Módulo 03

FATORAÇÃO: AS REGRAS DA MULTIPLICAÇÃO

3.1. Os axiomas da aritmética

3.1.1. ADIÇÃO / SUBTRAÇÃO

a) $a + b = b + a$

(COMUTATIVIDADE)

Exemplo: $7 + 11 = 18 = 11 + 7$

---

b) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(ASSOCIATIVIDADE)

Exemplo: $7 + 11 + 2 = 20$ $\nearrow (7 + 11) + 2$ $\searrow 7 + (11 + 2)$

c) $a + 0 = 0 + a = a$

(EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NEUTRO)

<u>Exemplo:</u> $17 + 0 = 17$

---

d) $a + (-a) = 0$

(EXISTÊNCIA DO ELEMENTO OPOSTO)

<u>Exemplo:</u> $7 + (-7) = 0$

$$\frac{\pi}{13{,}2} + \left(-\frac{\pi}{13{,}2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{39} + \left(-\frac{1}{39}\right) = 0$$

3.1.2. MULTIPLICAÇÃO | DIVISÃO

a) $a \cdot b = b \cdot a$

(COMUTATIVIDADE)

Exemplo: $7 \cdot 3 = 3 \cdot 7 = 21$

---

b) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(ASSOCIATIVIDADE)

Exemplo: $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$

$(5 \cdot 2) \cdot 3$

$5 \cdot (2 \cdot 3)$

---

c) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NEUTRO)

identidade

Exemplo: $17{,}2 \cdot 1 = 17{,}2$

UNIVERSO NARRADO

d) $a \cdot (a^{-1}) = (a^{-1}) \cdot a = 1$

(EXISTÊNCIA DO ELEMENTO INVERSO)

Exemplo: $31 \cdot \frac{1}{31} = 1$

Todo número, exceto o zero, possui inverso.

3

$\frac{1}{3}$ ou 3^{-1}

---

e) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

(DISTRIBUTIVIDADE)

Exemplo: $5 \cdot (2 + 3)$

(i) $5 \cdot (\overbrace{2 + 3}^{5}) = 5 \cdot 5 = 25$ ✓

(ii) $5 \cdot (2 + 3) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 10 + 15 = 25$ ✓

UNIVERSO NARRADO

Observação

Dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso!

$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a}$$

(COMUTATIVIDADE)

- $\frac{5}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5$ ✓

- $\underbrace{5 \div 2 = 2 \div 5}_{\text{errado!}}$ ✗

3.2 . Usando as regras do jogo

Exemplo 01

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \qquad (3.1.2c)$$

$$\frac{2}{3} \cdot 1 \overset{\times 1}{=} \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{8}{12}$$

Exemplo 02

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \qquad (3.1.2d)$$

$$7 + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 7}{3} + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$$

UNIVERSO NARRADO

Exemplo 03 : Pq $(+)\cdot(-) = (-)$?

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad (3.1.2\ e)$$

$$5\cdot(-3+3) = 5\cdot 0 = 0$$

$$5(-3) + 5\cdot(3) = 0$$

$$5(-3) + 15 = 0$$

$$5(-3) + 15 - 15 = 0 - 15$$

$$\boxed{+5(-3) = -15}$$

A ordem das operações

↳ Por convenção assume-se que a multiplicação/divisão devem ser feitas primeiro do que adição/subtração.

Exemplos

(i) $4 \cdot 2 + 8 \xrightarrow{\text{leia-se}} (4 \cdot 2) + 8 = 16$

(ii) $17 - 12 \div 2 \xrightarrow{\text{leia-se}} 17 - \left(\frac{12}{2}\right) = 11$

3.3. Fatoração

Exemplo 01

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$7 \cdot 72 + 56 \cdot 18$$

$$7 \cdot 18 \cdot 4 + 7 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 2$$

$$7 \cdot 18 \cdot 4\,(1 + 2) = 7 \cdot 18 \cdot 4 \cdot 3$$

$$= 21 \cdot 72$$

Exemplo 02

$$6 \cdot 12 + 24 \cdot 7$$

$$3 \cdot 2 \cdot 12 + 12 \cdot 2 \cdot 7$$

$$12 \cdot 2 (3 + 7) = 24 \cdot 10 = \underline{240}$$

Exemplo 03

$$6(x+1) + 17y(x+1)$$

$$(x+1)\cdot(6+17y)$$

UNIVERSO NARRADO

3.3.1. Produtos Notáveis

a) $(a+b)^2$

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot\boxed{(a+b)}^{x}$$

$$= (a+b)\cdot x \quad = \quad x\cdot a + x\cdot b$$

$$= (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b$$

$$= a^2 + ba + ba + b^2$$

$$= a^2 + 2a\cdot b + b^2$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + b\cdot a + b^2$$

$$= a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$$

UNIVERSO NARRADO

b) $(a-b)^2$

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b)$$

$$= a^2 - ab - b\cdot a + (-b)\cdot(-b)$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

UNIVERSO NARRADO

c) $a^2 - b^2$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{b\cdot a} - b^2$$

$$= a^2 - b^2$$

UNIVERSO NARRADO

Exemplo

$$121^2 - 120^2 = (121 + 120) \cdot (121 - 120)$$

$$= 241 \cdot 1$$

$$= \boxed{241}$$

→ Complemento

$$a^2 - b^2 = \ ?$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = p+q \\ b = p-q \end{array}\right. \oplus$$

$$a+b = 2p$$

$$\boxed{p = \frac{a+b}{2}}$$

$$\boxed{q = \frac{a-b}{2}}$$

Seja $a = p+q$ e $b = p-q$

$$a^2 - b^2 = (p+q)^2 - (p-q)^2$$

$$= p^2 + 2pq + q^2 - (p^2 - 2pq + q^2)$$

$$= \cancel{p^2} + 2pq + \cancel{q^2} - \cancel{p^2} + 2pq - \cancel{q^2}$$

$$= 4pq = \cancel{4}\frac{(a+b)}{\cancel{2}}\frac{(a-b)}{\cancel{2}}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

UNIVERSO NARRADO

Exemplo (Nível 01)

Se $x+y=9$ e $x \cdot y = 1$, calcule o valor de x^2+y^2.

$$x+y = 9$$

$$(x+y)^2 = 9^2$$

$$x^2 + 2\cdot\overbrace{x\cdot y}^{1} + y^2 = 81$$

$$x^2 + 2 + y^2 = 81$$

$$\boxed{x^2+y^2 = 79}$$

UNIVERSO NARRADO

Exemplo (Nível 02)

IME

02. Considere que $a \neq 0, b \neq 0$ e $(a+b) \neq 0$. Sabendo-se que $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$, determine o valor de $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)^2}$.

a) 0,1 b) 0,3 c) 0,6 d) 0,8 e) 1,0

$$\frac{a^2+b^2}{2(a+b)^2} = \frac{3\cancel{a}\cancel{b}}{2\cdot 5\cancel{a}\cancel{b}} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$\frac{a\cdot a}{b\cdot a} + \frac{b\cdot b}{a\cdot b} = 3$$

$$\frac{a^2+b^2}{a\cdot b} = 3 \quad \therefore \quad \boxed{a^2+b^2 = 3.ab}$$

$3ab$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 3ab + 2ab$$

$$\boxed{(a+b)^2 = 5ab}$$

d) $(a+b)^3$

$$(a+b)^3 = \underbrace{(a+b)(a+b)}(a+b)$$

$$= (a^2+2ab+b^2)(a+b)$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2\cdot a + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

e) $(a-b)^3$

$$(a-b)^3 = \underbrace{(a-b)(a-b)}(a-b)$$

$$= (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$$

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2 \cdot a - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

UNIVERSO NARRADO

f) $a^3 + b^3$

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) =$

$= a^3 \cancel{- a^2b} \cancel{+ ab^2} \cancel{+ ba^2} \cancel{- ab^2} + b^3$

$= a^3 + b^3$

UNIVERSO NARRADO

g) $a^3 - b^3$

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2) =$

$= a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - b^3$

$= a^3 - b^3$

Exemplo

(FUVEST)

$\overbrace{1, 2, 3, 4 \ldots}$

A diferença entre o cubo da soma de dois números inteiros e a soma de seus cubos pode ser:

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 - (a^3 + b^3) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 + b^3)$$

$$= \cancel{a^3} + 3a^2b + 3ab^2 + \cancel{b^3} - \cancel{a^3} - \cancel{b^3}$$

$$= 3a^2b + 3ab^2$$

$$= 3ab \cdot a + 3ab \cdot b$$

$$= 3ab(a+b)$$

$\cdot\ a = 1,\ b = 1:\ \boxed{R = 6}$

$a = 1,\ b = 2:\ \boxed{R = 18}$

$a = 2,\ b = 2:\ \boxed{R = 48}$

UNIVERSO NARRADO