MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

EAD – ITA

AULAS 01 A 04

FRENTE: MATEMÁTICA IV

PROFESSOR(A): MARCELO MENDES

ASSUNTO: O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Resumo Teórico

Suponhamos que, para todo número inteiro positivo **n**, tenha-se uma proposição P(n). Suponhamos ainda que P(1) seja verdadeira e que, sempre que P(n) for verdadeira, P(n + 1) também o seja. Então P(n) é verdadeira para todo inteiro positivo **n**. Essa ideia é conhecida como Princípio da Indução Matemática. O verbo "induzir" significa gerar, o que realmente é percebido durante o processo.

Observe que não provamos P(n) nem P(n + 1) e, sim, mostramos como um é gerado a partir do outro.

Exemplo: Prove que, para todo inteiro positivo **k**, ocorre

$$1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

A nossa prova será por indução matemática (ou, simplesmente, indução).

Primeiramente, devemos provar para n = 1, o que é imediato:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$

Agora, a hipótese de indução: suponha que a identidade a ser provada seja válida para **n** inteiro positivo, ou seja, $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Provaremos agora para n + 1:

$$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=$$

$$\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Portanto, a identidade também é válida para n + 1. Segue, por indução, que a identidade é válida para todo inteiro positivo **k**.

Através do exemplo acima, podemos perceber que existem 3 passos importantes a serem seguidos:

1. Provar a proposição para um valor inicial (se já não for dada como verdade):
   Primeiramente, devemos provar para n = 1, o que é imediato:
   $$1=\frac{1(1+1)}{2}.$$
2. Enunciar bem a hipótese para **n** para utilizá-la posteriormente sem erros:
   Agora, a hipótese de indução: suponha que a identidade a ser provada seja válida para **n** inteiro positivo, ou seja, $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.
   Nesse caso, $P(n) = 1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.
3. Provar a hipótese para n + 1 a partir da hipótese para **n**:
   Provaremos agora para n + 1:
   $$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=$$
   $$\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Observação: A soma do lado esquerdo da identidade do exemplo pode ser apresentada como

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

Outros exemplos são:

- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$
- $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)$
- $\sum_{i=1}^{n-1} (2i+1) = 1+3+\ldots(2n-1)$
- $\sum_{\substack{i\ par \\ i>0}} \frac{1}{i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$

Exercícios de Fixação

01. Seja f : R → R uma função satisfazendo à equação funcional de Cauchy f(x + y) = f(x) + f(y), ∀x, y ∈ R. Mostre que $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$.

02. Se **x** e **y** são números reais quaisquer, então $|x+y| \le |x|+|y|$ (desigualdade triangular). Usando esse fato, prove que se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais quaisquer, então $|x_1+\ldots+x_n| \le |x_1|+\ldots+|x_n|$.

03. Prove que $2^n > n^2$ para todo n > 4.

04. Prove que o número de diagonais de um polígono de **n** lados é $\frac{n(n-3)}{2}$.

05. A seguinte prova por indução parece correta, mas, por alguma razão, temos que, para n = 6, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{2}-\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$. Onde está o erro?

"Teorema: $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\times n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}$.

Prova: Nós faremos indução sobre **n**. Para n = 1, $\frac{3}{2}-\frac{1}{n}=\frac{1}{1\times 2}$. Assumindo para **n**,

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\times n}+\frac{1}{n\times(n+1)}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}$$

Exercícios Propostos

01. Prove a desigualdade de Bernoulli: para todo número real $x > -1$ e todo número natural **n**, ocorre $(1 + x)^n \geq 1 + xn$.

02. Demonstre que $2^n > n$, para todo **n** natural.

03. Sejam **a** e **b** números reais distintos, demonstre por indução a seguinte proposição:

$$(a - b) \mid (a^n - b^n),\ \forall n \text{ natural.}$$

04. Prove que o n-ésimo número de Fibonacci é divisível por 3 se, e somente se, **n** é divisível por 4.

05. Seja (F_n) a sequência de Fibonacci definida por

$$F_1 = 1, F_2 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ \forall n \geq 1.$$

Prove que $F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2=F_nF_{n+1}$.

06. Seja F_n a sequência de Fibonacci definida por

$$F_1 = 1, F_2 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ \forall n \geq 1.$$

Mostre que $F_n<\left(\frac{7}{4}\right)^n$ para todo inteiro positivo **n**.

07. Defina $A=\begin{pmatrix}F_2 & F_1\\ F_1 & F_0\end{pmatrix}$, sendo $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \geq 0$. Mostre que $A^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$, $\forall n \geq 1$.

08. Prove que para todo número natural **n** e para todo número real $x \neq k\pi / 2^t$ $(t = 0, 1, \ldots, n;\ k \in \mathbb{Z})$ temos

$$\frac{1}{\text{sen}2x}+\frac{1}{\text{sen}4x}+\ldots+\frac{1}{\text{sen}2^n x}=\text{cotg}x-\text{cotg}2^n x.$$

09. Sabe-se que $a+\frac{1}{a}$ é um inteiro. Prove que todos os números da forma $a^n+\frac{1}{a^n}$, n = 2, 3, ..., também são inteiros.

10. Há algo errado com a seguinte demonstração. O que é?

"Teorema: Seja **a** um número positivo. Para todo inteiro positivo **n**, nós temos $a^{n-1} = 1$.

Prova: Se n = 1, $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$. E por indução, assumindo que o teorema é verdadeiro para 1, 2, ..., n, nós temos

$$a^{(n+1)-1}=a^n=\frac{a^{n-1}\cdot a^{n-1}}{a^{n-2}}=\frac{1\times 1}{1}=1,$$

onde o teorema é verdadeiro para n + 1 também."

Exercícios Extras

01. Seja **f** uma função, definida no conjunto dos números naturais, tal que $f(n + 1) = 3f(n) + 4$ para todo **n** natural.
Supondo $f(0) = 0$:
A) Calcule f(1), f(2), f(3) e f(4).
B) Conjecture uma fórmula para f(n) e prove-a por indução.

02. A sequência (a_i) é dada como segue:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

Encontre uma fórmula explícita para o n-ésimo termo dessa sequência.

03. Seja $F_1 = 1, F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \geq 1$ a sequência de Fibonacci. Prove que quaisquer dois termos consecutivos dessa sequência são sempre primos entre si.

04. Sejam **m**, **n** inteiros positivos. Mostre que

$$\frac{m!}{0!}+\frac{(m+1)!}{1!}+\ldots+\frac{(m+n)!}{n!}=\frac{(m+n+1)!}{n!(m+1)}$$

05. Se $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, mostre que:

A) $A^2 = 4A - 3I$.
B) $A^n=\frac{3^n-1}{2}A-\frac{3^n-3}{2}I$, se $n \geq 1$.

06. Prove que uma soma arbitrária de $n \geq 8$ centavos pode ser paga com moedas de 3 e 5 centavos (tendo essas moedas em quantidade suficiente).

Gabarito

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01	02	03	04	05
–	–	–	–	–

– Demonstração.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

– Demonstração.

EXERCÍCIOS EXTRAS

01	02	03	04	05	06
–	–	–	–	–	–

– Demonstração.

Resolução

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01.

I. Caso inicial:
$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2),\ \forall\ x_1, x_2 \text{ e } \mathbb{R}$

II. Hipótese de indução:
$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k)$

III. Tese:
$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}) = f[(x_1 + \ldots + x_k) + x_{k+1}] =$
$= f(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) + f(x_{k+1}) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k) + f(x_{k+1})$
c.q.d

02.

I. Caso inicial:
$|x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2|$ (ok!)

II. Hipótese:
$|x_1 + x_2 + \ldots + x_k| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k|$

III. Tese:
$|x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}| \le |x_1| + \ldots + |x_k| + |x_{k+1}|$

Veja que:
$|x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}| = |(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) + x_{k+1}| \le$

$\le |x_1 + x_2 + \ldots + x_k| + |x_{k+1}| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{k+1}|$
c.q.d.

03.

I. Caso inicial:
$n = 5$: $2^5 > 5^2 \Leftrightarrow 32 > 25$ (ok!)

II. Hipótese:
$2^k > k^2,\ k > 5$

III. Tese:
$2^{k+1} > (k + 1)^2$
$2^k > k^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > 2k^2$

Vamos provar que $2k^2 > (k + 1)^2,\ k > 4$
$2k^2 > (k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow k^2 > 2k + 1$
$\downarrow$
vamos provar por indução

• Caso inicial:
$k = 5$: $5^2 > 2 \cdot 5 + 1$ (ok!)

•• Hipótese:
$k^2 > 2k + 1$

••• Tese:
$(k + 1)^2 > 2(k + 1) + 1 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 > 2k + 2 + 1$
$\Rightarrow k^2 + 2$, verdade, pois $k > 4$.

Assim, $k^2 > 2k + 1,\ k > 4$
$k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1$
$\boxed{2k^2 > (k + 1)^2}$

Assim: $2^{k+1} > 2k^2 > (k + 1)^2$
$2^{k+1} > (k + 1)^2$
c.q.d.

04.

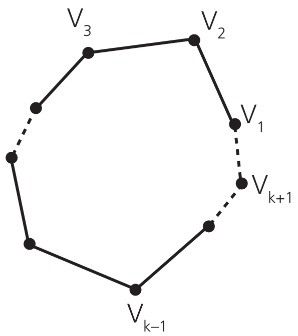
$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

I. Caso inicial:
$n = 3 \Rightarrow d_3 = \dfrac{3(3-3)}{2} = 0$ diagonal (ok!)

II. Suponha que: $d_k = \dfrac{k(k-3)}{2},\ k > 3$

III. Tese:
Vamos mostrar que $d_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k-2)}{2}$

Considere um polígono de **k** lados, mas com um dos lados apagados (representado pelos pontilhados):



Nesse lado apagado, vamos pôr dois lados, de modo que o novo polígono tenha k + 1 lados e vértices.

Veja que as $d_k = \dfrac{k(k-3)}{2}$, diagonais iniciais continuam. Agora, o vértice V_{k+1} pode ser ligado a $V_2, V_3, \ldots, V_{k-1}$, formando mais $k - 2$ diagonais. Além disso, o antigo lado $\overline{V_1V_k}$ se transformará em diagonal. Assim, o número de diagonais será:

$$d_{k+1} = d_k + (k-2) + 1$$
$$d_{k+1} = \frac{k(k-3)}{2} + (k-1) = \frac{k(k-3)}{2} + \frac{2(k-1)}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$
c.q.d.

05. Não foi feita a verificação para n = 1, mas para n = 2.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. $(1 + x)^n \ge n \cdot x + 1,\ \forall\ x > -1,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

I. Casos iniciais:
$n = 0$: $(1 + x)^0 = 1 \ge 1 + 0 \cdot x = 1$ (ok!)
$n = 1$: $(1 + x)^1 = 1 + x \ge 1 + 1 \cdot x$ (ok!)

II. Hipótese:
Suponha que a propriedade vale para n = k. Então:
$(1 + x)^k \ge 1 + k \cdot x$

III. Tese:
$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$
Prova da tese: $(1 + x)^{k+1} \geq (1 + x)^k \cdot (1 + x) \geq (1 + k \cdot x)(1 + x)$
$= 1 + x + kx + kx^2 \geq 1 + x + kx = 1 + (k + 1)x$
c. q. d.

02. $2^n > n$ (Provar)

I. Casos iniciais:
$n = 0$: $2^0 > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ (ok!)
$n = 1$: $2^1 > 1 \Leftrightarrow 2 > 1$ (ok!)

II. Hipótese:
A propriedade vale para $n = k$, ou seja: $2^k > k$.

III. Tese:
$2^{k+1} > k + 1$

Prova da tese:
$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k$

Agora, basta observar que $2k > k + 1 \Leftrightarrow k > 1$, o que é verdade.

Logo, $2^{k+1} > k + 1$ c.q.d.

03. Provar que $(a - b) \mid a^n - b^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

I. Casos iniciais:
$n = 1 \Rightarrow (a - b) \mid (a^1 - b^1) \Rightarrow (a - b)(a - b)$ (ok!)

II. Hipótese:
Suponha que a propriedade vale para $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, ou seja, $(a - b) \mid a^i - b^i$, $\forall$ **i** de 1 até **k**.

III. Tese: $(a - b) \mid (a^{k+1} - b^{k+1})$
Prova: $(a - b) \mid (a^k - b^k) \Rightarrow (a - b) \mid (a^k - b^k)\cdot(a + b) \Rightarrow$
$\Rightarrow (a - b) \mid (a^{k+1} - b^{k+1}) + a \cdot b\,(a^{k-1} - b^{k-1})$

Como $(a - b) \mid a^{k-1} - b^{k-1}$, então $(a - b) \mid a^{k+1} - b^{k+1}$ c.q.d.

04. Sequência de Fibonacci:
$F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall\ n \geq 1$.

Provar que F_n é divisível por 3 $\Leftrightarrow$ **n** é divisível por 4.

Primeiros números de Fibonacci:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

I. Casos iniciais:
$n = 4$: $F_4 = 3 \Leftrightarrow 3 \mid F_4$ (ok!)
$n = 8$: $F_8 = 21 \Leftrightarrow 3 \mid F_8$ (ok!)

II. Hipótese:
F_{4k} é divisível por 3, ou seja, $F_{4k-2} + F_{4k-1}$ é divisível por 3.

III. Tese:
$F_{4(k+1)}$ é divisível por 3.

Prova:
$F_{4(k+1)} = F_{4k+4} = F_{4k+3} + F_{4k+2} = F_{4k+1} + F_{4k+1} + F_{4k+1} + F_{4k} \Rightarrow$
$F_{4(k+1)} = F_{4k+1} + F_{4k} + 2 \cdot F_{4k+1} + F_{4k} = 3 \cdot F_{4k+1} + 2 \cdot F_{4k}$

Assim, temos:
$F_{4(k+1)} = 3 \cdot F_{4k+1} + 2\,F_{4k}$. Veja que tanto $3 \cdot F_{4k+1}$ é divisível por 3 quanto F_{4k} (hipótese).

Logo, $F_{4(k+1)}$ é divisível por 3. c.q.d.

05. $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall\ n \geq 1$.

Provar que:
$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

Primeiros F_n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

I. Casos iniciais:
$n = 1$: $F_1^2 = 1^2 = 1 \cdot 1 = F_1 \cdot F_2$ (ok!)
$n = 2$: $F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2 = 1 \cdot 2 = F_2 \cdot F_3$ (ok!)

II. Hipótese:
A propriedade vale para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, k$

$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1}$

III. Tese:
$F_1^2 + \ldots + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}$

Prova:
$$\underbrace{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2}_{F_k \cdot F_{k+1}\text{(hipótese)}} + F_{k+1}^2 + F_{k+1}^2 = F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}\underbrace{(F_k + F_{k+1})}_{F_{k+2}}$$

$= F_{k+1} \cdot F_{k+2}$
c.q.d.

06. $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ (Provar)

I. Casos iniciais:

$n = 1:\ F_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ (ok!)

$n = 2:\ F_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$ (ok!)

II. Hipótese:

$F_i < \left(\frac{7}{4}\right)^i$, $\forall\ i = 1, 2, 3, \ldots, k$

III. Tese: $F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$

Prova:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$$

$$F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{11}{4}\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{49}{16}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

Logo, $F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$ c.q.d.

07. $A=\begin{pmatrix}F_2 & F_1\\ F_1 & F_0\end{pmatrix}$ $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + Fn$, $\forall\, n \geq 0$.

Mostrar que $A^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$, $\forall\, n \geq 1$.

Casos iniciais:

$n = 1$: $A^1=\begin{pmatrix}F_2 & F_1\\ F_1 & F_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (ok!)

$n = 2$: $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_3 & F_2\\ F_2 & F_1\end{pmatrix}$ (ok!)

II. Hipótese:

$A^i=\begin{pmatrix}F_{i+1} & F_i\\ F_i & F_{i-1}\end{pmatrix}$, $\forall\, i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

III. Tese: $A^{k+1}=\begin{pmatrix}F_{k+2} & F_{k+1}\\ F_{k+1} & F_k\end{pmatrix}$

Prova:

$$A^{k+1}=A^1\cdot A^k=\begin{pmatrix}F_2 & F_3\\ F_1 & F_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}F_{k+1} & F_k\\ F_k & F_{k-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}F_{k+1} & F_k\\ F_k & F_{k-1}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{k+1}=\begin{pmatrix}F_{k+1}+F_k & F_k+F_{k-1}\\ F_{k+1} & F_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{k+2} & F_{k+1}\\ F_{k+1} & F_k\end{pmatrix}$$

c.q.d.

08. $\dfrac{1}{\text{sen}2x}+\dfrac{1}{\text{sen}4x}+\ldots+\dfrac{1}{\text{sen}2^n x}=\cot g\,x-\cot g\,2^n x,\ x\neq\dfrac{k\pi}{2^t},$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, ($t = 0, 1, 2, \ldots, n$) $k \in \mathbb{Z}$.

I. Caso inicial:

$n = 1$:

$$\frac{1}{\text{sen}2x}+\frac{\cos x}{\text{sen}x}-\frac{\cos 2x}{\text{sen}2x}\Leftrightarrow\frac{1}{2\text{sen}x\cos x}=\frac{\cos x}{\text{sen}x}-\frac{\cos 2x}{2\text{sen}x\cos x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2\cos x}=\frac{2\cos^2 x-\cos 2x}{2\cos x}\Leftrightarrow 1=2\cos^2 x-\cos^2 x+\text{sen}^2 x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=\cos^2 x+\text{sen}^2 x\Leftrightarrow 1=1\quad(\text{ok!})$$

II. Hipótese:

Vale para $i = k$, ou seja:

$$\frac{1}{\text{sen}2x}+\frac{1}{\text{sen}4x}+\ldots+\frac{1}{\text{sen}2^k\cdot x}=\cot g\,x-\cot g\,2^k\cdot x$$

III. Tese: vale para $i = k + 1$

Prove:

$$\frac{1}{\text{sen}2x}+\frac{1}{\text{sen}4x}+\ldots+\frac{1}{\text{sen}2^k\cdot x}+\frac{1}{\text{sen}^{k+1}\cdot x}=$$

$$=\cot gx-\cot g2^k\cdot x+\frac{1}{\text{sen}2^{k+1}\cdot x}=$$

$$=\cot g\,x-\frac{\cos 2^k\cdot x}{\text{sen}2^k\cdot x}+\frac{1}{\text{sen}2^{k+1}\cdot x}=$$

$$=\cot g\,x-\frac{2\cdot\cos 2^k x\cdot\cos 2^k x}{2\cdot\text{sen}2^k x\cdot\text{sen}2^k\cdot x}+\frac{1}{\text{sen}2^{k+1}x}=$$

$$=\cot gx-\frac{\cos^2 2^k x+\overbrace{\cos^2 2^k x-1}^{-\text{sen}^2\left(2^k x\right)}}{\text{sen}2^{k+1}x}$$

$$=\cot gx-\frac{\cos^2 2^k x-\text{sen}^2 2^k x}{\text{sen}2^{k+1}x}=\cot gx-\frac{\cos 2^{k+1}x}{\text{sen}2^{k+1}\cdot x}$$

$$=\cot gx-\cot g2^{k+1}x\qquad\text{c.q.d.}$$

09.

$a+\dfrac{1}{a}\in\mathbb{Z}$; $a^n+\dfrac{1}{a^n}\in\mathbb{Z}$; $n = 2, 3, \ldots$ (Provar)

I. Caso inicial:

$n = 1$: $a^1+\dfrac{1}{a^1}=a+\dfrac{1}{a}\in\mathbb{Z}$ (enunciado)

$$n=2:\ a^2+\frac{1}{a^3}=a^2+2\cdot a\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-2=\underbrace{\left(a+\frac{1}{a}\right)}_{\in\mathbb{Z}}{}^2-2\in\mathbb{Z}$$

II. Hipótese:

$a^n+\dfrac{1}{a^n}\in\mathbb{Z}$, $\forall\, n\leq k$

III. Tese:

$a^{k+1}+\dfrac{1}{a^{k+1}}\in\mathbb{Z}$

$$\left(a^k+\frac{1}{a^k}\right)\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)=a^{k+1}+\frac{1}{a^{k+1}}+a^{k+1}+\frac{1}{a^{k-1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(a^{k+1}+\frac{1}{a^{k+1}}\right)=\underbrace{\left(a^k+\frac{1}{a^k}\right)}_{\in\mathbb{Z}}\cdot\underbrace{\left(a+\frac{1}{a}\right)}_{\in\mathbb{Z}}-\underbrace{\left(a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}}\right)}_{\in\mathbb{Z}}$$

Logo, $\left(a^{k+1}+\dfrac{1}{a^{k+1}}\right)\in\mathbb{Z}$ c.q.d.

10. Veja que, na suposta demonstração, aparece um a^{n-2} e também um a^{n-1}. Portanto, nos casos iniciais, deveriam ser verificados dois casos: $n = 1$ e $n = 2$.

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: FABRÍCIO MAIA
DIG.: GEORGENES – 15/02/2021 – REV.: SARAH