REGRA DE CRAMER

Um processo de resolução de sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas é conhecido como Regra de Cramer, baseado no cálculo de determinantes.

Seja D o determinante da matriz formada pelos coeficientes das incógnitas: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Se $D \neq 0$, então o sistema é possível e determinado (SPD) e sua solução será:

$x = \dfrac{D_x}{D}$, onde $D_x = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ...

Resolva e classifique utilizando a regra de Cramer:

1. $\begin{cases} \overset{a}{-x} - \overset{c}{4}y = 0^{e} \\ \underset{b}{3}x + \underset{d}{2}y = 5^{f} \end{cases}$

Primeiro vamos descobrir D:

$D = \begin{vmatrix} \overset{a}{-1} & \overset{c}{-4} \\ \underset{b}{3} & \underset{d}{2} \end{vmatrix} = -2-(-12) = -2+12 = 10 \rightarrow$ SPD

Agora vamos calcular D_x e D_y e, então, x e y, respectivamente:

$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 0-(-20) = 20$

Então,

$x = \dfrac{D_x}{D} \rightarrow x = \dfrac{20}{10} \rightarrow \boxed{x = 2}$

$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5-0 = -5$

$y = \dfrac{D_y}{D} \rightarrow y = \dfrac{-5}{10} \rightarrow \boxed{y = -1/2}$

2. $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + 3z = -1 \\ 4x + y - 2z = 7 \end{cases}$

$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right|$

$D = 0 - 12 + 2 - 0 - 9 - 4$

$D = -23$

$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right|$

$D_x = 0 - 21 - 1 - 0 - 3 + 2$

$D_x = -23$

Então,

$x = \dfrac{D_x}{D} \rightarrow x = -\dfrac{23}{23} \rightarrow \boxed{x = 1}$

$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -2 & 4 & 7 \end{array}\right|$

$D_y = 6 + 12 + 14 + 4 - 63 + 4$

$D_y = -23$

Então,

$y = \dfrac{D_y}{D} \rightarrow y = \dfrac{-23}{-23} \rightarrow \boxed{y = 1}$

$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 7 & 4 & 1 \end{array}\right|$

$D_z = 0 + 4 + 2 - 0 + 3 + 14$

$D_z = 23$

Então

$z = \dfrac{D_z}{D} \rightarrow z = \dfrac{23}{-23} \rightarrow \boxed{z = -1}$

3. $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + y + 6z = 6 \end{cases}$

$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{array}\right|$

$D = 18 + 2 + 2 - 12 - 1 - 6$

$D = 3$

$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 11 & 3 & 1 & 11 & 3 \\ 6 & 1 & 6 & 6 & 1 \end{array}\right|$

$D_x = 72 + 6 + 22 - 36 - 4 - 66$

$D_x = -6$

Então

$x = \dfrac{D_x}{D} \rightarrow x = \dfrac{-6}{3} \rightarrow \boxed{x = -2}$

$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 11 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & 6 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right|$

$D_y = 66 + 8 + 12 - 44 - 6 - 24$

$D_y = 12$

Então,

$y = \dfrac{D_y}{D} \rightarrow y = \dfrac{12}{3} \rightarrow \boxed{y = 4}$

$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \end{array}\right|$

$D_z = 18 + 22 + 4 - 24 - 11 - 6$

$D_z = 3$

Então,

$z = \dfrac{D_z}{D} \rightarrow z = \dfrac{3}{3} \rightarrow \boxed{z = 1}$

4. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 4y + 5z = 3 \\ 3x + 5y + 6z = 4 \end{cases}$

$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right|$

$D = 24 + 30 + 30 - 36 - 25 - 24$

$D = -1$

$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{array}\right|$

$D_x = \cancel{48} + 40 + 45 - \cancel{48} - 50 - 36$

$D_x = -1$

Então,

$x = \dfrac{D_x}{D} \rightarrow x = \dfrac{-1}{-1} \rightarrow \boxed{x = 1}$

$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 3 & 4 \end{array}\right|$

$D_y = 18 + 30 + \cancel{24} - 27 - 20 - \cancel{24}$

$D_y = 1$

Então

$y = \dfrac{D_y}{D} \rightarrow y = \dfrac{1}{-1} \rightarrow \boxed{y = -1}$

$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right|$

$D_z = \cancel{16} + 18 + 20 - 24 - 15 - \cancel{16}$

$D_z = -1$

Então,

$z = \dfrac{D_z}{D} \rightarrow z = \dfrac{-1}{-1} \rightarrow \boxed{z = 1}$