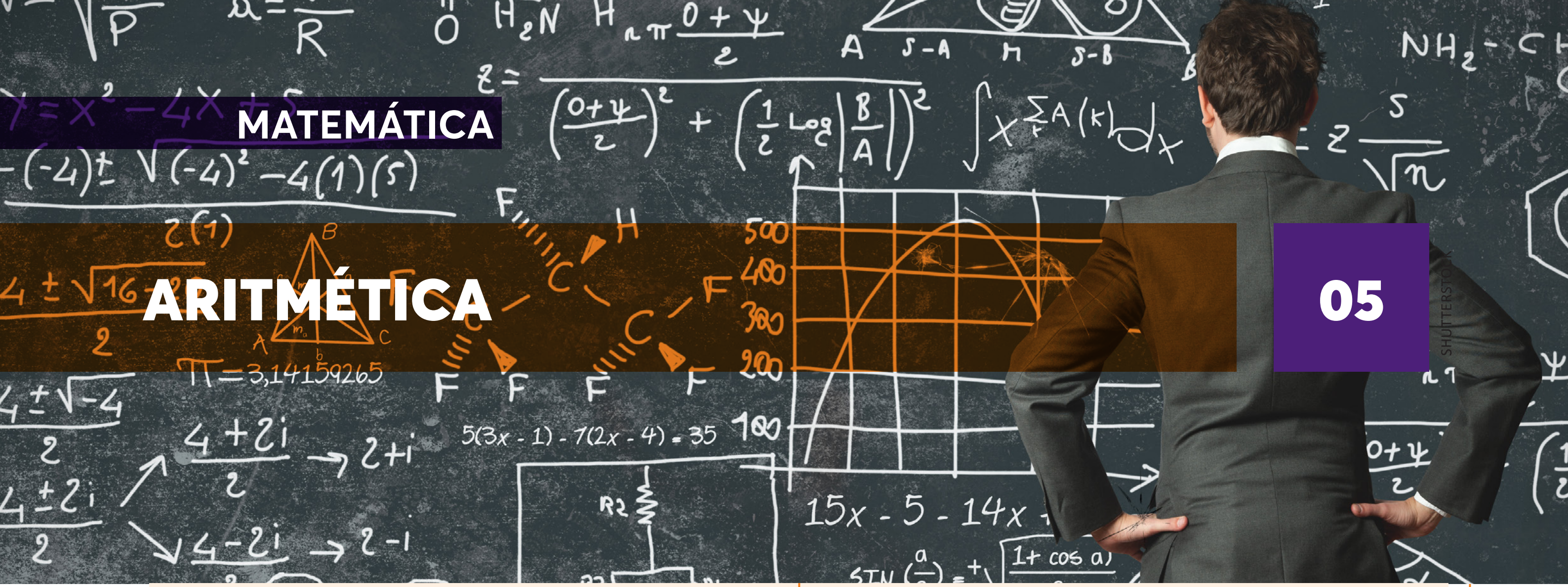


MATEMÁTICA

ARITMÉTICA

05

01| Somando todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4, o resultado será igual a

A 2.400.

B 2.444.

C 6.000.

D 6.600.

E 6.660.

02| Para desbloquear a tela de um aparelho celular, o usuário deve digitar uma senha de três algarismos quaisquer. Note que também são válidas senhas, por exemplo, 088 ou 000. Se a pessoa digita duas vezes a senha errada, o mecanismo de segurança do aparelho trava a tela por uma hora.

Rafael esqueceu sua senha, mas lembra que ela formava um número que era: quadrado perfeito, menor do que 900 e múltiplo de 3. Usando corretamente suas três lembranças, as chances de Rafael conseguir desbloquear a tela do seu celular, sem que ela trave por uma hora, são iguais a

A $\frac{2}{9}$.

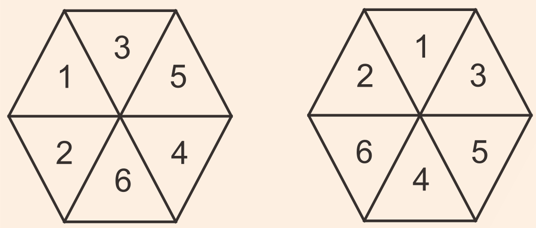
B $\frac{2}{11}$.

C $\frac{3}{11}$.

D $\frac{1}{3}$.

E $\frac{1}{5}$.

03| Um hexágono é dividido em 6 triângulos equiláteros. De quantas formas podemos colocar os números de 1 a 6 em cada triângulo, sem repetição, de maneira que a soma dos números em três triângulos adjacentes seja sempre múltiplo de 3? Soluções obtidas por rotação ou reflexão são **diferentes**, portanto as figuras abaixo mostram duas soluções distintas.



A 12

B 24

C 36

D 48

E 96

04| O polinômio $P(x) = x^3 - bx^2 + 80x - c$ possui três raízes inteiras positivas distintas. Sabe-se que duas das raízes do polinômio são divisoras de 80 e que o produto dos divisores positivos de c menores do que c é c^2. Qual é o valor de b?

A 11

B 13

C 17

D 23

E 29

05| Estima-se que, em determinado país, o consumo médio por minuto de farinha de trigo seja $4,8$ toneladas. Nessas condições, o consumo médio por semana de farinha de trigo, em quilogramas, será aproximadamente:

A $4,2 \cdot 10^5$

B $4,4 \cdot 10^6$

C $4,6 \cdot 10^6$

D $4,8 \cdot 10^7$

E $5,0 \cdot 10^7$

06| A soma dos quatro algarismos distintos do número $N = abcd,$ é $16.$ A soma dos três primeiros algarismos é igual ao algarismo da unidade e o algarismo do milhar é igual à soma dos algarismos da centena e da dezena. O produto dos algarismos da dezena e da centena é

A 4

B 3

C 2

D 1

07| Uma lanchonete vende três tipos de doce, conforme a tabela abaixo:

Doce	Valor Unitário
Brigadeiro	R$ 1,00
Bem-Casado	R$ 2,00
Surpresa de Uva	R$ 3,00

Maria está nessa lanchonete e vai gastar R$ 10,00, comprando, pelo menos, um doce de cada tipo. Quantas são as possibilidades de compra de Maria?

A 10

B 8

C 6

D 4

E 3

08| Das afirmações:

I. Todo número inteiro positivo pode ser escrito, de maneira única, na forma $2^{k-1}(2m-1),$ em que k e m são inteiros positivos.

II. Existe um número $x \in \left\{0, \frac{ð}{2}\right\}$ de tal modo que os números $a_1 = \operatorname{sen} x,$ $a_2 = \operatorname{sen}\left(x + \frac{ð}{4}\right),$ $a_3 = \operatorname{sen}\left(x + \frac{ð}{2}\right)$ e $a_4 = \operatorname{sen}\left(x + \frac{3ð}{4}\right)$ estejam, nesta ordem, em progressão geométrica.

III. Existe um número inteiro primo p tal que $\sqrt{p}$ é um número racional.

é (são) verdadeira(s)

A apenas I.

B apenas II.

C apenas III.

D apenas I e II.

E todas.

09| Rodrigo estava observando o pisca-pisca do enfeite natalino de sua casa. Ele é composto por lâmpadas nas cores amarelo, azul, verde e vermelho. Rodrigo notou que lâmpadas amarelas acendem a cada 45 segundos, as lâmpadas verdes, a cada 60 segundos, as azuis, a cada 27 segundos, e as vermelhas só acendem quando as lâmpadas das outras cores estão acesas ao mesmo tempo. De quantos em quantos minutos, as lâmpadas vermelhas acendem?

A 6

B 9

C 12

D 15

E 18

10| Os números naturais de 0 a 3.000 foram dispostos, consecutivamente, conforme a figura, que mostra o começo do processo.

5ª linha					4								12								20				
4ª linha				3		5						11		13						19		21			
3ª linha			2				6				10				14				18				22		
2ª linha		1						7		9						15		17						....	
1ª linha	0								8								16								....

Interbits®

Nessas condições, o número 2.017 está na

A) 1ª linha.

B) 2ª linha.

C) 3ª linha.

D) 4ª linha.

E) 5ª linha.

11| Dividindo-se o número natural N por 13, obtém-se quociente Q e resto R. Aumentando-se 2 unidades no dividendo e mantendo-se o divisor, o quociente aumenta de 1 unidade e a divisão é exata.

Sabendo-se que $Q + R = 16$, podemos afirmar que os divisores primos de N são:

A) 2 e 19

B) 2, 3 e 13

C) 3 e 17

D) 3, 5 e 7

E) 5 e 11

12| Um grupo de pesquisadores, composto por 6 médicos e seus 19 orientandos, recebeu, ao final de um projeto, como bonificação, uma quantia, em notas de R$ 100,00, a ser dividida entre eles de tal modo que metade fosse dividida, igualmente, entre os médicos e a outra metade fosse dividida, igualmente, entre os orientandos.

Com base nessas informações, pode-se afirmar que a diferença entre os valores recebidos por um médico e um orientando foi, no mínimo, igual a

A) R$ 1.300,00

B) R$ 1.500,00

C) R$ 2.000,00

D) R$ 2.400,00

E) R$ 3.000,00

13| Sejam a e b dois números inteiros positivos. Diz-se que a e b são equivalentes se a soma dos divisores positivos de a coincide com a soma dos divisores positivos de b.

Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

A) 8 e 9.

B) 9 e 11.

C) 10 e 12.

D) 15 e 20.

E) 16 e 25.

14| O dono de uma papelaria comprou uma grande quantidade de canetas de dois tipos, A e B, ao preço de R$ 20,00 e R$ 15,00 a dúzia, respectivamente, tendo pago na compra o valor de R$ 1.020,00. No total, ele saiu da loja com 777 canetas, mas sabe-se que, para cada três dúzias de um mesmo tipo de caneta que comprou, ele ganhou uma caneta extra, do mesmo tipo, de brinde.

Nas condições descritas, o total de dúzias de canetas do tipo B que ele comprou foi igual a

A) 52.

B) 48.

C) 45.

D) 41.

E) 37.

15| Seja N um número natural de dois algarismos não nulos. Trocando-se a posição desses dois algarismos, obtém-se um novo número natural M de modo que $N - M = 63$.

A soma de todos os números naturais N que satisfazem as condições dadas é

A) 156

B) 164

C) 173

D) 187

E) 198

16| Na última década do século XX, a perda de gelo de uma das maiores geleiras do hemisfério norte foi estimada em $96\ km^3$. Se $1\ cm^3$ de gelo tem massa de $0,92\ g$, a massa de $96\ km^3$ de gelo, em quilogramas, é

A $8,832 \cdot 10^{12}$.

B $8,832 \cdot 10^{13}$.

C $8,832 \cdot 10^{14}$.

D $8,832 \cdot 10^{15}$.

E $8,832 \cdot 10^{16}$.

17| A conta armada a seguir indica a adição de três números naturais, cada um com três algarismos, resultando em um número natural de quatro algarismos. Os algarismos que compõem os números envolvidos na conta, indicados pelas letras A, C, D e E, representam números primos distintos entre si.

$$\begin{array}{r} AEC \\ +\ CDD \\ EAE \\ \hline 1CDC \end{array}$$

Assim, o valor de $E \cdot D + A \cdot C$ é igual a

A 35.

B 33.

C 31.

D 29.

E 27.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Leia o texto publicado em maio de 2013 para responder à(s) questão(ões) a seguir.

Os Estados Unidos se preparam para uma invasão de insetos após 17 anos

Elas vivem a pelo menos 20 centímetros sob o solo há 17 anos. E neste segundo trimestre, bilhões de cigarras (*Magicicada septendecim*) emergirão para invadir partes da Costa Leste, enchendo os céus e as árvores, e fazendo muito barulho.

Há mais de 170 espécies de cigarras na América do Norte, e mais de 2 mil espécies ao redor do mundo. A maioria aparece todos os anos, mas alguns tipos surgem a cada 13 ou 17 anos. Os visitantes deste ano, conhecidos como *Brood II* (Ninhada II, em tradução livre) foram vistos pela última vez em 1996. Os moradores da Carolina do Norte e de Connecticut talvez tenham de usar rastelos e pás para retirá-las do caminho, já que as estimativas do número de insetos são de 30 bilhões a 1 trilhão.

Um estudo brasileiro descobriu que intervalos baseados em números primos ofereciam a melhor estratégia de sobrevivência para as cigarras.

<http://tinyurl.com/zh8daj6> Acesso em: 30.08.2016. Adaptado.

18| Suponha a existência de uma espécie C_1 de cigarras, emergindo na superfície a cada 13 anos, e de uma espécie C_2 de cigarras, emergindo a cada 17 anos.
Se essas duas espécies emergirem juntas em 2016, elas emergirão juntas novamente no ano de

A 2.271.

B 2.237.

C 2.145.

D 2.033.

E 2.029.

GABARITO

01| E

Podemos formar $A_{4,3} = 24$ números de três algarismos com os dígitos disponíveis. Ademais, como temos quatro dígitos, segue que cada um figura $\frac{24}{4} = 6$ vezes em cada ordem e, portanto, tem-se que a resposta é

$$6 \cdot (1+2+3+4) + 10 \cdot 6 \cdot (1+2+3+4) + 100 \cdot 6 \cdot (1+2+3+4) = 6660.$$

02| A

Os quadrados perfeitos menores que 900 e múltiplos de 3 são aqueles cujas raízes também são múltiplas de 3. Como 900 é o quadrado perfeito de 30, os possíveis quadrados perfeitos são aqueles de raízes menores que 30, portanto de 0 a 29. Destes, são serão múltiplos de 3: $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$ e 27. Logo, Rafael terá um total de 9 combinações possíveis, de acordo com as informações que lembrava.

Para que Rafael não trave seu celular, ele deve acertar a senha na primeira ou na segunda tentativa, ou seja:

$\text{Acerta } 1^a \rightarrow \frac{1}{9}$

$\text{Erra } 1^a/\text{Acerta } 2^a \rightarrow \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{9}$

$P_{total}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$

03| D

Fazendo congruência em $\text{mod } 3$ pode-se concluir:

- 3 e 6 são côngruos a 0
- 1 e 4 são côngruos a 1
- 2 e 5 são côngruos a 2

Assim, escolhendo a posição do número 6, há seis maneiras de $6\cdot 2$ maneiras posicionar o resto (pois a ordem de colocação é fator de diferenciação) e cada no côngruo pode ser escolhido de 2 formas: $2\cdot 2=4$ maneiras. Logo tem-se $6\cdot 2\cdot 4=48$ maneiras.

04| E

Calculando:

$p_{(c)}=c^{n/2}$

$p_{(c)<c}=\frac{c^{n/2}}{c}$

$\frac{c^{n/2}}{c}=c^2 \rightarrow c^{n/2}=c^3 \rightarrow n=6$

Sendo p e q números primos:

Caso 1: $c=p^2q$; Raízes de $P(x)\rightarrow pq,\ q$ e 1

$q+pq+pq^2=80$

Fazendo: $q=2\rightarrow 2+2p+4p=80\rightarrow p=13;$ Raízes de $P(x)\rightarrow 26,\ 2$ e 1

$b=26+2+1=29\ \ (\text{R. Girard})$

Caso 2: $c=p^2q$; Raízes de $P(x)\rightarrow p^2,\ q$ e 1 (sem solução para raízes div. de 80)

Caso 3: $c=p^5$; Raízes de $P(x)\rightarrow p^3,\ p^2$ e 1 (sem solução para raízes div. de 80)

Caso 4: $c=p^5$; Raízes de $P(x)\rightarrow p^4,\ p$ e 1 (sem solução para raízes div. de 80)

05| D

Calculando:

$1\text{ semana}=7\text{ dias}=7\cdot 24\text{ horas}=7\cdot 24\cdot 60\text{ minutos}=10.080\text{ minutos}$

$4{,}8\text{ toneladas}=4{,}8\cdot 10^3\text{ kg}$

$\text{Por semana}\Rightarrow 4{,}8\cdot 10^3\cdot 10.080\approx 4{,}8\cdot 10^7\text{ kg}$

06| B

Calculando:

$$b\cdot c=?$$

$$a+b+c+d=16$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=d \\ a=b+c \end{array}\right\rangle 2a=d$$

Logo,

$$a+a+2a=16\rightarrow 4a=16\rightarrow a=4\rightarrow d=8$$

$$b+c=4;\ b\neq c\rightarrow \left\langle \begin{array}{l} b=3;\ c=1 \\ \text{ou} \\ b=1;\ c=3 \end{array}\right.$$

$$b\cdot c=3\cdot 1=3$$

07| D

Comprando um doce de cada tipo ela irá gastar: $1+2+3=\text{R\$ }6{,}00.$

Restando- lhe ainda $\text{R\$ }4{,}00,$ que poderá ser distribuído da seguinte forma:

Doce	Quantidades	Quantidades	Quantidades	Quantidades
Brigadeiro	4	2	1	-
Bem-Casado	-	1		2
Surpresa de Uva	-	-	1	-

Portanto, temos 4 possibilidades para a compra destes doces.

08| A

[I] VERDADEIRA. Se o número for ímpar $k=1,$ ou seja, $2^{1-1}(2m-1).$ Logo o número é o produto de um por ele próprio. Se o número for par ele é o produto de um ímpar por uma potência de $2,$, ou seja, $2^{n-1}(2m-1).$

[II] FALSA. Calculando:

$$a_1 \cdot a_3 = (a_2)^2 \Rightarrow \text{sen } x \cdot \text{sen}\left(x + \eth/2\right) = \text{sen}\left(x + \eth/4\right)^2$$

$$\text{sen } x \cdot \cos x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\text{sen } x + \cos x)\right)^2 \Rightarrow \text{sen } x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x)$$

$$2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 1 + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x \Rightarrow 0 \neq 1$$

[III] FALSA. Considerando a e b como inteiros com MDC igual a 1 (fração irredutível) e sendo b diferente de zero, pode-se escrever: $\sqrt{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = pb^2.$ Mas um quadrado perfeito não pode ser igual a um não quadrado perfeito, assim $\sqrt{p}$ não pode ser racional.

09| B

Transformando os tempos dados para minutos e calculando-se o mínimo múltiplo comum entre eles, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} 45 \text{ s} = 0{,}75 \text{ min} \\ 60 \text{ s} = 1 \text{ min} \\ 27 \text{ s} = 0{,}45 \text{ min} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \text{MMC}(0{,}75;\ 1;\ 0{,}45) = 9$$

Assim, a cada 9 minutos as lâmpadas vermelhas estarão acesas (pois todas as outras estarão acesas ao mesmo tempo). Lembrando que para encontrar o MMC deve-se fatorar os números (dividir sucessivamente por números primos em ordem crescente). Ou seja:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 0{,}75 & 1 & 0{,}45 & 2 \\ 0{,}75 & 0{,}50 & 0{,}45 & 2 \\ 0{,}75 & 0{,}25 & 0{,}45 & 3 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}15 & 3 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}05 & 5 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}01 & 5 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}01 & \end{array}\right\} \; 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 900 \Rightarrow \frac{900}{100} = 9$$

10| B

Na primeira linha se encontra todos os números que quando divididos por 4 deixam resto zero e apresentam um quociente par. Sabendo que $2016 = 504 \cdot 16,$ podemos concluir que 2016 encontra-se na primeira linha, portanto 2017 encontra-se na segunda linha.

11| A

Desde que $R = 16 - Q$ e $N = 13Q + R,$ temos

$$N = 13Q + 16 - Q \Leftrightarrow N = 12Q + 16.$$

Ademais, se $N + 2 = 13(Q + 1),$ então

$$12Q + 16 + 2 = 13Q + 13 \Leftrightarrow Q = 5.$$

Portanto, vem $R = 11$ e $N = 76.$

Escrevendo $76 = 2^2 \cdot 19,$ podemos concluir que os divisores primos de N são 2 e 19.

12| A

O valor total em notas de 100 será representado por $100n,$ onde n é o número de notas.

A diferença entre o valor recebido por um médico e o valor recebido por um orientando será dada por:

$$\frac{50n}{6} - \frac{50n}{19} = \frac{(950 - 300) \cdot n}{114} = \frac{650 \cdot n}{114}$$

Considerando:

$$n = 114 \Rightarrow \frac{650 \cdot n}{114} = 650 \;\; \text{(não é múltiplo de 100)}$$

$$n = 228 \Rightarrow \frac{650 \cdot n}{114} = 1500 \;\; \text{(múltiplo de 100)}$$

Portanto, a diferença pedida é no mínimo R\$ 1.500,00.

13| E

Calculando os divisores:

$$\begin{array}{l} \text{Divisores de } 8 \rightarrow \{1, 2, 4, 8\} \rightarrow \text{Soma} = 15 \\ \text{Divisores de } 9 \rightarrow \{1, 3, 9\} \rightarrow \text{Soma} = 13 \\ \text{Divisores de } 10 \rightarrow \{1, 2, 5, 10\} \rightarrow \text{Soma} = 18 \\ \text{Divisores de } 11 \rightarrow \{1, 11\} \rightarrow \text{Soma} = 12 \\ \text{Divisores de } 12 \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \rightarrow \text{Soma} = 28 \\ \text{Divisores de } 15 \rightarrow \{1, 3, 5, 15\} \rightarrow \text{Soma} = 24 \\ \text{Divisores de } 16 \rightarrow \{1, 2, 4, 8, 16\} \rightarrow \text{Soma} = 31 \\ \text{Divisores de } 25 \rightarrow \{1, 5, 25\} \rightarrow \text{Soma} = 31 \end{array}$$

Logo, 16 e 25 são dois inteiros positivos equivalentes.

14| B

Sejam x e $y,$ respectivamente, o número de dúzias compradas de canetas do tipo A e o número de dúzias compradas de canetas do tipo $B.$ Tem-se que

$$20x + 15y = 1020 \Leftrightarrow 4x + 3y = 204.$$

Ademais, sendo $777 = 36 \cdot 21 + 21,$ podemos concluir que ele ganhou 21 canetas e, portanto, comprou $3 \cdot 21 = 63$ dúzias de canetas. Em consequência, vem

$$4 \cdot (63 - y) + 3y = 204 \Leftrightarrow y = 48.$$

15| C

De acordo com as informações do problema, podemos escrever que:

$$N = 10x + y$$
$$M = 10y + x$$

Fazendo $M - N,$ temos:

$$9x - 9y = 63 \Rightarrow x - y = 7$$

Temos duas opções para os valores de x e $y,$ são elas:

$$x = 8 \text{ e } y = 1 \text{ ou } x = 9 \text{ e } y = 2$$

Portanto,

$$N = 81 \text{ ou } N = 92$$

Logo:

$$81 + 92 = 173.$$

16| B

$$96 \text{ km}^3 = 9{,}6 \cdot 10^{16} \text{ cm}^3$$
$$0{,}92 \text{ g} = 0{,}92 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

Massa de 96 km^3 de gelo em quilogramas:

$$9{,}6 \cdot 10^{16} \cdot 0{,}92 \cdot 10^{-3} = 8{,}832 \cdot 10^{13} \text{ kg}$$

17| C

Se A, C, D e E são primos distintos, então $\{A, C, D, E\} = \{2, 3, 5, 7\}.$ Além disso, temos

$$AEC + CDD + EAE = 1CDC \Leftrightarrow 110(A + E) + D + E = 1000.$$

Donde segue que $D + E = 10$ e, portanto, $A + E = 9.$ Em consequência, só pode ser $A = 2,$ $D = 3,$ $E = 7$ e $C = 5.$

A resposta é $7 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 31.$

18| B

Elas emergirão juntas depois de M anos, onde M é o mínimo múltiplo comum entre 13 e $17.$

$$M = 13 \cdot 17 = 221.$$

Portanto, estas espécies emergirão juntas novamente no ano de $2016 + 221 = 2237.$