



∴ Módulo 03

FATORAÇÃO: AS REGRAS DA MULTIPLICAÇÃO

3.1. Os axiomas da aritmética

3.1.1. ADIÇÃO / SUBTRAÇÃO

a) $a + b = b + a$

(COMUTATIVIDADE)

Exemplo: $7 + 11 = 18 = 11 + 7$

//

b) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(ASSOCIATIVIDADE)

Exemplo: $7 + 11 + 2 = 20$

$\rightarrow (7 + 11) + 2$

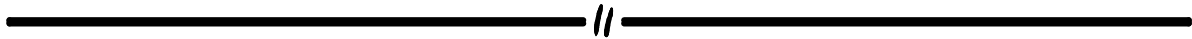
$\rightarrow 7 + (11 + 2)$



$$c) a + 0 = 0 + a = a$$

(EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NEUTRO)

Exemplo: $17 + 0 = 17$



$$d) a + (-a) = 0$$

(EXISTÊNCIA DO ELEMENTO OPÓSTO)

Exemplo: $7 + (-7) = 0$

$$\frac{\pi}{13,2} + \left(-\frac{\pi}{13,2} \right) = 0$$

$$\frac{1}{39} + \left(-\frac{1}{39} \right) = 0$$



3.1.2.

MULTIPLICAÇÃO | DIVISÃO

$$a) \quad a \cdot b = b \cdot a$$

(COMUTATIVIDADE)

Exemplo: $7 \cdot 3 = 3 \cdot 7 = 21$

$$b) \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(ASSOCIATIVIDADE)

Exemplo: $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$

$$\begin{array}{l} \nearrow (5 \cdot 2) \cdot 3 \\ \searrow 5 \cdot (2 \cdot 3) \end{array}$$

$$c) \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

(EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NEUTRO)

identidade

Exemplo: $17,2 \cdot 1 = 17,2$



$$d) a \cdot (a^{-1}) = (a^{-1}) \cdot a = 1$$

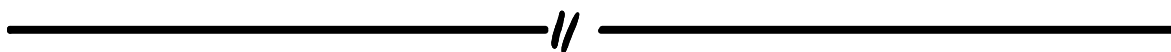
(EXISTÊNCIA DO ELEMENTO INVERSO)

Exemplo: $31 \cdot \frac{1}{31} = 1$

Todo número, exceto o zero, possui inverso.

↓
3

↓
 $\frac{1}{3}$ ou 3^{-1}



$$e) a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(DISTRIBUTIVIDADE)

Exemplo: $5 \cdot (2 + 3)$

(i) $5 \cdot \overbrace{(2 + 3)}^5 = 5 \cdot 5 = 25 \checkmark$

(ii) $5 \cdot (2 + 3) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 10 + 15 = 25 \checkmark$



Observação

Dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso!


$$a \cdot b = b \cdot a$$

(COMUTATIVIDADE)

$$\cdot \frac{5}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \quad \checkmark$$

$$\cdot 5 \div 2 = 2 \div 5 \quad \times$$

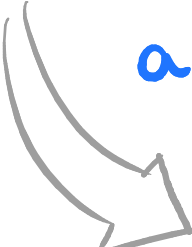
errado!



3.2 . Usando as regras do jogo

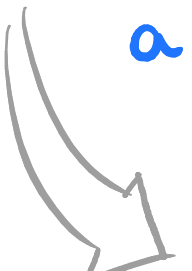
Exemplo 01

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad (3.1.2c)$$


$$\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{8}{12}$$

Exemplo 02

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \quad (3.1.2d)$$


$$7 + \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$$



Exemplo 03 : $Pq (+) \cdot (-) = (-)$?

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (3.1.2 e)$$


$$5 \cdot (-3 + 3) = 5 \cdot 0 = 0$$

$$5(-3) + 5 \cdot (3) = 0$$

$$5(-3) + 15 = 0$$

$$5(-3) + 15 - 15 = 0 - 15$$

$$\boxed{+5(-3) = -15}$$



A ordem das operações

↳ Por **convenção** assume-se que a multiplicação/divisão devem ser feitas primeiro do que adição/subtração.

Exemplos

(i) $4 \cdot 2 + 8$ $\overset{\text{leia-se}}{\text{-----}} \rightarrow$ $(4 \cdot 2) + 8 = 16$


(ii) $17 - 12 \div 2$ $\overset{\text{leia-se}}{\text{-----}} \rightarrow$ $17 - \left(\frac{12}{2}\right) = 11$



3.3.

Fatoração

Exemplo 01

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
The diagram illustrates the distributive property. On the left, 'a' is multiplied by '(b + c)'. On the right, 'a' is multiplied by 'b' and 'a' is multiplied by 'c'. Two curved arrows originate from the 'a' on the right and point to the 'a' and the '(b + c)' on the left. Small brackets are placed under 'a·b' and 'a·c' on the right side.

$$7 \cdot 72 + 56 \cdot 18$$

$$7 \cdot 18 \cdot 4 + 7 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 2$$

$$7 \cdot 18 \cdot 4 (1 + 2) = 7 \cdot 18 \cdot 4 \cdot 3$$

$$= \underline{21 \cdot 72}$$



Exemplo 02

$$6 \cdot 12 + 24 \cdot 7$$

$$3 \cdot 2 \cdot 12 + 12 \cdot 2 \cdot 7$$

$$12 \cdot 2 (3 + 7) = 24 \cdot 10 = \underline{240} \downarrow$$



Exemplo 03

$$6(x+1) + 17y(x+1)$$

$$(x+1) \cdot (6 + 17y)$$



3.3.1. Produtos Notáveis

a) $(a+b)^2$

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$$

$$= (a+b) \cdot x = x \cdot a + x \cdot b$$

$$= (a+b) \cdot a + (a+b) \cdot b$$

$$= a^2 + b \cdot a + b \cdot a + b^2$$

$$= a^2 + 2a \cdot b + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + b \cdot a + b^2$$
$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



b) $(a-b)^2$

$$(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b)$$

$$= a^2 - ab - b \cdot a + (-b) \cdot (-b)$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



c)

$$a^2 - b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$$

→

$$(a+b)(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{b \cdot a} - b^2$$
$$= a^2 - b^2$$



Exemplo

$$121^2 - 120^2 = (121 + 120) \cdot (121 - 120)$$

$$= 241 \cdot 1$$

$$= \underline{241}$$



→ Complemento

$$a^2 - b^2 = ?$$

Seja $a = p + q$ e $b = p - q$

$$\begin{cases} a = p + q \\ b = p - q \end{cases} \oplus$$

$$a + b = 2p$$

$$p = \frac{a + b}{2}$$

$$q = \frac{a - b}{2}$$

$$a^2 - b^2 = (p + q)^2 - (p - q)^2$$

$$= p^2 + 2pq + q^2 - (p^2 - 2pq + q^2)$$

$$= \cancel{p^2} + 2pq + \cancel{q^2} - \cancel{p^2} + 2pq - \cancel{q^2}$$

$$= 4pq = \cancel{4} \frac{(a+b)}{\cancel{2}} \frac{(a-b)}{\cancel{2}}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$$



Exemplo (Nível 01)

Se $x + y = 9$ e $x \cdot y = 1$, calcule o valor de $x^2 + y^2$.

$$x + y = 9$$

$$(x + y)^2 = 9^2$$

$$x^2 + 2 \cdot \overbrace{x \cdot y}^1 + y^2 = 81$$

$$x^2 + 2 + y^2 = 81$$

$$x^2 + y^2 = 79$$



Exemplo (Nível 02)

IME

02. Considere que $a \neq 0, b \neq 0$ e $(a+b) \neq 0$. Sabendo-se que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$, determine o valor de $\frac{a^2 + b^2}{2(a+b)^2}$.

a) 0,1

b) 0,3

c) 0,6

d) 0,8

e) 1,0

$$\frac{a^2 + b^2}{2(a+b)^2} = \frac{3ab}{2 \cdot 5ab} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$\frac{a \cdot a}{b \cdot a} + \frac{b \cdot b}{a \cdot b} = 3$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a \cdot b} = 3 \quad \therefore \quad a^2 + b^2 = 3 \cdot ab$$

$$\hookrightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 3ab + 2ab$$

$$(a+b)^2 = 5ab$$



$$d) (a+b)^3$$

$$(a+b)^3 = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2 \cdot a + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



$$e) (a-b)^3$$

$$(a-b)^3 = \underbrace{(a-b)(a-b)(a-b)}$$

$$= (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$$

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2 \cdot a - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$



f)

$$a^3 + b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) =$$

$$= a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{ba^2} - \cancel{cb^2} + b^3$$

$$= a^3 + b^3$$



g)

$$a^3 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) =$$

$$= a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - b^3$$

$$= a^3 - b^3$$



Exemplo

1, 2, 3, 4...

(FUVEST)

A diferença entre o cubo da soma de dois números inteiros e a soma de seus cubos pode ser:

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 - (a^3 + b^3) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 + b^3)$$

$$= \cancel{a^3} + 3a^2b + 3ab^2 + \cancel{b^3} - \cancel{a^3} - \cancel{b^3}$$

$$= 3a^2b + 3ab^2$$

$$= 3ab \cdot a + 3ab \cdot b$$

$$= 3ab(a+b)$$

$$a=1, b=1: \boxed{R=6}$$

$$a=1, b=2: \boxed{R=18}$$

$$a=2, b=2: \boxed{R=48}$$

