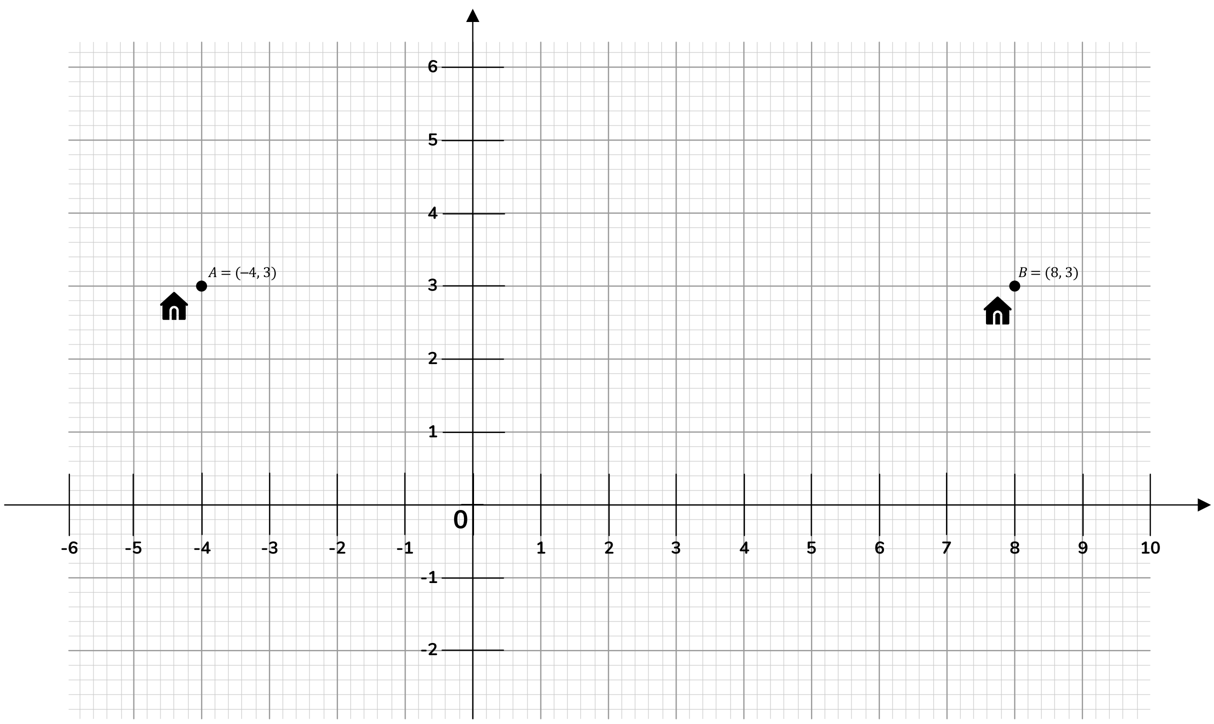
LUGAR GEOMÉTRICO

PONTO MÉDIO

Digamos que você e sua amiga (ou amigo) morem relativamente próximos um do outro, de modo que dê para ir caminhando de uma casa a outra. Um certo dia, ambos cansados, queriam se encontrar, mas nenhum estava disposto a percorrer todo o caminho. Tiveram então uma brilhante ideia: vamos nos encontrar na metade do caminho. Suponha que no mapa abaixo o ponto A representa as coordenadas da sua casa e o ponto B representa as coordenadas da casa de sua amiga. Qual será o ponto de encontro de vocês?



Para este exemplo não há tanto segredo, uma vez que essas casas estariam na mesma avenida, podemos utilizar os quadradinhos, contar quanto seria necessário para ir de uma casa à outra e então cada um percorrer a metade. Para sair do ponto $A = (-4, 3)$ e chegar no ponto $B = (8, 3)$, precisamos percorrer 12 quadradinhos, logo cada um terá que andar 6 quadradinhos, resultando no ponto de encontro $C = (2, 3)$. Perceba que esse ponto está a uma mesma distância de ambas as casas e é um ponto exatamente na metade do caminho. Mas sempre será possível contar os quadradinhos? Não, algumas vezes não conseguimos encontrar o ponto médio sem usar a ferramenta matemática que aprenderemos na sequência. Vamos, portanto, definir, o que é ponto médio?

Ponto médio é o ponto que divide um segmento de reta exatamente na metade.

Antes de aprendermos a calcular o ponto médio, precisamos relembrar o que é um **segmento de reta**: segmento de reta é o pedaço de uma reta que possui começo e fim. Confuso? Vamos pensar assim: segmento de reta é uma linha que começa a ser traçada em um ponto de partida e, sem fazer nenhuma curva, tem seu traço finalizado em um outro ponto. Se o segmento tem início no ponto A e tem como fim o ponto B, denotamos esse segmento por segmento $\overline{AB}$.

Agora que relembramos o que é um segmento de reta, podemos iniciar a seguinte discussão: se desenharmos um segmento numa folha sem pauta, não temos informações numéricas a respeito do mesmo, mas se fizermos isso no plano cartesiano sabemos qual a coordenada é o ponto de partida e o ponto de chegada. Em posse dessas informações, conseguimos calcular o ponto médio. Vamos utilizar os pontos $A = (-5, -3)$ e $B = (2, 7)$ como os pontos inicial e final de um segmento de reta. Para calcularmos o ponto médio utilizamos a fórmula:

$$x_m = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ e } y_m = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Obtendo o ponto médio $M = (x_m, y_m)$.

Devemos entender essa fórmula da seguinte maneira: A primeira coordenada do ponto médio (x_m) é igual a primeira coordenada do ponto A (x_A) adicionada (+) à primeira coordenada do ponto B (x_b) e o resultado (x_A+x_B) é dividido por 2. A segunda coordenada do ponto médio (y_m) é igual a segunda coordenada do ponto A (y_A) adicionada (+) à segunda coordenada do ponto B (y_b) e o resultado (y_A+y_B) é dividido por 2.

Exemplo:

Calcule o ponto médio de $A = (-5, -3)$ e $B = (2, 7)$:

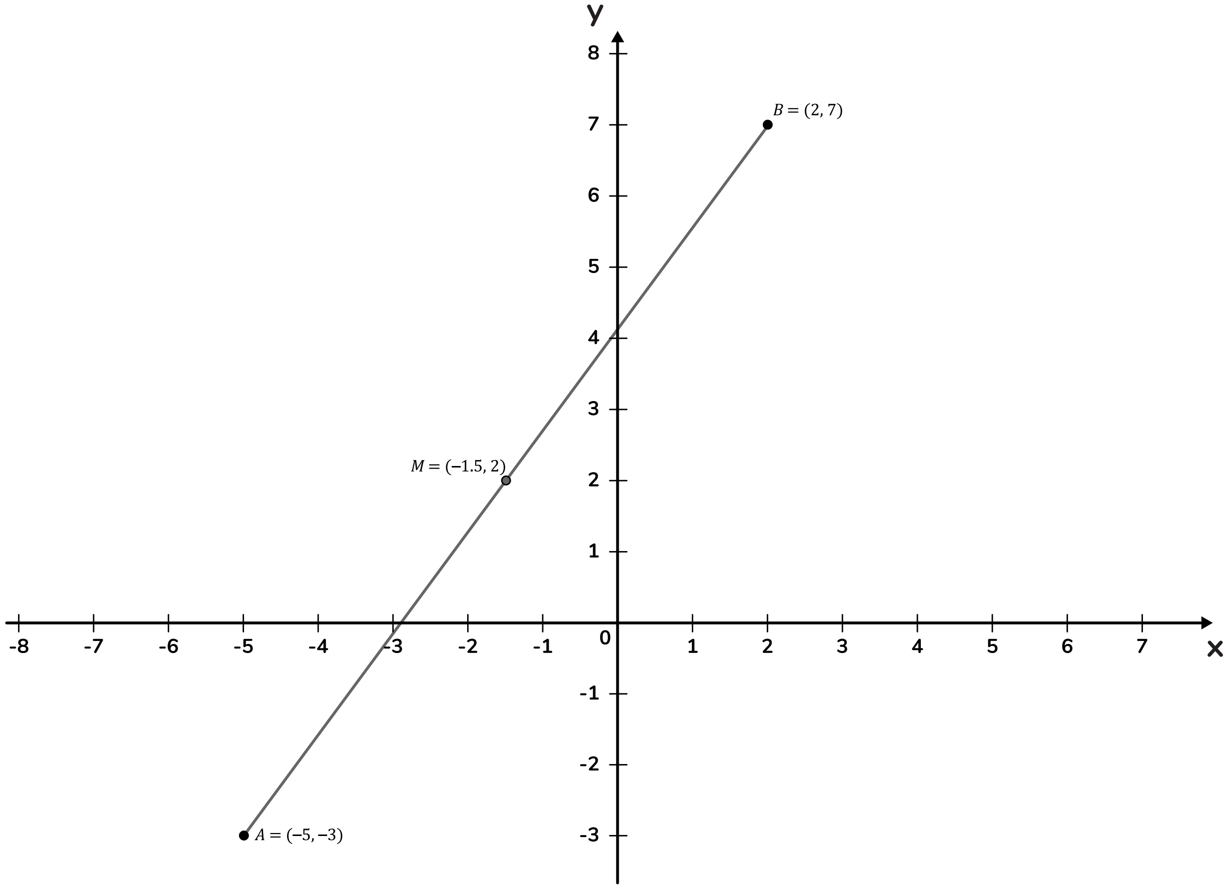
Resolução:

$$x_m = \frac{(-5) + 2}{2} = \frac{-3}{2} = -1.5$$

$$y_m = \frac{(-3) + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é $M = \left(\frac{-3}{2}, 2\right)$ ou $M = (-1.5, 2)$.

Biologia total



BARICENTRO

Equilíbrio. Esta simples palavra resume o próximo conceito que aprenderemos. Você já viu alguém girar um prato em torno do seu próprio dedo? E sobre uma vareta? Você já ouviu falar em Ponto G? Mesmo que algumas pessoas consigam realizar estes e outros feitos sem conhecer o famoso ponto G, é ele que possibilita tal façanha. O ponto G ou Centro de Gravidade, para a Física, é o ponto em que conseguimos manter um corpo em equilíbrio. Na matemática, esse mesmo conceito é conhecido como **Baricentro**.

Baricentro é o centro de gravidade de um polígono.

Existem diversas formas geométricas, mas uma das mais conhecidas é o famoso triângulo. Sua fama se deve à sua aplicabilidade, pois é uma figura bastante utilizada em diversos campos da ciência, mas também naquela construção que está próximo da sua casa. No caso do triângulo, que é o que nos interessa, conseguimos encontrar o baricentro através dos pontos médios de seus lados. Para tal, precisamos relembrar o conceito de mediana de um triângulo.

Mediana de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao ponto médio oposto a esse vértice[1].

Exemplo:

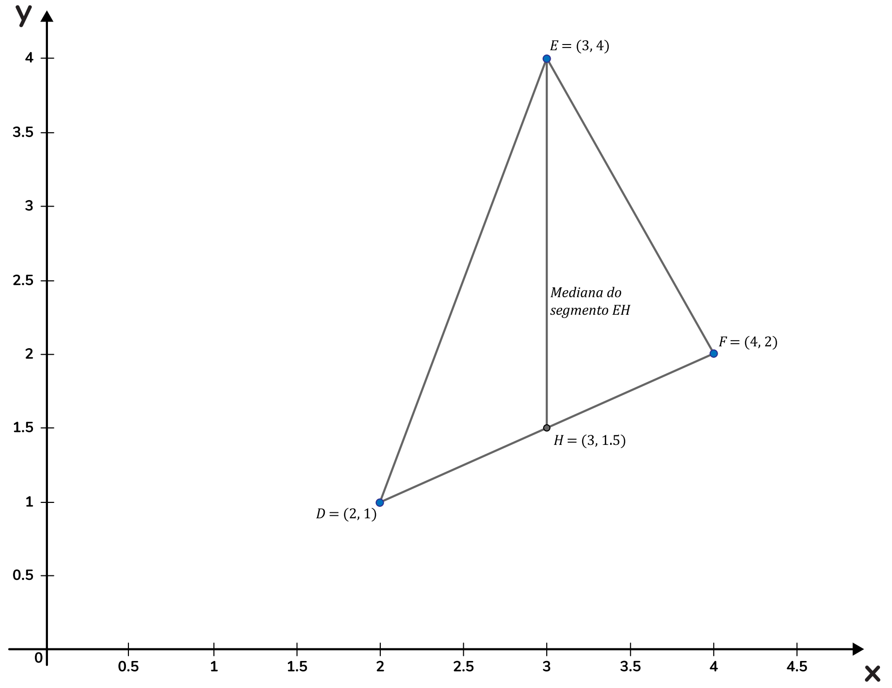
Construiremos um triângulo cujos vértices são: $D = (2,\ 1)$, $E = (3,\ 4)$ e $F = (4,\ 2)$. Vamos calcular o ponto médio de um dos três segmentos que compõe o triângulo. O segmento escolhido foi o segmento $\overline{DF}$ e devemos calcular o seu ponto

[1] É o ponto de encontro de dois segmentos de reta.

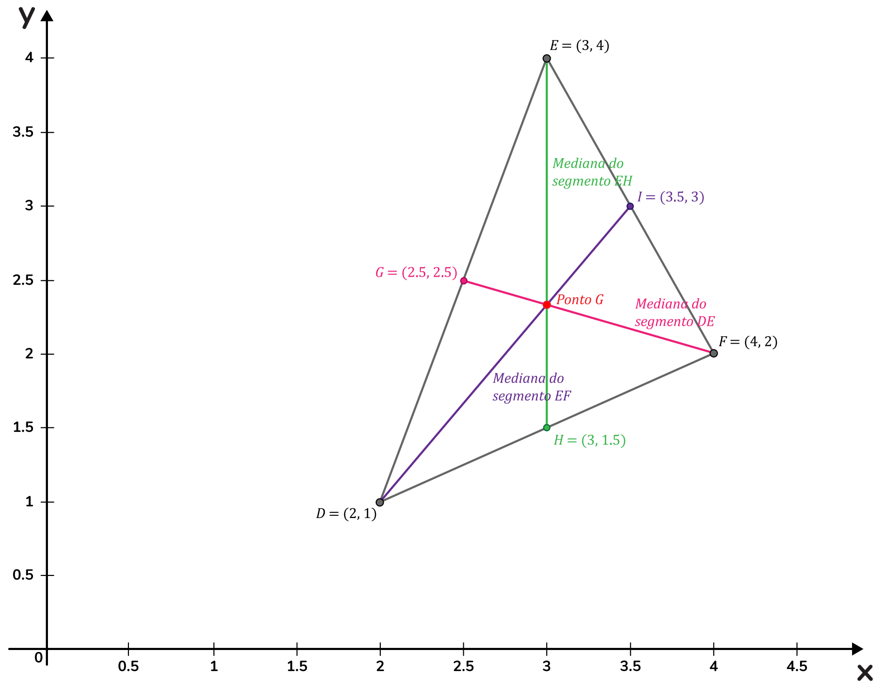
médio utilizando a fórmula do ponto médio: $x_m = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ e $y_m = \dfrac{y_A + y_B}{2}$. Obtemos então:

$$x_m = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ e } y_m = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Deste modo, temos que o ponto médio do segmento $\overline{DF}$ será $H = (3,\ 1.5)$. Por fim, traçamos um segmento que vai desde o vértice E até o ponto médio do segmento $\overline{DF}$. Esse segmento é que chamamos de **mediana** do segmento $\overline{DF}$. A construção realizada pode ser conferida na figura abaixo.



Para encontrar o baricentro do triângulo, basta realizarmos o mesmo passo para cada um dos três segmentos $\overline{DF}$, $\overline{EF}$ e $\overline{DE}$. Após encontrarmos as três medianas, percebemos que elas se encontram em um único ponto, este ponto é o baricentro do triângulo ou o centro de gravidade do triângulo.



Biologia total

O cálculo das coordenadas do baricentro é bem semelhante ao do ponto médio. Considerando o triângulo de vértices D, E e F, temos que o *ponto* $G = (x_G, y_G)$ será:

$$x_G = \frac{x_D + x_E + x_F}{3} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_D + y_E + y_F}{3}.$$

Exemplo:

Utilizando a fórmula supracitada, iremos calcular o baricentro do triângulo do exemplo anterior, cujas coordenadas são: $D = (2, 1)$, $E = (3, 4)$ e $F = (4, 2)$. Substituindo os valores na fórmula teremos:

$$x_G = \frac{2+3+4}{3} = \frac{9}{3} = 3 \qquad \text{e} \qquad y_G = \frac{1+4+2}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.3.$$

Portando, o baricentro do triângulo será o ponto $G = \left(3\ ,\ \frac{7}{3}\right)$ ou $G = (3, 2.3)$.

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Quando apresentamos o problema de duas amigas irem até a metade do caminho entre suas casas para se encontrarem, calculamos o quanto deveríamos percorrer de uma casa à outra e depois dividimos por 2 para achar a metade do caminho. A primeira parte desse processo é a ideia de distância, concorda? Distância pode ser resumida como espaço entre dois pontos, mesmo sendo um conceito simples, ele é muito importante em matemática.

No plano cartesiano, existem três situações em que dois pontos distintos podem aparecer:

I. Os dois pontos têm a mesma abscissa, ou seja, a coordenada x dos dois pontos são iguais;

II. Os dois pontos têm a mesma ordenada, ou seja, a coordenada y dos dois pontos são iguais;

III. Os dois pontos têm abscissas e ordenadas distintas.

No problema apresentado, podemos perceber que ele se enquadra no segundo caso, quando os dois pontos **possuem a mesma ordenada**. Quando isso ocorre, para determinarmos a distância entre dois pontos fazemos o seguinte:

$$d(A,B) = |x_A - x_B|$$

Que significa: "a distância entre os pontos A e B é igual ao valor absoluto (ou módulo) da diferença entre a primeira coordenada do ponto A e a primeira coordenada do ponto B". Na prática sendo $A = (-4, 3)$ e o $B = (8, 3)$, temos que:

$$d(A,B) = |x_A - x_B| = |-4-8| = |-12| = 12.$$

Então, a distância necessária a ser percorrida para sair do ponto A e chegar no ponto B é $12\ u.m.$[2]. Se relembramos a rosa dos ventos, faz sentido usarmos apenas uma

[2] $u.m.$ significa unidade de medida. Utilizamos quando o problema não fala se a distância está sendo medida em centímetros, metros, quilômetros, etc.

coordenada, pois estamos nos movendo em um mesmo sentido. Analogamente, podemos pensar no primeiro caso em que os **dois pontos possuem a mesma abscissa**, neste caso, a distância é dada por:

$$d(A,B) = |y_A - y_B|$$

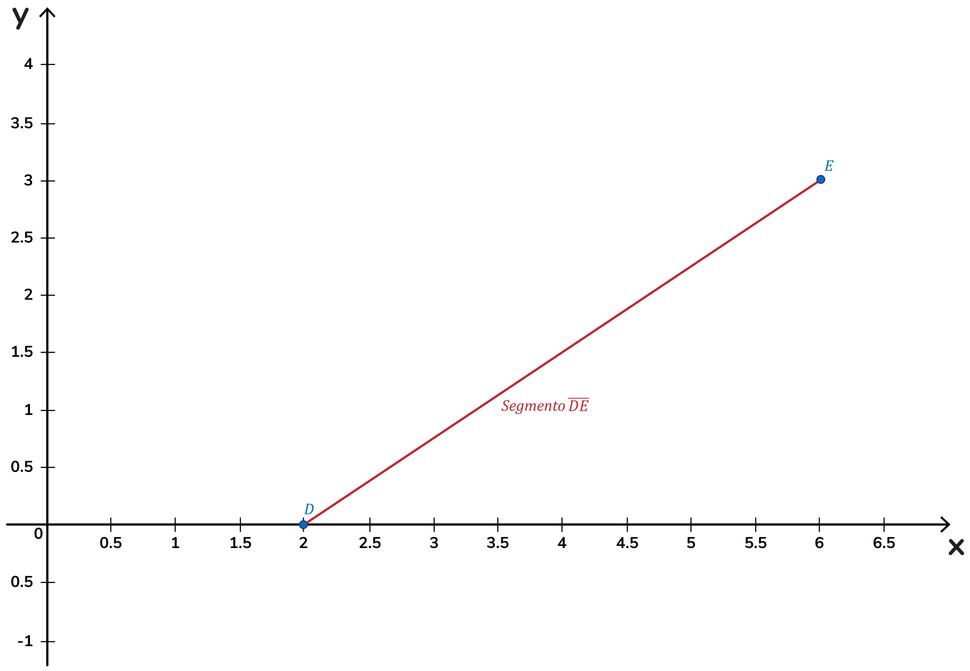
Exemplo:

Vamos calcular a distância entre os pontos $C = (2, -7)$ e $D = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$. Utilizando a fórmula, temos:

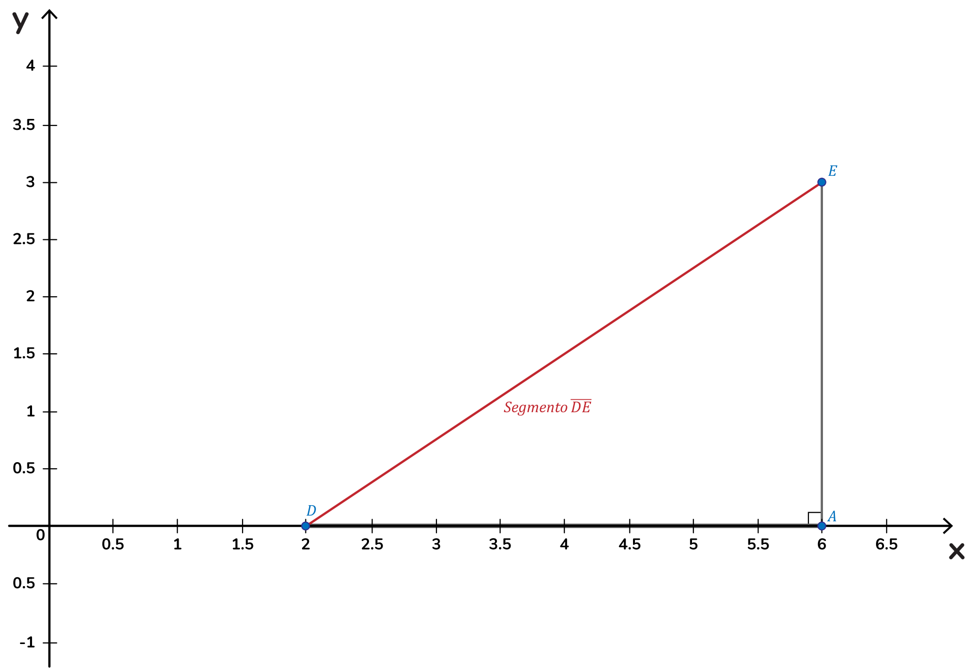
$$d(A,B) = |y_A - y_B| = \left|-7 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|-\frac{13}{2}\right| = \frac{13}{2} = 6.5.$$

Portanto, a distância entre os pontos C e D é $6.5\ u.m.$.

Por fim, temos o terceiro caso, **pontos com as abscissas e ordenadas distintas**. Primeiramente, vamos representar no plano os seguintes pontos $D = (2, 0)$, $E = (6, 3)$.



Você já ouviu a expressão: "A menor distância entre dois pontos é um segmento de reta?". Ela indica que quando queremos percorrer uma distância entre dois pontos, o que gera o menor esforço é prosseguir em linha reta de um a outro, ou seja, percorremos a menor distância quando seguimos direto ao nosso objetivo. Neste caso, buscamos então calcular o tamanho do segmento que liga os dois pontos. Mas como faremos isso? Vamos observar o seguinte: sabemos calcular quando as abscissas ou as ordenadas são iguais. Da abscissa do ponto E até a abscissa do ponto D temos uma distância de 4 unidades, certo? Basta observar na figura. Da ordenada do ponto E até a ordenada do ponto D temos uma distância de 3 unidades. Agora vamos traçar dois segmentos de retas: um que vai do ponto E até a ordenada do ponto D e outro que vai do ponto D até a abscissa do ponto E. Qual figura geométrica construímos seguindo esses passos? Exatamente, um triângulo!



Esse triângulo recebe um nome especial: triângulo retângulo. Para triângulos retângulos, quando conhecemos dois lados é sempre possível encontrar o valor do terceiro utilizando o Teorema de Pitágoras:

"A hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos. Sendo h a hipotenusa, a e b os catetos: $h^2 = a^2 + b^2$".

Em posse dessa ferramenta, podemos calcular a distância entre os pontos D e E, pois a distância entre eles e a hipotenusa do triângulo resultam no mesmo valor. Então:

$$h^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$h^2 = 25$$

$$h = \pm 5$$

Portanto $h = \pm 5$. Contudo, estamos nos referindo a medidas e distâncias. Neste caso, desprezamos os valores negativos. Logo, a distância entre os pontos D e E é $5\ u.m.$. Mas fica a pergunta, é sempre necessário fazer essa construção? Não, para isso temos o seguinte resultado:

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ dois pontos no plano cartesiano, sua distância será dada por:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Basicamente, para encontrar a distância entre dois pontos, encontramos a diferença entre as abcissas dos dois pontos e elevamos ao quadrado, aí somamos o valor encontrado com o quadrado da diferença das ordenadas.

Essa fórmula serve para qualquer um dos casos apresentados até agora. Vamos testar par o último para de pontos e ficará a seu cargo testar os demais e comparar os resultados.

Exemplo:

Calcule a distância entre os pontos: $D = (2, 0)$ e $E = (6, 3)$.

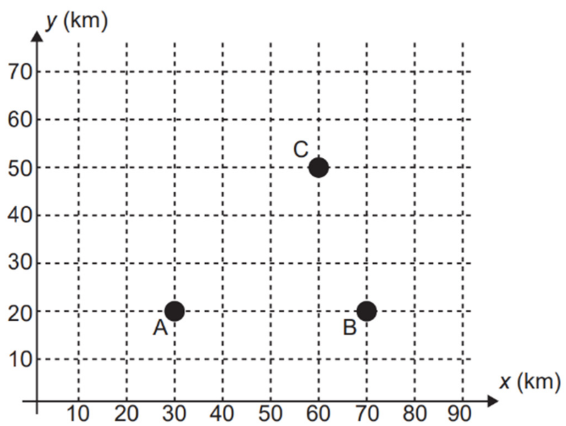
Resolução:

$$d(D,E) = \sqrt{(2-6)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Questão 143 - ENEM 2013 (Caderno Rosa)

Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

A) (65, 35).

B) (53, 30).

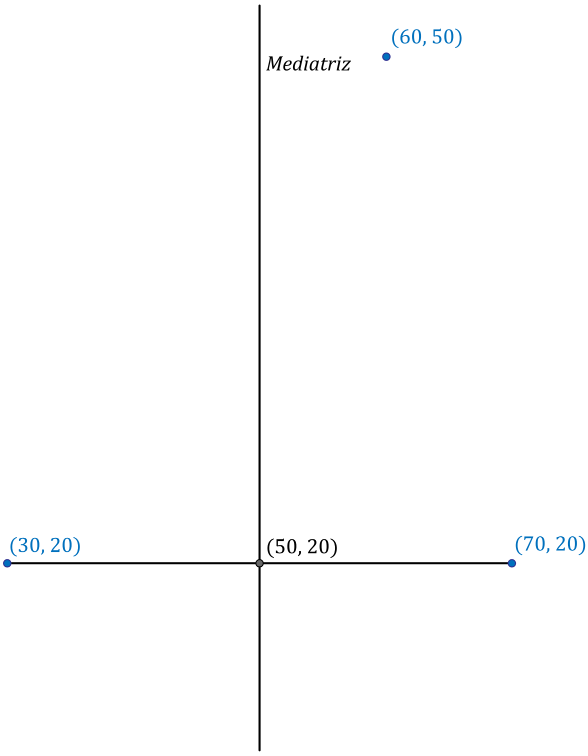
C) (45, 35).

D) (50, 20).

E) (50, 30).

Resolução: Ao ligarmos os pontos construindo segmentos, percebemos que a figura resultante é um triângulo. O problema se resume então a encontrar um ponto que é equidistante (mesma distância) dos vértices do triângulo. Para resolvermos o problema precisamos das coordenadas dos três vértices do triângulo. Vamos extrair essa informação do plano cartesiano. O ponto A possui coordenadas $A = (30, 20)$, o ponto $B = (70, 20)$ e o $C = (60, 50)$. Queremos encontrar um ponto E que satisfaça $d(A, E) = d(B, E) = d(C, E)$.

Primeiramente, vamos pegar o ponto médio de um dos segmentos, pois ele tem a característica de ser equidistante aos extremos do segmento. Tomaremos então o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, cujas coordenada é (50 , 20). Por quê o segmento $\overline{AB}$? Quando calculamos o ponto médio, podemos construir uma reta chamada mediatriz. Qualquer ponto nessa reta é equidistante dos pontos inicial e final do segmento. Escolhemos o segmento $\overline{AB}$, pois a mediatriz desse segmento terá a coordenada x sendo sempre a mesma, variando apenas o y. Deste modo, sabemos que o ponto E que queremos encontrar está sobre essa mediatriz e que a coordenada x não varia. Assim, o ponto E é da forma $E = (50, y)$. Agora precisamos calcular $d(A,E)=d(C,E)$ ou $d(B,E)=d(C,E)$. Daí:



$$d(A, E) = d(C, E)$$

$$\sqrt{(30-50)^2 + (20-y_E)^2} = \sqrt{(60-50)^2 + (50-y_E)^2}$$

Elevando os dois lados ao quadrado para eliminar a raiz e simplificando, temos:

$$(30-50)^2 + (20-y_E)^2 = (60-50)^2 + (50-y_E)^2$$

$$(-20)^2 + (20-y_E)^2 = (10)^2 + (50-y_E)^2$$

$$400 + 400 - 40y_E + y_E^2 = 100 + 2500 - 100y_E + y_E^2$$

$$800 - 40y_E = 2600 - 100y_E$$

Isolando a incógnita y_E:

$$100y_E - 40y_E = 2600 - 800$$

$$60y_E = 1800$$

$$y_E = \frac{1800}{60} = 30$$

Portanto, coordenada $y_E = 30$. Logo, as coordenadas do ponto que é equidistante aos pontos A, B e C é $E = (50, 30)$. Alternativa **E**. Faça $d(B, E) = d(C, E)$ e compare os resultados.

ÁREA DE FIGURAS PLANAS

Em Geometria Analítica, existem algumas formas de calcular área de figuras planas. O método que apresentaremos é utilizando quando temos em posse apenas as coordenadas dos vértices do triângulo. Para isso, utilizaremos uma matriz de ordem 3. Suponhamos que a emissora de televisão precise descobrir qual a área compreendida entre os segmentos que ligam os pontos que correspondem as três cidades na qual eles desejam construir a torre. Esta situação pode ser resolvida com o seguinte método:

Sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ os vértices de um triângulo. A área desse triângulo é dada por:

$$A_T = \frac{|det|}{2}$$

Onde "det" significa determinante e é obtido pela expressão:

$$det = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A \cdot y_B + y_A \cdot x_C + x_B \cdot y_C - x_C \cdot y_B - y_C \cdot x_A - x_B \cdot y_A$$

$$= x_A \cdot (y_B - y_C) - x_B \cdot (y_A - y_C) + x_C \cdot (y_A - y_B)$$

Exemplo:

Para a questão 143 - ENEM 2013 (Caderno Rosa), calcularemos a área do triângulo cujos vértices são os pontos $A = (30, 20)$, $B = (70, 20)$ e $C = (60, 50)$. Para resolvermos essa questão, basta substituirmos os valores dos pontos na fórmula anterior.

$$det = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 20 & 1 \\ 70 & 20 & 1 \\ 60 & 50 & 1 \end{vmatrix}$$

$$det = 30 \cdot (20 - 50) - 70 \cdot (20 - 50) + 60 \cdot (20 - 20)$$

$$det = 30 \cdot (-30) - 70 \cdot (-30)$$

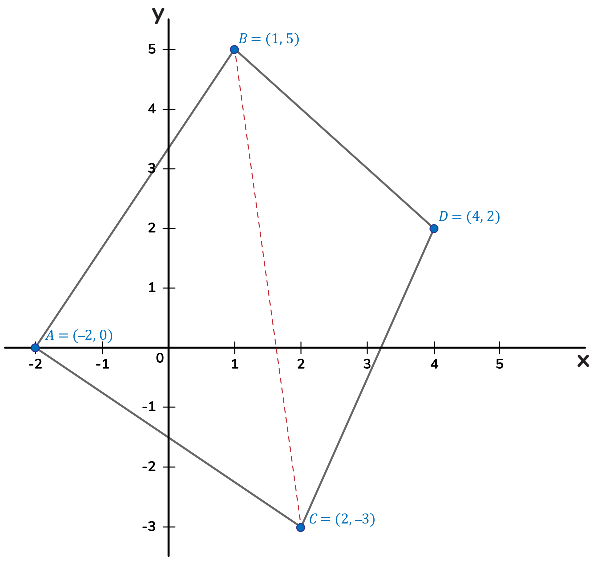
$$det = -900 - (-2100)$$

$$det = -900 + 2100 = 1200$$

Agora que encontramos o determinante, basta substituirmos na fórmula $A_T = \frac{|det|}{2}$ para obtermos:

$$A_T = \frac{|det|}{2} = \frac{|1200|}{2} = \frac{1200}{2} = 600.$$

Portanto, temos que a área compreendida no triângulo formado pelas três cidades é de 600 $u.a.$ (unidade de área). Será que esse método serve apenas para o triângulo? A resposta é não. Lembre-se que qualquer polígono pode ser dividido em triângulos.



Exemplo:

Vamos calcular a área do polígono formado pelos pontos: $A = (-2,\ 0)$, $B = (1,\ 5)$, $C = (2, -3)$ e $D = (4, 2)$. Conforme mostrado na figura abaixo, podemos dividir esse polígono em dois triângulos: o triângulo ABC e o triângulo BCD. Agora, basta utilizarmos a fórmula para cada um desses triângulos. Para o triângulo ABC, sua área será:

$$det = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$det = (-2) \cdot (5 - (-3)) - 1 \cdot (0 - (-3)) + 2 \cdot (0 - 5)$$

$$det = (-2) \cdot (8) - 1 \cdot (3) + 2 \cdot (-5)$$

$$det = -16 - 3 - 10$$

$$det = -29$$

Então a área do triângulo ABC é:

$$A_T = \frac{|det|}{2} = \frac{|-29|}{2} = \frac{29}{2} = 14.5\ u.a.$$

Para o triângulo BCD, sua área será:

$$det = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$det = 1 \cdot (-3 - 2) - 2 \cdot (5 - 2) + 4 \cdot (5 - (-3))$$

$$det = 1 \cdot (-5) - 2 \cdot (3) + 4 \cdot (8)$$

$$det = -5 - 6 + 32$$

$$det = 21$$

Então a área do triângulo BCD é:

$$A_T = \frac{|det|}{2} = \frac{|-21|}{2} = \frac{21}{2} = 10.5\ u.a.$$

Portanto, a área do polígono $ABCD$ será 25 $u.a.$, obtido pela soma das áreas dos dois triângulos.

Um fato importante de ressaltar é que, se ao calcularmos o determinante e ele resultar em 0, significa que os três pontos fornecidos não geram um triângulo. Além disso, ao resultar em 0, podemos afirmar que os pontos são colineares, ou seja, pertencem a uma mesma reta.

ANOTAÇÕES