velocidade mínima que a esfera deve ter para completar a curva rolando sem perder contato com a superfície. Dado: momento de inércia de uma esfera =  $2mr^2/5$ .



**Comentários:**

Para que o corpo possa completar a volta é necessário que a Normal seja nula no ponto mais alto da trajetória:

$$\frac{m \cdot v_f^2}{(R - r)} = m \cdot g \Rightarrow \frac{m \cdot v_f^2}{2} = \frac{m \cdot g \cdot (R - r)}{2}$$

Pela conservação de energia do sistema, temos:

$$\frac{m \cdot v_0^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{m \cdot v_f^2}{2} + \frac{I\omega_f^2}{2} + m \cdot g \cdot 2(R - r)$$

Como  $I = \frac{2}{5}mr^2$  e  $\omega = v/r$ ; logo:

$$\begin{aligned} \frac{m \cdot v_0^2}{2} + \frac{2}{10}mr^2 \cdot (v_0/r)^2 &= \frac{m \cdot v_f^2}{2} + \frac{2}{10}mr^2 \cdot (v_f/r)^2 + m \cdot g \cdot 2(R - r) \\ \Rightarrow \frac{7}{10}v_0^2 &= \frac{7}{10}v_f^2 + g \cdot 2(R - r) \end{aligned}$$

Mas,  $v_f^2 = g \cdot R$ . Então:

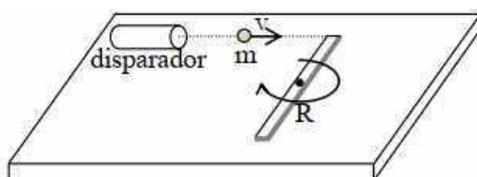
$$\frac{7}{10}v_0^2 = \frac{27}{10}g \cdot (R - r) \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{27}{7} \cdot g \cdot (R - r)}$$

**Gabarito:**  $\sqrt{\frac{27}{7} \cdot g \cdot (R - r)}$

**75. (3ª fase OBF – 2013)**

A figura mostra uma haste homogênea de comprimento  $2R$  e massa  $M$  que está sobre uma superfície lisa. A haste está articulada no seu centro e inicialmente em repouso. Pequenas esferas de massa  $m$  atingem uma das extremidades da haste. As esferas são lançadas de um reservatório (disparador) e liberadas de forma a atingirem esta extremidade com velocidade  $v$  toda vez que está completar uma revolução. As colisões são elásticas e as esferas podem ser consideradas puntiformes. Encontre a velocidade angular  $\omega_{i+1}$  em termos de  $\omega_i$ , de  $v$  após a  $i$ -ésima esfera colidir com a haste.

Dado: o momento de inércia da haste é  $MR^2/3$ .



**Comentários:**

Faremos a análise da  $i$ -ésima colisão:

I) Momento Angular se conserva para o sistema Haste + esfera:

$$I\omega_i + mvr = I\omega_{i+1} - mv'_{i+1}$$

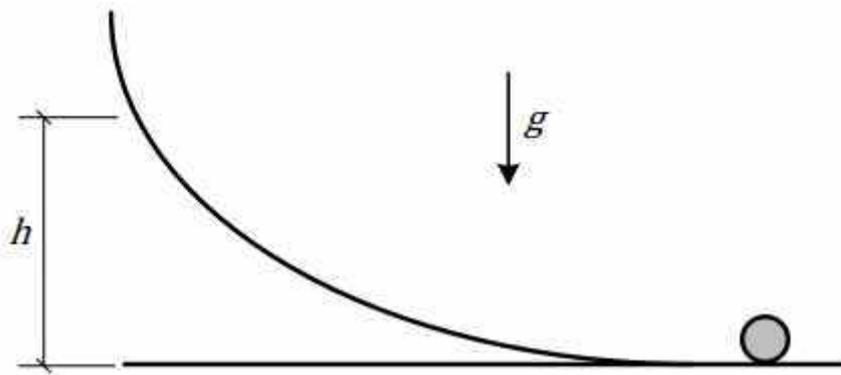
II) Colisão elástica (Energia se conserva):

$$\frac{I\omega_i^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{I\omega_{i+1}^2}{2} + \frac{mv_{i+1}'^2}{2}$$

$$\Rightarrow \omega_{i+1} = \frac{1}{2}\omega_{i+1} + \frac{3}{2}v/r$$

**Gabarito:**  $\omega_{i+1} = \frac{1}{2}\omega_{i+1} + \frac{3}{2}v/r$

**76. (IME – 2019)**



Um cilindro de raio  $R$  rola, sem deslizar, em velocidade angular  $\omega$ , sobre uma superfície plana horizontal até atingir uma rampa. Considerando também que o rolamento na rampa seja sem deslizamento e chamando de  $g$  a aceleração da gravidade, a altura máxima,  $h$ , que o eixo do cilindro alcança na rampa em relação à superfície plana é:

- a)  $R + \frac{\omega^2 R^2}{g}$
- b)  $R + \frac{\omega^2 R^2}{2g}$
- c)  $2R + \frac{\omega^2 R^2}{g}$
- d)  $\frac{\omega^2 R^2}{g}$
- e)  $\frac{\omega^2 R^2}{2g}$

#### Comentários:

Trata-se de uma questão simples de conservação de energia, mas cilindro deve ser considerado um corpo extenso, com uma energia cinética de rotação associada ao seu momento de inércia.

A energia cinética de rotação pode ser dada por:

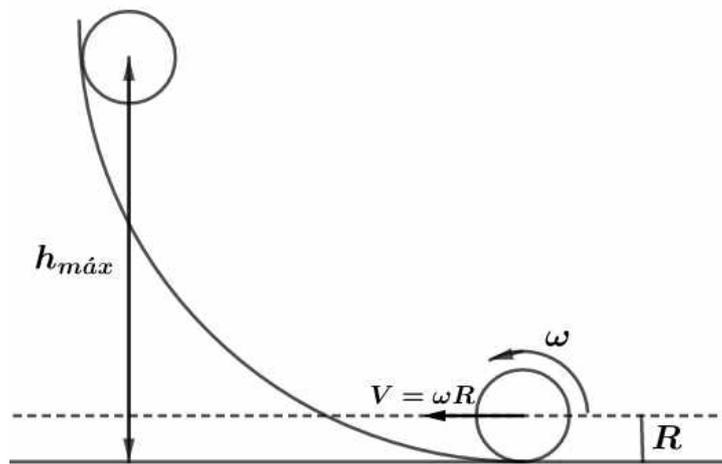
$$E_{rot} = \frac{I\omega^2}{2}$$

Em que  $I$  é o momento de inércia em relação ao eixo do cilindro. Se o cilindro for maciço,  $I$  é calculado por:

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

Assim, temos a seguinte configuração:





Definindo como sistema a Terra e o cilindro, não existem forças externas realizando trabalho sobre nosso sistema. Além disso, o conjunto ausente de forças não conservativas, portanto, a energia mecânica se conserva:

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc} \Rightarrow 0 = \Delta E_{mec} - 0$$

$$\Delta E_{mec} = 0$$

$$(E_{mec})_{final} = (E_{mec})_{inicial}$$

$$m \cdot g \cdot (h_{m\acute{a}x} - R) = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2} \text{ (eq 1)}$$

$$m \cdot g \cdot (h_{m\acute{a}x} - R) = \frac{m \cdot (\omega \cdot R)^2}{2} + \frac{\frac{mR^2}{2} \cdot \omega^2}{2}$$

$$\boxed{h_{m\acute{a}x} = R + \frac{3 \omega^2 R^2}{4 g}}$$

Note que não existe alternativa para o caso do cilindro maciço. Se considerarmos o cilindro oco, então  $I$  é dado por  $m \cdot R^2$ . Voltando a equação 1, temos:

$$m \cdot g \cdot (h_{m\acute{a}x} - R) = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{(m \cdot R^2) \cdot \omega^2}{2} \Rightarrow \boxed{h_{m\acute{a}x} = R + \frac{\omega^2 R^2}{g}}$$

Note que o IME não forneceu os valores dos momentos de inércia e não mencionou se o corpo era maciço ou oco. O candidato deveria conhecer estes resultados para realizar essa questão. Trabalhamos a dinâmica do corpo extenso no nosso curso, mostrando como calcular o momento de inércia de um corpo e os principais.

**Gabarito: A**



## 6. Considerações finais

Chegamos ao final da nossa aula. Relembre os principais conceitos estudados nessa aula e tenha no sangue as condições para o equilíbrio de um corpo. Faça muitos exercícios, pois essa matéria é daquelas que você aprende muito com a prática.

Revise e faça pequenos resumos sobre os conceitos de momento de inércia, energia cinética de rotação de um corpo extenso e os tipos de rolamento. Esses temas não são comuns no ensino médio brasileiro e pode vir a cair nos dois vestibulares.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @proftoniburgatto



## 7. Referências bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.
- [4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física 1. 9ª ed. Moderna. 490p.
- [5] Resnick, Halliday. Fundamentos de Física. 8ª ed. LTC. 349p. Versão



## 8. Versão de aula

Versão de Aula	Data da última atualização
1.0	26/08/2019

