MÓDULO 19

1. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

1.1 DEFINIÇÃO

Denomina-se progressão geométrica (P.G.) a sequência em que se obtém cada termo a partir do segundo, multiplicando-se o anterior por uma constante q chamada razão da P.G..

Exemplo:
A sequência **(3, 6, 12, 24, ...)** é uma P.G. de razão **q = 2**, pois:

$a_1 = 3$
$a_2 = 3 \times 2 = 6$
$a_3 = 6 \times 2 = 12$
$a_4 = 12 \times 2 = 24$
$\vdots$

1.2 RAZÃO DE UMA PG

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \forall n, n \in IN^*.$$

1.3. CLASSIFICAÇÃO

As progressões geométricas podem ser classificadas de acordo com os valores do primeiro termo a_1 e da razão **q**:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 > 0 \text{ e } q > 1 \\ \text{ou} \\ a_1 < 0 \text{ e } 0 < q < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{P.G. crescente}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 < 0 \text{ e } q > 1 \\ \text{ou} \\ a_1 > 0 \text{ e } 0 < q < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{P.G. decrescente}$$

$a_1 \neq 0$ e $q < 0 \rightarrow$ P.G. alternante
$a_1 \neq 0$ e $q = 1 \rightarrow$ P.G. constante
$a_1 \neq 0$ e $q = 0 \rightarrow$ P.G. estacionária

2. TERMO GERAL DE UMA PG

$$\left(a_1, \underbrace{a_1q}_{a_2}, \underbrace{a_1q^2}_{a_3}, \underbrace{a_1q^3}_{a_4}, \underbrace{a_1q^4}_{a_5}, \ldots, \underbrace{?}_{a_n}, \ldots\right)$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_n = a_p q^{n-p}$$

3. MEIOS GEOMÉTRICOS

Numa P.G. finita **($a_1, a_2, a_3, \ldots, n_{a-1}, a_n$)**, os termos **$a_2, a_3, \ldots, n_{a-1}$** são chamados de **"meios geométricos da P.G."**.

Exemplo:

Na **P.G. (2, 6, 18, 54, 162)**, temos que **6, 18** e **54** são os meios geométricos da P.G..

4. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Interpolar **(ou inserir) k** meios geométricos entre dois números **a** e **b**, significa determinar a P.G. de **k + 2** termos, com o primeiro termo igual a **a** e o último igual a **b**.

5. PROPRIEDADES DE UMA PG

1ª Propriedade

Numa P.G. finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

$$a_1 a_n = a_2 . a_{n-1} = a_3 . a_{n-3} = \ldots$$

Exemplo:
(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256)

8.32 = 256

4.64 = 256

2 . 128 = 256

1 . 256 = 256

2ª Propriedade

A sequência **(a, b, c)**, com **a ≠ 0**, é P.G. se, e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos, isto é:

$$b^2 = ac$$

Exemplos:
a) Note que na P.G. (3, 6, 12) temos: $6^2 = 3 . 12$.
b) Para que a sequência (2, 8, x) seja P.G., devemos ter: $8^2 = 2x \Rightarrow x = 32$.

6. REPRESENTAÇÃO GENÉRICA DE UMA PG

a) P.G. de três termos: (x, xq, xq^2), em que a razão é $q; \left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$, razão q se $q \neq 0$.

b) P.G. de quatro termos: (x, xq, xq^2, xq^3), razão $q; \left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$, razão q^2, se $q \neq 0$.

7. Soma dos n Primeiros Termos de uma PG

Para q ≠ 1.

$$S_n = a_1(1 - q_n) / 1 - q$$

8. Soma dos Infinitos Termos de uma PG

Para razão q, $-1 < q < 1$, é dado por:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Existe o limite da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão q se, e somente se, $-1<q<1$.

9. Produto dos n Primeiros Termos de uma PG

Sendo $\mathbf{P_n}$ o produto dos **n** primeiros termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., ...)$ de razão **q**, temos:

$$P_n = a_1^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

10. Exercícios

1)
Qual a razão da progressão geométrica, na sequência 1,3,9,27,81.
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

2)
Qual a classificação da progressão geométrica, na sequência -1,-2,-4,-8,-16,-32.
a) crescente
b) decrescente
c) constante
d) alternante
e) estacionária

3)
Qual a classificação da progressão geométrica, na sequência -1,2,-4,8,-16,32.
a) crescente
b) decrescente
c) constante
d) alternante
e) estacionária

4) (EEAR)
Sejam as sequências $S_1 = \{1, 5, 25, 125, ...\}\ e\ S_2 = \{4, 7, 10, 13, ...\}$. A razão entre o 6º termo de S_1 e o 8º de S_2 é:
a) 150
b) 125
c) 100
d) 75

5) (EEAR – 2019)
O 6º termo da sequência 2, 8, 32, 128, ... é um número cuja soma dos algarismos é:
a) 10
b) 12
c) 14
d) 16

6) (EEAR)
O 4º termo de uma P.G. é – 80, e o 6º termo é – 320. Se essa P.G. é alternante, então sua razão é:
a) 4
b) 3
c) -1
d) -2

7) (EEAR)
Quatro números naturais formam uma P.G. crescente. Se a soma dos dois primeiros números é 12, e a dos dois últimos é 300, a razão da P.G. é:
a) 7
b) 5
c) 4
d) 2

8) (EEAR – 2017)
Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...)$ uma PG de termos não nulos. Se $2(a_2 + a_4) = a_3 + a_5$, pode-se afirmar corretamente que a razão dessa PG é:
a) 4
b) 2
c) 1/2
d) $\sqrt{2}$

9) (EEAR – 2018)
Seja a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ de razão $q = 2$. Se $a_1 + a_5 = 272$, o valor de a_1 é:
a) 8
b) 6
c) 18
d) 16

10) (EEAR)
Se a sequência $(x, 3x + 2, 10x + 12)$ é uma P.G. de termos não nulos, então x² é:
a) 1
b) 4
c) 9
d) 16

11) (EEAR)
A soma dos n primeiros termos da P.G. (1, - 2, 4, - 8, ...) é – 85. Logo, n é:
a) 8
b) 10
c) 12
d) 14

12) (EEAR – 2019)

Dada a equação $20x + 10x + 5x + \cdots = 5$, em que o primeiro membro representa a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, o valor de 1/x é:

a) 12
b) 10
c) 8
d) 5

11. GABARITO

1) C
2) B
3) D
4) B
5) C
6) D
7) B
8) B
9) D
10) B
11) A
12) C

12. ANOTAÇÕES