EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

As equações do segundo grau têm este nome porque possuem uma incógnita x elevada ao quadrado. Diferente das equações do primeiro grau, agora podemos encontrar até dois valores para x que satisfaçam a equação e estes valores são chamados de **raízes da equação**.

Uma equação de segundo grau é toda equação que pode ser escrita na forma

$a\,x^2+bx+c=0$ com a, b e c números reais e $a\neq 0$.

A condição $a\neq 0$ é necessária para que o termo que possui x^2 não seja zero, caso contrário a equação passaria a ser uma equação do primeiro grau. Os valores a, b e c são chamados de **coeficientes**.

Observações:

- O valor de a sempre é o valor que acompanha o termo x^2;
- O valor de b sempre é o valor que acompanha o termo x;
- O valor de c sempre é o valor numérico e é chamado de **termo independente**.

Quando a equação possuir os coeficientes a, b e c diferentes de zero, ela é chamada de **equação do segundo grau completa.**

Por exemplo, a equação $4x^2+3x-5=0$ é uma equação completa, pois tem todos os coeficientes diferentes de 0. Nesse exemplo:

$$a=1, b=2 \quad \text{e} \quad c=3$$

Outro exemplo de equação do segundo grau completa é $x^2-x+9=0$, neste caso, note que não estão aparecendo visivelmente o coeficiente a e b, isso significa que:

$$a=1 \quad \text{e} \quad b=-1$$

Quando a equação possuir algum dos coeficientes b ou c iguais a zero, ela é chamada de **equação do segundo grau incompleta**.

Seguem alguns exemplos:

1) $x^2+3x=0$
$a=1$, $b=3$ e $c=0$

2) $5x^2+8x=0$
$a=5$, $b=8$ e $c=0$

3) $3x^2-27=0$
$a=3$, b$=0$ e $c=27$

4) $x^2-16=0$
$a=1$, $b=0$ e $c=16$

Visto os tipos de equações de segundo grau, vamos conhecer as formas mais práticas de resolução para elas.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Equação do segundo grau com $b = 0$

Quando a equação de segundo grau possuir o coeficiente $b = 0$, podemos resolver simplesmente isolando a incógnita de um lado da igualdade e efetuar as operações necessárias para encontrar o seu valor.

Exemplos:

1) $x^2 - 49 = 0$

Isolando x^2, temos:

$$x^2 = 49$$

Como queremos apenas o valor de x, precisamos eliminar o expoente 2. Para isso vamos aplicar a operação de radiciação em ambos os lados da igualdade:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{49}$$

Pela definição de que $\sqrt{x^2} = |x|$ temos que:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{49}$$

$$|x| = \sqrt{49}$$

$$|x| = 7$$

$$x = \pm 7$$

Observe que neste caso temos duas raízes para a equação: $x = -7$ e $x = 7$.

Então, o conjunto solução dessa equação é dado por:

$$S = \{-7, 7\}$$

Você pode verificar as soluções substituindo os valores encontrados na equação.

2) $2x^2 - 32 = 0$

Isolando x^2, temos:

$$x^2 = 32$$

$$x^2 = \frac{32}{2}$$

$$x^2 = 16$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$

$$|x| = 4$$

$$x = \pm 4$$

E, assim, $S = \{-4, 4\}$.

Sempre que $b = 0$ a equação admite duas raízes opostas.

Equação do segundo grau com $c = 0$

A forma mais prática de resolver uma equação do segundo grau quando $c = 0$ é colocando a incógnita x em evidência. Desta forma, teremos um produto de 2 termos que é igual a zero. Com isto, ou o primeiro termo é zero ou o segundo termo é zero, já que quando o resultado de um produto é zero, pelo menos um dos termos deverá ser zero.

Exemplos:

1) $x^2 - 3x=0$

Colocando x em evidencia, temos que:

$$x.(x-3)= 0$$

Assim:

$$x=0 \quad \text{ou} \quad x-3=0$$

A primeira raiz já temos: $x = 0$

Para encontrar a segunda raiz, basta perceber que restou uma equação de primeiro grau a ser resolvida:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Portanto, $S=\{0,3\}$.

2) $2x^2 - 24x=0$

Neste caso, colocando $2x$ em evidência temos:

$$2x\cdot(x+12)=0$$

Assim:

$$2x=0 \quad \text{ou} \quad x+12=0$$

A primeira raiz é encontrada a partir da resolução da equação: $2x=0$

$$2x = 0$$

$$x = \frac{0}{2}$$

$$x = 0$$

A segunda raiz é encontrada a partir da resolução da equação: $x+12=0$

$$x+12=0$$

$$x=-12$$

Portanto, $S=\{-12,0\}$.

Sempre que $c = 0$ a equação admite duas raízes, sendo que uma delas vale zero.

Equação do segundo grau completa

Para resolver as equações do segundo grau que têm todos os coeficientes, usamos a famosa **Fórmula de Bhaskara**, que é da seguinte maneira:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Sendo que $\Delta = b^2 - 4.a.c$ e Δ é chamado de **delta** ou **discriminante**.

O delta pode ser calculado tanto separadamente como junto na fórmula. Se for calculado junto, basta substituir o Δ na fórmula por $b^2 - 4.a.c$. Além disso, dependendo do valor do delta, já podemos dizer quantas raízes teremos na equação:

- Quando $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais e distintas;
- Quando $\Delta = 0$, a equação possui duais raízes reais e iguais;
- Quando $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.

Seguem alguns exemplos de resolução:

1) $x^2 - 2x - 3 = 0$

Os coeficientes são: $a=1$, $b=$-2 e $c=$-3. Substituindo na fórmula de Bhaskara, temos:

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-3)}}{2.1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x' = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x'' = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

As raízes desta equação são então, -1 e 3.

Note que $\Delta > 0$, sendo assim era obrigação que tivesse duas raízes.

2) $x^2+8x+16=0$

Os coeficientes são: $a=1$, $b=8$ e $c=16$. Substituindo na fórmula de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4.1.16}}{2.1}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{-8\ \pm 0}{2}$$

$$x' = x^" = \frac{-8}{2} = -4$$

Note que $\Delta=0$, por isso existe apenas uma solução para esta equação.

a) $x^2+3x+5=0$

Os coeficientes são: $a=1$, b=-3 e $c=5$. Substituindo na fórmula de Bhaskara, temos:

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.5}}{2.1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

Neste caso não teremos solução real para a equação, pois $\Delta<0$.

Observação: a fórmula de Bhaskara também pode ser usada na resolução das equações incompletas.

RESOLUÇÃO POR SOMA E PRODUTO

Outra forma de encontrar as raízes de uma equação do segundo grau é através da soma e do produto entre suas raízes. A soma e o produto das raízes são definidos da seguinte forma:

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$P = x' . x'' = \frac{c}{a}$$

Sendo que a, b e c são os coeficientes da equação, e o x' e x'' são as raízes da equação, que devem satisfazer ao mesmo tempo as duas condições.

Exemplo:

Resolva a equação $x^2 - 7x + 12 = 0$ por soma e produto.

A soma será: $S = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{1} = 7$

O produto será: $P = \frac{c}{a} = \frac{12}{1} = 12$

Sendo assim devemos pensar em dois números que multiplicados têm como resultado 12 e somados têm como resultado 7.

Começando pelo produto, temos que:

$$12 \times 1 = 12$$

$$3 \times 4 = 12$$

$$6 \times 2 = 12$$

Agora, a soma entre cada um desses números é:

$$12 + 1 = 13$$

$$3 + 4 = 7$$

$$6 + 2 = 8$$

Observe que os valores que satisfazem as duas condições são o 3 e o 4. Logo, as raízes da equação são os valores 3 e 4.

Portanto, $S = \{3,4\}$.

Também podemos resolver por soma e produto quando $a \neq 1$. Neste caso seguimos os seguintes passos:

- Passo 1: para a soma consideramos apenas o valor de $-b$;
- Passo 2: para o produto consideramos $a \cdot c$;
- Passo 3: fazemos soma e produto normalmente e encontramos os valores das "raízes";
- Passo 4: dividimos os valores das "raízes" por a, para encontrarmos as raízes de fato da equação.

Exemplo:

Resolva a equação $2x^2 - 3x + 1 = 0$ por soma e produto.

- Passo 1: $S = -b \Rightarrow S = -(-3) = 3$
- Passo 2: $P = a \cdot c \Rightarrow P = 2 \cdot 1 = 2$
- Passo 3: pelo método da soma e produto encontramos os valores: $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.
- Passo 4: dividindo os valores encontrados no passo 3 pelo valor de a:

$$x' = \frac{1}{2} \text{ e } x'' = \frac{2}{2} = 1$$

Sendo assim, o conjunto solução da equação é $S = \{\frac{1}{2}, 1\}$.

Observação: Perceba que tanto faz se chamarmos as raízes de x_1, x_2 ou x', x''.

ANOTAÇÕES