SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES

SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES

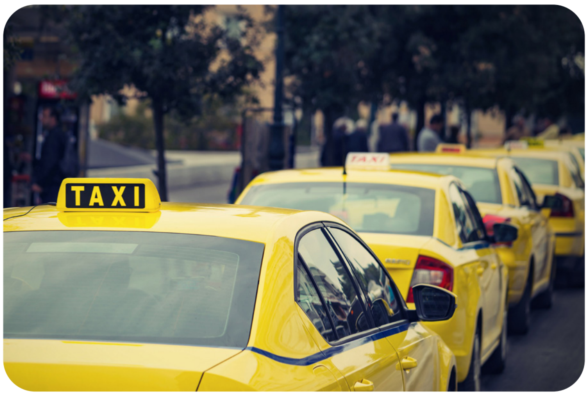
Venha aprender sobre sequências numéricas, progressões aritméticas e progressões geométricas.

Esta subárea é composta pelos módulos:

1. Progressão Aritmética
2. Progressões Geométricas

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Em alguma vez na sua vida você já deve ter viajado de táxi e, portanto, deve ter percebido que o taxista recebe o dinheiro através da distância que o viajante percorre.



Digamos que a cada quilômetro percorrido o taxista recebe R$ 5,00, dessa forma, se o viajante andar 2 km, ele pagará R$ 10,00; se o viajante andar 3 km, ele pagará R$ 15,00 e assim sucessivamente.

Portanto o preço por quilômetro percorrido é uma sequência do tipo progressão aritmética, pois a cada quilômetro percorrido a quantia aumenta R$ 5,00, formando a sequência: (5, 10, 15, 20, ..., n).

SEQUÊNCIA

Sequência é uma sucessão de elementos que estão escritos em uma determinada ordem. Os elementos também são chamados de termos da sequência.

Exemplo:

Na sequência dos números naturais positivos, temos:

1° termo: 1, 2° termo: 2, 3° termo: 3, ..., n° termo: n.

Representamos o primeiro termo como a_1, o segundo termo como a_2, o terceiro como a_3, e assim sucessivamente, sendo o termo de índice n (a_n), a sequência é representada por: (a_1, a_2, a_3,..., a_n).

A sequência dos números ímpares positivos é **infinita**: (1,3,5,7,...), na qual $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=5$, etc;

A sequência dos quatro primeiros múltiplos de cinco é **finita**: (0,5, 10, 15), na qual $a_1=0$, $a_2=5$, $a_3=10$, $a_4=15$.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Progressão Aritmética (P.A) é toda sequência numérica na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. A diferença é definida pela letra r e é chamada de razão da P.A..

Classificação da P.A

- **Constante:** nos casos em que a razão for igual a zero. Exemplo: (5,5,5,5, ...), com $r = 0$.

- **Crescente:** nos casos em que a razão for maior que zero. Exemplo: (2,4,6,8,..), com $r = 2$.

- **Decrescente:** nos casos em que a razão for menor que zero. Exemplo: (15, 10, 5, 0, -5, ...), com $r = -5$.

Propriedades da P.A

Primeira Propriedade: Numa P.A finita, a soma dos termos que estão no extremo é igual à soma dos termos que estão a mesma distância dos extremos.

Exemplo:

$$\underbrace{5 \qquad 10 \qquad 15 \qquad \overbrace{20 \qquad 25 \qquad 30 \qquad 35}^{20+35=55} \qquad 40 \qquad 45 \qquad 50}_{5+50=55}$$

Segunda propriedade da P.A: Tomando como exemplo, três termos consecutivos de uma progressão aritmética, sabe-se que o termo central é igual a média aritmética dos outros dois (antecessor e sucessor).

Exemplo:

$$\frac{20+30}{2} = 25 \qquad\qquad \frac{40+50}{2} = 45$$

$$5 \qquad 10 \qquad 15 \qquad 20 \qquad \overset{\downarrow}{25} \qquad 30 \qquad 35 \qquad 40 \qquad \overset{\downarrow}{45} \qquad 50$$

Terceira propriedade da P.A: Numa P.A finita com número de termos ímpar, o termo médio é a média aritmética de todos os termos equidistantes.

$$\underbrace{100 \quad 200 \quad \overbrace{300 \quad 400 \quad 500 \quad 600 \quad 700}^{\frac{300+700}{2}=500} \quad 800 \quad 900}_{\frac{100+900}{2}=500}$$

Termo Geral da P.A

Em uma progressão aritmética de razão r, partindo do 1° termo, para avançar um termo basta somar r ao 1° termo ($a_2 = a_1 + r$); para avançar dois termos basta somar 2r ao 1° termo ($a_3 = a_1 + 2r$); para avançar três termos basta somar 3r ao 1° termo ($a_4 = a_1 + 3r$), e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem n, denominado termo geral da P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \longrightarrow \text{Razão}$$

Termo geral

Posição do termo

1° termo da P.A

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule o 8° termo da P.A (15, 25, 35, 45, ...)

Resolução:

Sendo $a_1 = 15$, $r = 10$ e $n = 8$, temos:

$a_n = a_1 + (n-1) \,.\, r$

$a_8 = 15 + (8-1) \,.\, 10$

$a_8 = 15 + 7 \,.\, 10$

$a_8 = 15 + 70$

$a_8 = 85$

Soma dos termos de uma P.A

A fórmula da soma dos termos de uma P.A. finita é dada por um processo, que após algumas deduções chega-se a:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

No qual:

S_n = soma dos n primeiros termos

a_1 = primeiro termo

a_n = termo que ocupa a posição n

n = posição do termo

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Determine a soma dos 12 primeiros termos da sequência (4, 8, 12, 16, ...).

Resolução:

Sabendo que $a_1 = 4$, $n = 12$ e $r = 4$, assim:

$a_n = a\_1 + (n-1) . r$

$a_{12} = 4 + (12-1) . 4$

$a_{12} = 4 + 11 . 4$

$a_{12} = 4 + 44 = 48$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$S_{12} = \frac{(4 + 48).12}{2}$$

$$S_{12} = \frac{52.12}{2}$$

$S_{12} = 52 . 6 = 312$

Interpolação de uma P.A

Interpolar meios aritméticos é definir os números reais que estão no intervalo dos valores extremos de determinada sequência numérica, tornando-a uma progressão aritmética. Para isso é necessário a fórmula do termo geral.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Numa P.A, $a_1 = 20$ e $a_7 = 140$. Determine a interpolação entre a_1 e a_7.

Resolução:

Para determinar os números entre 20 e 140 para que obtenhamos uma P.A., devemos primeiramente encontrar a razão:

$a_1 = 20$

$a_7 = 140$

$n = 7$

Logo:

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_7 = a_1 + (7-1)r$

$140 = 20 + 6r$

$120 = 6r$

$r = \frac{120}{6}$

$r = 20$

Conhecido a razão, basta determinar os demais termos da sequência:

$a_2 = a_1 + r = 20 + 20 = 40$

$a_3 = a_2 + r = 40 + 20 = 60$

$a_4 = a_3 + r = 60 + 20 = 80$

$a_5 = a_4 + r = 80 + 20 = 100$

$a_6 = a_5 + r = 100 + 20 = 120$

$a_7 = a_6 + r = 120 + 20 = 140$

Portanto, a P.A obtida é: (20, 40, 60, 80, 100, 120, 140).