EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

1. (Espcex (Aman) 2020) Se a equação polinomial $x^2+2x+8=0$ tem raízes a e b e a equação $x^2+mx+n=0$ tem raízes $(a+1)$ e $(b+1)$, então $m+n$ é igual a

a) $-2.$

b) $-1.$

c) $4.$

d) $7.$

e) $8.$

2. (Fac. Pequeno Príncipe - Medici 2020) Considere um polinômio da forma $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ que cumpre as seguintes hipóteses:

I. $p(x)$ possui 3 raízes reais e distintas que formam uma progressão aritmética.

II. a soma e o produto das raízes de $p(x)$ valem, respectivamente, 3 e -3.

Com isso, é CORRETO afirmar que o polinômio $p(x)$ é necessariamente dado por:

a) $p(x)=x^3-3x^2-x+3;$

b) $p(x)=x^3+x^2+x-1;$

c) $p(x)=x^3-x+2;$

d) $p(x)=x^3-x^2+x+3;$

e) $p(x)=x^3-3x^2-x-3.$

3. (Epcar (Afa) 2020) Considere os polinômios na variável x:

$A(x)=x^3+(3m^3-4m)x^2-2,$ sendo $m\in\mathbb{Q};$ e

$B(x)=x^2-2x+1$

Os gráficos de $A(x)$ e $B(x)$ possuem apenas um ponto comum sobre o eixo das abscissas.

É correto afirmar que

a) o produto e a soma das raízes imaginárias de $A(x)$ são números conjugados.

b) os afixos das raízes de $A(x)$ formam um triângulo equilátero.

c) as raízes de $A(x)$ possuem argumentos que NÃO formam uma Progressão Aritmética.

d) todas as raízes de $A(x)$ possuem o mesmo módulo.

4. (UFSC 2019) É correto afirmar que:

01) A equação $x^3+2x^2+3x-4=0$ possui apenas uma raiz inteira.

02) Maria quer comprar um carro que custa R\$ 42.000,00 à vista, mas que pode ser comprado a prazo em 48 prestações mensais iguais no valor de R\$ 1.200,00 sem entrada. Preocupada com a taxa de juros que teria que pagar, dado que não consegue comprar à vista, consultou um amigo que entende e matemática financeira para auxiliá-la nos cálculos. Ele orientou Maria a aplicar as seguintes fórmulas:

$$PV = PMT a_{\overline{n|}i} \text{ e } a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

sendo:

PV – o valor à vista do carro,

PMT – o valor da prestação mensal,

n – o número de meses e

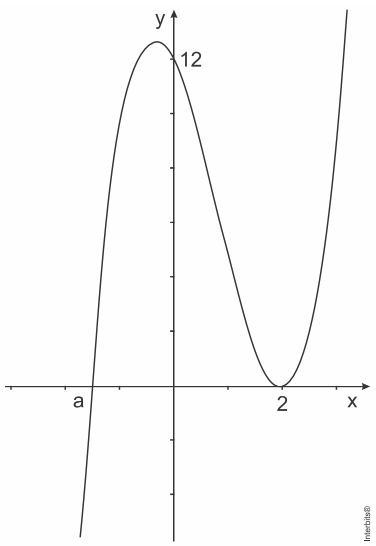
i – a taxa mensal de juros.

Maria efetuou os cálculos e chegou a uma equação polinomial. O grau desse polinômio é 48.

04) Seja $p(x)$ um polinômio de grau n. Se os coeficientes de $p(x)$ são reais e n é par, então $p(x) = 0$, admite uma raiz real.

08) Seja $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$. Se o número complexo i é raiz simples da equação $p(x) = 0$, então o domínio da função $f(x) = \sqrt{p(x)}$ é $\left]-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$.

16) Considere o gráfico da função polinomial $p(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$ apresentado a seguir. Se a é raiz simples e 2 é raiz dupla da equação $p(x) = 0$, então $a + b + c = -\frac{21}{2}$.



32) Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é um polinômio de grau n e satisfaz a condição que a soma dos coeficientes é zero, então $p(x)$ é divisível por $x - 1$.

5. (ITA 2019) Seja $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$ um polinômio cujas raízes são não negativas e estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma de seus coeficientes é igual a 10, podemos afirmar que a soma das raízes de $p(x)$ é igual a

a) 9.

b) 8.

c) 3.

d) $\frac{9}{2}$.

e) 10.

6. (UECE 2019) Se as raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$ são reais, distintas e formam uma progressão aritmética, então, a soma dos cubos dessas raízes é igual a

a) 236.

b) 206.

c) 226.

d) 216.

7. (ITA 2019) Considere as seguintes afirmações:

I. se x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$, então $y_1 = x_2x_3$, $y_2 = x_1x_3$ e $y_3 = x_1x_2$ são as raízes da equação $y^3 - y^2 - 4y - 4 = 0$.

II. a soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

III. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas II e III.

e) todas.

8. (UECE 2019) Considere os polinômios $m(x) = x^2 - 3x + 2$, $n(x) = x^2 - 4x + 3$ e $q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, que têm como fator comum o polinômio $f(x) = x - 1$. Se $P(x) = m(x) \cdot n(x) \cdot q(x)$, a soma das raízes distintas da equação polinomial $P(x) = 0$ é igual a

a) 16.

b) 6.

c) 10.

d) 4.

9. (UNICAMP 2019) Sabendo que a e b são números reais, considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + ax^2 + x + b$. Se a soma e o produto de duas de suas raízes são iguais a -1, então $p(1)$ é igual a

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

10. (UECE 2019) Se os três números primos distintos p_1, p_2 e p_3 são as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + Hx^2 + Kx + L$, então, a soma dos inversos multiplicativos desses números é igual a

a) $-\frac{K}{L}$.

b) $\frac{H}{L}$.

c) $-\frac{H}{L}$.

d) $\frac{K}{L}$.

11. (IME 2019) Sejam x_1, x_2 e x_3 raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Sendo a um número real, o valor de $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ é igual a:

a) $32 - a$

b) $48 - 2a$

c) 48

d) $48 + 2a$

e) $32 + a$

12. (ACAFE 2018) Analise as alternativas a seguir. Todas estão corretas, exceto a:

a) Em uma pesquisa constatou-se que a quantidade de bactérias em uma cultura era dada pela função $Q(t) = 400 \cdot 2^{kt}$ em função de t (tempo em horas). Se a população de bactérias dobrou em 15 minutos, então, transcorrida meia hora do início da verificação inicial a população de bactérias possuirá 1.600 indivíduos.

b) Considerando a igualdade $2^3 \cdot 5^2 = 2 \cdot k^m$ e $k, m \in \mathbb{Z}$ a única possibilidade de solução dessa equação é $k = 10$ e $m = 2$.

c) O polinômio $P(x) = 3x^3 + 6x^2 + 12x + 24$ possui uma única raiz real; ela pertence ao intervalo $[-5, 5]$.

d) Se a, b e c são as raízes do polinômio $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$, então $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{11}{18}$.

13. (UDESC 2018) O valor de $x \cdot y$ com $x, y \in \mathbb{Z}$, sabendo que $\log_2(x) + \log_4(y) = 2$ e $2^{x+y} = 32$, é igual a:

a) 4

b) 8

c) 2

d) 6

e) 10

14. (UEPG 2018) Sabendo que x_1, x_2, x_3 e x_4 são as raízes da equação $4x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 11x + 6 = 0,$ assinale o que for correto.

01) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{11}{6}.$

02) $\log_3 [6(x_1x_2x_3x_4)] = 2.$

04) $\text{sen}\,[(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)\text{ð}] = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

08) $\cos [(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)\text{ð}] = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

16) A soma das raízes é um número positivo.

15. (FUVEST 2018) Considere o polinômio $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$ em que $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}.$ Sabe-se que as suas n raízes estão sobre a circunferência unitária e que $a_0 < 0.$

O produto das n raízes de $P(x),$ para qualquer inteiro $n \geq 1,$ é:

a) -1

b) i^n

c) i^{n+1}

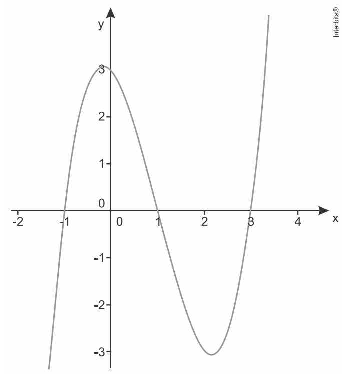
d) $(-1)^n$

e) $(-1)^{n+1}$

16. (UFSC 2017) Em relação às proposições abaixo, é correto afirmar que:

01) Se $R(x)$ é o resto da divisão de $A(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 4$ por $B(x) = x^3 - 2x^2 + 1,$ então $R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}.$

02) Observe a figura, que representa parte do gráfico da função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3.$ Com base nos dados abaixo, é correto afirmar que $(b - a) = 0.$



04) Se a forma fatorada do polinômio $T(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$ é $T(x) = (x - a)^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2),$ então a é um número par.

08) Se $\frac{4x - 2}{x^3 - 4x} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}$ para todo x tal que $x \neq 0,$ $x \neq 2$ e $x \neq -2,$ então $A + B + C = 0.$

16) Sabe-se que $2 + i$ e $3 - 2i$ são raízes do polinômio $P(x),$ que é de grau $5.$ Ao escolher, ao acaso, uma das raízes desse polinômio, a probabilidade de essa raiz ser um número real é de $60\%.$

17. (Espcex (Aman) 2017) O número real $\sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}$ pertence ao conjunto

a) $[-5, -3)$

b) $[-3, -1)$

c) $[-1, 1)$

d) $[1, 3)$

e) $[3, 5)$

18. (UPF 2017) Sabe-se que $1 + i$ é uma das raízes da equação $x^4 - 2x^3 + 4x - 4 = 0.$ Pode-se afirmar, dessa forma, que essa equação

a) possui raízes racionais e iguais.

b) possui raízes racionais e diferentes.

c) possui raízes irracionais e iguais.

d) não possui raízes reais.

e) possui raízes irracionais e diferentes.

19. (UEM 2017) A respeito do polinômio $p(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 15x - 18$, é correto afirmar que:

01) O produto dos inversos de suas raízes é $\frac{-1}{18}$.

02) $p(x)$ tem todas as raízes distintas, sendo duas delas números inteiros primos e as outras duas são números irracionais.

04) $p(x)$ é divisível por $\frac{\sqrt{3}x - 3}{\sqrt{3}}$.

08) O quociente da divisão de $6x^6 + 4x^4 + 2x^2 + 1$ por $p(x)$ tem grau 2.

16) O resto da divisão de $p(x)$ por $3x^4 - 5$ é um polinômio de grau maior ou igual a 4.

20. (UEM 2017) Considerando a equação polinomial, com coeficientes reais, $P(x) = 0$, assinale o que for correto.

01) Se $P(x)$ for um polinômio de grau 3 e $Q(x)$ for um polinômio de grau 2, então o grau da equação polinomial $P(x) \cdot Q(x) = 0$ é 6.

02) Se $P(x) = (x+5)(x^2+4)$, então as raízes de $P(x)$ são $x = 5$, $x = 2$ e $x = -2$.

04) Se a equação $P(x) = 0$ possui somente uma raiz real e duas raízes complexas, então dizemos que $P(x)$ é um polinômio de grau 3.

08) Se a equação $P(x) = 0$ possui duas raízes reais e iguais, então esta equação tem grau maior que 2 ou igual a 2.

16) Se $P(x)$ é divisível por $(x - i)$, então a equação $P(x) = 0$ possui pelo menos duas raízes complexas.

ANOTAÇÕES

GABARITO

1: [D]

Tomando a equação $x^2+2x+8=0,$ pelas Relações de Girard, temos $a+b=-2$ e $a \cdot b=8.$ Por outro lado, da equação $x^2+mx+n=0,$ vem $a+1+b+1=-m$ e $(a+1)(b+1)=n.$

Em consequência, temos

$$\begin{aligned} m &= -(a+b)-2 \\ &= -(-2)-2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} n &= a \cdot b + a + b + 1 \\ &= 8-2+1 \\ &= 7. \end{aligned}$$

A resposta é $m+n=0+7=7.$

2: [A]

Sejam $\alpha - r, \alpha$ e $\alpha + r$ as raízes de $p.$ Logo, temos $\alpha - r + \alpha + \alpha + r = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1.$

Ademais, vem

$$\begin{aligned} (\alpha - r)\cdot \alpha \cdot (\alpha + r) = -3 &\Leftrightarrow 1 - r^2 = -3 \\ &\Leftrightarrow r = \pm 2. \end{aligned}$$

Em consequência, as raízes são $-1, 1$ e $3.$

Agora, pelas Relações de Girard, encontramos

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{a}{1} = 3 \\ \dfrac{b}{1} = -1-3+3 \\ -\dfrac{c}{1} = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = -3 \\ b = -1 \\ c = 3. \end{array}\right.$$

Por conseguinte, vem $p(x)=x^3-3x^2-x+3.$

3: [C]

Calculando as raízes de $B(x),$ obtemos:

$x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1$ (raiz dupla)

1 também será raiz de $A(x),$ portanto:

$A(x)=1^3+(3m^3-4m)\cdot 1^2-2=0 \Rightarrow (3m^3-4m)=1$

logo, $A(x)=x^3+x^2-2.$

Cujas raízes são $1,$ $-1+i$ e $-1-i,$ portanto:

[A] Falsa, pois a soma é -1 e o produto é $2.$

[B] Falsa, pois seus argumentos não formam uma P.A. $0°, 135°$ e $225°.$

[C] Verdadeira, ver item anterior.

[D] Falsa, os módulos são 1 e $\sqrt{2}.$

4: 08 + 16 + 32 = 56.

[01] Falsa. Pelo Teorema das Raízes Racionais, sabemos que $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ são as possíveis raízes inteiras da equação. Contudo, por inspeção, concluímos que a equação não possui tais raízes.

[02] Falsa. Tem-se que

$$\begin{aligned} 42000 = 1200 \cdot \frac{1-(1+i)^{-48}}{i} &\Leftrightarrow 1 - 35i = (1+i)^{-48} \\ &\Leftrightarrow 35i(1+i)^{48} - (1+i)^{48} + 1 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, do produto $35i \cdot i^{48},$ pode-se afirmar que o grau do polinômio acima é $49.$

[04] Falsa. Seja $p(x)=x^2+1.$ É imediato que $p(x)=0$ não possui raízes reais.

[08] Verdadeira. Com efeito, se i é raiz de $p(x)=0,$ então $-i$ também é raiz. Logo, pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos

i	1	-3	2	-3	1
$-i$	1	$-3+i$	$1-3i$	i	0
	1	-3	1	0	

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2-3x+1)(x^2+1) \\ &= \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(x^2+1). \end{aligned}$$

Em consequência, o maior subconjunto dos números reais para o qual está definida a função f, dada por $f(x)=\sqrt{p(x)}$, é tal que

$$\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x\geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

[16] Verdadeira. De fato, pois

$$\begin{aligned} p(x) &= 2(x-a)(x-2)^2 \\ &= 2x^3-(8+2a)x^2+(8+8a)x-8a. \end{aligned}$$

Logo, temos $b=-8-2a$, $c=8+8a$ e $d=-8a$.

Ademais, do gráfico, sabemos que $p(0)=12$, o que implica em $d=12$ e, portanto, $a=-\frac{3}{2}$, $b=-5$ e $c=-4$.

Em consequência, vem

$$a+b+c=-\frac{3}{2}-5-4=-\frac{21}{2}.$$

[32] Verdadeira. Com efeito, se $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0=0$, então $x=1$ é raiz de $p(x)$ e, portanto, pelo Teorema de D'Alembert, segue que $p(x)$ é divisível por $x-1$.

Como a soma dos coeficientes de $p(x)$ é igual a 10,

$$1+a+b=10$$
$$b=9-a$$

Substituindo $b=9-a$ na equação $2\alpha^2=b$,

$$2\alpha^2=9-a$$

Substituindo $a=-3\alpha$ na equação $2\alpha^2=9-a$,

$$2\alpha^2=9-(-3\alpha)$$
$$2\alpha^2-3\alpha-9=0$$
$$\alpha=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-9)}}{2\cdot 2}$$
$$\alpha=\frac{3\pm 9}{4}$$

Como $\alpha>0$,

$$\alpha=\frac{3+9}{4}$$
$$\alpha=3$$

Logo, as raízes de $p(x)$ são: 0, 3 e 6.

Assim, a soma das raízes de $p(x)$ é: $0+3+6=9$

5: [A]

De $p(x)=x^3+ax^2+bx$,

$$p(x)=x\cdot\left(x^2+ax+b\right)$$

Fazendo $p(x)=0$,

$$x\cdot\left(x^2+ax+b\right)=0$$

Portanto, $x=0$ é uma raiz de $p(x)$.

Como as raízes são não negativas e estão em progressão aritmética, temos:

$0, \alpha, 2\alpha$ são raízes de $p(x)$ e $\alpha>0$.

Note que α e 2α são raízes da equação $x^2+ax+b=0$.

Daí,

$$\begin{cases}\alpha+2\alpha=-a \\ \alpha\cdot 2\alpha=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3\alpha=a \\ 2\alpha^2=b\end{cases}$$

6: [D]

Sejam $\alpha-r, \alpha$ e $\alpha+r$ as raízes de P. Logo, pelas Relações de Girard, temos

$$\begin{cases}\alpha-r+\alpha+\alpha+r=-\frac{-12}{1} \\ (\alpha-r)\cdot\alpha\cdot(\alpha+r)=-\frac{-60}{1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=4 \\ 64-4r^2=60\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=4 \\ r=\pm 1\end{cases}.$$

Portanto, as raízes são 3, 4 e 5.

A resposta é $3^3+4^3+5^3=27+64+125=216$.

7: [E]

[I] Seja

$$y_1+y_2+y_3=x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2$$
$$y_1+y_2+y_3=1$$

$$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=x_2x_3x_1x_3+x_2x_3x_1x_2+x_1x_3x_1x_2$$
$$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=x_1x_2x_3x_3+x_1x_2x_3x_2+x_1x_2x_3x_1$$
$$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=x_1x_2x_3\cdot(x_1+x_2+x_3)$$
$$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=-2\cdot 2$$
$$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=-4$$

$$y_1y_2y_3=x_2x_3\cdot x_1x_3\cdot x_1x_2$$
$$y_1y_2y_3=(x_1x_2x_3)^2$$
$$y_1y_2y_3=4$$

Assim, y_1, y_2 e y_3 são raízes da equação $y^3-y^2-4y-4=0.$

Portanto, a afirmação [I] é verdadeira.

[II] Seja $x\in\mathbb{Z}.$

$$n=(x-1)^3+x^3+(x+1)^3$$
$$n=x^3-3x^2+3x-1+x^3+x^3+3x^2+3x+1$$
$$n=3x^3+6x$$
$$n=3x\cdot\left(x^2+2\right)$$

Seja $x=3k$ ou $x=3k+1$ ou $x=3k+2, k\in\mathbb{Z}.$

Para $x=3k,$

$$n=3\cdot 3k\cdot\left((3k)^2+2\right)$$
$$n=9k\cdot\left(9k^2+2\right)\ \text{(múltiplo de 9)}$$

Para $n=3k+1,$

$$n=3\cdot(3k+1)\cdot\left((3k+1)^2+2\right)$$
$$n=3\cdot(3k+1)\cdot\left(9k^2+6k+1+2\right)$$
$$n=3\cdot(3k+1)\cdot\left(9k^2+6k+3\right)$$
$$n=3\cdot(3k+1)\cdot 3\cdot\left(3k^2+2k+1\right)$$

$$n=9\cdot(3k+1)\left(3k^2+2k+1\right)\ \text{(múltiplo de 9)}$$

Para $n=3k+2,$

$$n=3\cdot(3k+2)\cdot\left((3k+2)^2+2\right)$$
$$n=3\cdot(3k+2)\cdot\left(9k^2+12k+4+2\right)$$
$$n=3\cdot(3k+2)\cdot\left(9k^2+12k+6\right)$$
$$n=3\cdot(3k+2)\cdot 3\cdot\left(3k^2+4k+2\right)$$

$$n=9\cdot(3k+2)\left(3k^2+4k+2\right)\ \text{(múltiplo de 9)}$$

Assim, a soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por $9.$

Portanto, a afirmação [II] é verdadeira.

[III] Note que:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}$$
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{2\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}$$
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Assim,

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$
$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, a afirmação [III] é verdadeira.

Dessa forma, todas as afirmações são verdadeiras.

8: [D]

Tem-se que $m(x)=(x-1)(x-2),$ $n(x)=(x-1)(x-3)$ e

$$\begin{aligned}q(x)&=x^2(x-1)-4(x-1)\\&=(x-1)(x^2-4)\\&=(x-2)(x-1)(x+2).\end{aligned}$$

Em consequência, vem

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)(x-2)(x-1)(x-3)(x-2)(x-1)(x+2)\\&=(x-1)^3(x-2)^2(x-3)(x+2).\end{aligned}$$

Portanto, como as raízes distintas de $P(x)=0$ são $x=1, x=2, x=3$ e $x=-2,$ temos $1+2+3-2=4.$

9: [D]

Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes de $p(x)$, com $x_1 + x_2 = -1$ e $x_1 \cdot x_2 = -1$. Daí, pelas Relações de Girard, temos

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \Leftrightarrow x_3 = 1 - a$$

e $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -b \Leftrightarrow x_3 = b.$

Portanto, vem $b = 1 - a$ e, assim, encontramos

$$\begin{aligned} p(1) &= 1^3 + a \cdot 1^2 + 1 + (1-a) \\ &= 1 + a + 1 + 1 - a \\ &= 3. \end{aligned}$$

10: [A]

Queremos calcular

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{p_2p_3 + p_1p_3 + p_1p_2}{p_1p_2p_3}.$$

Pelas Relações de Girard, temos

$$p_2p_3 + p_1p_3 + p_1p_2 = \frac{K}{1} = K$$

e $p_1p_2p_3 = -\frac{L}{1} = -L.$

Em consequência, a resposta é $-\frac{K}{L}.$

11: [C]

Do enunciado, temos:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ &x_1 + x_2 = -x_3 \\ &(x_1 + x_2)^3 = (-x_3)^3 \\ &x_1^3 + 3 \cdot x_1^2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2^2 + x_2^3 = -x_3^3 \\ &x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \underbrace{(x_1 + x_2)}_{-x_3} \\ &x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\ &x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3 \cdot \frac{-(-16)}{1} \\ &x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 48 \end{aligned}$$

12: [B]

[A] Verdadeira. Se a população dobrou em $15\,\text{min} = \frac{1}{4}\,\text{h},$ então

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot Q(0) &\Leftrightarrow 400 \cdot 2^{\frac{k}{4}} = 2 \cdot 400 \\ &\Leftrightarrow 2^{\frac{k}{4}} = 2 \\ &\Leftrightarrow k = 4. \end{aligned}$$

Portanto, após meia hora, a população possuirá $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 400 \cdot 2^{4 \cdot \frac{1}{2}} = 1600$ indivíduos.

[B] Falsa. Tem-se que

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 5^2 = 2 \cdot k^m &\Leftrightarrow k^m = 2^2 \cdot 5^2 \\ &\Leftrightarrow k^m = 10^2 \\ &\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} k = 10 \text{ e } m = 2 \\ \quad\text{ou} \\ k = 100 \text{ e } m = 1 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

[C] Verdadeira. De fato, fatorando $P,$ vem

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^3 + 6x^2 + 12x + 24 \\ &= 3x^2(x+2) + 12(x+2) \\ &= 3(x+2)(x^2+4). \end{aligned}$$

Logo, como $x^2 + 4 = 0$ não possui raízes reais, segue que a única raiz real de P é $x = -2.$ É claro que $-2 \in [-5, 5].$

[D] Verdadeira. Pelas Relações de Girard, segue que

$$\left| \begin{array}{l} a + b + c = -\frac{-4}{12} \\ ab + ac + bc = -\frac{3}{12} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a + b + c = \frac{1}{3} \\ ab + ac + bc = -\frac{1}{4} \end{array} \right. .$$

Daí, vem

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc) = \frac{1}{9} \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{9} \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{11}{18}. \end{aligned}$$

13: [A]

Tem-se que

$$2^{x+y} = 32 \Leftrightarrow 2^{x+y} = 2^5 \Leftrightarrow y = 5 - x.$$

Logo, vem

$$\log_2 x + \log_4 y = 2 \Leftrightarrow \log_2 x + \log_{2^2}(5-x) = 2$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2}\cdot\log_2(5-x) = \log_2 4$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x^2 + \log_2(5-x) = \log_2 16$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x^2\cdot(5-x) = \log_2 16$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 16 = 0.$$

Por inspeção, concluímos que $x=4$ é raiz. Assim, pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos

$$\begin{array}{c|ccc|c} 4 & 1 & -5 & 0 & 16 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}$$

Donde segue que $x^3 - 5x^2 + 16 = (x-4)(x^2 - x - 4) = 0.$ Por conseguinte, a única raiz inteira é $x = 4,$ o que implica em $y = 1.$

A resposta é $4\cdot 1 = 4.$

14: 01 + 02 + 04 + 08 = 15.

Pelas Relações de Girard, segue que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{8}{4} = -2,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -\frac{7}{4},$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{-11}{4} = \frac{11}{4}$$

e

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

[01] Verdadeira. De fato, pois
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4} = \frac{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{11}{6}.$$

[02] Verdadeira. Com efeito, pois

$$\log_3 6x_1x_2x_3x_4 = \log_3 6\cdot\frac{3}{2} = \log_3 3^2 = 2.$$

[04 Verdadeira. De fato, pois

$$\text{sen}(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)\pi = \text{sen}\frac{11\pi}{4} = \text{sen}\frac{3\pi}{4} = \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

[08] Verdadeira. Com efeito, pois
$$\cos(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)\pi = \cos-\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

[16] Falsa. Na verdade, a soma das raízes é igual a $-2,$ ou seja, um número negativo.

15: [E]

Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_n$ as raízes de $P.$ Desde que tais raízes estão sobre a circunferência unitária, temos $|r_1| = |r_2| = \ldots = |r_n| = 1 \Rightarrow |r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_n| = 1.$

Por outro lado, pelas Relações de Girard, vem

$$r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_n = (-1)^n\cdot\frac{a_0}{1} = (-1)^n\cdot a_0,$$

com $a_0 \in \mathbb{R}_-^*.$

Logo, segue que $r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_n = \pm 1.$ Mas $a_0 < 0$ e, portanto, só pode ser $a_0 = -1.$

A resposta é $(-1)^{n+1}.$

16: 01 + 08 = 09.

[01] Verdadeira. De fato, temos $A(x) = x\cdot B(x) + 2x^2 - 2x + 4.$ Logo, segue que $R(x) = 2x^2 - 2x + 4$ e, portanto, vem
$$R\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}.$$

[02] Falsa. De acordo com o gráfico, as raízes de f são $-1, 1$ e $3.$ Assim, temos

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-3) = x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

Em consequência, vem $a = -3$ e $b = -1$, o que implica em $b - a = 2$.

[04] Falsa. Se a forma fatorada de $T(x)$ é $T(x) = (x-a)^2 \cdot (x+1) \cdot (x-2)$, então, pelas Relações de Girard, segue que $2a - 1 + 2 = 7$, ou seja, $a = 3$.

[08] Verdadeira. De fato, pois

$$\begin{aligned} 4x - 2 &\equiv A(x^2 - 4) + Bx(x+2) + Cx(x-2) \\ &\equiv (A + B + C)x^2 + (2B - 2C)x - 4A, \end{aligned}$$

implicando em $A + B + C = 0$.

[16] Falsa. Se $2 + i$ e $3 - 2i$ são raízes de P, então $2 - i$ e $3 + 2i$ também são. Logo, sendo o grau de P igual a 5, podemos concluir que P possui uma única raiz real.

A probabilidade de escolher uma raiz real ao acaso é, portanto, igual a $\frac{1}{5} = 20\%$.

17: [D]

Considerando que $x = \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}$, temos:

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}}\right)^3 + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}\right)^3$$

$$x^3 = \frac{50}{8} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}\right)$$

$$x^3 = \frac{50}{8} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{-343}{64}} \cdot x$$

$$x^3 = \frac{25}{4} - \frac{21}{4} \cdot x$$

$$4 \cdot x^3 + 21 \cdot x - 25 = 0$$

Sabemos que 1 é raiz da equação acima, pois a soma de seus coeficientes é nula.

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, podemos fatorar a equação.

1	4	0	21	-25
2	4	4	25	0

$(x-1) \cdot (4x^2 + 4x - 25) = 0$

O fator do segundo grau não possui raiz real, pois seu discriminante é negativo. Portanto, $x = 1$ é a única raiz real da equação. Logo:

$$x = \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}} = 1 \in [1, 3).$$

18: [E]

Sabendo que $1 + i$ é raiz da equação de coeficientes reais podemos afirmar que seu conjugado também será raiz desta equação.

Escrevendo a equação na forma fatorada, temos:

1 + i	1	-2	0	4	-4
1 - i	1	-1 + i	-2	2 - 2i	0
	1	0	-2	0	

$x^4 - 2x^3 + 4x - 4 = 0. \Leftrightarrow (x - 1 - i) \cdot (x - 1 + i) \cdot (x^2 - 2) = 0$

Resolvendo a equação abaixo teremos as outras raízes da equação.

$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Portanto, as outras raízes são irracionais e diferentes.

19: 01 + 02 + 04 + 08 = 15.

[01] Verdadeira. Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 as raízes da equação. Assim, pelas Relações de Girard, temos

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{-18}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} \cdot \frac{1}{x_4} = -\frac{1}{18}.$$

[02] Verdadeira. Por inspeção, tem-se que $x = 2$ é raiz de p. Logo, pelo dispositivo de Briot-Ruffini, vem

2	1	–5	3	15	–18
	1	–3	–3	9	0

Donde concluímos que

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)(x^3 - 3x^2 - 3x + 9) \\ &= (x-2)(x-3)(x^2 - 3) \\ &= (x-2)(x-3)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Portanto, como as raízes são $2, 3, -\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$, segue o resultado.

[04] Verdadeira. De fato, pelo Teorema de D'Alembert, podemos afirmar que $\frac{\sqrt{3}x-3}{\sqrt{3}} = x-\sqrt{3}$ divide p.

[08] Verdadeira. Com efeito, o grau do quociente da divisão de $6x^6+4x^4+2x^2+1$ por p é $6-4=2$.

[16] Falsa. Como o grau do divisor é 4, segue que o grau do resto é menor do que 4.

20: 04 + 08 + 16 = 28.

[01] Falsa, o grau do polinômio $P(x)\cdot Q(x)$ será $3+2=5$.

[02] Falsa, as raízes serão $-5, -2i$ e $2i$.

[04] Verdadeira. Um polinômio que possui somente uma raiz real e duas raízes complexas não reais é de terceiro grau.

[08] Verdadeira. Uma equação de grau n possui n raízes complexas, se a equação possui duas raízes reais e iguais, então ela tem no mínimo grau 2.

[16] Verdadeira. Se i é raiz de $P(x)$ então $-i$ também será raiz, considerando o teorema das raízes complexas.

ANOTAÇÕES